وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الرابع: العلاقات في المثلث

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

يوزع مجانًا ولا يباع

١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

الرياضيات ـ الصف الأول الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Geometry

www.obeikaneducation.com

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم وصفحة واحدة لكلٍّ من التدريبات الأخرى لكل درسٍ من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس حسب مستوى كلٍّ منهم؛ سواء أكان ذلك داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.
وهذه التدريبات هي:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على الأفكار الرئيسة في الدرس وتقدمها بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان أحيانًا عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات المهارات

تركِّز هذه التدريبات على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس؛ فتقدم تدريبات إضافية على مهارات الدرس وبعض المسائل التي تركز على تلك المهارات. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط ودون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها؛ لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع أو تدعيم مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلُّم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

الفهرس

4-1 تدريبات إعادة التعليم

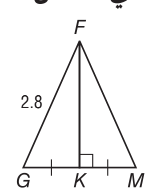
المنصّفات في المثلث

الأعمدة المنصّفة:

العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث هو مستقيم، أو قطعة مستقيمة، أو مستوى يقطع ضلع المثلث عند منتصفه، ويكون عموديًّا عليه، وهذه بعض النظريات المتعلقة بالأعمدة المنصّفة.

نظريّة العمود المنصّف	كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعةٍ مستقيمةٍ، تكون على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة.
عكس نظريّة العمود المنصّف	كلّ نقطةٍ تبعد بُعدين متساويين عن طرفَي قطعةٍ مستقيمةٍ تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.
نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث	تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلثٍ في نقطةٍ تبعد أبعادًا متساوية عن رؤوس المثلث، وتُسمّى **مركز الدائرة الخارجية للمثلث**.

مثال 1 أوجد طول $\overline{FM}$ في الشكل أدناه.

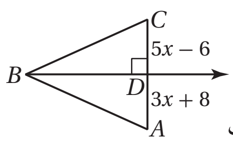


$\overline{FK}$ عمود منصف للضلع $\overline{GM}$

إذن، $FG = FM$

$2.8 = FM$

مثال 2 إذا كان $\overrightarrow{BD}$ عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{AC}$ ، فأوجد قيمة x.



$AD = DC$ نظرية العمود المنصف

$3x + 8 = 5x - 6$ عوّض

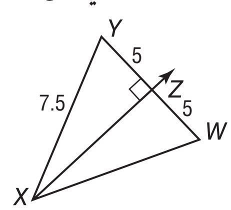
$14 = 2x$ حل المعادلة

$7 = x$

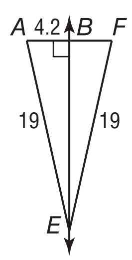
تمارين

أوجد القياس المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

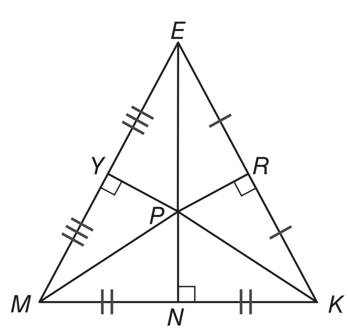
1) XW



2) BF



النقطة P مركز الدائرة الخارجية لِـ ΔEMK ، اكتب جميع القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المستقيمة المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



3) $\overline{MY}$

4) $\overline{KP}$

5) $\overline{MN}$

6) $\overline{ER}$

4-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

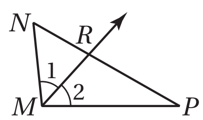
المنصفات في المثلث

منصفات الزوايا:

منصف الزاوية هو قطعة مستقيمة، أو نصف مستقيم، أو مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين، وهذه بعض خصائص منصفات الزوايا:

نظريّة منصّف الزاوية	كلّ نقطة واقعة على منصّف زاوية، تكون على بُعدين متساويين عن ضلعَيها.
عكس نظرية منصّف الزاوية	كلّ نقطة واقعة داخل زاوية، وتبعد بُعدين متساويين عن ضلعَيها، تقع على منصّف تلك الزاوية.
نظريّة مركز الدائرة الداخليّة للمثلث	تلتقي منصّفات زوايا المثلث في نقطة واحدة، تبعد أبعادًا متساوية عن أضلاع ذلك المثلث، وتُسمَّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

مثال 1 $\overrightarrow{MR}$ **ينصّف** $\angle NMP$ **، إذا كان:** $m\angle 1 = 5x + 8$ **،**
وَ $m\angle 2 = 8x - 16$ **، فأوجد قيمة** x**.**

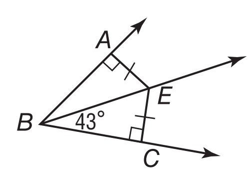


$m\angle 1 = m\angle 2$	تعريف منصف الزاوية
$5x + 8 = 8x - 16$	عوّض
$24 = 3x$	اجمع $16-5x$ للطرفين
$8 = x$	اقسم الطرفين على 3

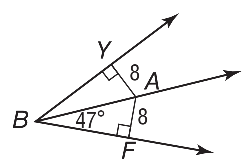
تمارين

أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:

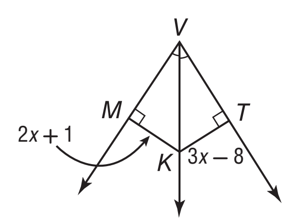
1) $\angle ABE$



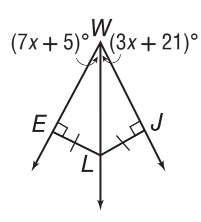
2) $\angle YBA$



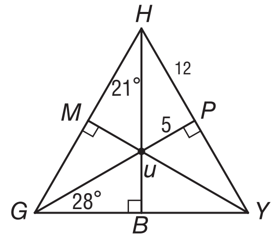
3) MK



4) $\angle EWL$



النقطة U **هي مركز الدائرة الداخلية لـ** ΔGHY **، أوجد كلّ قياسٍ مما يأتي:**



5) MU

6) $m\angle UGM$

7) $m\angle PHU$

8) HU

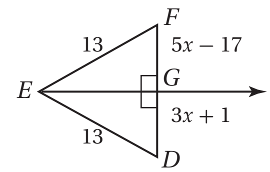
الاسم ________________ التاريخ ________

4-1 تدريبات المهارات

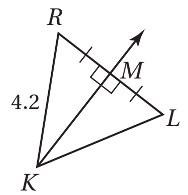
المنصّفات في المثلث

أوجد كلَّ قياس ممَّا يأتي:

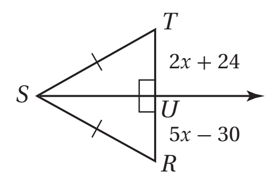
1) FG



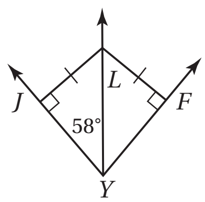
2) KL



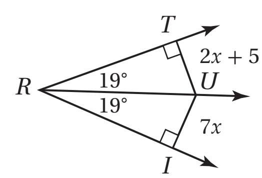
3) TU



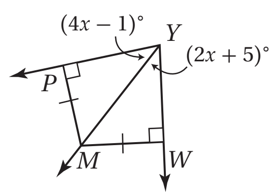
4) $m\angle LYF$



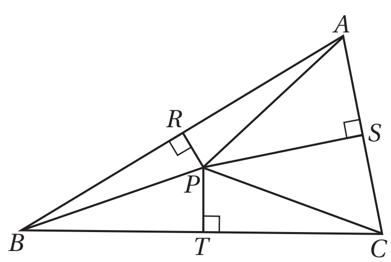
5) IU



6) $m\angle MYW$



النقطة P مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle ABC$ ، اكتب جميع القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المستقيمة المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



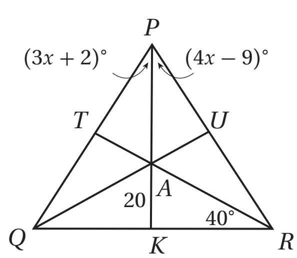
7) $\overline{BR}$

8) $\overline{CS}$

9) $\overline{BP}$

النقطة A مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle PQR$

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



10) $m\angle ARU$

11) AU

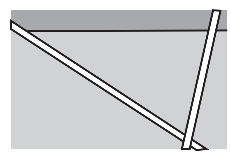
12) $m\angle QPK$

4-1 تدريبات حلّ المسألة

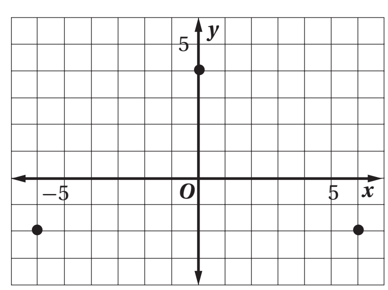
المنصّفات في المثلث

1) آبارٌ: لدى نادر قطعة أرض مثلثة الشكل، زرع على محيطها أشجار، إذا أراد نادر أن يحفر بئرًا في المزرعة، بحيث تكون متساوية البعد عن أضلاع قطعة الأرض، فأين يحفر هذه البئر؟

2) نزهة: ذهب مروان وباسم في نزهة إلى حديقة عامّة مثلثة الشكل، وأحد أضلاعها محاذ لرصيف، والضلعان الآخران محاذيان لشارعين عامّين كما في الشكل أدناه. إذا أراد الصديقان أن يجلسا في موقع يكون على أبعاد متساوية من الرصيف والشارعين. فعند أيِّ نقطة في الحديقة يقع هذا الموقع؟



3) منازل: لدى محمود ثلاثة أبناء. والشكل أدناه يبيّن مواقع منازل الأبناء الثلاثة على خريطة في مستوى إحداثيّ. ويرغب محمود في الانتقال إلى منزل يكون على أبعاد متساوية من منازل أبنائه الثلاثة. ما إحداثيّات الموقع الذي يبعُد البُعد نفسه عن منازل الأبناء الثلاثة؟



4) بيوت: نظر تركي إلى خريطة الحيّ، فلاحظ أن بيته وبيت صديقيه مساعد وخالد تكوّن رؤوس مثلث. وعندما وضع الخريطة على شبكة إحداثيّة، كان بيت تركي عند النقطة $(1, 3)$، وبيت مساعد عند النقطة $(-1, 5)$، وبيت خالد عند النقطة $(4, 5)$، فأين يمكن أن يلتقي الأصدقاء الثلاثة، إذا غادر كلّ واحد منهم بيته في اللحظة نفسها، وسار على الطريق الأقصر من بيته إلى الضلع المقابل؟

5) ملاعب: رسم الطلاب مثلثًا في ملعب المدرسة.

a) حدّد أحد الطلاب مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فوجده هو مركز دائرته الخارجية. فما نوع هذا المثلث؟

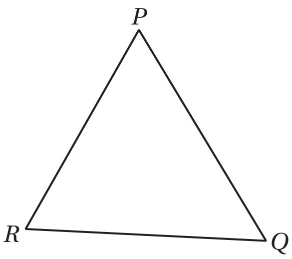
b) إذا عدّل طالب آخر شكل المثلث، بحيث وقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث خارجه، وبقي مركز دائرته الداخلية داخله، فما نوع المثلث الناتج عن هذا التعديل؟

4-1 التدريبات الإثرائيّة

الدائرة الداخليّة والدائرة الخارجية للمثلث

تتقاطع منصّفات زوايا المثلث في نقطةٍ واحدةٍ تُسمّى مركز الدائرة الداخليّة للمثلث، وهي مركز الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث الثلاثة، وتقع هذه الدائرة داخل المثلث، ما عدا النقاط الثلاث التي تمس الأضلاع عندها، ويقال إن هذه الدائرة محاطة بالمثلث.

اتبع الخطوات الآتية لرسم الدائرة الداخلية لـ ΔPQR مستعملًا فرجارًا ومسطرةً:



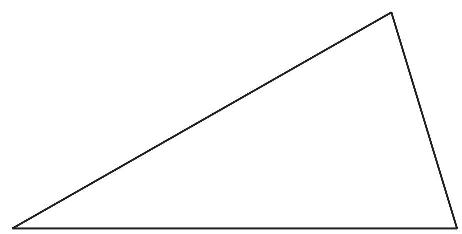
الخطوة 1: أنشئ منصِّفَي $\angle R$ و $\angle Q$، وسمّ نقطة تقاطعهما A.

الخطوة 2: أنشئ من A قطعة مستقيمة عموديّة على $\overline{RQ}$، وسمّ نقطة تقاطعها مع $\overline{RQ}$ النقطة B.

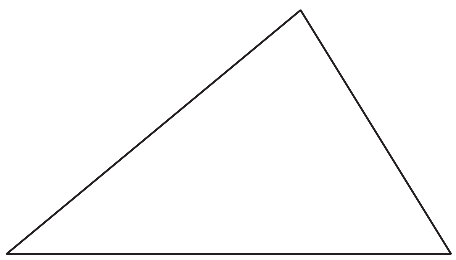
الخطوة 3: استعمل الفرجار لرسم الدائرة التي مركزها A، وطول نصف قطرها يساوي AB .

ارسم الدائرة الداخليّة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

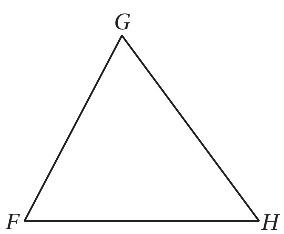
1)



2)



تتقاطع الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلثٍ في نقطةٍ واحدةٍ أيضًا تُسمّى مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث، وتقع هذه الدائرة خارج المثلث باستثناء رؤوس المثلث.



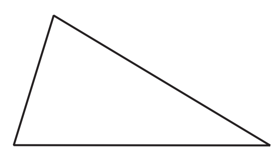
3) اتّبع الخطوات الآتية لرسم الدائرة الخارجية لـ ΔFGH مستعملًا فرجارًا ومسطرةً.

الخطوة 1: ارسم العمودين المنصّفين للضلعين $\overline{FG}$ و $\overline{FH}$، وسمّ نقطة تقاطعهما A.

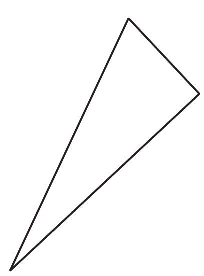
الخطوة 2: ارسم الدائرة التي مركزها A، وطول نصف قطرها يساوي AF .

ارسم الدائرة الخارجية للمثلث في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

4)



5)



الاسم ____________________ التاريخ __________

4-2 تدريبات إعادة التعليم

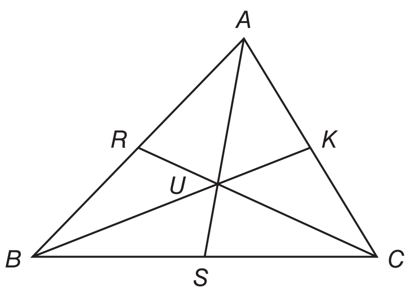
القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

القطع المتوسطة:

القطعة المتوسطة في مثلثٍ هي قطعة مستقيمة تصل أحد رؤوس المثلث بمنتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

نظرية مركز المثلث	تلتقي القطع المتوسطة لمثلث عند **مركز المثلث**، وهو نقطة على القطعة المتوسطة تبعد عن كل رأس مسافةً تساوي ثُلثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

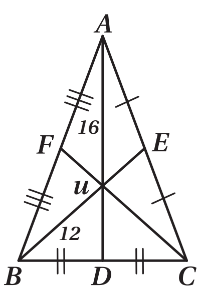
مثال **إذا كانت النقطة U مركز ΔABC ، و $BU = 16$ ، فأوجد كلًّا من UK , BK.**



$BU = \frac{2}{3} BK$	نظرية مركز المثلث
$16 = \frac{2}{3} BK$	$BU = 16$
$24 = BK$	اضرب الطرفين بـ $\frac{3}{2}$
$BK = BU + UK$	مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$24 = 16 + UK$	عوّض
$8 = UK$	اطرح 16 من الطرفين

تمارين

في ΔABC : **$AU = 16$, $BU = 12$, $CF = 18$** ، أوجد كلًّا من القياسات التالية:

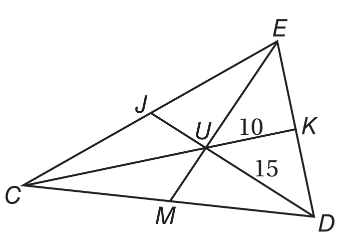


1) UD **2)** EU

3) CU **4)** AD

5) UF **6)** BE

إذا كانت النقطة U مركز ΔCDE ، وكان: $UK = 10$, $EM = 21$, $UD = 15$ ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



7) CU **8)** MU

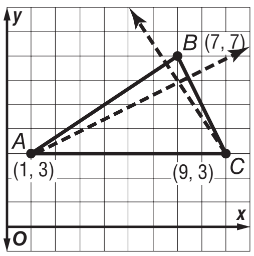
9) CK **10)** JU

11) EU **12)** JD

4-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)
القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

ارتفاعات المثلث:

ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلثٍ ارتفاعات ثلاثة، تتلاقَى المستقيمات التي تحويها في نقطة واحدة تسمى ملتقَى **ارتفاعات المثلث**.



مثال 1 **إذا كانت رؤوس ΔABC $A(1,3)$, $B(7,7)$, $C(9,3)$ ، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.**

الخطوة 1 : مثِّل ΔABC بيانيًّا، ولإيجاد ملتقى ارتفاعاته، أوجد نقطة تقاطع اثنين من ارتفاعات المثلث الثلاثة.

الخطوة 2 : أوجد معادلة الارتفاع من A إلى $\overline{BC}$:

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $-2 = \frac{4}{-2} = \frac{7-3}{7-9}$

إذن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{BC}$ يساوي $\frac{1}{2}$ ومعادلته هي:

$y - y_1 = m(x-x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y-3 = \frac{1}{2}(x-1)$ $m = \frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (1, 3)$

$y - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ خاصية التوزيع

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ اجمع 3 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{7-3}{7-1}$

إذن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $\frac{-3}{2}$ ومعادلته هي:

$y - y_1 = m(x-x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 3 = \frac{-3}{2}(x-9)$ $m = \frac{-3}{2}, (x_1, y_1) = (9, 3)$

$y - 3 = \frac{-3}{2}x + \frac{27}{2}$ خاصية التوزيع

$y = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2}$ اجمع 3 إلى الطرفين

الخطوة 3 : حُلَّ النظام الناتج $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2} \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات

$\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2}$ تعويض قيمة y من المعادلة الأولى في الثانية

$\frac{5}{2} = -2x + \frac{33}{2}$ اطرح $\frac{1}{2}x$ من الطرفين

$-14 = -2x$ اطرح $\frac{33}{2}$ من الطرفين

$7 = x$ اقسم الطرفين على -2

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(7) + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

إذن ملتقى ارتفاعات ΔABC هو $(7, 6)$

تمارين

هندسة إحداثية : أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

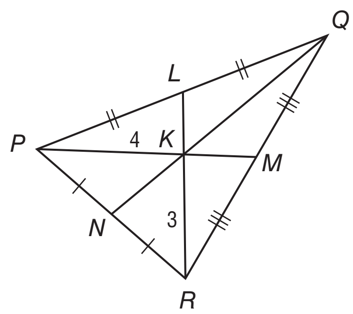
1) ΔJHI الذي رؤوسه: $J(1, 0)$, $H(6, 0)$, $I(3, 6)$.

