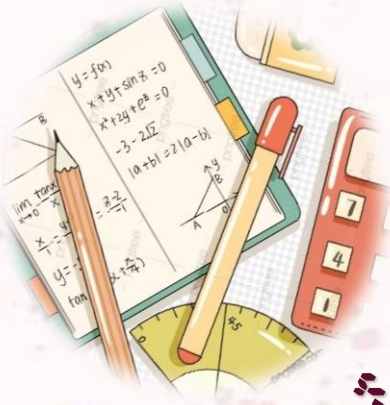
المفيد في الرياضيات

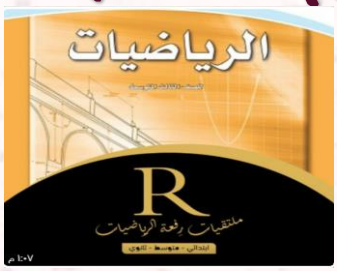
للصف الثالث متوسط

الفصل الدراسي الثالث



المؤلف

أ. مهره عبدالله عبدالله القحطاني



https://t.me/c/١٣٩٥٢١١٩٢٢٣٢١

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

الأستاذة / مهره عبدالله عبدالله القحطاني

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بِ:

المفيد في الرياضيات للصف الثالث متوسط الفصل الدراسي الثالث

تحت رقم إيداع 1443/7071 وتاريخ 1443/07/05 هـ، ورقم ردمك 978-603-04-0832-0

الفهرس

الموضوع	رقم الصفحة
المقدمة	٤
شكر و تقدير	٥
إهداء	٦
الفصل الثامن " الدوال التربيعية "	٧
الفصل التاسع " المعادلات الجذرية و المثلثات "	٣٥
الفصل العاشر " الإحصاء و الاحتمالات "	٦٩
المراجع	١٠٩
الخاتمة	١١٠

المقدمة

حينما يمتزج الإبداع والاهتمام والاجتهاد حينها تظهر ثمرة الصبر والجد في نهاية الأمر وتشعر بلذة الانجاز والفخر وتستمر في العطاء بدون توقف . . .أضع بين أيديكم المفيد في الرياضيات ؛ يشرح بصورة مبسطة و سهلة وواضحة و شاملة كثير من التمارين و التعاريف و القوانين الهامة لطلاب الصف الثالث متوسط و معلمي مادة الرياضيات و أولياء الأمور و لكل من يستفيد منه . . .

نأمل أن ينال هذا العمل على رضاكم و استحسانكم

شكر وتقدير

أتقدم بالشكر و التقدير لمجموعة رفعة المهني لجميع المعلمين و المعلمات ، وابتكار الافكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات و التعليم العام

إهداء

الحمد لله وكفى والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى . . الحمد لله الذي وفقنا لإنجاز هذه الخطوة في مسيرتنا العلمية والعملية فهي ثمرة النجاح والجهد بفضل الله تعالى ومهداه

إلى من أشتاق إليه بكل جوارحي . . أبي الغالي الحبيب

إلى من قدَّمت سعادتي وراحتي على سعادتها . . . أمي الفاضلة الحبيبة

إلى أخواني وأخواتي . . . إلى مديرتي الفاضلة ... إلى مشرفاتي العزيزات . . . . . إلى رفيقات المشوار . . . . إلى كل من كان له أثر على حياتي

جعل الله تعالى عملنا خالصا لوجهه الكريم وأتمنى أن ينال رضاكم واستحسانكم

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
الفصل الثامن
الدوال التربيعية
المفيد في الرياضيات ـ أ . مهره عبدالله عبدالله

٨ – ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا

الدوال التربيعية :

- الدالة التربيعية هي دالة غير خطية تُكتب في الصورة القياسية د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠ .
- يُسمى التمثيل البياني للدالة قطعا مكافئاً .
- تتماثل القطوع المكافئة حول خط يتوسطها يُسمى محور التماثل يقطع القطع في نقطة واحدة تُسمى الرأس .
- يكون القطع المكافئ مفتوحاً إلى أعلى إذا كان أ > ٠ و تمثل أدنى نقطة فيه نقطة قيمة صُغرى .
- يكون القطع المكافئ مفتوحاً إلى أسفل إذا كان أ < ٠ و تمثل أعلى نقطة فيه نقطة قيمة عُظمى .
- تمثل نقطتا القيمة العُظمى أو القيمة الصُغرى رأس القطع .

تمثيل الدوال التربيعية ص = أ س^{٢} + ب س + جـ

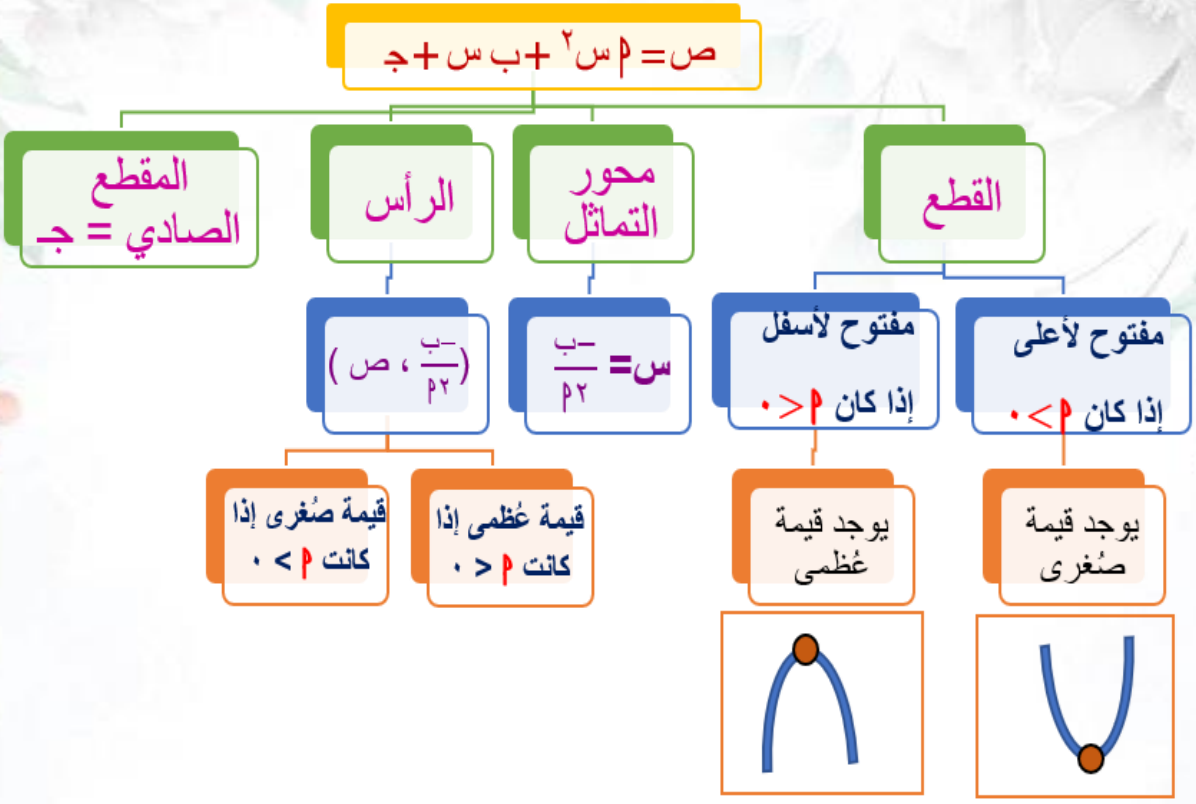
- نوجد أ و نحدد القطع مفتوح لأعلى أو لأسفل .
- نوجد معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ و نمثله .
- ننشئ جدول القيم :

س						
ص						

- نرسم القطع .

- نوجد أ و نحدد هل القطع مفتوح لأعلى أم لأسفل
- نوجد معادلة محور التماثل س= $\frac{-ب}{٢أ}$ و نمثله.
- نوجد الرأس ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ص)
- نوجد المقطع الصادي = جـ
- كل نقطة على يسار محور التماثل يُقابلها نقطة في النصف الأخر له.
- نرسم القطع .

٨ – ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا



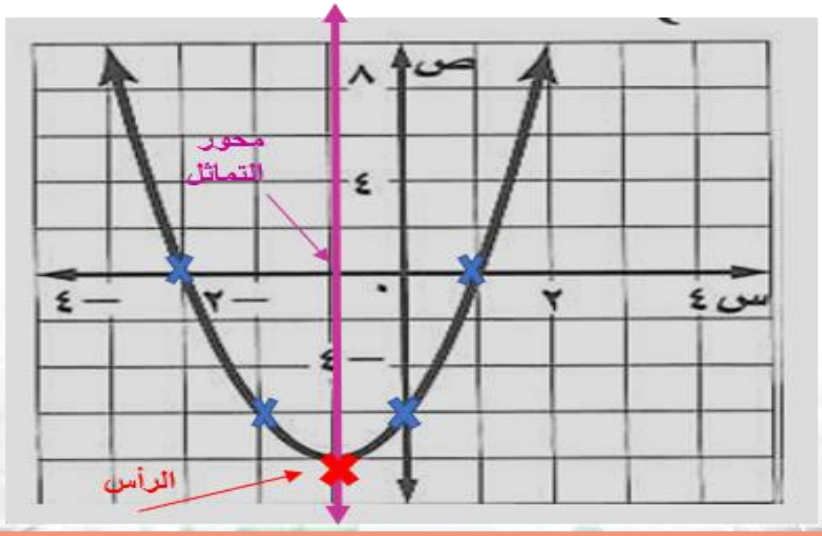
٨ – ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا

مثال ١ : استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة التالية و حدد المجال و المدى ؟ ص = ٢ س^{٢} + ٤ س – ٦

- أ = ٢ ، ب = ٤ ، جـ = -٦
- أ = ٢ > ٠ ⟸ القطع المكافئ مفتوح لأعلى
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{أ٢}$ ⟸ س = $\frac{-٤}{٢\times٢}$ ⟸ س = -١
- لإيجاد احداثيات الرأس : نضع س = -١
- ∴ ص = ٢ (-١)^{٢} + ٤ × (-١) – ٦ = -٨
- ∴ الرأس (-١ ، -٨)
- ننشئ جدول القيم :

س	٠	-١	-٢	٢	١	-٣
ص	-٦	-٨	-٦	١٠	٠	٠

- القيمة الصغرى = الاحداثي الصادي للرأس = -٨
- المجال = كل الأعداد الحقيقية .
- المدى = { ص | ص ≤ -٨ } .



٨ – ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا

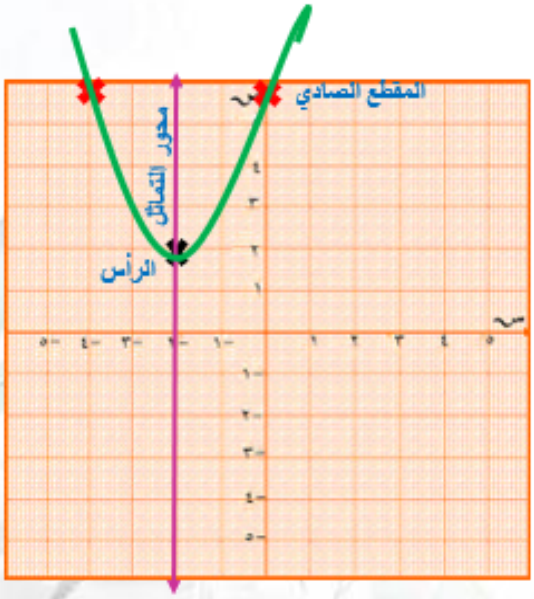
مثال ٢ : مثل الدوال التربيعية التالية بيانياً ؟؟ و حدد المجال و المدى ؟ و حدد القيمة العُظمى و القيمة الصغرى ؟؟

أ) $ص = س^{٢} + ٤ س + ٦$

- $أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ٦$
- $أ = ١ > ٠ \Longleftarrow$ القطع المكافئ مفتوح لأعلى
- معادلة محور التماثل $س = \frac{-ب}{٢أ} \Longleftarrow س = \frac{-٤}{٢ \times ١} \Longleftarrow س = -٢$
- لإيجاد نقطة الرأس نعوض عن س = ٢ في المعادلة التربيعية

$ص = (-٢)^{٢} + ٤ \times (-٢) + ٦ = ٢$

∴ الرأس (-٢،٢)



- المقطع الصادي = جـ = ٦
- القيمة الصغرى = الاحداثي الصادي للرأس

∴ القيمة الصُغرى = ٢

- المجال = كل الأعداد الحقيقية
- المدى = { ص| ص ≤ ٢} .