2) ΔSTU الذي رؤوسه: $S(4, 6)$, $T(8, -1)$, $U(10, 2)$.

4-2 تدريبات المهارات

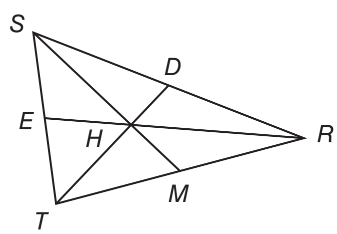
القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

إذا كان: $PK = 4$,$RK = 3$,$NQ = 6$ في ΔPQR المجاور، فأوجد كلَّ طولٍ ممَّا يأتي:



1) KM
2) KQ
3) LK
4) LR
5) NK
6) PM

إذا كانت H مركز ΔSTR، وكان: $DH = 4$,$EH = 6$,$SM = 24$ ، فأوجد كلَّ طولٍ ممَّا يأتي:



7) SH
8) HM
9) TH
10) HR
11) TD
12) ER

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات مركز كلٍّ من المثلثين الآتيين:

13) ΔXYZ الذي رؤوسه: $X(-3, 15)$, $Y(1, 5)$, $Z(5, 10)$.

14) ΔSTR الذي رؤوسه: $S(2, 5)$, $T(6, 5)$, $R(10, 0)$.

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

15) ΔLMN الذي رؤوسه: $L(8, 0)$, $M(10, 8)$, $N(14, 0)$.

16) ΔDEF الذي رؤوسه: $D(-9, 9)$, $E(-6, 6)$, $F(0, 6)$.

4-2 تدريبات حلّ المسألة

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

1) توازن: وضعت هدى قطعةً مسطّحةً مثلثة الشكل على طرف أصبعها فلم تسقط، ففي أي نقطة من المثلث وضعت هدى أصبعها؟

2) أراد أحمد أن يصمِّم أشرطة زينةٍ تُعلَّق في السقف عبارة عن خيط في نهايته مثلث، بحيث يكون المثلث في وضع أفقيٍّ عند تثبيت الخيط في السقف.

a) من أي نقطةٍ في المثلث سيمرّ الخيط؟

b) إذا أراد أن يكون الشكل أكثر جمالًا، وأن يُعلق المثلث في نقطةٍ تكون متساوية البعد عن رؤوسه وعن أضلاعه، فما نوع المثلث الذي يختاره للتصميم؟ ولماذا؟

3) قص: أراد سعيد أن يقصَّ ورقةً على شكل مثلث، بشرط أن تكون حافة الورقة أحد أضلاع المثلث، والنقطة C مركزه، كما هو مبيَّن بالشكل.

هل يمكنه تحديد المثلث وقصُّه بهذه المعطيات؟ إذا كانت الإجابة نعم، فوضِّح الخطوات التي يقوم بها سعيد لتحديد المثلث.

4) وضع مدرس الرياضيات 3 مجموعات من المثلثات: مجموعة مثلثات حادة الزوايا، ومجموعة مثلثات منفرجة الزاوية، ومجموعة مثلثات قائمة الزاوية، ثم طلب إلى كلِّ طالب اختيار مثلث، وإيجاد نقطة التقاء الارتفاعات فيه، إذا أراد خالد أن يختار مثلثًا، بحيث يحدد النقطة من دون الحاجة إلى مسطرة أو أي أداة رسم، فما نوع المثلث الذي يختاره؟ ولماذا؟

5) ميادين: صمّم مهندس معماري ميدانًا عامًّا مثلث الشكل، ولأغراضٍ رياضيَّةٍ أعطى المهندس اهتمامًا زائدًا لموقع مركز الميدان C ، ولمركز الدائرة التي تمرّ برؤوسه O.

a) إذا أراد المهندس أن يتحقق الشرط: بأن تكون C هي نفسها O، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث الذي يمثِّل الميدان في هذه الحالة؟

b) إذا أراد المهندس أن تكون النقطة C داخل الميدان، والنقطة O خارجه، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث الذي يمثل الميدان في هذه الحالة؟

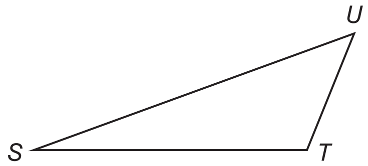
c) إذا أراد المهندس أن تكون النقطة C خارج الميدان، والنقطة O داخله، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث في هذه الحالة؟

الاسم ______________________ التاريخ ______________

4-2 التدريبات الإثرائية

تعيين مركز المثلث وملتقى ارتفاعاته

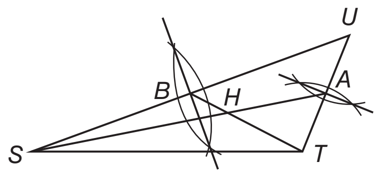
تلتقي القطع المتوسطة للمثلث في نقطة واحدة تسمّى مركز المثلث، ويمكن تعيين مركز أي مثلث باستعمال الفرجار والمسطرة غير المدرجة.



اتبع الخطوات الآتية لتعيين مركز ΔSTU ، مستعملًا فرجارًا ومسطرةً غير مدرجةٍ:

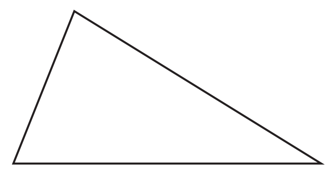
الخطوة 1 : عيّن نقطَتَي منتصفَي الضلعين $\overline{TU}, \overline{SU}$ ، وسمّ نقطتَي منتصفَيهما A, B على الترتيب:

الخطوة 2 : ارسم القطعتين $\overline{SA}$, $\overline{TB}$ ، وسمّ نقطة تقاطعهما H ، ستكون H مركز ΔSTU .

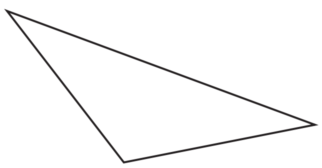


عيّن مركز كلٍّ من المثلثين الآتيين:

1)

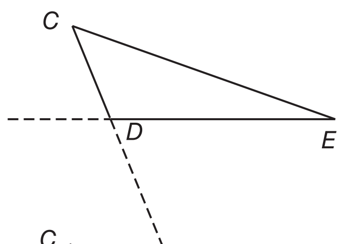


2)



تلتقي ارتفاعات المثلث الثلاثة في نقطة واحدة تسمّى مُلتَقَى الارتفاعات، ويمكن تعيين ملتقى الارتفاعات باستعمال الفرجار والمسطرة.

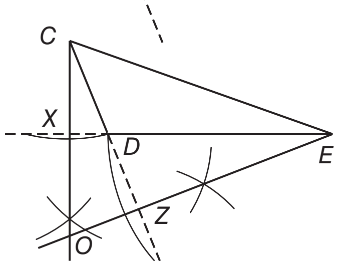
اتبع الخطوات الآتية لتعيين مُلتقى ارتفاعات ΔCDE مستعملًا فرجارًا ومسطرة غير مدرجة:



الخطوة 1 : مُدّ الضلعين $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ من جهة النقطة D كما في الشكل المجاور؛ لتتمكن من رسم العمودين من الرأسين E, C .

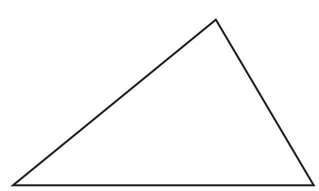
الخطوة 2 : أنشئ من الرأس C عمودًا على المستقيم DE ، وسمِّ نقطة تقاطعهما X ، وبالمثل أنشئ من الرأس E عمودًا على المستقيم CD ، وسمّ نقطة تقاطعهما Z ، لاحظ أن كلًّا من Z , X واقعتان خارج ΔCDE .

الخطوة 3 : سمّ نقطة تقاطع العمودين ($\overleftrightarrow{CX}$, $\overleftrightarrow{EZ}$) النقطة O ، وهي ملتقى ارتفاعات ΔCDE .

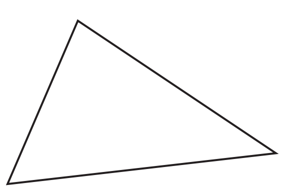


عيّن ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

3)



4)



الاسم ________________ التاريخ ________

4-3 تدريبات إعادة التعليم

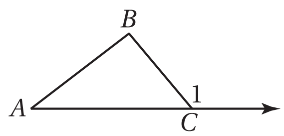
المتباينات في المثلث

متباينات الزوايا :

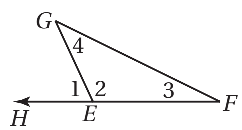
يمكنك استعمال خصائص المتباينات التي تتضمّن التعدّي والجمع والطرح، مع قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة، بالإضافة إلى خاصيّة المقارنة للمتباينة التي نصُّها:

لكلِّ عددين حقيقيين a وb ، يكون: $a < b$ أو $a = b$ أو $b > a$.

ويمكنك استعمال نظرية الزاوية الخارجية لإثبات المتباينة الآتية:

نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة	قياس أيّ زاوية خارجيّة لمثلث أكبر من قياس أيٍّ من زاويتَي المثلث الداخليتين البعيدتين عنها.	 $m\angle 1 > m\angle A$ $m\angle 1 > m\angle B$

مثال **استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقَّمة التي قياس كلٍّ منها أصغر من $m\angle 1$.**

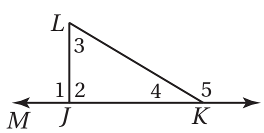


قياس الزاوية الخارجية أكبر من قياس أيٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها،

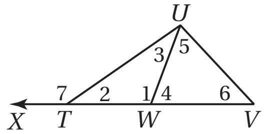
لذا فإن: $m\angle 4 < m\angle 1, m\angle 3 < m\angle 1$، حيث $\angle 4$ ،$\angle 3$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان.

تمارين

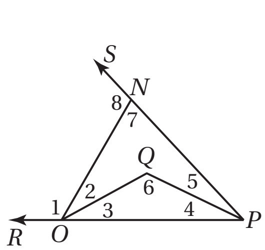
استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة ؛ لكتابة جميع الزوايا المرقَّمة التي تحقّق الشرط المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:



التمرينان 1, 2



التمارين 8–3



التمرينان 10 ,9

1) قياسها أصغر من $m\angle 1$.

2) قياسها أكبر من $m\angle 3$.

3) قياسها أصغر من $m\angle 1$.

4) قياسها أكبر من $m\angle 1$.

5) قياسها أصغر من $m\angle 7$.

6) قياسها أكبر من $m\angle 2$.

7) قياسها أكبر من $m\angle 5$.

8) قياسها أصغر من $m\angle 4$

9) قياسها أصغر من $m\angle 1$.

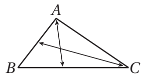
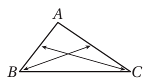
10) قياسها أكبر من $m\angle 4$.

4-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

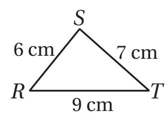
المتباينات في المثلث

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه:

عندما تكون أضلاع المثلث غير متطابقة، تتحقّق العلاقات الآتية بين أضلاعه وزواياه:

متباينة ضلع – زاوية	إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.	 إذا كان $AC > AB$ ، فإنّ $m\angle B > m\angle C$.
متباينة زاوية – ضلع	إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.	 إذا كان $m\angle A > m\angle C$ ، فإنّ $BC > AB$.

مثال 1 اكتب زوايا ΔRST مرتّبة وفقًا لقياساتها من الأصغر إلى الأكبر.

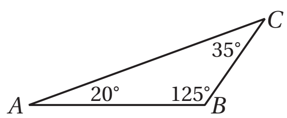


الأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{SR}, \overline{ST}, \overline{RT}$

والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle T, \angle R, \angle S$ على الترتيب؛

لذا فالزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر على النحو الآتي: $\angle T, \angle R, \angle S$

مثال 2 اكتب أضلاع ΔABC مرتّبةً وفقًا لأطوالها من الأقصر إلى الأطول.



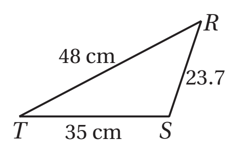
الزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$

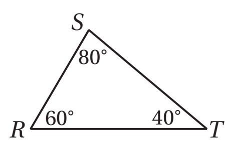
والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{CB}, \overline{AB}, \overline{AC}$ على الترتيب؛

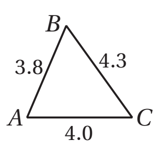
لذا فالأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول على النحو الآتي: $\overline{CB}, \overline{AB}, \overline{AC}$

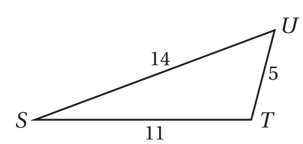
تمارين

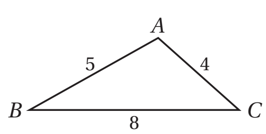
اكتب زوايا كلِّ مثلث وأضلاعه مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر فيما يأتي:

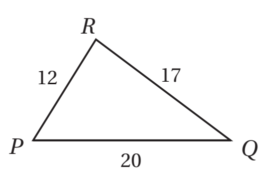
(1


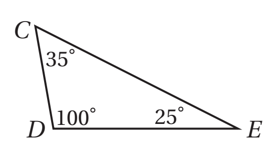
(2


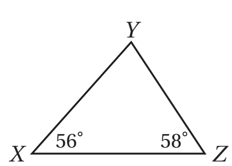
(3


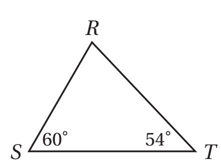
(4


(5


(6


(7


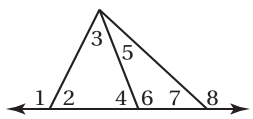
(8


(9


4-3 تدريبات المهارات

المتباينات في المثلث

استعمل الشكل المجاور لتحدّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعةٍ مما يأتي:



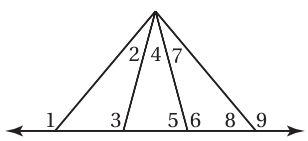
1) $\angle 4, \angle 3, \angle 1$

2) $\angle 7, \angle 5, \angle 4$

3) $\angle 6, \angle 3, \angle 2$

4) $\angle 8, \angle 6, \angle 5$

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقّق الشرط المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:



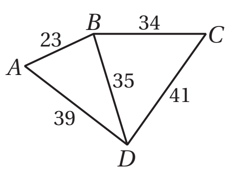
5) قياسها أقلّ من $m\angle 1$.

6) قياسها أقلّ من $m\angle 9$.

7) قياسها أكبر من $m\angle 5$.

8) قياسها أكبر من $m\angle 8$

قارن بين قياسي الزاويتين في كلٍّ ممّا يأتي:



9) $m\angle ABD, m\angle BAD$

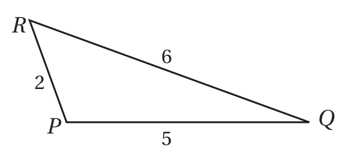
10) $m\angle ADB, m\angle BAD$

11) $m\angle BCD, m\angle CDB$

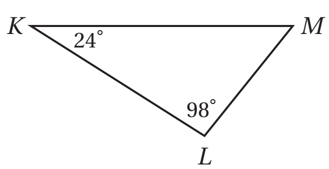
12) $m\angle CBD, m\angle CDB$

اكتب زوايا كلّ مثلث وأضلاعه مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر فيما يأتي:

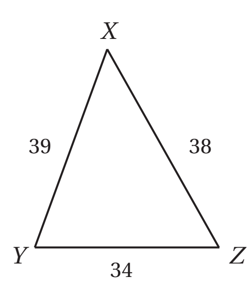
13)



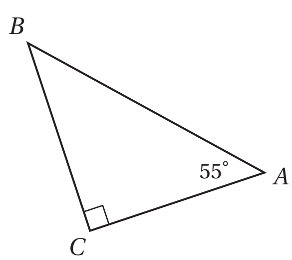
14)



15)



16)

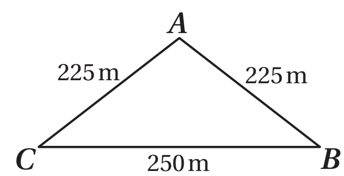


4-3 تدريبات حلّ المسألة

المتباينات في المثلث

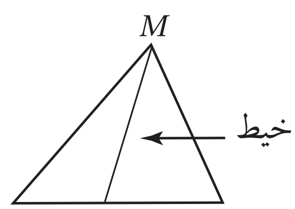
1) مسافات: يقع منزلا أيمن وسعد في شارع واحدٍ مستقيم، ويمكنهما رؤية سارية علم بعيدةٍ عنهما من شرفتَي منزليهما، إذا كانت الزاوية التي يصنعها خط نظر أيمن للسارية مع القطعة الواصلة بين المنزلين، أكبر من الزاوية التي يصنعها خط نظر سعد للسارية مع القطعة الواصلة بين المنزلين، فما العلاقة بين بُعدَيهما عن سارية العلم؟

2) مستودع: قرَّر سعد بناء مستودع في مزرعته عند الزاوية ذات القياس الأكبر، فإذا كانت حدود مزرعته مبيَّنة كما في الشكل أدناه،

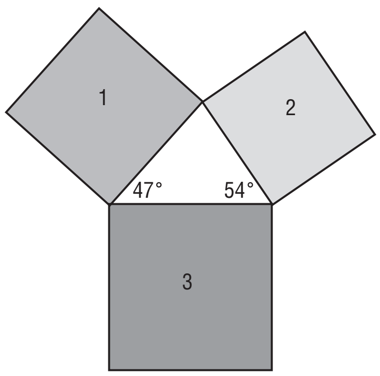


فعند أي زاوية سيبني المستودع؟ ولماذا؟

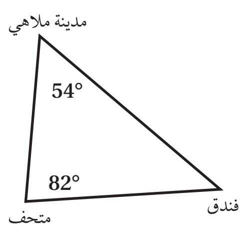
3) خيط: كوّن صالح مثلثًا باستعمال ثلاثة عيدان، ثم ربط طرف خيط بين الرأس M ونقطة على العود المقابل للرأس M، وشدّ الخيط حتى أصبح مستقيمًا، هل يمكن أن يزيد طول الخيط على طول الضلع الأطول بين الضلعين الآخرين؟ ولماذا؟



4) مربّعات: لدى محمد ثلاثة مربّعات مختلفة، وقد رتّبها لتشكِّل مثلثًا كما في الشكل أدناه، بناءً على المعطيات المُبيَّنة في الشكل، اكتب أرقام المربّعات مرتّبةً من المربع ذي المحيط الأصغر إلى المربع ذي المحيط الأكبر.



5) مُرشد سياحي: يحمل مرشد سياحي خريطة عليها المعالم المبيَّنة في الشكل التالي:



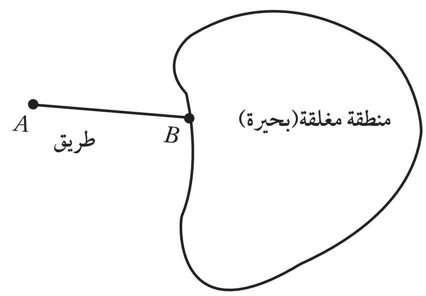
a) بناءً على المعطيات الواردة في الشكل، أيُّ موقعين أحدهما أقرب إلى الآخر؟

b) بناءً على المعطيات الواردة في الشكل، أيُّ موقعين أحدهما أبعد إلى الآخر؟

4-3 التدريبات الإثرائيّة

إنشاء هندسيّ

يبيّن الشكل أدناه القطعة المستقيمة AB عن يسار منطقة مغلقة (بحيرة)، وتتطلّب المسألة رسم قطعة مستقيمة أخرى XY عن يمين المنطقة المغلقة، على أن تكون النقاط A, B, X, Y على استقامة واحدة، علمًا بأنه لا يُسمح لك ملامسة أو عُبور المنطقة المغلقة بالفرجار أو المسطرة.



تتبّع الخطوات (5–1)؛ لإنشاء القطعة المستقيمة $\overline{XY}$ ، على أن تكون على استقامة القطعة $\overline{AB}$.

1) أنشئ العمود المنصّف لِـ $\overline{AB}$ ، وسمِّ نقطة المنتصف C ، والعمود m.

2) عيّن النقطتين P, Q على العمود m ، على أن تقعا فوق المنطقة المغلقة، وأنشئ العمود n المنصّف لِـ $\overline{PQ}$ ، وسمِّ نقطة تقاطع المستقيمين m وَ n النقطة D.

3) عيّن النقطتين R, S على العمود n، على أن تقعا يمين المنطقة المغلقة، وأنشئ العمود k المنصّف لِـ $\overline{RS}$، وسمّ نقطة تقاطع المستقيمين n و k النقطة E.

4) عيّن النقطة X على العمود k ، على أن تكون X أسفل العمود n ، وتكون $\overline{EX}$ تطابق $\overline{DC}$.

5) عيّن النقطتين T وَ V على المستقيم k وعلى جانبَي X، على أن تكون كلٌّ من $\overline{XT}$ و $\overline{XV}$ متطابقتين. ثم أنشئ العمود l المنصّف لِـ $\overline{TV}$، وسمّ نقطة التقاء العمود l مع حدّ المنطقة المغلقة النقطة Y، وعليه تكون $\overline{XY}$ هي القطعة المطلوبة.

6) إذا كانت A, B, X, Y تمثّل مدنًا ستمرُّ فوقها طائرة، بحيث يكون خط سيرها مستقيمًا فوق هذه المدن الأربع، فكيف يمكننا على الأرض معرفة المسافة التي ستقطعها الطائرة بين المدينتين A, X ؟

4-4 تدريبات إعادة التعليم

البرهان غير المباشر

البرهان الجبري غير المباشر:

إحدى الطرق لإثبات صحّة عبارةٍ ما أو تبريرها **تبريرًا غير مباشر**، هو افتراض أنها غير صحيحة، وعندما تبيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو أي حقيقةٍ أخرى كتعريف أو نظريةٍ أو مسلّمةٍ ما، فإنك تكون قد أثبتّ أن افتراضك خطأ، وأن النتيجة الأصلية صحيحة. وهذا ما يُعرف **بالبرهان غير المباشر**، أو **البرهان بالتناقض**.

خطوات كتابة برهان غير مباشر

1) افترض أن النتيجة خاطئة.

2) بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، أو مع أي حقيقة أخرى، باستعمال التبرير المنطقي.

3) أشر إلى أنه بسبب افتراض خطأ النتيجة، حصلنا على عبارة غير صحيحة، ولذلك يتعيّن أن تكون النتيجة الأصليّة صحيحةً.

ويمكن استعمال البراهين غير المباشرة في نظرية الأعداد؛ لإثبات كثير من الحقائق المرتبطة بالأعداد الزوجية (التي يُعبَّر عنها بالصورة $2k$، حيث k عدد صحيح)، والأعداد الفردية (والتي يُعبَّر عنها بالصورة $2m+1$، حيث m عدد صحيح).

مثال **اكتب برهانًا غير مباشرٍ؛ لتبيِّن أنه إذا كان $3x+5>8$، فإن $x>1$**

المعطيات: $3x + 5 > 8$

المطلوب: إثبات أن $x > 1$

الخطوة 1: افترض أن x ليست أكبر من 1. أي افترض أن: $x \leq 1$.

الخطوة 2:

$x \leq 1$	افتراض
$3x \leq 3$	اضرب الطرفين بـ 3
$3x+5 \leq 3+5$	اجمع 5 للطرفين
$3x+5 \leq 8$	بسّط

الخطوة 3: هذا يناقض المعطيات بأنّ $3x + 5 > 8$، وعليه فإن الافتراض خطأ؛ مما يعني أنه يتعيّن أن تكون العبارة "$x > 1$" صحيحةً.

تمارين

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين :

1) إذا كان $2x > 14$، فإنّ $x > 7$ . .

2) لجميع الأعداد الحقيقيّة، إذا كان $a + b > c$، فإنّ $a > c - b$.

3) أكمل البرهان غير المباشر الآتي:

المعطيات: n عدد صحيح ، و n^2 عدد زوجي.

المطلوب: إثبات أن n عدد زوجي.

a) افترض أن: ________________

b) إذن يمكنك كتابة n في الصورة $2a + 1$، بحسب ________________

c) $n^2 =$ ________________ بالتعويض.

d) $= (2a+1)(2a+1)$ تعريف القوة.

e) $= 4a^2 + 4a + 1$ بالتبسيط.

f) $= 2(2a^2 + 2a) + 1$ ________________

g) $2(2a^2 + 2a) + 1$ عدد فرديّ، وهذا يناقض المعطيات التي تنصُّ على أن n^2 عدد زوجي؛ إذن يتعيَّن أن يكون الافتراض ________، لذلك فإن ________________ .

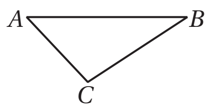
4-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

البرهان غير المباشر

البرهان غير المباشر في الهندسة:

عند كتابة برهانٍ غير مباشرٍ في الهندسة، افترض أن النتيجة خطأ، ثم بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض، والتناقض يدلّ على أنه لا يمكن أن تكون النتيجة خطأً، وعندئذٍ نستنتج أنها صحيحة.

مثال اكتب برهانًا غير مباشرٍ؛ لتبيِّن أنه في $\triangle ABC$ إذا كان $m\angle C = 100°$ ، فإن $\angle A$ ليست قائمة.



المعطيات: $m\angle C = 100°$

المطلوب: إثبات أنّ $\angle A$ ليست قائمة.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\angle A$ قائمة.

الخطوة 2: بيّن أن هذا الافتراض يؤدّي إلى تناقض، فإذا كانت$\angle A$ قائمة، فإن $m\angle A = 90°$.
و$m\angle C + m\angle A = 100° + 90° = 190°$؛ إذن مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ أكبر من $180°$.

الخطوة 3: تبيّن النتيجة أن مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ أكبر من $180°$، وهي تتناقض مع نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، فالافتراض بأن $\angle A$ قائمة افتراض خطأ، وهذا يعني أن العبارة " $\angle A$ ليست قائمة" نتيجة صحيحة.

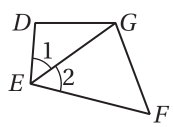
تمارين

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلّ عبارة ممّا يأتي:

1) إذا كان $m\angle A = 90°$ ، فإنّ $m\angle B = 45°$

2) إذا لم تكن $\overline{AV}$ مطابقة لـ $\overline{VE}$ ، فإنّ $\triangle AVE$ ليس متطابق الضلعين.

3) أكمل البرهان غير المباشر الآتي:



المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$ ، و $\overline{FG} \not\cong \overline{DG}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{FE} \not\cong \overline{DE}$.

a) افترض أن ______________ افترض أن النتيجة خطأ.

b) $\overline{EG} \cong \overline{EG}$ ______________

c) $\triangle EDG \cong \triangle EFG$ ______________

d) ______________ ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

e) وهذا يناقض المعطيات؛ لذا يتعيَّن أن يكون الافتراض ______________

f) إذن ______________

4-4 تدريبات المهارات

البرهان غير المباشر

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلّ عبارةٍ ممَّا يأتي:

1) $m\angle ABC < m\angle CBA$

2) $\triangle DEF \cong \triangle RST$

3) المستقيم a عموديّ على المستقيم b.

4) $\angle 5$ مكمّلة لـِ $\angle 6$

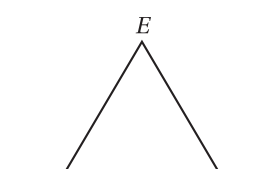
اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ ممّا يأتي:

5) المعطيات: $2x - 3 \geq 7$

المطلوب: إثبات أنَّ $x \geq 5$

6) المعطيات: $\angle D \ncong \angle F$

المطلوب: إثبات أنَّ $DE \neq EF$



4-4 تدريبات حلّ المسألة

البرهان غير المباشر

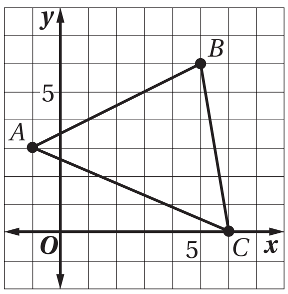
1) زوارق: خرج خمسة وثلاثون صيادًا في رحلة صيد أسماك. فاستقلُّوا 17 زورقًا، استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أن زورقًا واحدًا على الأقلّ سيحمل أكثر من صيادين.

2) رحلة عمل: سافر خالد للعمل خلال العام الماضي 15 مرةً، استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن خالدًا سافر أكثر من مرة في شهر على الأقل.

3) دفع محمد 6000 ريال؛ لشراء كمبيوتر وتلفاز، استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن ثمن أحدهما لا يقل عن 3000 ريال.

4) أعداد: تتكون الأعداد: 357719, 426803, 702295 جميعها من 6 أرقام، استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن أي عدد يتكون مِن 6 أرقام يحتوي على رقم مكرّر أو رقمين متتاليين من أرقام النظام العشري.

5) مثلثات شبكيّة: النقطة الشبكيّة هي نقطة إحداثيّاها عددان صحيحان. والمثلث الشبكي هو مثلثٌ، رؤوسُه نقاط شبكيّة. ومن حقائق المثلثات الشبكيّة أن مساحة المثلث الشبكيّ تساوي 0.5 وحدة مربّعة على الأقل.



a) افترض أن ΔABC يحتوي بداخله على نقطة شبكيّة، وبيّن أنه يمكنك تجزئة المثلث الشبكيّ إلى ثلاثة مثلثات شبكيّة.

b) اكتب برهانًا غير مباشر يبيّن أن المثلث الشبكيّ الذي مساحته 0.5 وحدة مربّعة، لا يحتوي على نقاطٍ شبكيّةٍ بداخله. (وقوع النقطة على المثلث لا يعني أنّها بداخله).

4-4 التدريبات الإثرائيّة

أمثلة مضادة أُخرى

يمكنك إثبات عدم صحة بعض العبارات في الرياضيات باستعمال الأمثلة المضادة. لنأخذ العبارة الآتية:

لكل عددين a و b يكون "$a - b = b - a$"،

يمكنك إثبات عدم صحتها بصورة عامة، إذا أمكن إيجاد مثالٍ واحدٍ على الأقل تكون فيه العبارة خاطئة.

افترض أن $a = 7$ و $b = 3$، وعوّض هذه القيم في المعادلة أعلاه.

$$7 - 3 \stackrel{?}{=} 3 - 7$$
$$4 \neq -4$$

وبصورة عامة لكلّ عددين a و b تكون العبارة $a - b = b - a$ خاطئة. ويمكنك صياغة الجملة السابقة بعبارة لفظية مكافئة هي: الطرح عمليّة غير إبداليّة.

إذا كانت a, b, c أيّ ثلاثة أعداد، فأثبت أن العبارة خاطئة بتقديم مثالٍ مُضادٍّ في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) $a - (b - c) \stackrel{?}{=} (a - b) - c$

2) $a \div (b \div c) \stackrel{?}{=} (a \div b) \div c$

3) $a \div b \stackrel{?}{=} b \div a$

4) $a \div (b + c) \stackrel{?}{=} (a \div b) + (a \div c)$

5) $a + (bc) \stackrel{?}{=} (a + b)(a + c)$

6) $a^2 + a^2 \stackrel{?}{=} a^4$

7) اكتب عبارةً لفظيّةً مكافئةً لكلٍّ من الأسئلة $1, 2, 3$.

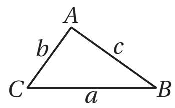
8) **العبارة:** $a(b + c) = ab + ac$ تمثّل خاصيّة توزيع الضرب على الجمع، والسؤالان 4 و 5 يبينان أنّ بعض العمليات لا تتوزّع على الجمع، اكتب عبارةً لفظيةً تصف ذلك.

4-5 تدريبات إعادة التعليم

متباينة المثلث

متباينة المثلث:

إذا أخذت ثلاثة عيدان أطوالها 1 in, 5 in, 8 in؛ وحاولت أن تكوّن منها مثلثًا، فستجد أن ذلك غير ممكن. وهذا يوضّح نظرية متباينة المثلث.

نظريّة متباينة المثلث	مجموع طولَي أيّ ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.  $a+b>c$ $b+c>a$ $a+c>b$

مثال **إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ 5 و8، فأوجد مدى طول الضلع الثالث.**

افترض أن طول الضلع الثالث x

بناءً على نظريّة متباينة المثلث، فإن جميع المتباينات الثلاث الآتية يتعيّن أن تكون صحيحةً.

$$5+8>x \qquad 8+x>5 \qquad 5+x>8$$
$$13>x \qquad x>-3 \qquad x>3$$

إذن يتعيّن أن تكون x بين العددين 3 و13.

تمارين

حدِّد ما إذا كانت القياسات المُعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ من الأسئلة الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فوضِّح السبب.

1) 6 m, 4 m, 3 m

2) 6 cm, 9 cm, 15 cm

3) 8 cm, 8 cm, 8 cm

4) 5 in, 4 in, 2 in

5) 16 in, 8 in, 4 in

6) 3 ft, 2 ft, 5 ft, 1 ft, 5 ft

اكتب متباينةً تمثِّل مدى طول الضلع الثالث للمثلث المُعطَى طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

7) 1 cm و 6 cm.

8) 12 m و18 m.

9) 1.5 ft و 5.5 ft

10) 82 m و8 m

11) افترض أن لديك ثلاثة أعداد موجبة مختلفة ومرتَّبة من الأصغر إلى الأكبر، ما المقارنة الوحيدة التي ستمكّنك من معرفة ما إذا كان يمكن أن تكوِّن هذه الأعداد أطوال أضلاع مثلثٍ أم لا؟

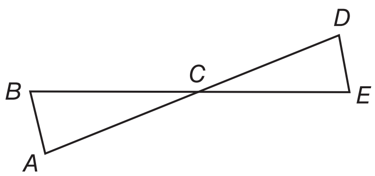
الاسم ____________________ التاريخ ____________

4-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)
متباينة المثلث

استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين:

يمكنك استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين:



المعطيات: $\Delta ABC \cong \Delta DEC$

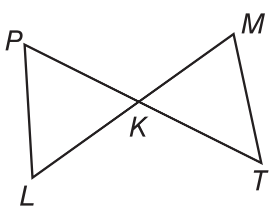
المطلوب: إثبات أنّ $AB+DE > AD-BE$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\Delta ABC \cong \Delta DEC$.	1) معطيات
2) $AB+BC > AC, DE+EC > CD$.	2) نظرية متباينة المثلث
3) $AB>AC - BC, DE>CD - EC$.	3) بالطرح
4) $AB+DE > AC - BC+CD - EC$.	4) بجمع المتباينتين في 3
5) $AB+DE > AC + CD-BC - EC$.	5) الخاصية الإبدالية
6) $AB+DE > AC + CD-(BC + EC)$.	6) خاصية التوزيع
7) $AC+CD = AD, BC + EC = BE$.	7) مسلمة جمع القطع المستقيمة
8) $AB + DE > AD - BE$.	8) بالتعويض

تمرين

أكمل البرهان ذا العمودين الآتي:



المعطيات: $\overline{PL} \parallel \overline{MT}$

K نقطة منتصف $\overline{PT}$

المطلوب: إثبات أنّ $PK + KM > PL$

البرهان:

العبارات	المبّررات
1) $\overline{PL} \parallel \overline{MT}$	1) ________؟
2) $\angle P \cong \angle T$	2) ________؟
3) K نقطة منتصف $\overline{PT}$	3) معطيات
4) $PK = KT$	4) ________؟
5) ________؟	5) نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
6) $\triangle PKL \cong \triangle TKM$	6) ________؟
7) ________؟	7) نظرية متباينة المثلث
8) ________؟	8) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
9) $PK + KM > PL$	9) ________؟

الاسم ______________________ التاريخ ____________

4-5 تدريبات المهارات

متباينة المثلث

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من القياسات المعطاة يمكن أن تمثِّل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

(1 2 ft ; 3 ft ; 4 ft

(2 5 m ; 7 m ; 9 m

(3 4 mm ; 8 mm ; 11 mm

(4 13 in ; 13 in ; 26 in

(5 9 cm ; 10 cm ; 20 cm

(6 15 km ; 17 km ; 19 km

(7 14 m ; 17 m ; 31 m

(8 6 m ; 7 m ; 12 m

اكتب متباينة تمثِّل مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ ممَّا يأتي:

(9 5 ft ; 9 ft

(10 7 in ; 14 in

(11 8 m ; 13 m

(12 10 mm ; 12 mm

(13 12 cm ; 15 cm

(14 15 km ; 27 km

(15 17 cm ; 28 cm

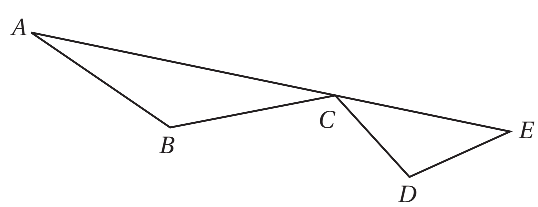
(16 18 ft ; 22 ft

(17 أكمل البرهان ذا العمودين:

المعطيات: $\triangle ABC$, $\triangle CDE$

المطلوب: إثبات أنّ: $AB + BC + CD + DE > AE$

البرهان:



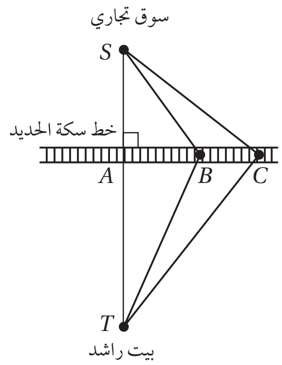
العبارات	المبررات
(1 $AB + BC > AC$ $CD + DE > CE$	**(1** ؟ ______________
(2 $AB + BC + CD + DE > AC + CE$	**(2** ؟ ______________
(3 ؟ ______________	**(3** مسلمة جمع القطع المستقيمة.
(4 ؟ ______________	**(4** بالتعويض.