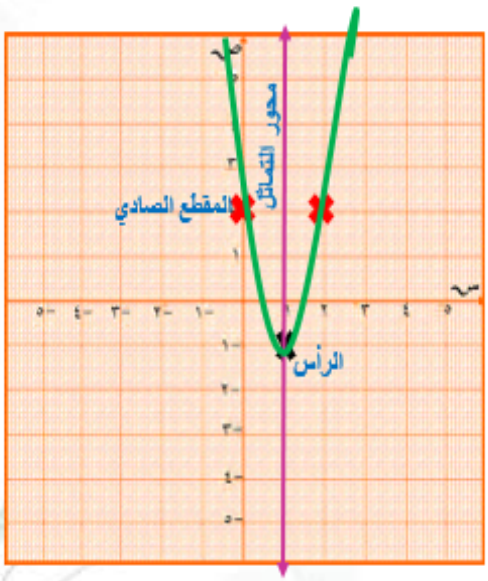
٨ - ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا

ب) ص = ٣ س^{٢} - ٦ س + ٢

- أ = ٣ ، ب = -٦ ، جـ = ٢
- أ = ٣ > ٠ ⟸ القطع المكافئ مفتوح لأعلى
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ⟸ س = $\frac{-(-٦)}{٣\times٢}$ ⟸ س = ١
- لإيجاد نقطة الرأس نعوض عن س = ١ في المعادلة التربيعية

ص = ٣(١)^{٢} - ٦×١ + ٢ = -١

∴ الرأس (١ ، -١)



- المقطع الصادي = جـ = ٢
- القيمة الصغرى = الاحداثي الصادي للرأس

∴ القيمة الصُغرى = -١

- المجال = كل الأعداد الحقيقية
- المدى = { ص| ص ≤ -١} .

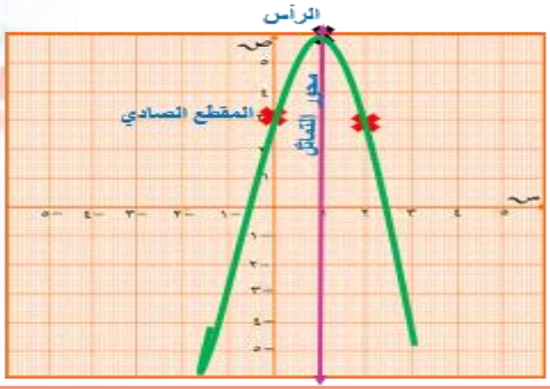
٨ – ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا

ج) ص = – ٣ س^{٢} + ٦ س + ٣

- أ = – ٣ ، ب = ٦ ، جـ = ٣
- أ = – ٣ < ٠ ⟸ القطع المكافئ مفتوح لأسفل
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ⟸ س = $\frac{٦-}{(٣-)\times٢}$ ⟸ س = ١
- لإيجاد نقطة الرأس نعوض عن س = ١ في المعادلة التربيعية

ص = – ٣ × ١^{٢} + ٦ × ١ + ٣ = ٦

∴ الرأس (١ ، ٦)



- المقطع الصادي = جـ = ٣
- القيمة العُظمى = الاحداثي الصادي للرأس

∴ القيمة العُظمى = ٦

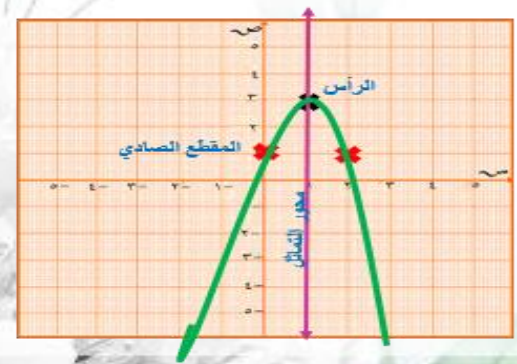
- المجال = كل الأعداد الحقيقية
- المدى = { ص| ص ≥ ٢} .

د) ص = – ٢ س^{٢} + ٤ س + ١

- أ = – ٢ ، ب = ٤ ، جـ = ١
- أ = – ٢ < ٠ ⟸ القطع المكافئ مفتوح لأسفل
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ⟸ س = $\frac{٤-}{(٢-)\times٢}$ ⟸ س = ١
- لإيجاد نقطة الرأس نعوض عن س = ١ في المعادلة التربيعية

ص = – ٢ × ١^{٢} + ٤ × ١ + ١ = ٣

∴ الرأس (١ ، ٣)



- المقطع الصادي = جـ = ١
- القيمة العُظمى = الاحداثي الصادي للرأس

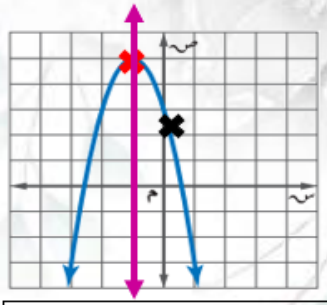
∴ القيمة العُظمى = ٣

- المجال = كل الأعداد الحقيقية
- المدى = { ص| ص ≥ ٣} .

٨ – ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

٤)



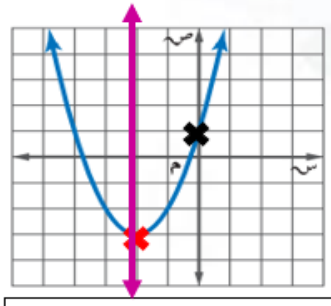
- الرأس (-١ ، ٥)
- معادلة محور التماثل

س = -١

- المقطع الصادي

ص = ٥

٥)



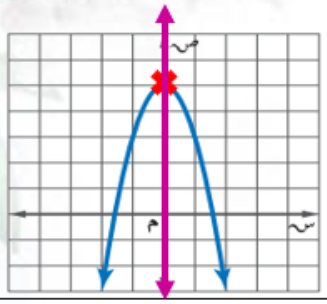
- الرأس (-٢ ، -٣)
- معادلة محور التماثل

س = -٢

- المقطع الصادي

ص = ١

٦)



- الرأس (٠ ، ٥)
- معادلة محور التماثل

س = ٠

- المقطع الصادي

ص = ٥

مثال ٣ : حدد إذا كان للدوال التالية قيمة عُظمى أم قيمة صُغرى ؟ ثم حدد المجال و المدى ؟؟

١) ص = - س^{٢} - ٢ س + ٢

- أ = -١ ، ب = -٢ ، جـ = ٢
- أ = -١ < ٠ ⟸ القطع المكافئ مفتوح لأسفل ⟸ للقطع قيمة عُظمى .
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ⟸ س = $\frac{-(-٢)}{٢\times(-١)}$ ⟸ س = - ١
- لإيجاد نقطة الرأس نعوض عن س = -١ في المعادلة التربيعية

ص = - (-١)^{٢} -٢×(-١) + ٢ = ٣

∴ الرأس (-١ ، ٣)

- المقطع الصادي = جـ = ٢
- القيمة العُظمى = الاحداثي الصادي للرأس ⟸ القيمة العُظمى = ٣
- المجال = كل الأعداد الحقيقية
- المدى = { ص| ص ≤ ٣} . كل القيم الأصغر من أو تساوي القيمة العُظمى.

٨ – ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا

٢) ص = ٣ س^{٢} +١٨ س - ٢١

- أ = ٣ ، ب = ١٨ ، جـ = -٢١
- أ = ٣ > ٠ ⟸ القطع المكافئ مفتوح لأعلى ⟸ للقطع قيمة صُغرى .
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{أ٢}$ ⟸ س = $\frac{-١٨}{٣\times٢}$ ⟸ س = - ٣
- لإيجاد نقطة الرأس نعوض عن س = -٣ في المعادلة التربيعية

ص = ٣ (-٣)^{٢} +١٨×٣-٢١ = - ٤٨

∴ الرأس (- ٣ ، - ٤٨)

- المقطع الصادي = جـ = ٢
- القيمة الصُغرى = الاحداثي الصادي للرأس ⟸ القيمة الصُغرى = -٤٨
- المجال = كل الأعداد الحقيقية
- المدى = { ص| ص ≥ -٤٨ } . كل القيم الأكبر من أو تساوي القيمة الصُغرى.

٣٥) **اكتشف الخطأ :** تحاول عبير ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

منى

ص = -س^{٢} - ٤س + ٦

س = $\frac{-ب}{أ٢}$

س = $\frac{-٤}{(-١)٢}$

س = ٢

عبير

ص = -س^{٢} - ٤س + ٦

س = $\frac{-ب}{أ٢}$

س = $\frac{-٤}{(-١)٢}$

س = -٢

حل عبير صحيح ؛ لأن منى أخطأت في إشارة ب عند التعويض .

٨ – ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيا

٢) ص = ٣ س^{٢} + ١٨ س - ٢١

- أ = ٣ ، ب = ١٨ ، جـ = -٢١
- أ = ٣ > ٠ ⟸ القطع المكافئ مفتوح لأعلى ⟸ للقطع قيمة صُغرى .
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ⟸ س = $\frac{-١٨}{٣\times٢}$ ⟸ س = - ٣
- لإيجاد نقطة الرأس نعوض عن س = -٣ في المعادلة التربيعية

ص = ٣ (-٣)^{٢} + ١٨×٣- ٢١ = - ٤٨

∴ الرأس (- ٣ ، - ٤٨)

- المقطع الصادي = جـ = ٢
- القيمة الصُغرى = الاحداثي الصادي للرأس ⟸ القيمة الصُغرى = -٤٨
- المجال = كل الأعداد الحقيقية
- المدى = { ص| ص ≥ -٤٨ } . كل القيم الأكبر من أو تساوي القيمة الصُغرى.

٣٥) **اكتشف الخطأ :** تحاول عبير ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

منى

ص = - س^{٢} - ٤ س + ٦

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٤}{٢(-١)}$

س = ٢

عبير

ص = - س^{٢} - ٤ س + ٦

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٤}{٢(-١)}$

س = -٢

حل عبير صحيح ؛ لأن منى أخطأت في إشارة ب عند التعويض .

٨ – ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيا

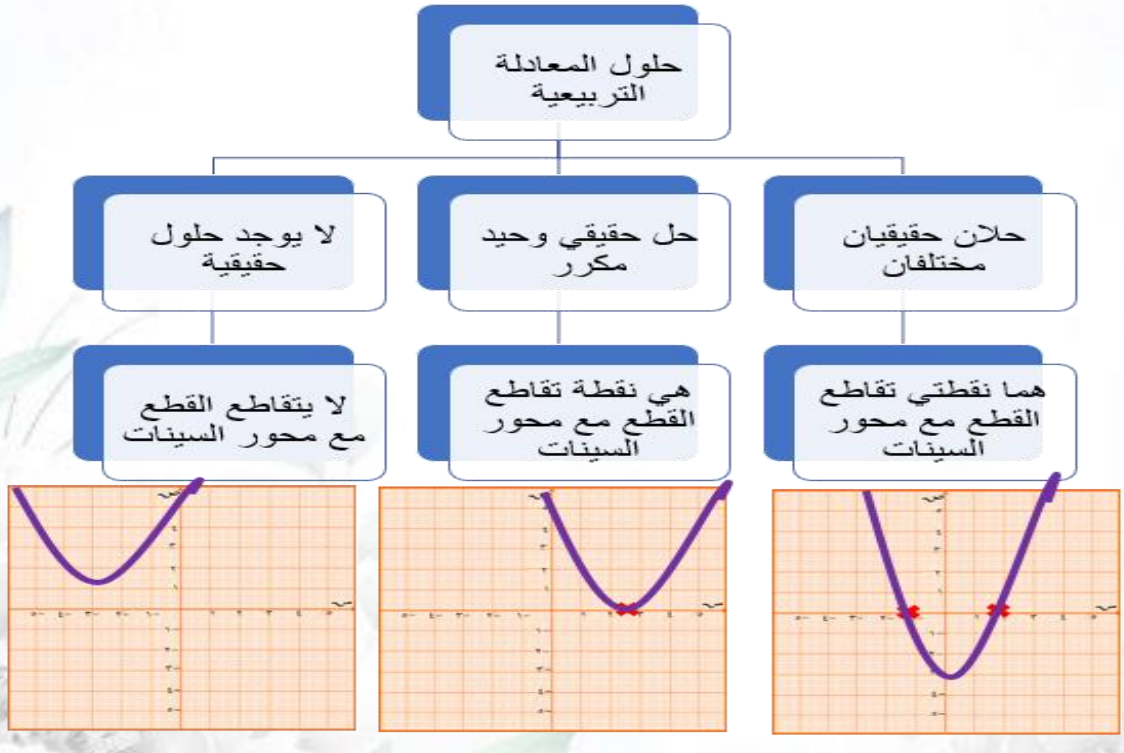
أصفار الدالة :

عدد أصفار الدالة يساوي درجة الدالة المرتبطة بالمعادلة .