4-5 تدريبات حلِّ المسألة

متباينة المثلث

1) عيدان: لدى فوزية 5 عيدان أطوالها: 2, 4, 6, 8, 10 سنتمترات. ما عدد المثلثات التي يمكنها تكوينها باستعمال ثلاثة عيدان في كلّ مرّةٍ؟

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 2.



2) طرق: يريد راشد أن يعبُر خط سكّة الحديد؛ كي يصل إلى أقرب محلّ تجاريّ، وتوجد نقطتان يمكنه أن يعبر سكة الحديد عندهما وهما (النقطة C والنقطة B). أيّ الطريقين أطول؟ وضّح إجابتك.

3) تجربة علمية: في تجربةٍ علميةٍ ما يحتاج طالب إلى ثني سلك طوله 6 cm على شكل مثلثٍ أطوال أضلاعه أعداد طبيعية، فقرَّر الطالب تحديد النقاط التي يثني عندها السلك قبل القيام بذلك؛ حتى يحافظ على استقامة الأضلاع. فهل يمكن أن يثني الطالب السلك على بعد 1 cm من أحد طرفيه؟ ولماذا؟

4) مُدن: تشكّل المدن A, B, C رؤوس مثلث على الخريطة، إذا كانت المسافة بين المدينتين A, B تساوي 395 km، وبين المدينتين B, C تساوي 147 km ، فما الحدّ الأدنى للمسافة الحقيقيّة بين المدينتين A, C؟

5) مثلثات: طول أحد أضلاع مثلثٍ 2 cm ، افترض أن x يمثِّل طول الضلع الثاني، و n يمثِّل طول الضلع الثالث، وافترض أن n, x عددان صحيحان موجبان، وأن:
$14 < x < 17$ ، $13 < n < 17$.
اكتب جميع الأطوال الممكنة لأضلاع المثلث.

4-5 التدريبات الإثرائيّة

متباينة المدى:

لإيجاد متباينةٍ تمثِّل مدى طول الضلع الثالث للمثلث المُعطى طولا ضلعين من أضلاعه، قمنا بتطبيق نظرية متباينة المثلث على الأضلاع الثلاثة، ومن ثَم أوجدنا المدى.

يمكننا إيجاد المدى بطريقةٍ أخرى.

أجب عن الأسئلة الآتية للوصول للمتباينة.

إذا كانت a, b, c أطوال أضلاع مثلث، بحيث يكون $a \leq b \leq c$ فأجب عما يأتي:

1) هل يمكن أن يساوي طول أحد الأضلاع الفرق بين طولَي الضلعين الآخرين؟

2) هل يمكن أن يكون طول ضلع أصغر من الفرق بين طولَي الضلعين الآخرين؟

3) استنادًا إلى السؤالين (1 ، 2) خمِّن العلاقة بين طول ضلع مثلث والفرق بين طولَي الضلعين الآخرين.

4) عبّر عن العلاقة في السؤال (3) بمتباينة بالنسبة للضلع a، مع ضمان أن يكون الفرق موجبًا.

5) كوّن متباينةً مركبةً تفيد في تحديد مدى طول الضلع الثالث، بالاستفادة من مجموع طولَي الضلعين الآخرين والفرق بينهما.

6) استعمل المتباينة المركبة التي توصَّلت لها؛ لتحديد مدى طول الضلع الثالث لكلٍّ من المثلثات المعطى طولا ضلعين من أضلاعها.

a) 3 , 4

b) 7 , 9

c) 11 , 15

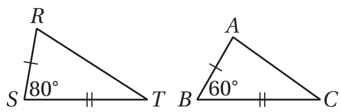
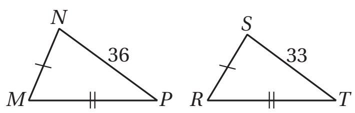
d) 20 , 30

4-6 تدريبات إعادة التعليم

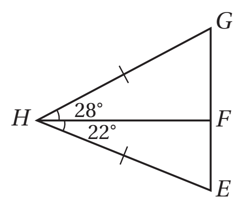
المتباينات في مثلثين

متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS):

تتضمّن النظريتان الآتيتان العلاقة بين أضلاع مثلثين وزاوية في كلٍّ منهما.

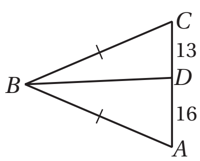
متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (**SAS**)	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول، أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.	 $RT > AC$
عكس متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول، أكبر من قياس الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني.	 $m\angle M > m\angle R$

مثال 1 قارن بين طولَي $\overline{GF}$ و $\overline{EF}$.



لمّا كان ضلعان في ΔHGF مطابقين لضلعين في ΔHEF، وكان $m\angle GHF > m\angle EHF$ ، فإنّ $GF > FE$ وفق المتباينة SAS.

مثال 2 قارن بين قياسَي $\angle ABD$ و $\angle CBD$.

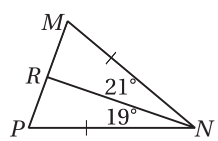


لمّا كان ضلعان في ΔABD مطابقين لضلعين في ΔCBD، و $AD > CD$، فإنّ $m\angle ABD > m\angle CBD$، وذلك وفق عكس المتباينة SAS.

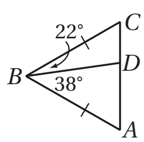
تمارين

قارن بين القياسين المحدَّدين في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

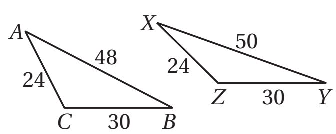
1) MR و RP



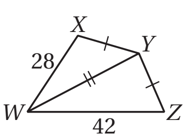
2) AD و CD



3) $m\angle C$ و $m\angle Z$

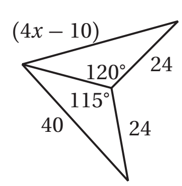


4) $m\angle XYW$ و $m\angle WYZ$

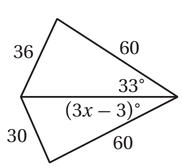


اكتب متباينة تمثِّل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

5)



6)

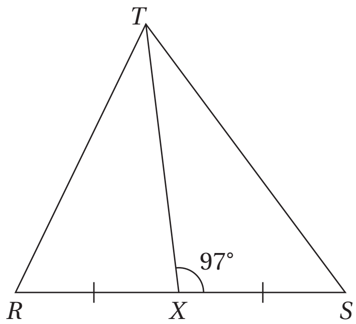


4-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتباينات في مثلثين

إثبات العلاقات في مثلثين:

يمكنك استعمال المتباينتين SAS, SSS ؛ لإثبات صحة علاقات في مثلثين.



مثال

اكتب برهانًا ذا عمودين.

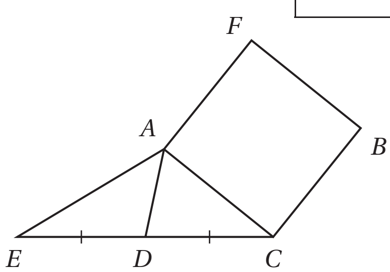
المعطيات: $RX = XS$؛ $m\angle SXT = 97°$

المطلوب: إثبات أنّ $ST > RT$

البرهان:

المبّررات	العبارات
1) تعريف الزاويتين المتجاورتين على خط مستقيم	1) $\angle RXT$, $\angle SXT$ متكاملتان
2) تعريف الزاويتين المتكاملتين	2) $m\angle SXT + m\angle RXT = 180°$
3) معطيات	3) $m\angle SXT = 97°$
4) بالتعويض	4) $97° + m\angle RXT = 180°$
5) خاصية الطرح	5) $m\angle RXT = 83°$
6) $97° > 83°$	6) $m\angle SXT > m\angle RXT$
7) معطيات	7) $RX = XS$
8) خاصية الانعكاس	8) $TX = TX$
9) المتباينة SAS	9) $ST > RT$

تمارين



أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $AFBC$ مستطيل، وَ $ED = DC, m\angle EDA > m\angle ADC$

المطلوب: إثبات أن $AE > FB$

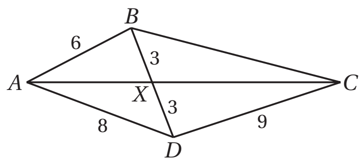
البرهان:

المبّررات	العبارات
1) ______ ؟	1) $AFBC$ مستطيل؛ $ED = DC$
2) ______ ؟	2) $AD = AD$
3) ______ ؟	3) $m\angle EDA > m\angle ADC$
4) المتباينة SAS	4) ______ ؟
5) الأضلاع المتقابلة في المستطيل متطابقة	5) ______ ؟
6) بالتعويض	6) $AE > FB$

4-6 تدريبات المهارات

المتباينات في مثلثين

قارن بين القياسين المحدَّدين في السؤالين الآتيين:

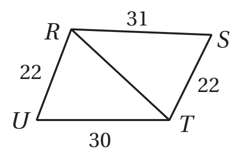


1) $m\angle BXA$ و $m\angle DXA$

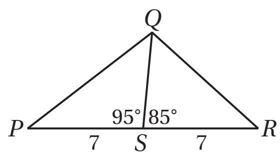
2) BC و DC

قارن بين القياسين المحدَّدين في السؤالين الآتيين:

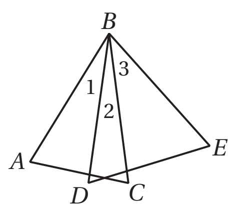
3) $m\angle STR$ و $m\angle TRU$



4) PQ و RQ



5) $\overline{BE}$, $\overline{BA}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ أربع قطع متطابقة في الشكل المجاور، و $AC < DE$. قارن بين $m\angle 1$ و $m\angle 3$، وضّح إجابتك.

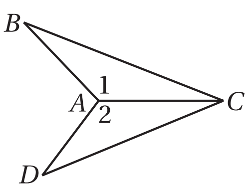


6) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DA}$

$BC > DC$

المطلوب: إثبات أن: $m\angle 1 > m\angle 2$.

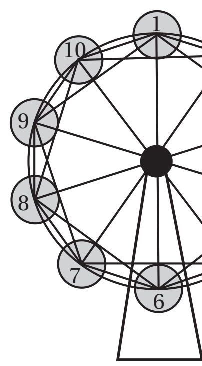


4-6 تدريبات حلّ المسألة

المتباينات في مثلثين

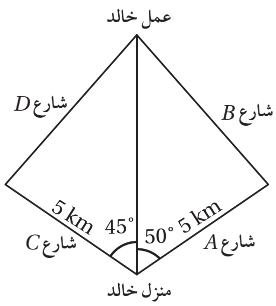
1) **ساعات:** طول عقرب الدقائق في ساعة كبيرة في أحد الميادين العامة 3 ft، وطول عقرب الساعات 2 ft، فهل تكون المسافة بين طرفَي العقربين أكبر عند الساعة الـ 3:00 أم عند الساعة الـ 8:00؟ ولماذا؟

2) **الدولاب الدوّار:** ثبّتت مقاعد دولاب دوّار عند رؤوس مضلع عشاري منتظم، فما أرقام المقاعد التي بُعدها عن المقعد رقم 1 أكبر من بُعد المقعد رقم 4 عن المقعد رقم 1؟

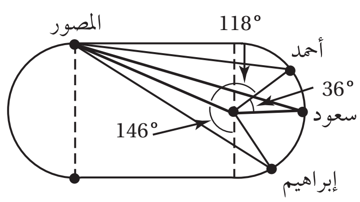


3) **حدائق:** أراد عمر أن ينشئ حديقتين على هيئة مثلثين مختلفين قليلًا، وكان لديه ثلاث قطع خشبية لتصميم كلٍّ من المثلثين، وقد أنهَى تصميم مثلث الحديقة الأول، ولكي يصمِّم الحديقة الثانية، عدّل ضلعين من أضلاع المثلث؛ لتصبح الزاوية بينهما أصغر ممّا كانت في المثلث الأول. وضّح كيف يغيّر هذا التعديل شكل المثلث.

4) **طرق:** عندما يتحرك خالد من منزله إلى عمله، فأمامه خياران للوصول؛ فإما أن يسلك الشارع A ثم الشارع B، أو أن يسلك الشارع C ثم الشارع D، فأيُّ الطريقين أقصر؟ ولماذا؟



5) **عدّاؤون:** يلتقط مصوّر صورًا لثلاثة عدائين (أحمد وسعود وإبراهيم)، ويقف المصوِّر على مضمار مستطيل الشكل ينتهي بنصفي دائرتين.



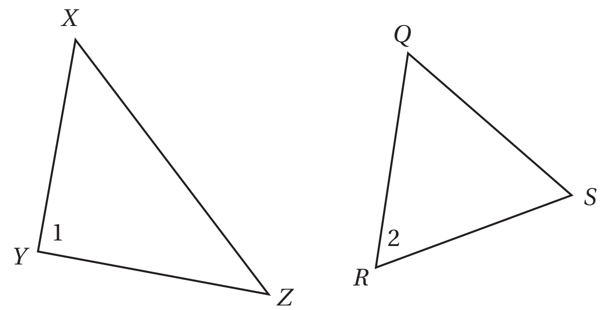
a) بناءً على المعلومات الواردة في الشكل أعلاه، اكتب أسماء العدّائين مرتّبة من الأقرب إلى الأبعد عن المصوّر. وضّح إجابتك.

b) وضّح كيف تحدّد نقطة على نصف الدائرة، يكون العدّاؤون عندها أبعد ما يمكن عن المصوّر.

4-6 التدريبات الإثرائيّة

نظرية الرافعة

نظرية الرافعة :
اسم يطلق على المتباينة SAS التي درستها في هذا الدرس، وقد درست أن عكس هذه النظرية أيضًا صحيح، وفي هذا النشاط، ستكتشف ما إذا كان معكوس هذه النظرية ومعاكسها الإيجابيّ صحيحًا أيضًا أم لا .



الفرض: $m\angle 1 > m\angle 2$ ؛ $XY = QR$, $YZ = RS$

النتيجة: $XZ > QS$

1) ما معكوس نظريّة الرافعة؟

2) هل يمكنك إيجاد مثال مضادٍّ لإثبات أن معكوس النظرية خطأ؟

3) ما المعاكس الإيجابيّ لنظريّة الرافعة؟

4) هل يمكنك إيجاد مثالٍ مضادٍّ لإثبات أن المعاكس الإيجابيّ للنظريّة خطأ؟

ملحق الإجابات

الاسم ____________ التاريخ ________

4-1 تدريبات إعادة التعليم

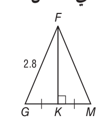
المنصّفات في المثلث

الأعمدة المنصّفة:

العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث هو مستقيم، أو قطعة مستقيمة، أو مستوى يقطع ضلع المثلث عند منتصفه، ويكون عموديًّا عليه، وهذه بعض النظريات المتعلقة بالأعمدة المنصّفة.

نظريّة العمود المنصّف	كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعةٍ مستقيمةٍ، تكون على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة.
عكس نظريّة العمود المنصّف	كلّ نقطةٍ تبعد بُعدين متساويين عن طرفَي قطعةٍ مستقيمةٍ تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.
نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث	تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلثٍ في نقطةٍ تبعد أبعادًا متساوية عن رؤوس المثلث، وتُسمّى **مركز الدائرة الخارجية للمثلث.**

مثال 1 أوجد طول $\overline{FM}$ في الشكل أدناه.

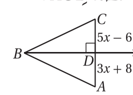


$\overline{FK}$ عمود منصف للضلع $\overline{GM}$

إذن، FG = FM

2.8 = FM

مثال 2 إذا كان $\overrightarrow{BD}$ عمودًا منصّفًا لـ$\overline{AC}$ ، فأوجد قيمة x.



$AD = DC$ نظرية العمود المنصف

$3x + 8 = 5x - 6$ عوّض

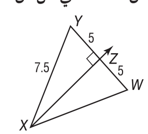
$14 = 2x$ حل المعادلة

$7 = x$

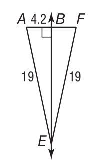
تمارين

أوجد القياس المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) XW **7.5**



2) BF **4.2**



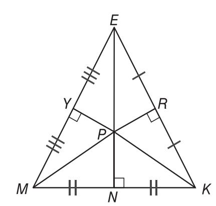
النقطة P مركز الدائرة الخارجية لـ$\triangle EMK$ ، اكتب جميع القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المستقيمة المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

3) $\overline{MY}$ **$\overline{EY}$**

4) $\overline{KP}$ **$\overline{EP}, \overline{MP}$**

5) $\overline{MN}$ **$\overline{NK}$**

6) $\overline{ER}$ **$\overline{RK}$**



الصف: الأول الثانوي 6 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

الاسم ____________ التاريخ ________

4-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

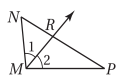
المنصفات في المثلث

منصفات الزوايا:

منصف الزاوية هو قطعة مستقيمة، أو نصف مستقيم، أو مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين، وهذه بعض خصائص منصفات الزوايا:

نظريّة منصّف الزاوية	كلّ نقطة واقعة على منصّف زاوية، تكون على بُعدين متساويين عن ضلعَيها.
عكس نظرية منصّف الزاوية	كلّ نقطة واقعة داخل زاوية، وتبعد بُعدين متساويين عن ضلعَيها، تقع على منصّف تلك الزاوية.
نظريّة مركز الدائرة الداخليّة للمثلث	تلتقي منصّفات زوايا المثلث في نقطة واحدة، تبعد أبعادًا متساوية عن أضلاع ذلك المثلث، وتُسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث.**

مثال 1 $\overrightarrow{MR}$ ينصّف$\angle NMP$ ، إذا كان: $m\angle 1 = 5x + 8$ ، وَ $m\angle 2 = 8x - 16$ ، فأوجد قيمة x.



$m\angle 1 = m\angle 2$ تعريف منصف الزاوية

$5x + 8 = 8x - 16$ عوّض

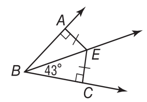
$24 = 3x$ اجمع $16-5x$ للطرفين

$8 = x$ اقسم الطرفين على 3

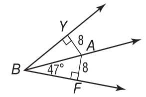
تمارين

أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:

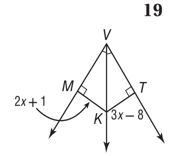
1) $\angle ABE$ **43°**



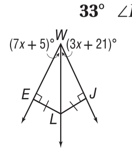
2) $\angle YBA$ **47°**



3) MK **19**



4) $\angle EWL$ **33°**



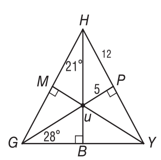
النقطة U هي مركز الدائرة الداخلية لـ$\triangle GHY$ ، أوجد كلّ قياسٍ مما يأتي:

5) MU **5**

6) $m\angle UGM$ **28°**

7) $m\angle PHU$ **21°**

8) HU **13**



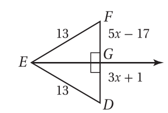
الصف: الأول الثانوي 7 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

الاسم ____________________ التاريخ __________

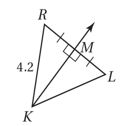
4-1 تدريبات المهارات
المنصِّفات في المثلث

أوجد كلَّ قياس ممَّا يأتي:

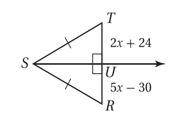
1) FG **28**



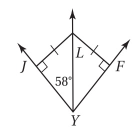
2) KL **4.2**



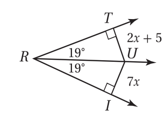
3) TU **60**



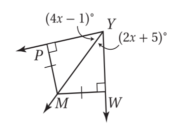
4) $m\angle LYF$ **58°**



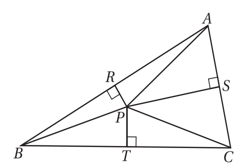
5) IU **7**



6) $m\angle MYW$ **11°**



النقطة P مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle ABC$، اكتب جميع القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المستقيمة المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



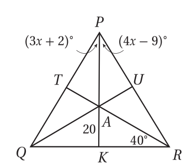
7) $\overline{BR}$ **$\overline{AR}$**

8) $\overline{CS}$ **$\overline{AS}$**

9) $\overline{BP}$ **$\overline{PA}$, $\overline{PC}$**

النقطة A مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle PQR$

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



10) $m\angle ARU$ **40°**

11) AU **20**

12) $m\angle QPK$ **35°**

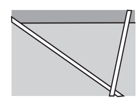
الاسم ____________________ التاريخ __________

4-1 تدريبات حلّ المسألة
المنصَّفات في المثلث

1) **آبار:** لدى نادر قطعة أرض مثلثة الشكل، زرع على محيطها أشجار، إذا أراد نادر أن يحفر بئرًا في المزرعة، بحيث تكون متساوية البعد عن أضلاع قطعة الأرض، فأين يحفر هذه البئر؟

عند مركز الدائرة الداخلية للمثلث.

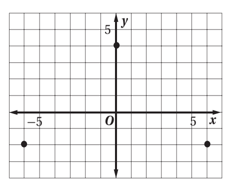
2) **نزهة:** ذهب مروان وباسم في نزهة إلى حديقة عامّة مثلثة الشكل، وأحد أضلاعها محاذٍ لرصيف، والضلعان الآخران محاذيان لشارعين عامّين كما في الشكل أدناه. إذا أراد الصديقان أن يجلسا في موقع يكون على أبعاد متساوية من الرصيف والشارعين. فعند أيِّ نقطة في الحديقة يقع هذا الموقع؟



عند مركز الدائرة الداخلية للحديقة

3) **منازل:** لدى محمود ثلاثة أبناء. والشكل أدناه يبيّن مواقع منازل الأبناء الثلاثة على خريطة في مستوى إحداثيّ. ويرغب محمود في الانتقال إلى منزل يكون على أبعاد متساوية من منازل أبنائه الثلاثة. ما إحداثيّات الموقع الذي يبعُد البُعد نفسه عن منازل الأبناء الثلاثة؟

$(0, -2)$



4) **بيوت:** نظر تركي إلى خريطة الحيّ، فلاحظ أن بيته وبيت صديقيه مساعد وخالد تكوّن رؤوس مثلث. وعندما وضع الخريطة على شبكة إحداثيّة، كان بيت تركي عند النقطة $(1, 3)$، وبيت مساعد عند النقطة $(-1, -5)$، وبيت خالد عند النقطة $(4, 5)$، فأين يمكن أن يلتقي الأصدقاء الثلاثة، إذا غادر كلّ واحد منهم بيته في اللحظة نفسها، وسار على الطريق الأقصر من بيته إلى الضلع المقابل؟

$\left(\frac{11}{5}, \frac{16}{5}\right)$

5) **ملاعب:** رسم الطلاب مثلثًا في ملعب المدرسة.

a) حدّد أحد الطلاب مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فوجده هو مركز دائرته الخارجية. فما نوع هذا المثلث؟

مثلث متطابق الأضلاع

b) إذا عدّل طالب آخر شكل المثلث، بحيث وقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث خارجه، وبقي مركز دائرته الداخلية داخله، فما نوع المثلث الناتج عن هذا التعديل؟

مثلث منفرج الزاوية

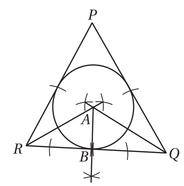
الاسم ______________ التاريخ ________

4-1 التدريبات الإثرائيّة

الدائرة الداخليّة والدائرة الخارجية للمثلث

تتقاطع منصّفات زوايا المثلث في نقطةٍ واحدةٍ تُسمّى مركز الدائرة الداخليّة للمثلث، وهي مركز الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث الثلاثة، وتقع هذه الدائرة داخل المثلث، ما عدا النقاط الثلاث التي تمس الأضلاع عندها، ويقال إن هذه الدائرة محاطة بالمثلث.

اتبع الخطوات الآتية لرسم الدائرة الداخلية لـΔPQR مستعملًا فرجارًا ومسطرةً:



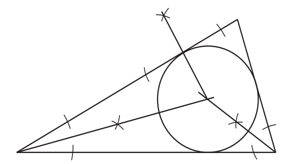
الخطوة 1: أنشئ منصّفَي $\angle R$ و $\angle Q$، وسمّ نقطة تقاطعهما A.

الخطوة 2: أنشئ من A قطعة مستقيمة عموديّة على $\overline{RQ}$، وسمّ نقطة تقاطعها مع $\overline{RQ}$ النقطة B.

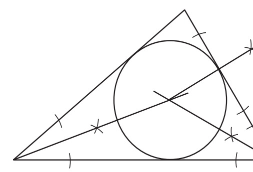
الخطوة 3: استعمل الفرجار لرسم الدائرة التي مركزها A، وطول نصف قطرها يساوي AB .

ارسم الدائرة الداخليّة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

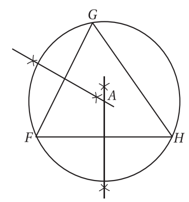
1)



2)



تتقاطع الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلثٍ في نقطةٍ واحدةٍ أيضًا تُسمّى مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث، وتقع هذه الدائرة خارج المثلث باستثناء رؤوس المثلث.



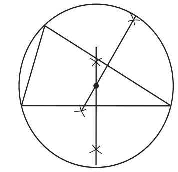
3) اتّبع الخطوات الآتية لرسم الدائرة الخارجية لـΔFGH مستعملًا فرجارًا ومسطرةً.

الخطوة 1: ارسم العمودين المنصّفين للضلعين $\overline{FG}$ و $\overline{FH}$، وسمّ نقطة تقاطعهما A.

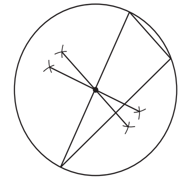
الخطوة 2: ارسم الدائرة التي مركزها A، وطول نصف قطرها يساوي AF .

ارسم الدائرة الخارجية للمثلث في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

4)



5)



الاسم ______________ التاريخ ________

4-2 تدريبات إعادة التعليم

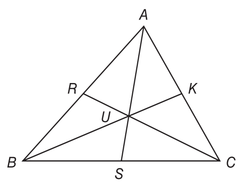
القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

القطع المتوسطة:

القطعة المتوسطة في مثلثٍ هي قطعة مستقيمة تصل أحد رؤوس المثلث بمنتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

نظرية مركز المثلث	تلتقي القطع المتوسطة لمثلث عند **مركز المثلث**، وهو نقطة على القطعة المتوسطة تبعد عن كل رأس مسافةً تساوي ثُلُثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال **إذا كانت النقطة U مركز ΔABC، و $BU = 16$ ، فأوجد كلًّا من UK, BK .**



$BU = \frac{2}{3}BK$ نظرية مركز المثلث

$16 = \frac{2}{3}BK$ $BU = 16$

$24 = BK$ اضرب الطرفين بـ $\frac{3}{2}$

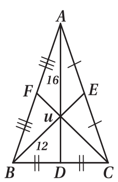
$BK = BU + UK$ مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة

$24 = 16 + UK$ عوّض

$8 = UK$ اطرح 16 من الطرفين

تمارين

في ΔABC : **$AU = 16$, $BU = 12$, $CF = 18$** ، أوجد كلًّا من القياسات التالية:



1) UD **8**

2) EU **6**

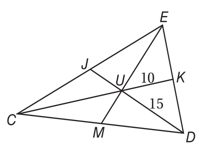
3) CU **12**

4) AD **24**

5) UF **6**

6) BE **18**

إذا كانت النقطة U مركز ΔCDE ، وكان: $UK = 10$, $EM = 21$, $UD = 15$ ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



7) CU **20**

8) MU **7**

9) CK **30**

10) JU **7.5**

11) EU **14**

12) JD **22.5**

الاسم ______________ التاريخ ________

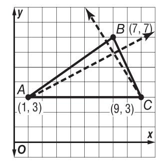
4-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

ارتفاعات المثلث:

ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلثٍ ارتفاعات ثلاثة، تتلاقَى المستقيمات التي تحويها في نقطة واحدة تسمى ملتقَى **ارتفاعات المثلث**.

مثال 1 إذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ $A(1,3)$, $B(7,7)$, $C(9,3)$، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثِّل $\triangle ABC$ بيانيًّا، ولإيجاد ملتقى ارتفاعاته، أوجد نقطة تقاطع اثنين من ارتفاعات المثلث الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من A إلى $\overline{BC}$:

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $-2 = \frac{7-3}{7-9} = \frac{4}{-2}$

إذن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{BC}$ يساوي $\frac{1}{2}$ ومعادلته هي:

$y - y_1 = m(x-x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y-3 = \frac{1}{2}(x-1)$	$m = \frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (1, 3)$
$y - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	خاصية التوزيع
$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$	اجمع 3 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{7-3}{7-1}$

إذن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $\frac{-3}{2}$ ومعادلته هي:

$y - y_1 = m(x-x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y - 3 = \frac{-3}{2}(x-9)$	$m = \frac{-3}{2}, (x_1, y_1) = (9, 3)$
$y - 3 = \frac{-3}{2}x + \frac{27}{2}$	خاصية التوزيع
$y = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2}$	اجمع 3 إلى الطرفين

الخطوة 3: حُلَّ النظام الناتج $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2} \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات

$\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2}$	تعويض قيمة y من المعادلة الأولى في الثانية
$\frac{5}{2} = -2x + \frac{33}{2}$	اطرح $\frac{1}{2}x$ من الطرفين
$-14 = -2x$	اطرح $\frac{33}{2}$ من الطرفين
$7 = x$	اقسم الطرفين على -2

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(7) + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6$

إذن ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ هو $(7, 6)$

تمارين

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

1) $\triangle JHI$ الذي رؤوسه: $J(1,0)$, $H(6,0)$, $I(3,6)$. **(3, 1)**

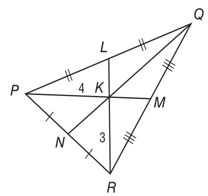
2) $\triangle STU$ الذي رؤوسه: $S(4,6)$, $T(8,-1)$, $U(10,2)$. **(10, 2)**

الاسم ______________ التاريخ ________

4-2 تدريبات المهارات

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

إذا كان: $NQ = 6, RK = 3, PK = 4$ في $\triangle PQR$ المجاور، فأوجد كلَّ طولٍ ممَّا يأتي:



1) KM **2**

2) KQ **4**

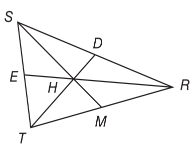
3) LK **1.5**

4) LR **4.5**

5) NK **2**

6) PM **6**

إذا كانت H مركز $\triangle STR$، وكان: $SM = 24, EH = 6, DH = 4$، فأوجد كلَّ طولٍ ممَّا يأتي:



7) SH **16**

8) HM **8**

9) TH **8**

10) HR **12**

11) TD **12**

12) ER **18**

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات مركز كلٍّ من المثلثين الآتيين:

13) $\triangle XYZ$ الذي رؤوسه: $X(-3,15)$, $Y(1,5)$, $Z(5,10)$. **(1, 10)**

14) $\triangle STR$ الذي رؤوسه: $S(2,5)$, $T(6,5)$, $R(10,0)$. **$(6, 3\frac{1}{3})$**

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

15) $\triangle LMN$ الذي رؤوسه: $L(8,0)$, $M(10,8)$, $N(14,0)$. **(10, 1)**

16) $\triangle DEF$ الذي رؤوسه: $D(-9,9)$, $E(-6,6)$, $F(0,6)$. **(−9, −3)**

الاسم ____________ التاريخ ____________

4-2 تدريبات حلّ المسألة

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

1) **توازن:** وضعت هدى قطعةً مسطّحةً مثلثة الشكل على طرف أصبعها فلم تسقط، ففي أي نقطة من المثلث وضعت هدى أصبعها؟

مركز المثلث

2) أراد أحمد أن يصمِّم أشرطة زينة تُعلَّق في السقف عبارة عن خيط في نهايته مثلث، بحيث يكون المثلث في وضع أفقيٍّ عند تثبيت الخيط في السقف.

a) من أي نقطةٍ في المثلث سيمرّ الخيط؟

عند نقطة التوازن.

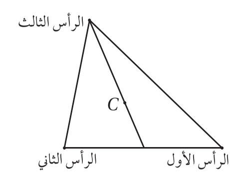
b) إذا أراد أن يكون الشكل أكثر جمالًا، وأن يُعلق المثلث في نقطةٍ تكون متساوية البعد عن رؤوسه وعن أضلاعه، فما نوع المثلث الذي يختاره للتصميم؟ ولماذا؟

مثلث متطابق الأضلاع؛ لأنه في المثلث المتطابق الأضلاع مركز المثلث هو نفسه مركز الدائرتين الداخلية والخارجية للمثلث.

3) **قص:** أراد سعيد أن يقصَّ ورقةً على شكل مثلث، بشرط أن تكون حافة الورقة أحد أضلاع المثلث، والنقطة C مركزه، كما هو مبيَّن بالشكل.

هل يمكنه تحديد المثلث وقصُّه بهذه المعطيات؟ إذا كانت الإجابة نعم، فوضِّح الخطوات التي يقوم بها سعيد لتحديد المثلث.

نعم، يصل سعيد النقطة C بمنتصف حافة الورقة، ويقيس هذه القطعة ويمدّها في الاتجاه الآخر بضعف الطول، فيتحدّد الرأس الثالث للمثلث.



4) وضع مدرس الرياضيات 3 مجموعات من المثلثات: مجموعة مثلثات حادة الزوايا، ومجموعة مثلثات منفرجة الزاوية، ومجموعة مثلثات قائمة الزاوية، ثم طلب إلى كلِّ طالب اختيار مثلث، وإيجاد نقطة التقاء الارتفاعات فيه، إذا أراد خالد أن يختار مثلثًا، بحيث يحدد النقطة من دون الحاجة إلى مسطرة أو أي أداة رسم، فما نوع المثلث الذي يختاره؟ ولماذا؟

قائم الزاوية؛ لأن نقطة التقاء الارتفاعات هي رأس الزاوية القائمة.

5) **ميادين:** صمّم مهندس معماري ميدانًا عامًّا مثلث الشكل، ولأغراض رياضيَّة أعطى المهندس اهتمامًا زائدًا لموقع مركز الميدان C، ولمركز الدائرة التي تمرّ برؤوسه O.

a) إذا أراد المهندس أن يتحقق الشرط: بأن تكون C هي نفسها O، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث الذي يمثِّل الميدان في هذه الحالة؟

نعم، مثلث متطابق الأضلاع.

b) إذا أراد المهندس أن تكون النقطة C داخل الميدان، والنقطة O خارجه، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث الذي يمثل الميدان في هذه الحالة؟

نعم، مثلث منفرج الزاوية.

c) إذا أراد المهندس أن تكون النقطة C خارج الميدان، والنقطة O داخله، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث في هذه الحالة؟

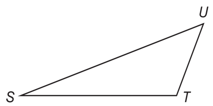
لا يمكنه القيام بذلك.