أصفار الدالة ≡ جذور الدالة ≡ حلول الدالة .

حل المعادلة التربيعية بالتمثيل البياني :

- الصورة القياسية للمعادلة التربيعية $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$
- و لكتابة الدالة التربيعية على صورة معادلة استبدل ص أو د (س) بصفر .
- حلول المعادلة أو جذورها هي المقاطع السينية للتمثيل البياني للدالة المرتبطة .



٨ - ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيا

ملحوظة هامة :

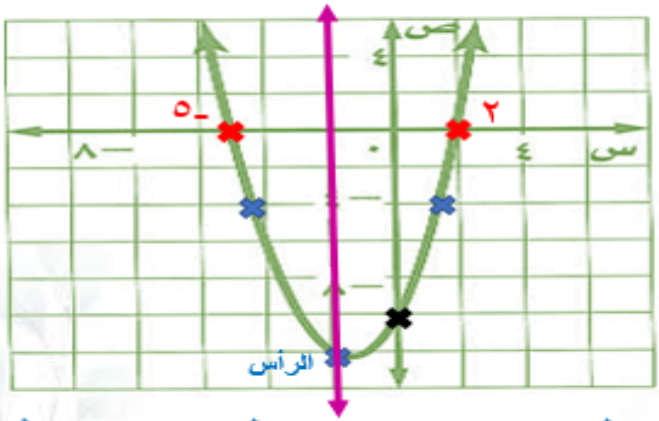
- قد تظهر الحلول في التمثيل البياني دقيقة إلا أنه لا يمكن التحقق من صحتها إلا بالتعويض في المعادلة الحقيقية .

مثال ١ : حل كلاً من المعادلات التالية بيانياً ؟؟

أ) $س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$

- الدالة المرتبطة ص = $س^{٢} + ٣س - ١٠$
- أ = ١ > ٠ ⟸ القطع مفتوح لأعلى
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{أ٢}$ ⟸ س = $\frac{-٣}{١ \times ٢}$ ⟸ س = $-\frac{١}{٢}$ ١ .
- ننشئ جدول القيم

س	٠	$-\frac{١}{٢}$ ١	٢	٣-	٤-
ص	١٠-	١٢,٢٥-	٠	١٠-	٦-



يتقاطع القطع المكافئ مع محور السينات في النقطتين ٢ ، - ٥

∴ م . ح = { ٢ ، - ٥ } . حلان حقيقيان مختلفان .

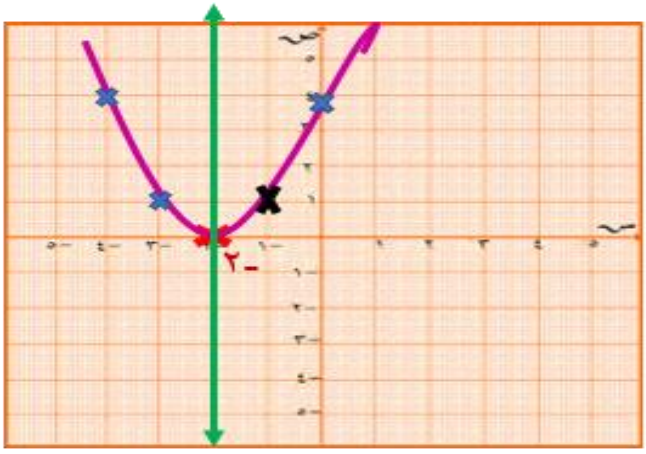
٨ - ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيا

ب) $س^{٢} + ٤ س = - ٤$

$س^{٢} + ٤ س + ٤ = ٠$

- الدالة المرتبطة $ص = س^{٢} + ٤ س + ٤$
- $أ = ١ > ٠ \Longleftarrow$ القطع مفتوح
- معادلة محور التماثل $س = \frac{-ب}{٢ أ} \Longleftarrow س = \frac{-٤}{١ \times ٢} \Longleftarrow س = -٢$.
- ننشئ جدول القيم

س	٠	-٢	١	-٣	-٤
ص	٤	٠	٩	١	٤



يتقاطع القطع المكافئ مع محور السينات في نقطة وحيدة هي -٢

∴ م . ح = { -٢ } . حل وحيد مكرر

٨ - ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيا

ج) $س^{٢} + ٧س + ١٤ = ٠$

- الدالة المرتبطة ص = $س^{٢} + ٧س + ١٤$
- $أ = ١ > ٠$ ⟸ القطع مفتوح لأعلى
- معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ⟸ س = $\frac{-٧}{١ \times ٢}$ ⟸ س = - ٣,٥ .
- ننشئ جدول القيم

س	٠	-٢	-٥	-٣,٥	-٤
ص	١٤	٤	٤	١,٨	٢

لا يتقاطع القطع المكافئ مع محور السينات ٥

∴ م . ح = ∅ . لا يوجد حلول حقيقية

٨ – ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيا

مثال ٢ استعمل التحليل إلى عوامل لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي ؟؟ ثم حدد أصفار الدالة ؟؟

أ) ص = س^{٢} – ٨ س + ١٦

س^{٢} – ٨ س + ١٦ = ٠

(س – ٤)^{٢} = ٠

$\sqrt{\ }$ (س – ٤)^{٢} = $\sqrt{\ }$ ٠

س – ٤ = ٠

س = ٤

يوجد جذر واحد مكرر

∴ القطع المكافئ يقطع محور السينات في نقطة واحدة فقط

∴ م . ح = { ٤ } .

ب) ص = س^{٢} + ١٢ س + ٣٢

س^{٢} + ١٢ س + ٣٢ = ٠

(س + ٤)(س + ٨) = ٠

إما س + ٤ = ٠ ⟸ س = – ٤

أو س + ٨ = ٠ ⟸ س = – ٨

يوجد جذران حقيقيان مختلفان

∴ القطع المكافئ يقطع محور السينات في نقطتين مختلفتان .

∴ م . ح = { – ٤ ، – ٨ } .

ج) س^{٢} = – ٩

$\sqrt{\ }$ س^{٢} = $\sqrt{\ }$ – ٩

س = ؟

لا يوجد جذر سالب

∴ لا يوجد جذر حقيقي

∴ لا يقطع القطع المكافئ محور السينات .

∴ م . ح = ∅

٨ - ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيا

١٨) **نظرية الأعداد:** استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠.

- نفرض العددان س ، ص
- س+ص = ٩ ⟸ ١

س ص = ٢٠ ⟸ ٢

- من المعادلة ١ ⟸ ص = ٩ - س ⟸ ٣
- بالتعويض من المعادلة ٣ في المعادلة ٢

س (٩ - س) = ٢٠

٩ س - $س^{٢}$ - ٢٠ = ٠

$س^{٢}$ - ٩ س + ٢٠ = ٠ بضرب جميع الحدود في (- ١)

- (س - ٥) (س - ٤) = ٠
- إما س - ٥ = ٠ ⟸ س = ٥

أو س - ٤ = ٠ ⟸ س = ٤

- بالتعويض في المعادلة ٣ لإيجاد قيمة ص :

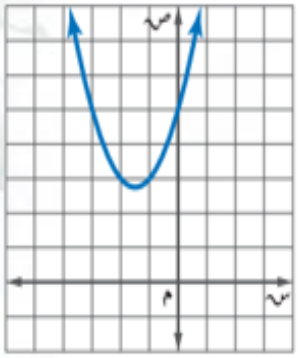
عندما س = ٥ ⟸ ص = ٩ - ٥ ⟸ ص = ٤

عندما س = ٤ ⟸ ص = ٩ - ٤ ⟸ ص = ٥

- ∴ العددان هما (٥ ، ٤)

٨ – ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيا

مسائل مهارات التفكير العليا



٢٠) **اكتشف الخطأ:** يقوم معاذ وأحمد بإيجاد عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثَّلة بالشكل المجاور، فيقول معاذ إنه ليس لهذه الدالة أصفار حقيقية؛ لأنه لا يوجد لتمثيلها البياني مقاطع سينية. بينما يقول أحمد: إن لها صفرًا حقيقيًّا واحدًا؛ لأن للتمثيل البياني للدالة مقطعًا صاديًّا. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

حل معاذ صحيح و أخطأ أحمد لأنه لم يعتمد المقطع مع محور السينات لحل المعادلة التربيعية .

٨ – ٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

اكمال المربع :

لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $س^{٢} + ب س$

نضيف مربع نصف ب $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$.

مثال ١ : اوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثي حدود فيما يأتي مربعاً كاملاً ؟؟

أ) $س^{٢} + ٢٦ س + جـ$	ب) $س^{٢} - ٢٤ س + جـ$	ج) $س^{٢} - ١٨ س + جـ$
$جـ = \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} =$	$جـ = \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} =$	$جـ = \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{-١٨}{٢}\right)^{٢}$
$\left(\frac{٢٦}{٢}\right)^{٢} = ١٣^{٢} = ١٦٩$.	$\left(\frac{-٢٤}{٢}\right)^{٢} = (-١٢)^{٢}$	$= (-٩)^{٢} = ٨١$
	$= ١٤٤$	

حل المعادلات بإكمال المربع :

خوارزمية : سلسلة خطوات لإجراء عملية أو حل مسألة .

خوارزمية حل معادلات تربيعية بإكمال المربع كالتالي :

- نجعل معامل $س^{٢} = ١$.
- اعزل $س^{٢}$ ، ب س في طرف و أنقل جـ للطرف الآخر .
- أضيف مربع نصف ب للطرفين $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$.
- أكون من الطرف الأول مربع كامل و أوجد ناتج الطرف الثاني .
- بأخذ الجذر التربيعي للطرفين .
- نوجد جذري المعادلة " حلي المعادلة أو " صفري المعادلة .
- نكتب مجموعة الحل .

٨ - ٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

مثال ٢ : حل كل معادلة مما يأتي بإكمال المربع ، مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة ؟؟؟

أ) $س^{٢} + ٤س = ٦$

بإضافة $(\frac{ب}{٢})^{٢} = (\frac{٤}{٢})^{٢} = ٢^{٢}$ للطرفين .

$س^{٢} + ٤س + ٢^{٢} = ٦ + ٢^{٢}$

$(س+٢)^{٢} = ١٠$

$\sqrt{(س+٢)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

$س + ٢ = \pm \sqrt{١٠}$

إما $س + ٢ = \sqrt{١٠} \Leftarrow س = \sqrt{١٠} - ٢ \Leftarrow س = ١,٢$

أو $س + ٢ = -\sqrt{١٠} \Leftarrow س = -\sqrt{١٠} - ٢ \Leftarrow س = -٥,٢$

∴ م . ح = { ١,٢ ، -٥,٢ }

ب) $٤س^{٢} + ٩س - ١ = ٠$

$س^{٢} + \frac{٩}{٤}س = \frac{١}{٤}$ بقسمة جميع الحدود على ٤

بإضافة $(\frac{ب}{٢})^{٢} = (\frac{\frac{٩}{٤}}{٢})^{٢} = (\frac{٩}{٨})^{٢}$ للطرفين .

$س^{٢} + \frac{٩}{٤}س + (\frac{٩}{٨})^{٢} = \frac{١}{٤} + (\frac{٩}{٨})^{٢}$

$(س + \frac{٩}{٨})^{٢} = \frac{٩٧}{٦٤}$

$\sqrt{(س + \frac{٩}{٨})^{٢}} = \sqrt{\frac{٩٧}{٦٤}}$

$س + \frac{٩}{٨} = \pm \frac{\sqrt{٩٧}}{٨}$

إما $س + \frac{٩}{٨} = \frac{\sqrt{٩٧}}{٨} \Leftarrow س = \frac{\sqrt{٩٧}}{٨} - \frac{٩}{٨} \Leftarrow$ **س = ٠,١**

أو $س + \frac{٩}{٨} = -\frac{\sqrt{٩٧}}{٨} \Leftarrow س = -\frac{\sqrt{٩٧}}{٨} - \frac{٩}{٨} \Leftarrow$ **س = -٢,٤**

∴ م . ح = { ٠,١ ، -٢,٤ }

٨ - ٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

ج) $س^{٢} + ٦س - ١٦ = ٠$

$س^{٢} + ٦س = ١٦$

بإضافة $(\frac{ب}{٢})^{٢} = (\frac{٦}{٢})^{٢} = (٣)^{٢}$ للطرفين .