الاسم ____________ التاريخ ____________

4-2 التدريبات الإثرائية

تعيين مركز المثلث وملتقى ارتفاعاته

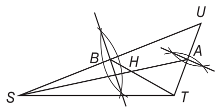
تلتقي القطع المتوسطة للمثلث في نقطة واحدة تسمّى مركز المثلث، ويمكن تعيين مركز أي مثلث باستعمال الفرجار والمسطرة غير المدرجة.



اتبع الخطوات الآتية لتعيين مركز ΔSTU، مستعملًا فرجارًا ومسطرةً غير مدرجةٍ:

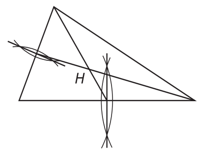
الخطوة 1: عيّن نقطتَي منتصفَي الضلعين $\overline{TU}, \overline{SU}$، وسمّ نقطتَي منتصفَيهما A, B على الترتيب:

الخطوة 2: ارسم القطعتين $\overline{SA}$, $\overline{TB}$، وسمّ نقطة تقاطعهما H، ستكون H مركز ΔSTU .

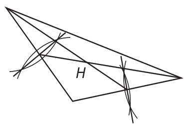


عيّن مركز كلٍّ من المثلثين الآتيين:

1)

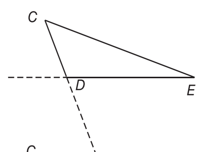


2)



تلتقي ارتفاعات المثلث الثلاثة في نقطة واحدة تسمّى مُلتقَى الارتفاعات، ويمكن تعيين ملتقى الارتفاعات باستعمال الفرجار والمسطرة.

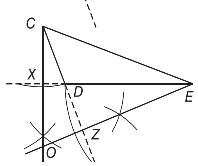
اتبع الخطوات الآتية لتعيين مُلتقى ارتفاعات ΔCDE مستعملًا فرجارًا ومسطرة غير مدرجة:



الخطوة 1: مُدّ الضلعين $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ من جهة النقطة D كما في الشكل المجاور؛ لتتمكن من رسم العمودين من الرأسين E, C .

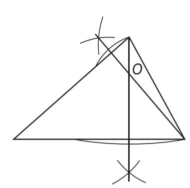
الخطوة 2: أنشئ من الرأس C عمودًا على المستقيم DE، وسمِّ نقطة تقاطعهما X، وبالمِثل أنشئ من الرأس E عمودًا على المستقيم CD، وسمّ نقطة تقاطعهما Z، لاحظ أن كلًا من Z, X واقعتان خارج ΔCDE.

الخطوة 3: سمّ نقطة تقاطع العمودين ($\overleftrightarrow{CX}$, $\overleftrightarrow{EZ}$) النقطة O، وهي ملتقى ارتفاعات ΔCDE.

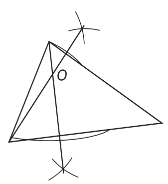


عيّن ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

3)



4)



الاسم ______________________ التاريخ ____________

4-3 تدريبات إعادة التعليم

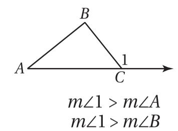
المتباينات في المثلث

متباينات الزوايا:

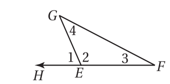
يمكنك استعمال خصائص المتباينات التي تتضمّن التعدّي والجمع والطرح، مع قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة، بالإضافة إلى خاصيّة المقارنة للمتباينة التي نصُّها:

لكلِّ عددين حقيقيين a وb، يكون: $a < b$ أو $a = b$ أو $b > a$.

ويمكنك استعمال نظرية الزاوية الخارجية لإثبات المتباينة الآتية:

نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة	قياس أيِّ زاوية خارجيّة لمثلث أكبر من قياس أيٍّ من زاويتَي المثلث الداخليتين البعيدتين عنها.	 $m\angle 1 > m\angle A$ $m\angle 1 > m\angle B$

مثال استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقَّمة التي قياس كلٍّ منها أصغر من $m\angle 1$.

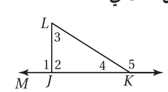


قياس الزاوية الخارجية أكبر من قياس أيٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها،

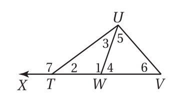
لذا فإن: $m\angle 1 > m\angle 3$، $m\angle 4 < m\angle 1$، حيث $\angle 4$، $\angle 3$ هما الزاويتان الداخليتيان البعيدتان.

تمارين

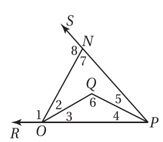
استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة ؛ لكتابة جميع الزوايا المرقَّمة التي تحقّق الشرط المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:



التمرينان 1, 2



التمارين 8–3



التمرينان 9, 10

1) قياسها أصغر من $m\angle 1$. **$\angle 4$, $\angle 3$**

2) قياسها أكبر من $m\angle 3$. **$\angle 5$, $\angle 1$**

3) قياسها أصغر من $m\angle 1$. **$\angle 6$, $\angle 5$**

4) قياسها أكبر من $m\angle 1$. **$\angle 7$**

5) قياسها أصغر من $m\angle 7$. **$\angle 1$, $\angle 3$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle TUV$**

6) قياسها أكبر من $m\angle 2$. **$\angle 4$**

7) قياسها أكبر من $m\angle 5$. **$\angle 1$, $\angle 7$, $\angle TUV$**

8) قياسها أصغر من $m\angle 4$ **$\angle 2$, $\angle 3$**

9) قياسها أصغر من $m\angle 1$. **$\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 7$, $\angle NPR$**

10) قياسها أكبر من $m\angle 4$. **$\angle 1$, $\angle 8$, $\angle OPN$, $\angle ROQ$**

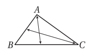
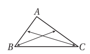
الاسم ______________________ التاريخ ____________

4-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

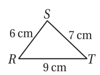
المتباينات في المثلث

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه:

عندما تكون أضلاع المثلث غير متطابقة، تتحقّق العلاقات الآتية بين أضلاعه وزواياه:

متباينة ضلع – زاوية	إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.	 إذا كان $AC > AB$، فإنّ $m\angle B > m\angle C$.
متباينة زاوية – ضلع	إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.	 إذا كان $m\angle A > m\angle C$، فإنّ $BC > AB$.

مثال 1 اكتب زوايا ΔRST مرتّبة وفقًا لقياساتها من الأصغر إلى الأكبر.



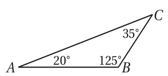
الأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{SR}, \overline{ST}, \overline{RT}$

والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle T, \angle R, \angle S$ على الترتيب؛

لذا فالزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر على النحو الآتي:

$\angle T, \angle R, \angle S$

مثال 2 اكتب أضلاع ΔABC مرتّبةً وفقًا لأطوالها من الأقصر إلى الأطول.



الزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$

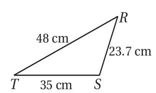
والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{CB}, \overline{AB}, \overline{AC}$ على الترتيب؛

لذا فالأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول على النحو الآتي:

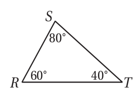
$\overline{CB}, \overline{AB}, \overline{AC}$

تمارين

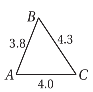
اكتب زوايا كلٍّ مثلث وأضلاعه مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر فيما يأتي:

1)


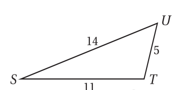
$\angle T, \angle R, \angle S$
$\overline{RS}, \overline{ST}, \overline{TR}$

2)


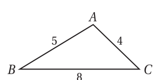
$\angle T, \angle R, \angle S$
$\overline{RS}, \overline{ST}, \overline{TR}$

3)


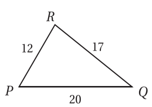
$\angle C, \angle B, \angle A$
$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

4)


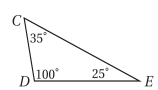
$\angle S, \angle U, \angle T$
$\overline{TU}, \overline{ST}, \overline{SU}$

5)


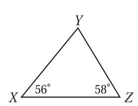
$\angle B, \angle C, \angle A$
$\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$

6)


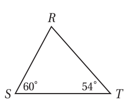
$\angle Q, \angle P, \angle R$
$\overline{PR}, \overline{QR}, \overline{PQ}$

7)


$\angle E, \angle C, \angle D$
$\overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EC}$

8)


$\angle X, \angle Z, \angle Y$
$\overline{YZ}, \overline{XY}, \overline{XZ}$

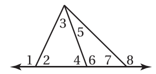
9)


$\angle T, \angle S, \angle R$
$\overline{RS}, \overline{TR}, \overline{TS}$

4-3 تدريبات المهارات

المتباينات في المثلث

استعمل الشكل المجاور لتحدّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعةٍ مما يأتي:



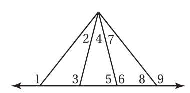
1) $\angle 4$، $\angle 3$، $\angle 1$ **$\angle 1$**

2) $\angle 7$، $\angle 5$، $\angle 4$ **$\angle 4$**

3) $\angle 6$، $\angle 3$، $\angle 2$ **$\angle 6$**

4) $\angle 8$، $\angle 6$، $\angle 5$ **$\angle 8$**

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقّق الشرط المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:



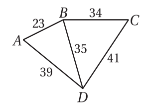
5) قياسها أقلّ من $m\angle 1$. **$\angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 7, \angle 8$**

6) قياسها أقلّ من $m\angle 9$. **$\angle 2, \angle 4, \angle 6, \angle 7$**

7) قياسها أكبر من $m\angle 5$. **$\angle 1, \angle 3$**

8) قياسها أكبر من $m\angle 8$ **$\angle 1, \angle 3, \angle 5$**

قارن بين قياسي الزاويتين في كلٍّ ممّا يأتي:



9) $m\angle ABD, m\angle BAD$
$m\angle ABD > m\angle BAD$

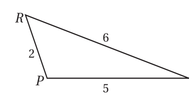
10) $m\angle ADB, m\angle BAD$
$m\angle ADB < m\angle BAD$

11) $m\angle BCD, m\angle CDB$
$m\angle BCD > m\angle CDB$

12) $m\angle CBD, m\angle CDB$
$m\angle CBD > m\angle CDB$

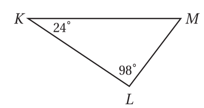
اكتب زوايا كلّ مثلث وأضلاعه مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر فيما يأتي:

13)



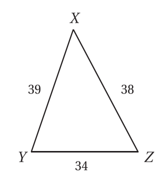
$\angle Q, \angle R, \angle P$, $\overline{RP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RQ}$

14)



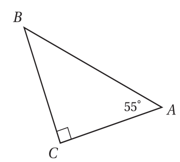
$\angle K, \angle M, \angle L$, $\overline{ML}$, $\overline{KL}$, $\overline{KM}$

15)



$\angle X, \angle Y, \angle Z$; $\overline{YZ}$, $\overline{XZ}$, $\overline{XY}$

16)



$\angle B, \angle A, \angle C, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$

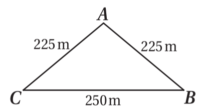
4-3 تدريبات حلّ المسألة

المتباينات في المثلث

1) **مسافات:** يقع منزلا أيمن وسعد في شارع واحدٍ مستقيم، ويمكنهما رؤية سارية علم بعيدةٍ عنهما من شرفتَي منزليهما، إذا كانت الزاوية التي يصنعها خط نظر أيمن للسارية مع القطعة الواصلة بين المنزلين، أكبر من الزاوية التي يصنعها خط نظر سعد للسارية مع القطعة الواصلة بين المنزلين، فما العلاقة بين بُعدَيهما عن سارية العلم؟

منزل أيمن أقرب لسارية العلم.

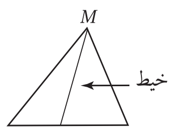
2) **مستودع:** قرّر سعد بناء مستودع في مزرعته عند الزاوية ذات القياس الأكبر، فإذا كانت حدود مزرعته مبيّنة كما في الشكل أدناه،



فعند أي زاوية سيبني المستودع؟ ولماذا؟

عند $\angle A$ ؛ لأنها تقابل الضلع الأطول في المثلث.

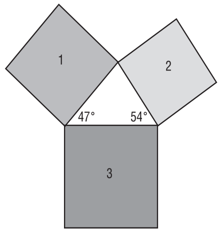
3) **خيط:** كوّن صالح مثلثًا باستعمال ثلاثة عيدان، ثم ربط طرف خيط بين الرأس M ونقطة على العود المقابل للرأس M، وشدّ الخيط حتى أصبح مستقيمًا، هل يمكن أن يزيد طول الخيط على طول الضلع الأطول بين الضلعين الآخرين؟ ولماذا؟



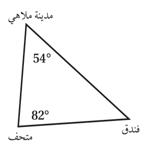
إجابة ممكنة: لا؛ لأن الخيط يقسم المثلث إلى مثلثين؛ أحدهما قائم الزاوية أو منفرج الزاوية؛ لأن أحد طرفي الخيط سيصنع مع العود المربوط معه زاوية قائمة أو منفرجة، وفي هذا المثلث سيكون الضلع المقابل للزاوية القائمة أو الزاوية المنفرجة أطول من الخيط، وهذا الضلع سيكون ضلعًا للمثلث الكبير أيضًا.

4) **مربّعات:** لدى محمد ثلاثة مربّعات مختلفة، وقد رتّبها لتشكّل مثلثًا كما في الشكل أدناه، بناءً على المعطيات المُبيَّنة في الشكل، اكتب أرقام المربّعات مرتّبةً من المربع ذي المحيط الأصغر إلى المربع ذي المحيط الأكبر.

3, 1, 2



5) **مُرشد سياحي:** يحمل مرشد سياحي خريطة عليها المعالم المبيّنة في الشكل التالي:



a) بناءً على المعطيات الواردة في الشكل، أيُّ موقعين أحدهما أقرب إلى الآخر؟

مدينة الملاهي والمتحف

b) بناءً على المعطيات الواردة في الشكل، أيُّ موقعين أحدهما أبعد إلى الآخر؟

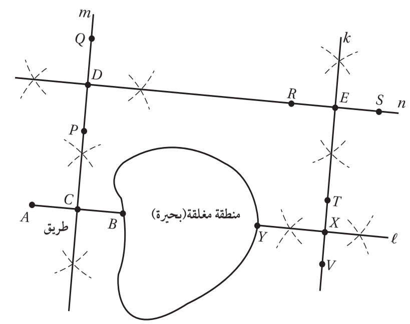
الفندق ومدينة الملاهي

الاسم ______________ التاريخ ________

4-3 التدريبات الإثرائيّة

إنشاء هندسيّ

يبيّن الشكل أدناه القطعة المستقيمة AB عن يسار منطقة مغلقة (بحيرة)، وتتطلّب المسألة رسم قطعة مستقيمة أخرى XY عن يمين المنطقة المغلقة، على أن تكون النقاط A, B, X, Y على استقامة واحدة، علمًا بأنه لا يُسمح لك ملامسة أو عُبور المنطقة المغلقة بالفرجار أو المسطرة.



تتبّع الخطوات (5–1)؛ لإنشاء القطعة المستقيمة $\overline{XY}$ ، على أن تكون على استقامة القطعة $\overline{AB}$.

1) أنشئ العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$ ، وسمِّ نقطة المنتصف C ، والعمود m.

2) عيّن النقطتين P, Q على العمود m ، على أن تقعا فوق المنطقة المغلقة، وأنشئ العمود n المنصّف لـ $\overline{PQ}$ ، وسمِّ نقطة تقاطع المستقيمين m وَ n النقطة D.

3) عيّن النقطتين R, S على العمود n، على أن تقعا يمين المنطقة المغلقة، وأنشئ العمود k المنصّف لـ $\overline{RS}$، وسمّ نقطة تقاطع المستقيمين n و k النقطة E.

4) عيّن النقطة X على العمود k ، على أن تكون X أسفل العمود n ، وتكون $\overline{EX}$ تطابق $\overline{DC}$.

5) عيّن النقطتين T وَ V على المستقيم k وعلى جانبَي X، على أن تكون كلٌّ من $\overline{XT}$ و $\overline{XV}$ متطابقتين. ثم أنشئ العمود l المنصّف لـ $\overline{TV}$، وسمّ نقطة التقاء العمود l مع حدّ المنطقة المغلقة النقطة Y، وعليه تكون $\overline{XY}$ هي القطعة المطلوبة.

6) إذا كانت A, B, X, Y تمثّل مدنًا ستمرُّ فوقها طائرة، بحيث يكون خط سيرها مستقيمًا فوق هذه المدن الأربع، فكيف يمكننا على الأرض معرفة المسافة التي ستقطعها الطائرة بين المدينتين A, X ؟

إجابة ممكنة: بقياس $\overline{DE}$

الاسم ______________ التاريخ ________

4-4 تدريبات إعادة التعليم

البرهان غير المباشر

البرهان الجبري غير المباشر:

إحدى الطرق لإثبات صحّة عبارةٍ ما أو تبريرها **تبريرًا غير مباشر**، هو افتراض أنها غير صحيحة، وعندما تبيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو أي حقيقةٍ أخرى كتعريف أو نظريةٍ أو مسلّمةٍ ما، فإنك تكون قد أثبتّ أن افتراضك خطأ، وأن النتيجة الأصلية صحيحة. وهذا ما يُعرف **بالبرهان غير المباشر**، أو **البرهان بالتناقض**.

خطوات كتابة برهان غير مباشر
1) افترض أن النتيجة خاطئة.
2) بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، أو مع أي حقيقة أخرى، باستعمال التبرير المنطقي.
3) أشر إلى أنه بسبب افتراض خطأ النتيجة، حصلنا على عبارة غير صحيحة، ولذلك يتعيَّن أن تكون النتيجة الأصليّة صحيحةً.

ويمكن استعمال البراهين غير المباشرة في نظرية الأعداد؛ لإثبات كثير من الحقائق المرتبطة بالأعداد الزوجية (التي يُعبَّر عنها بالصورة $2k$، حيث k عدد صحيح)، والأعداد الفردية (والتي يُعبَّر عنها بالصورة $2m+1$، حيث m عدد صحيح).

مثال **اكتب برهانًا غير مباشرٍ؛ لتبيِّن أنه إذا كان $3x+5>8$، فإن $x>1$.**

المعطيات: $3x + 5 > 8$

المطلوب: إثبات أن $x > 1$

الخطوة 1: افترض أن x ليست أكبر من 1. أي افترض أن: $x \le 1$.

الخطوة 2:

$x \le 1$	افتراض
$3x \le 3$	اضرب الطرفين بـ3
$3x + 5 \le 3+5$	اجمع 5 للطرفين
$3x + 5 \le 8$	بسّط

الخطوة 3: هذا يناقض المعطيات بأنّ $3x + 5 > 8$، وعليه فإن الافتراض خطأ؛ مما يعني أنه يتعيّن أن تكون العبارة "$x > 1$" صحيحةً.

تمارين

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين :

1) إذا كان $2x > 14$ ، فإنّ $x > 7$. $\boldsymbol{x \le 7}$.

2) لجميع الأعداد الحقيقيّة، إذا كان $a + b > c$ ، فإنّ $a > c - b$. $\boldsymbol{a \le c - b}$

3) أكمل البرهان غير المباشر الآتي:

المعطيات: n عدد صحيح، و n^2 عدد زوجي.

المطلوب: إثبات أن n عدد زوجي.

a) افترض أن: **العدد n ليس زوجيًا؛ أي افترض أن n عدد فرديّ**

b) إذن يمكنك كتابة n في الصورة $2a + 1$ ، بحسب **تعريف العدد الفرديّ**

c) $n^2 = \boldsymbol{(2a + 1)^2}$ بالتعويض.

d) $= (2a + 1)(2a + 1)$ تعريف القوة.

e) $= 4a^2 + 4a + 1$ بالتبسيط.

f) $= 2(2a^2 + 2a) + 1$ **خاصية التوزيع**

g) $2(2a^2 + 2a) + 1$ عدد فرديّ، وهذا يناقض المعطيات التي تنصُّ على أن n^2 عدد زوجي؛ إذن يتعيَّن أن يكون الافتراض **خطأ** ، لذلك فإن **n عدد زوجيّ**.

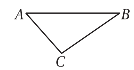
الاسم ______________ التاريخ ______________

4-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

البرهان غير المباشر

البرهان غير المباشر في الهندسة:
عند كتابة برهانٍ غير مباشرٍ في الهندسة، افترض أن النتيجة خطأ، ثم بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض، والتناقض يدلّ على أنه لا يمكن أن تكون النتيجة خطأً، وعندئذٍ نستنتج أنها صحيحة.

مثال اكتب برهانًا غير مباشرٍ؛ لتبيِّن أنه في $\triangle ABC$ إذا كان $m\angle C = 100°$ ، فإن $\angle A$ ليست قائمة.



المعطيات: $m\angle C = 100°$

المطلوب: إثبات أنّ $\angle A$ ليست قائمة.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\angle A$ قائمة.

الخطوة 2: بيّن أن هذا الافتراض يؤدّي إلى تناقض، فإذا كانت $\angle A$ قائمة، فإن $m\angle A = 90°$. و $m\angle C + m\angle A = 100° + 90° = 190°$؛ إذن مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ أكبر من $180°$.

الخطوة 3: تبيّن النتيجة أن مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ أكبر من $180°$، وهي تتناقض مع نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، فالافتراض بأن $\angle A$ قائمة افتراض خطأ، وهذا يعني أن العبارة "$\angle A$ ليست قائمة" نتيجة صحيحة.

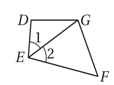
تمارين

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلّ عبارة ممّا يأتي:

1) إذا كان $m\angle A = 90°$ ، فإنّ $m\angle B = 45°$ **$m\angle B \neq 45°$**

2) إذا لم تكن $\overline{AV}$ مطابقة لـ $\overline{VE}$ ، فإنّ $\triangle AVE$ ليس متطابق الضلعين. **$\triangle AVE$ متطابق الضلعين**

3) أكمل البرهان غير المباشر الآتي:



المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$ ، و $\overline{FG} \ncong \overline{DG}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{FE} \ncong \overline{DE}$.

a) افترض أن **$\overline{DE} \cong \overline{FE}$** افترض أن النتيجة خطأ.

b) $\overline{EG} \cong \overline{EG}$ **خاصيّة الانعكاس للتطابق**

c) $\triangle EDG \cong \triangle EFG$ **SAS**

d) **$\overline{DG} \cong \overline{FG}$** ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

e) وهذا يناقض المعطيات؛ لذا يتعيّن أن يكون الافتراض **خطأ**

f) إذن **$\overline{FE} \ncong \overline{DE}$**

الاسم ______________ التاريخ ______________

4-4 تدريبات المهارات

البرهان غير المباشر

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلّ عبارةٍ ممّا يأتي:

1) $m\angle ABC < m\angle CBA$
$m\angle ABC \geq m\angle CBA$

2) $\triangle DEF \cong \triangle RST$
$\triangle DEF \ncong \triangle RST$

3) المستقيم a عموديّ على المستقيم b.
المستقيم a ليس عموديًا على المستقيم b .

4) $\angle 5$ مكمّلة لـ $\angle 6$
$\angle 5$ ليست مكملة لـ $\angle 6$

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ ممّا يأتي:

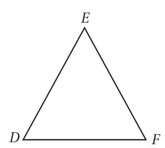
5) **المعطيات:** $2x - 3 \geq 7$

المطلوب: إثبات أنَّ $x \geq 5$

البرهان:

الخطوة 1: افترض أن $x < 5$.
الخطوة 2: إذا كانت $x < 5$ ، فإن $2x < 10$، وهذا يؤدي إلى أن $2x - 3 < 7$، وهذا يناقض المعطيات بأن $2x - 3 \geq 7$.
الخطوة 3: الافتراض $x < 5$ أدى إلى تناقض؛ لذا فهو افتراض خطأ.
وعليه فإن النتيجة $x \geq 5$ صحيحة.

6) **المعطيات:** $\angle D \ncong \angle F$



المطلوب: إثبات أنَّ $DE \neq EF$

البرهان:

الخطوة 1: افترض أنّ $DE = EF$.
الخطوة 2: إذا كان $DE = EF$ ، فإنّ $\overline{DE} \cong \overline{FE}$ وفق تعريف تطابق القطع المستقيمة.
ولكن إذا كانت $\overline{EF} \cong \overline{DE}$ ، فإن $\angle D \cong \angle F$ وفق نظرية المثلث المتطابق الضلعين، وهذا يناقض المعطيات بأن $\angle D \ncong \angle F$.
الخطوة 3: الافتراض $DE = EF$ أدى إلى تناقض، لذا فهو افتراض خطأ.
لذلك فإن النتيجة $DE \neq EF$ صحيحة.

الاسم ____________ التاريخ ________

4-4 تدريبات حلّ المسألة
البرهان غير المباشر

1) زوارق: خرج خمسة وثلاثون صيادًا في رحلة صيد أسماك. فاستقلُّوا 17 زورقًا، استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أن زورقًا واحدًا على الأقلّ سيحمل أكثر من صيادين.

إجابة ممكنة: افترض أن عدد الصيادين الذين يحملهم كلّ زورق أقل من أو يساوي 2، وعليه فإنّ العدد الكُلي للصيادين سيكون أقلّ من أو يساوي 34 ؛ لأن $34 = 2 \times 17$ وهذا تناقض.

2) رحلة عمل: سافر خالد للعمل خلال العام الماضي 15 مرةً، استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن خالدًا سافر أكثر من مرة في شهر على الأقل.

إجابة ممكنة: افترض أن خالدًا سافر مرةً على الأكثر في كل شهر من العام الماضي؛ إذن عدد المرات التي سافر فيها العام الماضي لن يتعدى 12 مرة، وهذا يناقض المعطى؛ إذن الافتراض غير صحيح، وخالد سافر أكثر من مرة خلال شهر على الأقل من العام الماضي.

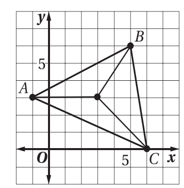
3) دفع محمد 6000 ريال؛ لشراء كمبيوتر وتلفاز، استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أن ثمن أحدهما لا يقل عن 3000 ريال.

افترض أن ثمن كلّ منهما يقل عن 3000 ريال؛ أي: $x<3000$ ، $y<3000$ ؛ إذن $x+y<6000$ وهـذا يناقض أنـه دفع 6000 ريال؛ إذن الافتراض غير صحيح؛ أي أن النتيجـة الأصليـة هـي أن ثمن أحدهمـا لا يقل عن 3000 ريال صحيحةً.

4) أعداد: تتكون الأعداد: 702295 ,426803 ,357719 جميعها من 6 أرقام، استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن أي عدد يتكون من 6 أرقام يحتوي على رقم مكرّر أو رقمين متتاليين من أرقام النظام العشري.

افترض أن الأرقام غير مكررة وليست متتالية، بما أن الأرقام غير متتالية، فإن أقصى عدد يمكن استخدامه من الأرقام هو 5، وبما أنه لا يُسمح بالتكرار، فإن أكبر عدد يمكن تكوينه من هذه الأرقام هو عدد من 5 أرقام، وهذا يناقض أن العدد من 6 أرقام.

5) مثلثات شبكيّة: النقطة الشبكيّة هي نقطة إحداثيّاها عددان صحيحان. والمثلث الشبكي هو مثلثٌ، رؤوسُه نقاط شبكيّة. ومن حقائق المثلثات الشبكيّة أن مساحة المثلث الشبكيّ تساوي 0.5 وحدة مربّعة على الأقل.



a) افترض أن $\triangle ABC$ يحتوي بداخله على نقطة شبكيّة، وبيّن أنه يمكنك تجزئة المثلث الشبكيّ إلى ثلاثة مثلثات شبكيّة.

إجابة ممكنة: كلّ رأسين من رؤوس $\triangle ABC$ يشكّلان مع النقطة الشبكية الداخلية مثلثًا شبكيًا، كما يتضح من الشكل أعلاه.

b) اكتب برهانًا غير مباشر يبيّن أن المثلث الشبكيّ الذي مساحته 0.5 وحدة مربّعة، لا يحتوي على نقاطٍ شبكيّة بداخله. (وقوع النقطة على المثلث لا يعني أنّها بداخله).

إجابة ممكنة: إذا احتوى المثلث الشبكيّ على نقطة شبكية بداخله، فإنه يمكن تجزئته إلى 3 مثلثات شبكيّة صغيرة، مساحة كلّ منها 0.5 وحدة مربّعة على الأقل. وبذلك تكون مساحة المثلث الأصلي 1.5 وحدة مربّعة على الأقل، وهذا تناقض.

الاسم ____________ التاريخ ________

4-4 التدريبات الإثرائيّة

أمثلة مضادة أُخرى

يمكنك إثبات عدم صحة بعض العبارات في الرياضيات باستعمال الأمثلة المضادة. لنأخذ العبارة الآتية:

لكل عددين a وb يكون $a - b = b - a$"،

يمكنك إثبات عدم صحتها بصورة عامة، إذا أمكن إيجاد مثالٍ واحدٍ على الأقل تكون فيه العبارة خاطئة.

افترض أن $a = 7$ و $b = 3$، وعوّض هذه القيم في المعادلة أعلاه.

$$7 - 3 \stackrel{?}{=} 3 - 7$$
$$4 \neq -4$$

وبصورة عامة لكلّ عددين a و b تكون العبارة $a - b = b - a$ خاطئة. ويمكنك صياغة الجملة السابقة بعبارة لفظية مكافئة هي: الطرح عمليّة غير إبداليّة.

إذا كانت a, b, c أيّ ثلاثة أعداد، فأثبت أن العبارة خاطئة بتقديم مثالٍ مُضادٍّ في كلٍّ من الأسئلة الآتية: الإجابات المُعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.

1) $a - (b - c) \stackrel{?}{=} (a - b) - c$

$\mathbf{6 - (4 - 2) \stackrel{?}{=} (6 - 4) - 2}$
$\mathbf{6 - 2 \stackrel{?}{=} 2 - 2}$
$\mathbf{4 \neq 0}$

2) $a \div (b \div c) \stackrel{?}{=} (a \div b) \div c$

$\mathbf{6 \div (4 \div 2) \stackrel{?}{=} (6 \div 4) \div 2}$
$\mathbf{6 \div 2 \stackrel{?}{=} 1.5 \div 2}$
$\mathbf{3 \neq 0.75}$

3) $a \div b \stackrel{?}{=} b \div a$

$\mathbf{6 \div 4 \stackrel{?}{=} 4 \div 6}$
$\mathbf{\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}}$

4) $a \div (b + c) \stackrel{?}{=} (a \div b) + (a \div c)$

$\mathbf{6 \div (4 + 2) \stackrel{?}{=} (6 \div 4) + (6 \div 2)}$
$\mathbf{6 \div 6 \stackrel{?}{=} 1.5 + 3}$
$\mathbf{1 \neq 4.5}$

5) $a + (bc) \stackrel{?}{=} (a + b)\ (a + c)$

$\mathbf{6 + (4 \times 2) \stackrel{?}{=} (6 + 4)(6 + 2)}$
$\mathbf{6 + 8 \stackrel{?}{=} (10)(8)}$
$\mathbf{14 \neq 80}$

6) $a^2 + a^2 \stackrel{?}{=} a^4$

$\mathbf{6^2 + 6^2 \stackrel{?}{=} 6^4}$
$\mathbf{36 + 36 \stackrel{?}{=} 1296}$
$\mathbf{72 \neq 1296}$

7) اكتب عبارةً لفظيّةً مكافئةً لكلٍّ من الأسئلة 3 ,2 ,1.

1) **عملية الطرح ليست تجميعيّة.**
2) **عملية القسمة ليست تجميعيّة.**
3) **عملية القسمة ليست إبداليّة.**

8) **العبارة:** $a\,(b + c) = ab + ac$ تمثّل خاصيّة توزيع الضرب على الجمع، والسؤالان 4 و 5 يبينان أنّ بعض العمليات لا توزّع على الجمع، اكتب عبارةً لفظيّةً تصف ذلك.

4) **عملية القسمة لا تتوزع على الجمع.**
5) **عملية الجمع لا تتوزع على الضرب.**

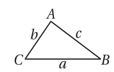
الاسم ______________ التاريخ __________

4-5 تدريبات إعادة التعليم

متباينة المثلث

متباينة المثلث:

إذا أخذت ثلاثة عيدان أطوالها 1 in, 5 in, 8 in؛ وحاولت أن تكوّن منها مثلثًا، فستجد أن ذلك غير ممكن. وهذا يوضّح نظرية متباينة المثلث.

نظريّة متباينة المثلث	مجموع طولَي أيّ ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.	 $a+b>c$ $b+c>a$ $a+c>b$

مثال إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ 5 و8، فأوجد مدى طول الضلع الثالث.

افترض أن طول الضلع الثالث x

بناءً على نظريّة متباينة المثلث، فإن جميع المتباينات الثلاث الآتية يتعيّن أن تكون صحيحةً.

$5+8>x$ $8+x>5$ $5+x>8$

$13>x$ $x>-3$ $x>3$

إذن يتعيّن أن تكون x بين العددين 3 و13.

تمارين

حدِّد ما إذا كانت القياسات المُعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ من الأسئلة الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فوضِّح السبب.

1) 6 m, 4 m, 3 m **نعم**
2) 6 cm, 9 cm, 15 cm **لا؛ 9 + 6 = 15**
3) 8 cm, 8 cm, 8 cm **نعم**
4) 5 in, 4 in, 2 in **نعم**
5) 16 in, 8 in, 4 in **لا؛ 16 > 8 + 4**
6) 3 ft, 2 ft, 5 ft, 1 ft, 5 ft **نعم**

اكتب متباينةً تمثِّل مدى طول الضلع الثالث للمثلث المُعطَى طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

7) 1 cm و 6 cm.
$5 \text{ cm} < n < 7 \text{ cm}$

8) 12 m و 18 m.
$6 \text{ m} < n < 30 \text{ m}$

9) 1.5 ft و 5.5 ft
$4 \text{ ft} < n < 7 \text{ ft}$

10) 82 m و 8 m
$74 \text{ m} < n < 90 \text{ m}$

11) افترض أن لديك ثلاثة أعداد موجبة مختلفة ومرتَّبة من الأصغر إلى الأكبر، ما المقارنة الوحيدة التي ستمكّنك من معرفة ما إذا كان يمكن أن تكوّن هذه الأعداد أطوال أضلاع مثلثٍ أم لا؟

أجد مجموع العددين الصغيرين وأقارنه بالعدد الأكبر، فإذا كان مجموعهما أكبر من العدد الأكبر، فإنه يمكن أن تكون الأعداد الثلاثة أطوال أضلاع مثلث.

الاسم ______________ التاريخ __________

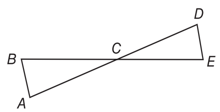
4-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

متباينة المثلث

استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين:

يمكنك استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين:



المعطيات: $\Delta ABC \cong \Delta DEC$

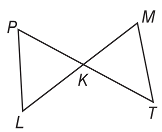
المطلوب: إثبات أنّ $AB+DE > AD-BE$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\Delta ABC \cong \Delta DEC$.	1) معطيات
2) $AB+BC > AC, DE+EC > CD$.	2) نظرية متباينة المثلث
3) $AB>AC-BC, DE>CD-EC$.	3) بالطرح
4) $AB+DE > AC-BC+CD-EC$.	4) بجمع المتباينتين في 3
5) $AB+DE > AC+CD-BC-EC$.	5) الخاصية الإبدالية
6) $AB+DE > AC+CD-(BC+EC)$.	6) خاصية التوزيع
7) $AC+CD = AD, BC+EC = BE$.	7) مسلمة جمع القطع المستقيمة
8) $AB+DE > AD-BE$.	8) بالتعويض

تمرين

أكمل البرهان ذا العمودين الآتي:



المعطيات: $\overline{PL} \parallel \overline{MT}$

K نقطة منتصف $\overline{PT}$

المطلوب: إثبات أنّ $PK+KM > PL$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{PL} \parallel \overline{MT}$	1) **معطيات** ؟
2) $\angle P \cong \angle T$	2) **نظرية الزوايا المتبادلة داخليًا**
3) K نقطة منتصف $\overline{PT}$	3) معطيات
4) $PK = KT$	4) **تعريف نقطة منتصف قطعة مستقيمة**
5) **$\angle PKL \cong \angle MKT$**	5) نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
6) $\triangle PKL \cong \triangle TKM$	6) **ASA** ؟
7) **$PK + KL > PL$**	7) نظرية متباينة المثلث
8) **$KL = KM$** ؟	8) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
9) $PK+KM > PL$	9) **بالتعويض** ؟

الاسم ______________ التاريخ ________

4-5 تدريبات المهارات

متباينة المثلث

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من القياسات المعطاة يمكن أن تمثِّل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فوضِّح السبب.