$س^{٢} + ٦س + (٣)^{٢} = ١٦ + (٣)^{٢}$

$(س+٣)^{٢} = ٢٥$

$\sqrt{(س+٣)^{٢}} = \sqrt{٢٥}$

$س + ٣ = \pm ٥$

إما $س + ٣ = ٥ \Leftarrow س = ٥ - ٣ \Leftarrow$ **س = ٢**

أو $س + ٣ = -٥ \Leftarrow س = -٥ - ٣ \Leftarrow$ **س = -٨**

∴ م . ح = { ٢ ، -٨ }

د) $س^{٢} - ٢س + ٧ = ٥$

$س^{٢} - ٢س = ٥ - ٧$

$س^{٢} - ٢س = -٢$

بإضافة $(\frac{ب}{٢})^{٢} = (\frac{-٢}{٢})^{٢} = (-١)^{٢} = ١$ للطرفين .

$س^{٢} - ٢س + ١ = -٢$

$(س - ١)^{٢} = -١$

$\sqrt{(س - ١)^{٢}} = \sqrt{-١}$

$س - ١ =$ Math error

لا يوجد حل للمعادلة لأنه لا يجوز أن يكون تحت الجذر عدد سالب

∴ م . ح = ∅

٨ - ٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

هـ) $س^{٢} - ٨س - ١٢ = ٨$

$س^{٢} - ٨س = ٨ + ١٢$

$س^{٢} - ٨س = ٢٠$

بإضافة $(\frac{ب}{٢})^{٢} = (\frac{-٨}{٢})^{٢} = (-٤)^{٢} = ١٦$ للطرفين .

$س^{٢} - ٨س + ١٦ = ٢٠ + ١٦$

$(س - ٤)^{٢} = ٣٦$

$\sqrt{(س - ٤)^{٢}} = \sqrt{٣٦}$

$س - ٤ = \pm ٦$

إما $س - ٤ = ٦ \Leftarrow س = ٦ + ٤ \Leftarrow$ **س = ١٠**

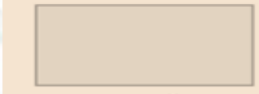
أو $س - ٤ = -٦ \Leftarrow س = -٦ + ٤ \Leftarrow$ **س = -٢**

∴ م . ح = { ١٠ ، -٢ }

٨ - ٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

هندسة : أوجد قيمة س في كل شكل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا: (م: المساحة)

٢٤) م = ١١٠ سم^{٢}



مساحة المستطيل = الطول × العرض

١١٠ = ٢ س × (س+٥)

١١٠ = ٢ س^{٢} + ١٠ س

س^{٢} + ٥ س = ٥٥ بقسمة جميع الحدود على ٢

بإضافة $(\frac{ب}{٢})^{٢} = (\frac{٥}{٢})^{٢}$ للطرفين .

$س^{٢} + ٥س + (\frac{٥}{٢})^{٢} = ٥٥ + (\frac{٥}{٢})^{٢}$

$(س + \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٢٤٥}{٤}$

$\sqrt{(س + \frac{٥}{٢})^{٢}} = \sqrt{\frac{٢٤٥}{٤}}$

$س + \frac{٥}{٢} = \pm \frac{٥\sqrt{٧}}{٢}$

إما $س + \frac{٥}{٢} = \frac{٥\sqrt{٧}}{٢}$ $\Leftarrow$ $س = \frac{٥\sqrt{٧}}{٢} - \frac{٥}{٢} = ٥,٣$

إما $س + \frac{٥}{٢} = -\frac{٥\sqrt{٧}}{٢}$ $\Leftarrow$ $س = -\frac{٥\sqrt{٧}}{٢} - \frac{٥}{٢} = -١٠,٣$

الحل س = - ١٠,٣ مرفوض لأنه لا يوجد طول سالب .

∴ طول المستطيل = ٢ س = ٢ × ٥,٣ = ١٠,٦ سم

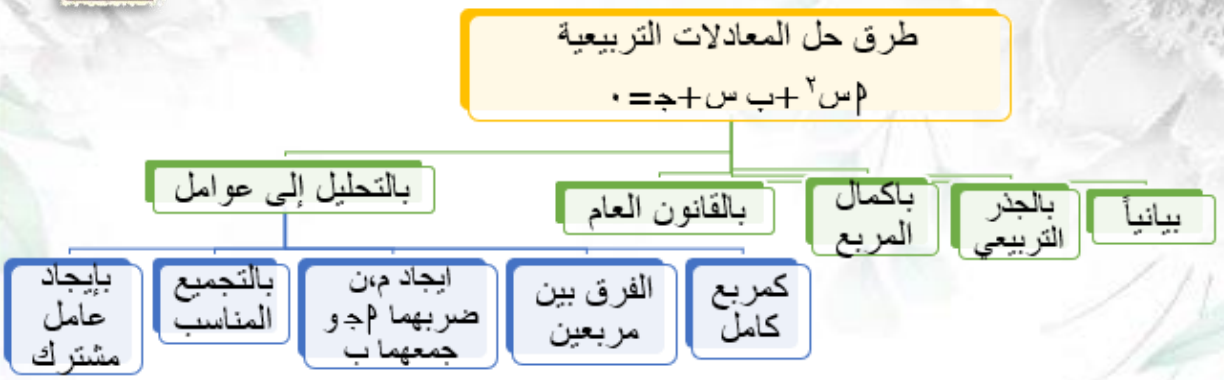
عرض المستطيل = س+٥ = ٥,٣ + ٥ = ١٠,٣ سم

للتحقق

المساحة = ١٠,٦ × ١٠,٣

= ١٠٩,١٨ ≈ ١١٠ سم^{٢}

٨ – ٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام



- جميع الطرق تُعطي الحل نفسه

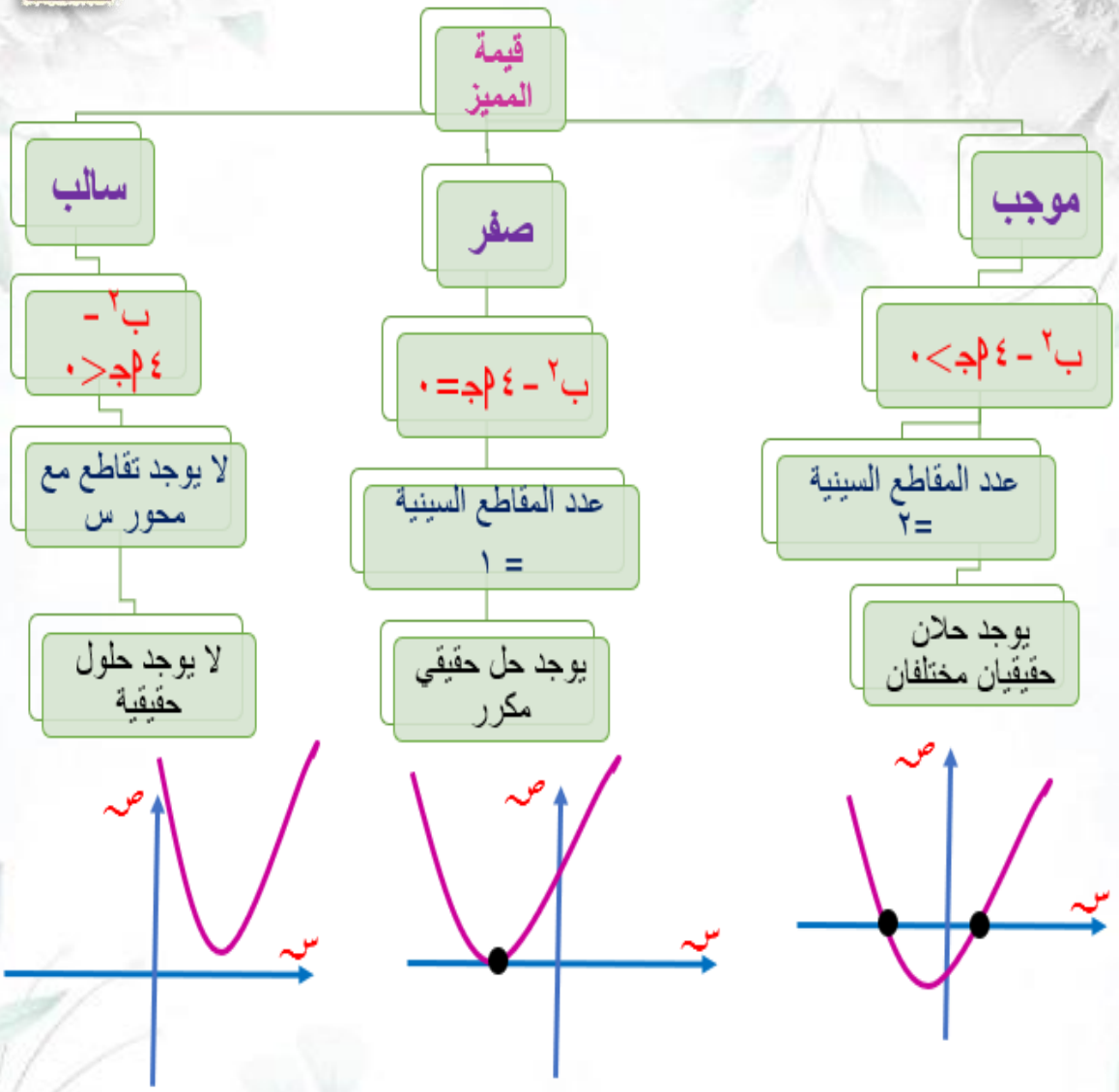
حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون العام :

حل المعادلة التربيعية $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ حيث $أ \neq ٠$

يُعبر عنه بالقانون العام

العبارة تحت الجذر $ب^{٢} - ٤ أجـ$ تُسمى المميز و تُستعمل في تحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية .

٨ - ٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام



٨ – ٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

مثال ١ : حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة ؟؟

١) $س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$

$أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = -١٥$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times (-١٥)}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٦٤}}{٢}$$

إما $س = \frac{٢+٨}{٢} \Leftarrow س = \frac{١٠}{٢} \Leftarrow س = ٥$

أو $س = \frac{٢-٨}{٢} \Leftarrow س = \frac{-٦}{٢} \Leftarrow س = -٣$

∴ م . ح = { ٥ ، -٣ }

٢) $س^{٢} - ٨س = -١٠$

$س^{٢} - ٨س + ١٠ = ٠$

$أ = ١ ، ب = -٨ ، جـ = ١٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-(-٨) \pm \sqrt{(-٨)^{٢} - ٤ \times ١ \times ١٠}}{٢ \times ١} = \frac{٨ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$$

إما $س = \frac{٨ + \sqrt{٢٤}}{٢} \Leftarrow س = ٦,٤$

أو $س = \frac{٨ - \sqrt{٢٤}}{٢} \Leftarrow س = ١,٦$

∴ م . ح = { ٦,٤ ، ١,٦ } .

٣) $٢س^{٢} + ١١س - ٦ = ٠$

$أ = ٢ ، ب = ١١ ، جـ = -٦$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-١١ \pm \sqrt{١١^{٢} - ٤ \times ٢ \times (-٦)}}{٢ \times ٢} = \frac{-١١ \pm \sqrt{١٦٩}}{٤}$$

إما $س = \frac{-١١+١٣}{٤} \Leftarrow س = \frac{٢}{٤} \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

أو $س = \frac{-١١-١٣}{٤} \Leftarrow س = \frac{-٢٤}{٤} \Leftarrow س = -٦$

∴ م . ح = { ٠,٥ ، -٦ }

٨ - ٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

٤) $٩س^{٢}+٢٤س+١٦=٠$

$أ=٩ ، ب=٢٤ ، جـ=١٦$

$س=\frac{-ب\pm\sqrt{ب^{٢}-٤أجـ}}{٢أ}=\frac{-٢٤\pm\sqrt{٢٤^{٢}-٤\times٩\times١٦}}{٢\times٩}=\frac{-٢٤\pm\sqrt{٠}}{١٨}$

$س=\frac{-٢٤}{١٨} \Longleftarrow س=\frac{-٤}{٣}$

$\therefore م . ح=\{\frac{-٤}{٣}\}$.

٥) $س^{٢}-٩س+٢١=٠$

$أ=١ ، ب=-٩ ، جـ=٢١$

$س=\frac{-ب\pm\sqrt{ب^{٢}-٤أجـ}}{٢أ}=\frac{-(-٩)\pm\sqrt{(-٩)^{٢}-٤\times١\times٢١}}{١\times٢}=\frac{٩\pm\sqrt{-٣}}{٢}$

ما بداخل الجذر سالب

$\therefore$ لا يوجد حلول حقيقية

$\therefore م . ح=\varnothing$

مثال ٢ : أوجد قيمة المميز في كل معادلة مما يأتي ؟؟ ثم حدد عدد حلولها الحقيقية ؟؟ و حدد عدد المقاطع السينية ؟؟

١) $٥س^{٢}+٥=١٣س$

نكتب المعادلة على الصورة $٥س^{٢}-١٣س+٥=٠$

المميز $=ب^{٢}-٤أجـ=(-١٣)^{٢}-٤\times٥\times٥=٦٩$ موجب

$\therefore$ يوجد للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان .

وَ القطع المكافئ يقطع محور السينات في نقطتين .

٢) $٠,٥س^{٢}-٢س+٢=٠$

المميز $=ب^{٢}-٤أجـ=(-٢)^{٢}-٤\times٠,٥\times٢=٠$

$\therefore$ يوجد للمعادلة حل حقيقي واحد مكرر .

وَ القطع المكافئ يقطع محور السينات في نقطة واحدة فقط .

٣) $س^{٢}+١٦=٠$

المميز $=ب^{٢}-٤أجـ=(٠)^{٢}-٤\times١\times١٦=-٦٤$ سالب

$\therefore$ لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية .

وَ القطع المكافئ لا يقطع محور السينات فلا توجد مقاطع سينية.

٨ - ٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

١٠) منصّة القفز: يقفز خالد من فوق منصة القفز، حيث تمثل المعادلة ل = -١٦ن^{٢} + ٢,٤ن + ٦، ارتفاع خالد (ل) بعد (ن) من الثواني، استعمل المميز لتحديد ما إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع ٢٠ قدمًا. فسّر إجابتك.

ل = -١٦ن^{٢} + ٢,٤ن + ٦

عند ل = ٢٠ تصبح المعادلة :

٢٠ = -١٦ن^{٢} + ٢,٤ن + ٦

-١٦ن^{٢} + ٢,٤ن + ٦ - ٢٠ = ٠

-١٦ن^{٢} + ٢,٤ن - ١٤ = ٠

المميز = ب^{٢} - ٤ أ جـ = (٢,٤)^{٢} - ٤ × (-١٦) × (-١٤)

= -٨٩٠,٢٤

المميز سالب

∴ لا يمكن أن يصل خالد إلى ارتفاع ٢٠ قدم .

٨ - ٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

٢٤) **إعلان:** يعدّ راشد ملصقًا للإعلان عن رحلة عمرة، ويريد أن يغطي جزء من المساحة بنصوص كتابية.

أ) اكتب معادلة لمساحة القسم النصّي.

ب) حُلَّ المعادلة باستعمال القانون العام.

جـ) كم يجب أن تكون هوامش الملصق؟

مساحة القسم النصي = $\frac{٣}{٤}$ مساحة ملصق الإعلان

$$(٢٠ - ٢س)(٢٥ - ٧س) = \frac{٣}{٤}(٢٠ \times ٢٥)$$

$$٥٠٠ - ١٤٠س - ٥٠س + ١٤س^{٢} = ٣٧٥$$

$$١٤س^{٢} - ١٩٠س + ٥٠٠ - ٣٧٥ = ٠$$

$$١٤س^{٢} - ١٩٠س + ١٢٥ = ٠$$

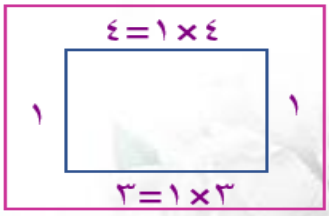
$$أ = ١٤ ، ب = -١٩٠ ، جـ = ١٢٥$$

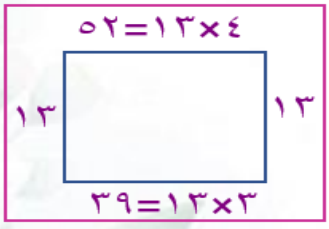
$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-(-١٩٠) \pm \sqrt{(-١٩٠)^{٢} - ٤ \times ١٤ \times ١٢٥}}{٢ \times ١٤}$$

$$س = \frac{١٩٠ \pm \sqrt{٢٩١٠٠}}{٢٨}$$

$$\text{إما } س = \frac{١٩٠ + \sqrt{٢٩١٠٠}}{٢٨} \Leftarrow س \approx ١٣$$

$$\text{أو } س = \frac{١٩٠ - \sqrt{٢٩١٠٠}}{٢٨} \Leftarrow س \approx ١$$





الفصل التاسع

المعادلات الجذرية و المثلثات

الفصل التاسع :
المعادلات الجذرية و المثلثات

٩ – ١ تبسيط العبارات الجذرية

العبارات الجذرية :

عبارة تتضمن جذرا كالجذر التكعيبي أو التربيعي .

الجذر التربيعي في أبسط صورة:

يكون ما تحت الجذر التربيعي في أبسط صورة عندما :

- لا يكون أي من عوامل مربعاً كاملاً عدا الواحد .
- لا يظهر أي جذر في المقام .
- لا يتضمن كسوراً .

خصائص الجذر التربيعي :

١. **عند تبسيط العبارات الجذرية : -**

- **إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغيراً ذا أس زوجي : نقسم الأس الزوجي على ٢**
- **و إذا كان ما تحت الجذر ذا أس فردي : نجزئ الأس إلى (١ + عدد زوجي)**
- **و إذا كان ناتج التبسيط متغير ذا أس فردي : يجب استعمال القيمة المطلقة .**

٢. **قبل تبسيط الجذر التربيعي للعدد الحقيقي يجب تحليل هذا العدد لعوامله الأولية**

٣. $\sqrt{-س}$ **عدد غير حقيقي ؛ لا يجوز أن يكون تحت الجذر التربيعي سالب .**

٤. **لأي عددين غير سالبين أ ، ب يكون :** $\sqrt{أ ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

٥. **لأي عددين غير سالبين أ ، ب يكون :** $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$.

الفصل التاسع :
المعادلات الجذرية و المثلثات

٩ – ١ تبسيط العبارات الجذرية

مثال ١ : بسطي العبارات الجذرية التالية ؟؟

١) $\sqrt{٥٤} = \sqrt{٩ \times ٦} = \sqrt{٣^{٢} \times ٣ \times ٢} = ٣\sqrt{٦} = ٢ \times ٣\sqrt{٦}$.

٢) $\sqrt{١٨٠} = \sqrt{١٠ \times ١٨} = \sqrt{٢ \times ٥ \times ٣^{٢} \times ٢}$

$= \sqrt{٥ \times ٣^{٢} \times ٢^{٢}} = ٥ \times ٣ \times ٢ = ٥\sqrt{٦}$.

٣) $\sqrt{١٠} \times \sqrt{١٤} = \sqrt{١٤ \times ١٠} = \sqrt{٧ \times ٢ \times ٥ \times ٢}$

$= \sqrt{٧ \times ٥ \times ٢^{٢}} = ٢\sqrt{٧ \times ٥} = ٢\sqrt{٣٥}$.

٤) $٣\sqrt{١٦} = ٣\sqrt{٤^{٢}} = ٣ \times ٢^{٢} = ٣ \times ٤ = ١٢$.

٥) $\sqrt{٦٠ س^{٤} ص^{٧}} = \sqrt{٢^{٢} \times ٣ \times ٥ \times س^{٤} \times ص^{٦} \times ص}$

$= ٢ س^{٢} |ص^{٣}| \sqrt{٣ \times ٥ ص}$

$= ٢ س^{٢} |ص^{٣}| \sqrt{١٥ ص}$.

٦) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٥} = \sqrt{١٥ \times ٥} = \sqrt{٣ \times ٥ \times ٥}$

$= \sqrt{٥^{٢} \times ٣} = ٥\sqrt{٣}$.

٧) $\sqrt{٨٨ م^{٣} ب^{٢} ر^{٥}}$

$= \sqrt{٢^{٢} \times ٢ \times ١١ \times م^{٢} \times م \times ب^{٢} \times ر^{٤} \times ر}$

$= ٢ |م| |ب| ر^{٢} \sqrt{٢٢ م ر}$.

٨) $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٥^{٢}} = ٥$.

٩) $\sqrt{\frac{٣٢}{ت^{٤}}} = \sqrt{\frac{٤^{٢} \times ٢}{ت^{٤}}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{ت^{٢}} = \frac{٢\sqrt{٢^{٢}}}{ت^{٢}}$

الفصل التاسع :
المعادلات الجذرية و المثلثات

٩ - ١ تبسيط العبارات الجذرية

انطلاق المقام :

هي كتابة العبارة الجذرية بحيث يكون المقام خاليا من الجذر ، و لدينا الحالات التالية :

- إذا كان مقام الكسر يحوي جذراً تربيعياً ؛ نضرب كلاً من البسط و المقام في هذا الجذر $\frac{ب}{\sqrt{أ}} = \frac{ب}{\sqrt{أ}} \times \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{أ}} = \frac{ب\sqrt{أ}}{أ}$.
- إذا كان مقام الكسر يحوي ثنائي الحد $\sqrt{أ}+\sqrt{ب}$ نضرب كلاً من البسط و المقام في مرافق المقام

$$\frac{جـ}{\sqrt{أ}+\sqrt{ب}} = \frac{جـ}{\sqrt{أ}+\sqrt{ب}} \times \frac{\sqrt{أ}-\sqrt{ب}}{\sqrt{أ}-\sqrt{ب}} = \frac{جـ[\sqrt{أ}-\sqrt{ب}]}{أ-ب} .$$

- $\sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = أ$ " الجذر × نفسه = العدد الذي تحت الجذر "
- $\sqrt{أ}+\sqrt{ب}$ مرافق $\sqrt{أ}-\sqrt{ب}$ ؛

$$(\sqrt{أ}+\sqrt{ب})(\sqrt{أ}-\sqrt{ب}) = أ-ب$$

- المقدار × مرافقه = مربع الأول - مربع الثاني
- حاصل ضرب عددين مترافقين يساوي عدداً نسبياً .

مثال ٢ : بسط العبارات الجذرية التالية ؟؟

١) $\sqrt{\frac{٤٥}{١٠}} = \frac{\sqrt{٤٥}}{\sqrt{١٠}} \times \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٠}} = \frac{\sqrt{٤٥ \times ١٠}}{١٠}$

$= \frac{\sqrt{٢ \times ٣ \times ٥}}{١٠} = \frac{٣\sqrt{٢ \times ٥}}{١٠} = \frac{١٥\sqrt{٢}}{١٠} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٥}$.

٢) $\sqrt{\frac{٣٥}{١٥}} = \frac{\sqrt{٧ \times ٥}}{٣ \times ٥} = \frac{\sqrt{٧}}{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٢١}}{٣}$.

٣) $\frac{٣}{\sqrt{٥}+٣} = \frac{٣}{\sqrt{٥}+٣} \times \frac{\sqrt{٥}-٣}{\sqrt{٥}-٣} = \frac{٣\sqrt{٥}-٩}{٥-٩} = \frac{٣\sqrt{٥}-٩}{٤}$.

٤) $\frac{٦}{\sqrt{١١}+٥} = \frac{٦}{\sqrt{١١}+٥} \times \frac{\sqrt{١١}-٥}{\sqrt{١١}-٥} = \frac{٦\sqrt{١١}-٣٠}{١١-٢٥}$

$= \frac{٦\sqrt{١١}-٣٠}{٤} = \frac{٣\sqrt{١١}-١٥}{٢}$.

٥) $\frac{٤}{\sqrt{٧}-٦} = \frac{٤}{\sqrt{٧}-٦} \times \frac{\sqrt{٧}+٦}{\sqrt{٧}+٦} = \frac{٤\sqrt{٧}+٢٤}{٧-٣٦} = \frac{٤\sqrt{٧}+٢٤}{٢٩}$.