1) 2 ft ; 3 ft ; 4 ft **نعم**

2) 5 m ; 7 m ; 9 m **نعم**

3) 4 mm ; 8 mm ; 11 mm **نعم**

4) 13 in ; 13 in ; 26 in **لا؛ لأن $26 \not< 13 + 13$**

5) 9 cm ; 10 cm ; 20 cm **لا؛ لأن $20 \not< 9 + 10$**

6) 15 km ; 17 km ; 19 km **نعم**

7) 14 m ; 17 m ; 31 m **لا؛ لأن $31 \not< 14 + 17$**

8) 6 m ; 7 m ; 12 m **نعم**

اكتب متباينة تمثِّل مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) 5 ft ; 9 ft
$4\ ft < n < 14\ ft$

10) 7 in ; 14 in
$7\ in < n < 21\ in$

11) 8 m ; 13 m
$5\ m < n < 21\ m$

12) 10 mm ; 12 mm
$2\ mm < n < 22\ mm$

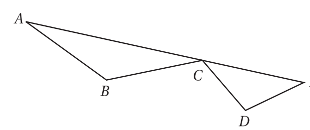
13) 12 cm ; 15 cm
$3\ cm < n < 27\ cm$

14) 15 km ; 27 km
$12\ km < n < 42\ km$

15) 17 cm ; 28 cm
$11\ cm < n < 45\ cm$

16) 18 ft ; 22 ft
$4\ ft < n < 40\ ft$

17) أكمل البرهان ذا العمودين:



المعطيات: $\triangle ABC$, $\triangle CDE$

المطلوب: إثبات أنّ: $AB + BC + CD + DE > AE$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $AB + BC > AC$ $CD + DE > CE$	1) **متباينة المثلث؟**
2) $AB + BC + CD + DE > AC + CE$	2) **خاصية الجمع للمتباينات.**
3) **$AC + CE = AE$؟**	3) مسلمة جمع القطع المستقيمة.
4) **$AB + BC + CD + DE > AE$؟**	4) بالتعويض.

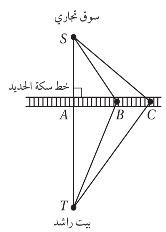
الاسم ______________ التاريخ ________

4-5 تدريبات حلِّ المسألة

متباينة المثلث

1) **عيدان:** لدى فوزية 5 عيدان أطوالها: 2, 4, 6, 8, 10 ستمترات. ما عدد المثلثات التي يمكنها تكوينها باستعمال ثلاثة عيدان في كلِّ مرَّة؟ **3**

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 2.



2) **طرق:** يريد راشد أن يعبُر خط سكّة الحديد؛ كي يصل إلى أقرب محلّ تجاريّ، وتوجد نقطتان يمكنه أن يعبر سكة الحديد عندهما وهما (النقطة C والنقطة B). أيّ الطريقين أطول؟ وضّح إجابتك.

الطريق عبر النقطة C أطول من الطريق عبر النقطة B،
إجابة ممكنة: لتكن S هي السوق التجاري، و T هي بيت راشد.
ولأن: $m\angle SAB = 90°$ و $m\angle SBA < 90°$،
فإنّ $m\angle SBC > 90°$.
ممّا يجعل $SC > SB$، وبالمثل $CT > BT$.
لذا فإن: $CT + CS > BT + BS$.

3) **تجربة علمية:** في تجربة علمية ما يحتاج طالب إلى ثني سلك طوله 6cm على شكل مثلث أطوال أضلاعه أعداد طبيعية، فقرّر الطالب تحديد النقاط التي يثني عندها السلك قبل القيام بذلك؛ حتى يحافظ على استقامة الأضلاع. فهل يمكن أن يثني الطالب السلك على بعد 1 cm من أحد طرفيه؟ ولماذا؟

لا؛ لأنه إذا قام بذلك، فإن مجموع طولي الضلعين الآخرين سيكون 5، وبالتالي ستكون الأطوال 1 cm ، 2 cm ، 3 cm ، وهذه لا تشكّل أطوال أضلاع مثلث؛ لأن $3 = 1 + 2$ أو تكون الأطوال: 1 cm ، 4 cm ، 1 cm ، وهذه أيضًا لا تشكل أطوال أضلاع مثلث؛ إذن لا يمكن ثني السلك على بعد 1 cm من أحد طرفيه.

4) **مُدن:** تشكّل المدن A, B, C رؤوس مثلث على الخريطة، إذا كانت المسافة بين المدينتين A, B تساوي 395 km، وبين المدينتين B, C تساوي 147 km، فما الحدّ الأدنى للمسافة الحقيقيّة بين المدينتين A, C؟ **248 km**

5) **مثلثات:** طول أحد أضلاع مثلثٍ 2 cm، افترض أن x يمثّل طول الضلع الثاني، و n يمثِّل طول الضلع الثالث، وافترض أن n, x عددان صحيحان موجبان، وأن: $14 < x < 17$ ، $13 < n < 17$.
اكتب جميع الأطوال الممكنة لأضلاع المثلث.

قيم n هي: 14 أو 15 أو 16، وقيم x هي 15 أو 16، والمثلثات التي يمكن عملها باستعمال هذه الأطوال هي:
2 cm , 15 cm, 14 cm أو 2 cm , 15 cm, 15 cm
أو 2 cm , 16 cm, 14 cm أو 2 cm , 16 cm, 15 cm.
أو 2 cm , 15 cm, 16 cm أو 2 cm , 16 cm, 16 cm.

الاسم ______________ التاريخ ________

4-5 التدريبات الإثرائيّة

متباينة المدى:

لإيجاد متباينةٍ تمثّل مدى طول الضلع الثالث للمثلث المُعطى طولا ضلعين من أضلاعه، قمنا بتطبيق نظرية متباينة المثلث على الأضلاع الثلاثة، ومن ثَم أوجدنا المدى.

يمكننا إيجاد المدى بطريقةٍ أخرى.

أجب عن الأسئلة الآتية للوصول للمتباينة.

إذا كانت a, b, c أطوال أضلاع مثلث، بحيث يكون $a \le b \le c$ فأجب عما يأتي:

1) هل يمكن أن يساوي طول أحد الأضلاع الفرق بين طولَي الضلعين الآخرين؟

لا؛ لأنه إذا كان مثلًا $a = c - b$ ، فإن $a + b = c$ تناقض نظرية متباينة المثلث.

2) هل يمكن أن يكون طول ضلع أصغر من الفرق بين طولَي الضلعين الآخرين؟

لا؛ لأنه إذا كان مثلًا $a < c - b$ ، فإن $a + b < c$، وهذا يناقض نظرية متباينة المثلث.

3) استنادًا إلى السؤالين (1 ، 2) خمِّن العلاقة بين طول ضلع مثلث والفرق بين طولَي الضلعين الآخرين.

طول أي ضلع في مثلث، أكبر من الفرق بين طولَي الضلعين الآخرين.

4) عبِّر عن العلاقة في السؤال (3) بمتباينة بالنسبة للضلع a، مع ضمان أن يكون الفرق موجبًا.

$|b - c| < a$

5) كوّن متباينةً مركبةً تفيد في تحديد مدى طول الضلع الثالث، بالاستفادة من مجموع طولَي الضلعين الآخرين والفرق بينهما.

$|b - c| < a < b + c$

6) استعمل المتباينة المركبة التي توصَّلت لها؛ لتحديد مدى طول الضلع الثالث لكلٍّ من المثلثات المعطى طولا ضلعين من أضلاعها.

a) 3 , 4 $\quad 1 < x < 7$ b) 7 , 9 $\quad 2 < x < 16$

c) 11 , 15 $\quad 4 < x < 26$ d) 20 , 30 $\quad 10 < x < 50$

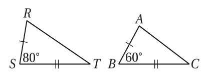
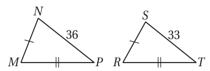
الاسم ______________ التاريخ ________

4-6 تدريبات إعادة التعليم

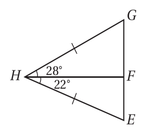
المتباينات في مثلثين

متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS):

تتضمّن النظريتان الآتيتان العلاقة بين أضلاع مثلثين وزاوية في كلٍّ منهما.

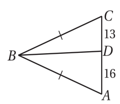
متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS)	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول، أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.	 $RT > AC$
عكس متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول، أكبر من قياس الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني.	 $m\angle M > m\angle R$

مثال 1 قارن بين طولَي $\overline{GF}$ و $\overline{EF}$.



لَمّا كان ضلعان في ΔHGF مطابقين لضلعين في ΔHEF، وكان $m\angle GHF > m\angle EHF$ ، فإنّ $GF > FE$ وفق المتباينة SAS.

مثال 2 قارن بين قياسَي $\angle ABD$ و $\angle CBD$.

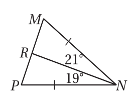


لَمّا كان ضلعان في ΔABD مطابقين لضلعين في ΔCBD، و $AD > CD$، فإنّ $m\angle ABD > m\angle CBD$، وذلك وفق عكس المتباينة SAS.

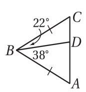
تمارين

قارن بين القياسين المحدَّدين في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

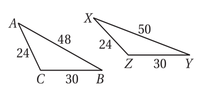
1) MR و RP
$MR > RP$



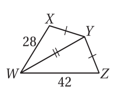
2) AD و CD
$AD > CD$



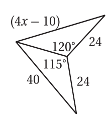
3) $m\angle C$ و $m\angle Z$
$m\angle C < m\angle Z$

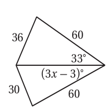


4) $m\angle XYW$ و $m\angle WYZ$
$m\angle XYW < m\angle WYZ$



اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

5)  **$x > 12.5$**

6)  **$1 < x < 12$**

4-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتباينات في مثلثين

إثبات العلاقات في مثلثين:

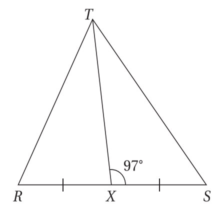
يمكنك استعمال المتباينتين SAS, SSS؛ لإثبات صحة علاقات في مثلثين.

مثال

اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $RX = XS$؛ $m\angle SXT = 97°$

المطلوب: إثبات أنّ $ST > RT$



البرهان:

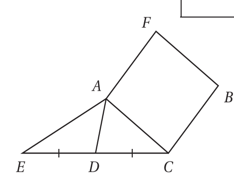
العبارات	المبَررات
1) $\angle SXT$, $\angle RXT$ **متكاملتان**	1) تعريف الزاويتين المتجاورتين على خط مستقيم
2) $m\angle SXT + m\angle RXT = 180°$	2) تعريف الزاويتين المتكاملتين
3) $m\angle SXT = 97°$	3) معطيات
4) $97° + m\angle RXT = 180°$	4) بالتعويض
5) $m\angle RXT = 83°$	5) خاصية الطرح
6) $m\angle SXT > m\angle RXT$	6) $97° > 83°$
7) $RX = XS$	7) معطيات
8) $TX = TX$	8) خاصية الانعكاس
9) $ST > RT$	9) المتباينة SAS

تمارين

أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $AFBC$ مستطيل، وَ $ED = DC, m\angle EDA > m\angle ADC$

المطلوب: إثبات أن $AE > FB$



البرهان:

العبارات	المبَررات
1) $ED = DC$؛ $AFBC$ **مستطيل**	1) **معطيات** ؟
2) $AD = AD$	2) **خاصيّة الانعكاس**
3) $m\angle EDA > m\angle ADC$	3) **معطيات** ؟
4) $AE > AC$	4) المتباينة SAS
5) $AC = FB$	5) الأضلاع المتقابلة في المستطيل متطابقة
6) $AE > FB$	6) بالتعويض

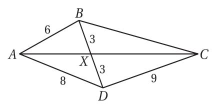
4-6 تدريبات المهارات

المتباينات في مثلثين

قارن بين القياسين المحدَّدين في السؤالين الآتيين:

1) $m\angle BXA$ و $m\angle DXA$

$m\angle BXA < m\angle DXA$



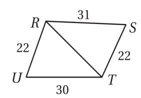
2) BC و DC

$BC > DC$

قارن بين القياسين المحدَّدين في السؤالين الآتيين:

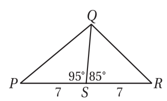
3) $m\angle STR$ و $m\angle TRU$

$m\angle STR > m\angle TRU$

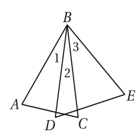


4) PQ و RQ

$PQ > RQ$



5) $\overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BA}, \overline{BE}$ أربع قطع متطابقة في الشكل المجاور، و $AC < DE$. قارن بين $m\angle 1$ و $m\angle 3$، وضّح إجابتك.



$m\angle 1 < m\angle 3$؛ من المعلومات المعطاة وعكس المتباينة SAS

ينتج أن: $m\angle ABC < m\angle DBE$ في ΔABC و ΔDBE.

ولمّا كان: $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$ وَ $m\angle DBE = m\angle 3 + m\angle 2$،

فإن: $m\angle 1 + m\angle 2 < m\angle 3 + m\angle 2$،

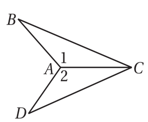
وبطرح $m\angle 2$ من الطرفين نجد أن: $m\angle 1 < m\angle 3$.

6) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DA}$

$BC > DC$

المطلوب: إثبات أن: $m\angle 1 > m\angle 2$.



البرهان:

العبارات	المبَررات
1) $\overline{BA} \cong \overline{DA}$	1) **معطيات**
2) $BC > DC$	2) **معطيات**
3) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	3) **خاصية الانعكاس**
4) $m\angle 1 > m\angle 2$	4) **عكس المتباينة SAS**

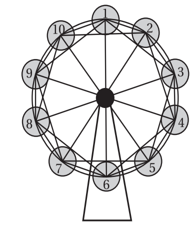
الاسم ______________ التاريخ ________

4-6 تدريبات حلّ المسألة
المتباينات في مثلثين

1) ساعات: طول عقرب الدقائق في ساعة كبيرة في أحد الميادين العامة 3 ft، وطول عقرب الساعات 2 ft، فهل تكون المسافة بين طرفَي العقربين أكبر عند الساعة الـ 3:00 أم عند الساعة الـ 8:00؟ ولماذا؟

عند الساعة 8:00؛ لأن الزاوية بين العقربين عند الساعة 8 أكبر منها عند الساعة 3، بحسب المتباينة SAS

2) الدولاب الدوّار: ثُبّتت مقاعد دولاب دوّار عند رؤوس مضلع عشاري منتظم، فما أرقام المقاعد التي بُعدها عن المقعد رقم 1 أكبر من بُعد المقعد رقم 4 عن المقعد رقم 1؟



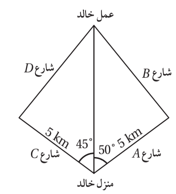
7, 6, 5

3) حدائق: أراد عمر أن ينشئ حديقتين على هيئة مثلثين مختلفين قليلًا، وكان لديه ثلاث قطع خشبية لتصميم كلٍّ من المثلثين، وقد أنهى تصميم مثلث الحديقة الأول، ولكي يصمِّم الحديقة الثانية، عدّل ضلعين من أضلاع المثلث؛ لتصبح الزاوية بينهما أصغر ممّا كانت في المثلث الأول. وضّح كيف يغيّر هذا التعديل شكل المثلث.

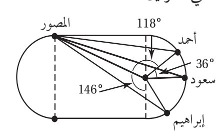
إجابة ممكنة: طول الضلع الثالث المقابل للزاوية التي صَغُرت، أصبح الآن أقصر من الضلع الثالث في المثلث الأول بحسب المتباينة SAS.

4) طرق: عندما يتحرك خالد من منزله إلى عمله، فأمامه خياران للوصول؛ فإما أن يسلك الشارع A ثم الشارع B، أو أن يسلك الشارع C ثم الشارع D، فأيُّ الطريقين أقصر؟ ولماذا؟

أن يسلك الشارع C، ثم الشارع D؛ لأن الشارع D أقصر من الشارع B بحسب المتباينة SAS؛ إذن طول $D+5$ أصغر من طول $B+5$



5) عدّاؤون: يلتقط مصوّر صورًا لثلاثة عدائين (أحمد وسعود وإبراهيم)، ويقف المصوِّر على مضمار مستطيل الشكل ينتهي بنصفي دائرتين.



a) بناءً على المعلومات الواردة في الشكل أعلاه، اكتب أسماء العدّائين مرتّبة من الأقرب إلى الأبعد عن المصوّر. وضّح إجابتك.

أحمد، إبراهيم، سعود؛ لأن $36 < 118 < 146$ بحسب المتباينة SAS

b) وضّح كيف تحدّد نقطة على نصف الدائرة، يكون العدّاؤون عندها أبعد ما يمكن عن المصوّر.

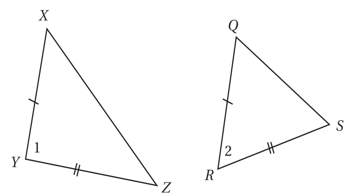
مُدّ الخط المارّ بالمصور ومركز نصف الدائرة إلى حيث يقطع المضمار النصف الدائري.

الاسم ______________ التاريخ ________

4-6 التدريبات الإثرائيّة
نظرية الرافعة

نظرية الرافعة:

اسم يطلق على المتباينة SAS التي درستها في هذا الدرس، وقد درست أن عكس هذه النظرية أيضًا صحيح، وفي هذا النشاط، ستكتشف ما إذا كان معكوس هذه النظرية ومعاكسها الإيجابيّ صحيحًا أيضًا أم لا.



الفرض: $m\angle 1 > m\angle 2$ ؛ $XY = QR$, $YZ = RS$

النتيجة: $XZ > QS$

1) ما معكوس نظريّة الرافعة؟

إذا كان ضلعان في مثلث غير مطابقين لضلعين في مثلث آخر، أو لم يكن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأوّل أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فلا يكون الضلع الثالث في المثلث الأوّل أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

2) هل يمكنك إيجاد مثال مضادٍّ لإثبات أن معكوس النظرية خطأ؟

لا، يبدو أن معكوس النظريّة صحيح أيضًا.

3) ما المعاكس الإيجابيّ لنظريّة الرافعة؟

إذا لم يكن الضلع الثالث في مثلث أطول من الضلع الثالث في مثلث آخر، فإن الضلعين الآخرين في المثلث الأوّل لا يطابقان الضلعين الآخرين في المثلث الثاني، أو لا يكون قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأوّل أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

4) هل يمكنك إيجاد مثالٍ مضادٍّ لإثبات أن المعاكس الإيجابيّ للنظريّة خطأ؟

لا؛ يبدو أن المعاكس الإيجابيّ للنظريّة صحيح أيضًا.