٩ - ١ تبسيط العبارات الجذرية

٣٢) **مكافحة حرائق:** تمثل سرعة الماء (ع) الذي يُضَخ لمكافحة الحرائق بالمعادلة ع = $\sqrt{٢ف جـ}$، حيث (ف) أقصى ارتفاع للماء، (جـ) تسارع الجاذبية الأرضية (٣٢ قدمًا/ ث^{٢}).

أ) حُلّ المعادلة بالنسبة لـ ف.

ب) إذا احتاجت إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع ٨٠ قدمًا، فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة ٧٠ قدمًا/ ث؟ فسّر إجابتك.

جـ) تريد إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة تضخ الماء إلى ارتفاع ٩٠ قدمًا. فهل المضخة التي تضخ الماء بسرعة ٧٧ قدمًا/ ث تحقق حاجة الإدارة؟ فسّر إجابتك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

ع = $\sqrt{٢ف جـ}$

أ) ع^{٢} = ($\sqrt{٢ف جـ}$)^{٢} بتربيع الطرفين

ع^{٢} = ٢ف جـ

$$ف = \frac{ع^{٢}}{٢ جـ}$$

ب) ف = $\frac{ع^{٢}}{٢ جـ}$

ف = $\frac{٧٠^{٢}}{٣٢ \times ٢}$

ف ≈ ٧٦,٦ قدما

لا ، المضخة المعلن عنها ستضخ ماء إلى ارتفاع أقصاه ٧٦,٦ قدماً تقريبا

جـ) نعم ، المضخة المعلن عنها ستضخ الماء إلى ارتفاع أقصاه ٩٢,٦ قدم تقريباً

ف = $\frac{ع^{٢}}{٢ جـ}$

ف = $\frac{٧٧^{٢}}{٣٢ \times ٢}$ ≈ ٩٢,٦ قدما

الفصل التاسع :
المعادلات الجذرية و المثلثات

٩ - ١ تبسيط العبارات الجذرية

تطبيق : بسطي ما يلي :

$\sqrt{\frac{٢٧}{م}} = \frac{\sqrt{٣ \times ٣ \times ٣}}{\sqrt{م}} \times \frac{\sqrt{م}}{\sqrt{م}}$	$\frac{٣\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٤}} = \frac{٣}{١٦}\sqrt{\times}\frac{٩}{٥}$
$= \frac{٣\sqrt{٣ م^{٢}}}{م}$	$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٤}} \times \frac{٥\sqrt{}}{٥\sqrt{}} = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٥ \times ٤}$
$\sqrt{٣ م^{٣}} \times م = \sqrt{٣ م^{٤}}$	$= \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢٠}$.

٣٩) **طاقة حركية :** يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة: $ع = \sqrt{\frac{٢ق}{ك}}$، حيث (ق) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (ك) كتلة الكرة.

أ) بسّط المعادلة معتبرًا كتلة الكرة ٣ كيلو جرامات.

ب) إذا كانت سرعة الكرة ٧ أمتار/ ثانية، فما قيمة الطاقة الحركية للكرة بالجول؟

$ع = \sqrt{\frac{٢ق}{ك}}$

أ) $ع = \frac{\sqrt{٢ق}}{\sqrt{٣}}$

$ع^{٢} = \frac{\sqrt{٢ق}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

$ع = \frac{\sqrt{٦ق}}{٣}$.

ب) $ع = ٧$ م/ث ، $ق = ؟؟$

$٣ع = \sqrt{٦ق}$

$٣ \times ٧ = \sqrt{٦ق}$

$٢١ = \sqrt{٦ق}$

$(٢١)^{٢} = (\sqrt{٦ق})^{٢}$

$٤٤١ = ٦ق$

$ق = \frac{٤٤١}{٦} = ٧٣,٥$ جول

∴ قيمة الطاقة الحركية للكرة = ٧٣,٥ جول

الفصل التاسع :
المعادلات الجذرية و المثلثات

٩ - ٢ العمليات على العبارات الجذرية

جمع العبارات الجذرية :

- يجب أن تكون العبارات الجذرية عند جمعها أو طرحها متشابهة .
- في بعض العبارات الجذرية يجب تبسيط كل حد جذري أولاً ثم اجراء العمليات الحسابية المطلوبة .

إذا كان ب $\geq$ ٠ فإن $\sqrt[ن]{ب}\,أ + \sqrt[ن]{ب}\,جـ = \sqrt[ن]{ب}\,(أ+جـ)$

$\sqrt[ن]{ب}\,أ - \sqrt[ن]{ب}\,جـ = \sqrt[ن]{ب}\,(أ-جـ)$

مثال ١ : بسطي العبارات الجذرية التالية ؟؟

١) $\sqrt[٢]{٣} - \sqrt[٢]{٥} = \sqrt[٢]{(٣-٥)} = \sqrt[٢]{-٢}$.

٢) $\sqrt[٣]{١٥} - \sqrt[٣]{١٤} + \sqrt[٥]{٦} - \sqrt[٥]{١١}$

$= \sqrt[٣]{(١١-١٥)} + \sqrt[٥]{(-١٤+٦)} = \sqrt[٣]{٤} - \sqrt[٥]{٨}$.

٣) $\sqrt[٧]{} - \sqrt[٧]{٦} = \sqrt[٧]{(١-٦)} = \sqrt[٧]{-٥}$.

٤) $\sqrt{٨} + \sqrt{١٢} + \sqrt{١٨} = \sqrt{٢ \times ٢^{٢}} + \sqrt{٣ \times ٢^{٢}} + \sqrt{٢ \times ٣^{٢}}$

$= \sqrt{٢} + \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

$= \sqrt{(٢+٣)} + \sqrt{٢}$

$= \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$.

٥) $\sqrt[٦]{٢٤} - \sqrt[٦]{٥٤} + \sqrt[٦]{٩٦}$

$= \sqrt[٦]{٢^{٢} \times ٣} - \sqrt[٦]{٣^{٣} \times ٢ \times ٣} + \sqrt[٦]{٤^{٢} \times ٢ \times ٣}$

$= ٢\sqrt[٦]{٣} - ٣\sqrt[٦]{٣} + \sqrt[٦]{٢^{٢}} = \sqrt[٦]{(٢-٣+٤)} = \sqrt[٦]{٣}$.

٩ - ٢ العمليات على العبارات الجذرية

ضرب العبارات الجذرية :

- يشبه ضرب وحيدات الحد ضرب العبارات الجذرية .
- يمكننا تطبيق خاصية التوزيع على العبارات الجذرية .
- يمكن ضرب عبارات جذرية يضم كل منها أكثر من حد واحد ، و هو ما يشبه ضرب عبارتين جبريتين ثنائيتي الحد .
- إذا كان ب ≥ ٠ وَ جـ ≥ ٠

$$(\sqrt[ن]{ب})(\sqrt[ن]{جـ}) = \sqrt[ن]{ب جـ}$$.

مثال ٢ : بسطي كل عبارة مما يأتي ؟؟

١) $(\sqrt{٩})(\sqrt{٤}) = \sqrt{٩ \times ٤} = \sqrt{٦ \times ٦}$

$= \sqrt{٣٦} = \sqrt{٣ \times ٢ \times ٣٦} = \sqrt{٣ \times ٢^{٢}} = ٦\sqrt{٣}$.

٢) $\sqrt{٧}(\sqrt{٥}+\sqrt{٥}) = \sqrt{٧ \times ٥}+\sqrt{٥ \times ٣} = \sqrt{٧}$

$= \sqrt{٣٥}+\sqrt{٣٥} = \sqrt{٣٥}(١+٣) = \sqrt{٣٥} \times ٤$.

$\sqrt{٧}(\sqrt{٥}+\sqrt{٥}) = \sqrt{٧}(\sqrt{٥}(١+٣)) = \sqrt{٧ \times ٤ \times ٥}$

$= \sqrt{٧ \times ٤} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٧} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٣٥}$.

٣) $(\sqrt{٢}-\sqrt{٣})(\sqrt{١٢}+\sqrt{١٥})$

$= \sqrt{٣ \times ١٥}+\sqrt{٣ \times ١٢}-\sqrt{٢ \times ١٥}-\sqrt{٢ \times ١٢}$

$= \sqrt{٥ \times ٣^{٢}}+\sqrt{٢^{٢} \times ٣^{٢}}-\sqrt{٣٠}-\sqrt{٣ \times ٢ \times ٢^{٢}}$

$= ٣\sqrt{٥}+٢ \times ٣-\sqrt{٣٠}-٢\sqrt{٦}$

$= ٣\sqrt{٥}+٦-\sqrt{٣٠}-٢\sqrt{٦}$.

٩ - ٢ العمليات على العبارات الجذرية

تحقق من فهمك

٤) **هندسة :** يمكن إيجاد مساحة معين باستعمال المعادلة م = $\frac{1}{2}$ ق١ × ق٢، حيث ق١، ق٢ طولا قطري المعين.
ما مساحة المعين في الشكل المجاور؟

م = $\frac{1}{2}$ ق١ × ق٢

م = $\frac{1}{2}$ (٦√٣ - ٥√٨) (٣√٢ - ٥√٦)

م = $\frac{1}{2}$ (٣×٦√٦ + ٥×٦√١٨ - ٣×٥√١٦ - ٥×٤٨)

م = $\frac{1}{2}$ (٣×٢√٦ + ٣٠√١٨ - ١٥√١٦ - ٢٤٠)

م = $\frac{1}{2}$ (٢√٣×٦ + ٣٠√١٨ - ١٥√١٦ - ٢٤٠)

م = $\frac{1}{2}$ (٢√١٨ + ٣٠√١٨ - ١٥√١٦ - ٢٤٠)

م = ٢√٩ + ٣٠√٩ - ١٥√٨ - ١٢٠ .

م = ٥٢,٤ وحدة مربعة .

٩ - ٢ العمليات على العبارات الجذرية

١٩) **هندسة :** أوجد محيط ومساحة مستطيل عرضه $٢\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥}$ وطوله $٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥}$.

- محيط المستطيل = مجموع أطوال أضلاعه

$$\text{مح} = ٢\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥}$$

$$\text{مح} = ١٠\sqrt{٧} + ٢\sqrt{٥}$$

مح = ٣٠,٩ وحدة .

- مساحة المستطيل = ل × ض

$$\text{م} = (٢\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥})(٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥})$$

$$\text{م} = ٧ \times ٦ + ٧ \times ٥\sqrt{٦} - ٥ \times ٧\sqrt{٦} - ٥ \times ٦$$

$$\text{م} = ٤٢ + ٣٥\sqrt{٦} - ٣٥\sqrt{٦} - ٣٠$$

م = ١٢ وحدة مربعة .

٩ – ٣ المعادلات الجذرية

المعادلات الجذرية :

هي معادلات تحوي متغيرات تحت الجذر .

خطوات حل المعادلة الجذرية :

١. نجعل متغير المعادلة الموجودة تحت الجذر في طرف .
٢. نُربع طرفي المعادلة للتخلص من الجذر .
٣. يجب التحقق من الحلول و استبعاد الحلول الدخيلة .

مثال ١: حل المعادلات التالية و تحقق من صحة الحل ؟؟

١) $\sqrt{١٠هـ} + ١ = ٢١$

$\sqrt{١٠هـ} = ٢١ - ١$

$\sqrt{١٠هـ} = ٢٠$

$(\sqrt{١٠هـ})^{٢} = ٢٠^{٢}$

$١٠هـ = ٤٠٠$

$\frac{١٠هـ}{١٠} = \frac{٤٠٠}{١٠}$

$هـ = ٤٠$

التحقق : $\sqrt{١٠هـ} + ١ = ٢١$

$\sqrt{١٠ \times ٤٠} + ١ = ٢١$

$\sqrt{٤٠٠} + ١ = ٢١$

$٢٠ + ١ = ٢١$

$٢١ = ٢١$

∴م . ح = { ٤٠ }.

٩ – ٣ المعادلات الجذرية

٢) $\sqrt{٧ر + ٢} + ٣ = ٧$

$\sqrt{٧ر + ٢} = ٧ - ٣$

$\sqrt{٧ر + ٢} = ٤$

$(\sqrt{٧ر + ٢})^{٢} = ٤^{٢}$

$٧ر + ٢ = ١٦$

$٧ر = ١٦ - ٢$

$٧ر = ١٤$

$ر = \frac{١٤}{٧}$

$ر = ٢$

∴ م . ح = { ٢ }.

التحقق :

$\sqrt{٧ر + ٢} + ٣ = ٧$

$\sqrt{٧ \times ٢ + ٢} + ٣ = ٧$

$\sqrt{١٦} + ٣ = ٧$

$٤ + ٣ = ٧$

$٧ = ٧$

٣) $\sqrt{س^{٢} + ٩س + ١٥} = س + ٥$

$(\sqrt{س^{٢} + ٩س + ١٥})^{٢} = (س + ٥)^{٢}$

$س^{٢} + ٩س + ١٥ = س^{٢} + ١٠س + ٢٥$

$س^{٢} + ٩س + ١٥ - س^{٢} - ١٠س - ٢٥ = ٠$

$-س - ١٠ = ٠$

$-س = ١٠$

$\frac{-س}{-١} = \frac{١٠}{-١}$

$س = -١٠$

∴ س = -١٠ حل دخيل

التحقق :

$\sqrt{س^{٢} + ٩س + ١٥} = س + ٥$

$\sqrt{(-١٠)^{٢} + ٩ \times (-١٠) + ١٥} = (-١٠) + ٥$

$\sqrt{١٠٠ - ٩٠ + ١٥} = -٥$

$\sqrt{٢٥} = -٥$

$٥ \neq -٥$

٩ - ٣ المعادلات الجذرية

٤) $\sqrt{ت+٥}=ت+٣$

$(\sqrt{ت+٥})^{٢}=(ت+٣)^{٢}$

$ت+٥=ت^{٢}+٦ت+٩$

$ت+٥-ت^{٢}-٦ت-٩=٠$

$-ت^{٢}-٥ت-٤=٠$

$ت^{٢}+٥ت+٤=٠$

$(ت+٤)(ت+١)=٠$

إما $ت+٤=٠ \Leftarrow ت=-٤$

أو $ت+١=٠ \Leftarrow ت=-١$

∴ م . ح = { -١ } .

التحقق :

$\sqrt{ت+٥}=ت+٣$

عندما $ت=-٤$

$\sqrt{(-٤)+٥}=(-٤)+٣$

$\sqrt{١}=-١$

$١ \neq -١$

∴ الحل ت = -٤ حل دخيل

التحقق :

$\sqrt{ت+٥}=ت+٣$

عندما $ت=-١$

$\sqrt{(-١)+٥}=(-١)+٣$

$\sqrt{٤}=٢$

$٢=٢$

٥) $\sqrt{٥س^{٢}-٩}=٢س$

$(\sqrt{٥س^{٢}-٩})^{٢}=(٢س)^{٢}$

$٥س^{٢}-٩=٤س^{٢}$

$٥س^{٢}-٩-٤س^{٢}=٠$

$س^{٢}=٩$

$\sqrt{س^{٢}}=\sqrt{٩}$

$س=\pm ٣$

∴ م.ح = { ٣ } .

التحقق :

$\sqrt{٥س^{٢}-٩}=٢س$

$\sqrt{٥\times(٣)^{٢}-٩}=٢\times٣$

$\sqrt{٤٥-٩}=٦$

$\sqrt{٣٦}=٦$

$٦=٦$

التحقق :

$\sqrt{٥س^{٢}-٩}=٢س$

$\sqrt{٥\times(-٣)^{٢}-٩}=٢\times(-٣)$

$\sqrt{٤٥-٩}=-٦$

$\sqrt{٣٦}=-٦$

$٦ \neq -٦$

∴ الحل س = -٣ حل دخيل .

٩ – ٤ نظرية فيثاغورس

نظريه فيثاغورس :

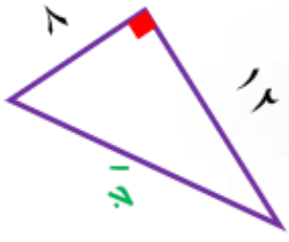
إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن :

" مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه "الساقين ""

في المثلث المقابل جـَ ٢ = أ ٢ + بـَ ٢ .

مثال ١ : أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي ؟ و قرب الناتج إلى أقرب جزء من مائة إذا لزم الأمر ؟؟

أ)



جـَ ٢ = أ ٢ + بـَ ٢

جـَ ٢ = ١٢ ٢ + ٨ ٢

جـَ ٢ = ١٤٤ + ٦٤

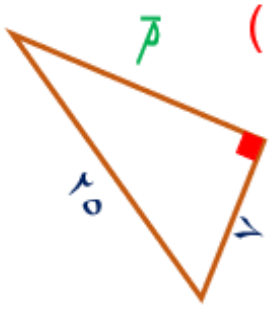
جـَ ٢ = ٢٠٨

جـَ = √٢٠٨

جـَ = √١٣ ٤

جـَ = ١٤,٤٢

ب)



جـَ ٢ = أ ٢ + بـَ ٢

أ ٢ = جـَ ٢ - بـَ ٢

أ ٢ = ٢٢٥ - ٢٧

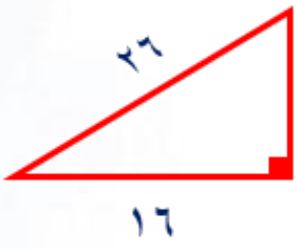
أ ٢ = ٦٢٥ - ٤٩

أ ٢ = ٥٧٦

أ = √٥٧٦

أ = ٢٤

ج)



جـَ ٢ = أ ٢ + بـَ ٢

بـَ ٢ = جـَ ٢ - أ ٢

بـَ ٢ = ٢٢٦ - ٢١٦

بـَ ٢ = ٦٧٦ - ٢٥٦

بـَ ٢ = ٤٢٠

بـَ ٢ = √٤٢٠

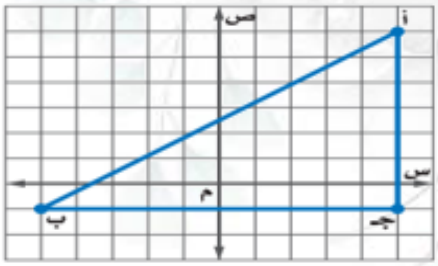
بـَ = ٢ √١٠٥

بـَ = ٢٠,٤٩

٩ – ٤ نظرية فيثاغورس

أوجد طول الوتر في المثلثين الآتيين وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة:

(٢٢



$جـ^{٢} = م^{٢} + ب^{٢}$

$جـ^{٢} = ٢١٠ + ٢٧$

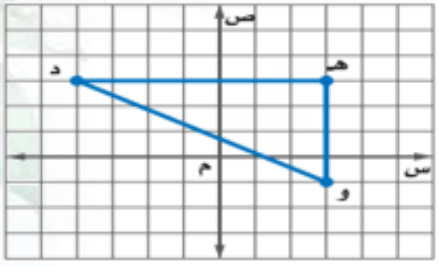
$جـ^{٢} = ١٠٠ + ٤٩$

$جـ^{٢} = ١٤٩$

$جـ = \sqrt{١٤٩}$

$جـ = ١٢,٢١$ وحدة

(٢٣



$هـ^{٢} = و^{٢} + د^{٢}$

$هـ^{٢} = ٢٧ + ٢٤$

$هـ^{٢} = ٤٩ + ١٦$

$هـ^{٢} = ٦٥$

$هـ = \sqrt{٦٥}$

$هـ = ٨,٠٦$ وحدة

معكوس نظرية فيثاغورس :

إذا كان م، ب، جـ أطوال أضلاع مثلث تحقق المعادلة : $جـ^{٢} = م^{٢} + ب^{٢}$

فإن المثلث قائم الزاوية .

الفصل التاسع : المعادلات الجذرية و المثلثات

٩ – ٤ نظرية فيثاغورس

مثال ٢ : حدد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال التالية تُشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا ؟؟؟

أ) ٨ ، ١٢ ، ١٦	ب) ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠	ج) ١٥ ، ٢٥ ، ٤٥
$١٦^{٢} \neq ١٢^{٢} + ٨^{٢}$	$٥٠^{٢} = ٣٠^{٢} + ٤٠^{٢}$	$٤٥^{٢} \neq ٢٥^{٢} + ١٥^{٢}$
$٢٥٦ \neq ١٤٤ + ٦٤$	$٢٥٠٠ = ٩٠٠ + ١٦٠٠$	$٦٢٥ \neq ٢٠٢٥ + ٢٢٥$
$٢٥٦ \neq ٢٠٨$	$٢٥٠٠ = ٢٥٠٠$	$٨٥٠ \neq ٢٠٢٥$
∴ المثلث ليس قائم الزاوية .	∴ المثلث قائم الزاوية .	∴ المثلث ليس قائم الزاوية .

ثلاثية فيثاغورس :

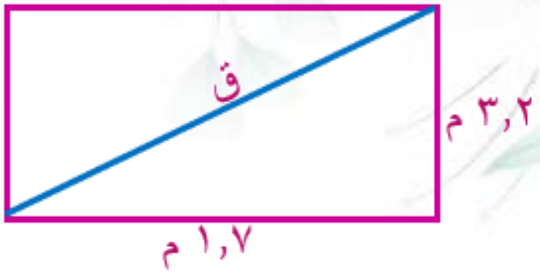
مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة تحقق المعادلة : $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$

مثال٣ : حدد إذا كانت كل مجموعة من أعداد التالية تحقق أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية ؟ ثم حدد إذا كانت تُشكل ثلاثية فيثاغورس ؟؟

أ) ٨ ، ٣١,٥ ، ٣٢,٥	ب) $\sqrt{٦٥}$ ، $\sqrt{٢٦}$ ، $\sqrt{٩٧}$
$(٣٢,٥)^{٢} = (٣١,٥)^{٢} + ٨^{٢}$	$(\sqrt{٩٧})^{٢} = (\sqrt{٦٥})^{٢} + (\sqrt{٢٦})^{٢}$
$١٠٥٦,٢٥ = ٩٩٢,٢٥ + ٦٤$	$٩٧ \neq ٦٥ + ٣٦ \times ٢$
$١٠٥٦,٢٥ = ١٠٥٦,٢٥$	$٩٧ \neq ٦٥ + ٧٢$
∴ المثلث قائم الزاوية	$٩٧ \neq ١٣٧$
لكن لا تُشكل الأعداد ثلاثية فيثاغورس لأنها أعداد غير صحيحة	∴ المثلث ليس قائم الزاوية لا تُشكل الأعداد ثلاثية فيثاغورس لأنها لا تحقق المعادلة $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$ و ليست أعداد صحيحة .

٩ – ٤ نظرية فيثاغورس

٣٣) **الكعبة المشرفة :** باب الكعبة المشرفة مصنوع من الذهب الخالص على هيئة مستطيل أبعاده التقريبية ٢,٣م، ١,٧م. فكم طول قطره؟



$ق^{٢} = ٣,٢^{٢} + ١,٧^{٢}$

$ق^{٢} = ١٠,٢٤ + ٢,٨٩$

$ق^{٢} = ١٣,١٣$

$\sqrt{ق^{٢}} = \sqrt{١٣,١٣}$

ق = ٣,٦ متر

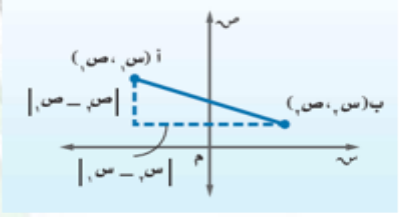
---

٣٦) **اكتشف الخطأ :** يحاول حسام وحازم تحديد إن كانت الأعداد "٣٦، ٧٧، ٨٥" تشكّل ثلاثية فيثاغورس. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

حسام	حازم
$٣٦^{٢} + ٧٧^{٢} \stackrel{؟}{=} ٨٥^{٢}$	$٣٦^{٢} + ٨٥^{٢} \stackrel{؟}{=} ٧٧^{٢}$
$١٢٩٦ + ٥٩٢٩ \stackrel{؟}{=} ٧٢٢٥$	$١٢٩٦ + ٧٧٢٥ \stackrel{؟}{=} ٥٩٢٩$
$٧٢٢٥ = ٧٢٢٥$	$٥٩٢٩ \neq ٩٠٢١$
نعم	لا

حل حسام صحيح ؛ و حازم لم يحقق أن مربع العدد الأكبر يساوي مجموع مربعي العددين الأخرين .

٩ – ٥ المسافة بين نقطتين



المسافة بين نقطتين :

المسافة بين نقطتين احداثيهما (س١،ص١) ، (س٢،ص٢) يُعبر عنها بالقانون :

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$$

ملحوظة هامة :

يمكن استعمال قانون المسافة بين نقطتين لمعرفة احداثي مجهول لأحدهما إذا عرفنا المسافة بينهما .

و نلاحظ أنه لدينا خياران ؛ لأن النقطة يمكن أن تكون لها البعد نفسه و من اتجاهين مختلفين .

مثال ١ : أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي ؟؟

أ) (٦ ، - ٢) ، (١٢ ، ٨)

ف = $\sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$

ف = $\sqrt{(١٢ - ٦)^٢ + (٨ - (-٢))^٢}$

ف = $\sqrt{(٦)^٢ + (١٠)^٢}$

ف = $\sqrt{٣٦ + ١٠٠}$

ف = $\sqrt{١٣٦}$

ف = ٢ $\sqrt{٣٤}$

ف = ١١,٧

ب) (٦ ، -٩) ، (٩ ، - ٩)

ف = $\sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$

ف = $\sqrt{(٩ - ٦)^٢ + (-٩ - (-٩))^٢}$

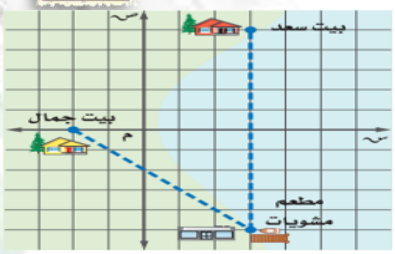
ف = $\sqrt{(٣)^٢ + (٠)^٢}$

ف = $\sqrt{٩ + ٠}$

ف = $\sqrt{٩}$

ف = ٣

٩ – ٥ المسافة بين نقطتين



(٢١) **تحديد مواقع :** أراد سعد وجمال أن يلتقيا في مطعم مشويات كما في التمثيل المجاور فاستعمل سعد قاربه للوصول إلى المطعم، في حين استعمل جمال سيارته، علمًا بأن طول ضلع كل مربع من المستوى الإحداثي يمثل كيلومترًا واحدًا.

أ) ما المسافة التي قطعها سعد؟

ب) ما المسافة التي قطعها جمال؟

جـ) ما النسبة بين المسافة التي قطعها سعد إلى المسافة التي قطعها جمال؟

إحداثيات بيت سعد (٣ ، ٥) ، إحداثيات بيت جمال (-٢ ، ٠) ، إحداثيات مطعم المشويات (٣ ، -٥)

أ) المسافة التي قطعها سعد = $ف_{١} = \sqrt{(س_{٣} - س_{١})^{٢} + (ص_{٣} - ص_{١})^{٢}}$

$ف_{١} = \sqrt{(٣ - ٣)^{٢} + (-٥ - ٥)^{٢}}$

$ف_{١} = \sqrt{(٠)^{٢} + (-١٠)^{٢}}$

$ف_{١} = \sqrt{١٠٠}$

$ف_{١} = ١٠$.

ب) المسافة التي قطعها سعد = $ف_{٢} = \sqrt{(س_{٣} - س_{٢})^{٢} + (ص_{٣} - ص_{٢})^{٢}}$

$ف_{٢} = \sqrt{(٣ - (-٢))^{٢} + (-٥ - ٠)^{٢}}$

$ف_{٢} = \sqrt{(٥)^{٢} + (-٥)^{٢}}$

$ف_{٢} = \sqrt{٢٥ + ٢٥}$

$ف_{٢} = \sqrt{٥٠}$

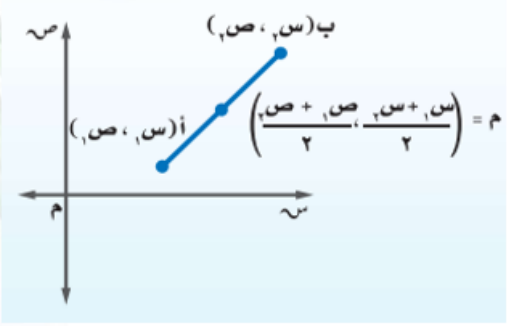
$ف_{٢} = ٥\sqrt{٢}$.

ج) نسبة المسافة التي قطعها سعد إلى المسافة التي قطعها جمال = $\frac{ف_{١}}{ف_{٢}}$

$= \frac{١٠}{٥\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{١٠\sqrt{٢}}{٢ \times ٥} = \frac{١٠\sqrt{٢}}{١٠} = \sqrt{٢} = ١,٤$.

٩ – ٥ المسافة بين نقطتين

منتصف القطع المستقيمة :



احداثي منتصف قطعة مستقيمة طرفاها أ(س١،ص١) ، ب(س٢،ص٢) يُعطى بالقانون :

$$م = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$$

مثال ٢ : أوجد احداثي نقطة المنتصف للقطع المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يلي ؟؟

أ) $\left(\frac{2}{5} ، \frac{-1}{5} \right) ، \left(\frac{1}{3} ، \frac{5}{2} \right)$

$م = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

$م = \left(\frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{3}}{2} ، \frac{\frac{-1}{5} + \frac{5}{2}}{2} \right) = \left(\frac{11}{15} ، \frac{23}{10} \right) = \left(\frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{3}}{2} ، \frac{\frac{-1}{5} + \frac{5}{2}}{2} \right)$

$م = \left(\frac{11}{30} ، \frac{23}{20} \right) = (٠,٣٧ ، ١,١٥)$

ب) (١٠ ، -٣) ، (-٨ ، -٥)

$م = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

$م = \left(\frac{10 + (-8)}{2} ، \frac{-3 + (-5)}{2} \right)$

$م = \left(\frac{2}{2} ، \frac{-8}{2} \right) = (١ ، -٤)$

ج) (٠ ، ٢) ، (٧ ، ٣)

$م = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

$م = \left(\frac{0 + 7}{2} ، \frac{2 + 3}{2} \right)$

$م = \left(\frac{7}{2} ، \frac{5}{2} \right) = (٣,٥ ، ٢,٥)$

٩ – ٥ المسافة بين نقطتين

تطبيق : أوجد قيمة المتغير أ مستعملاً إحداثيات النقطتين و المسافة المعطاة ؟؟

(-٥ ،أ) ، (٣ ، ١) ، ف= $\sqrt{٨٩}$

ف = $\sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$

$\sqrt{٨٩}$ = $\sqrt{(-٥ - ٣)^٢ + (أ - ١)^٢}$

$\sqrt{٨٩}$ = $\sqrt{(-٨)^٢ + (أ - ١)^٢}$

٨٩ = ٦٤ + $(أ - ١)^٢$ بتربيع الطرفين

$(أ - ١)^٢$ = ٨٩ - ٦٤

$(أ - ١)^٢$ = ٢٥

$\sqrt{(أ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

أ - ١ = $\pm$ ٥

إما أ - ١ = ٥ ⟸ أ = ٥ + ١ ⟸ أ = ٦

أو أ - ١ = -٥ ⟸ أ = -٥ + ١ ⟸ أ = -٤

٩ – ٦ المثلثات المتشابهة

المثلثات المتشابهة :

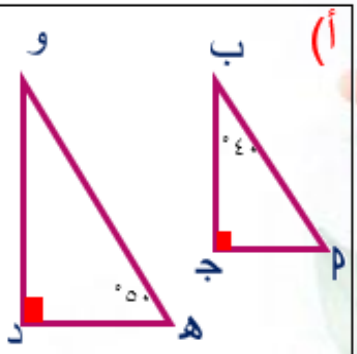
إذا تشابه مثلثان فإن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية وَ قياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

ملاحظات هامة :

- يُستخدم الرمز ~ للدلالة على التشابه .
- لإثبات أن المثلثين متشابهان يجب أن يتحقق أحد الشرطين :
  ١. قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .
  ٢. قياسات الأضلاع المتناظرة متناسبة .
- يمكن استخدام تشابه المثلثات لإيجاد قياسات مجهولة و كذلك لإيجاد قياسات غير مباشرة .

مثال ١ : حدد إذا كان كل زوج من المثلثات التالية متشابهان أم لا ؟؟ برر إجابتك ؟؟

أ)



في Δ أبجـ :

ق ∠ أ = ١٨٠ - (٤٠ + ٩٠) = ١٨٠ - ١٣٠ = ٥٠°

في Δ هـ و د :

ق ∠ و = ١٨٠ - (٥٠ + ٩٠) = ١٨٠ - ١٤٠ = ٤٠°

∴ ق ∠ أ = ق ∠ هـ = ٥٠° ، ق ∠ ب = ق ∠ و = ٤٠° ،
ق ∠ جـ = ق ∠ د = ٩٠°

∴ المثلثان متشابهان لتطابق زواياهما المتناظرة

٩ – ٦ المثلثات المتشابهة

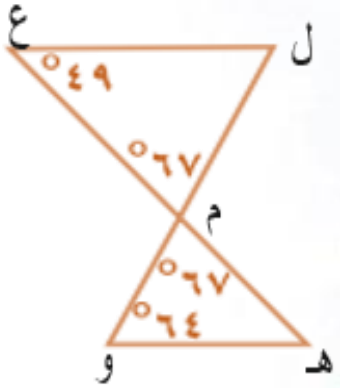
ب)

$$\frac{١٠}{٤} = \frac{٢٠}{٨} = \frac{٤٠}{١٦}$$

$$\frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

∴ المثلثان متشابهان لتناسب أضلاعهما المتناظرة .

ج)



في Δ م ل ع :

ق ∠ ل = ١٨٠ - (٦٧ + ٤٩) = ١٨٠ - ١١٦ = ٦٤°

في Δ م و هـ :

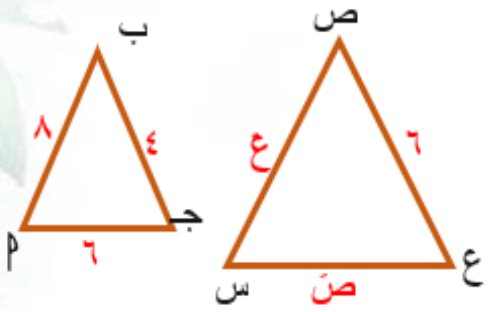
ق ∠ هـ = ١٨٠ - (٦٧ + ٦٤) = ١٨٠ - ١٣١ = ٤٩°

∴ ق ∠ ل = ق ∠ و = ٦٤° ، ق ∠ ع = ق ∠ هـ = ٤٩° ،
ق ∠ ل م ع = ق ∠ و م هـ = ٦٧°

∴ المثلثان متشابهان لتطابق زواياهما المتناظرة

٩ – ٦ المثلثات المتشابهة

مثال ٢ : إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع ، أوجد قياسات العناصر المجهولة ؟؟



المثلثان متشابهان

∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

$$\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{جـ}{ع}$$

$$\frac{٤}{٦} = \frac{٦}{ص} = \frac{٨}{ع}$$

∴ $\frac{٤}{٦} = \frac{٦}{ص}$ و $\frac{٤}{٦} = \frac{٨}{ع}$

٤ صَ = ٦ × ٦ ، ٤ عَ = ٦ × ٨

٤ صَ = ٣٦ ، ٤ عَ = ٤٨

صَ = $\frac{٣٦}{٤}$ ، عَ = $\frac{٤٨}{٤}$

صَ = ٩ ، **عَ = ١٢**

٩ - ٦ المثلثات المتشابهة

ب) إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع ، حيث أ = ٢ ، ب = ٥ ،
س = ١٠ ، ع = ٣٠ أوجد قياسات العناصر المجهولة ؟؟

المثلثان متشابهان

∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

$$\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{جـ}{ع}$$

$$\frac{٢}{١٠} = \frac{٥}{ص} = \frac{جـ}{٣٠}$$

∴ $\frac{٢}{١٠} = \frac{٥}{ص}$ و $\frac{٢}{١٠} = \frac{جـ}{٣٠}$

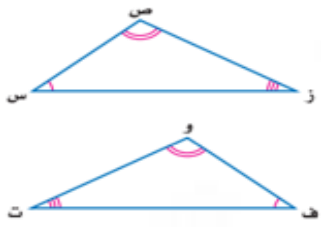
$٢ ص = ١٠ \times ٥$ ، $١٠ جـ = ٣٠ \times ٢$

$٢ ص = ٥٠$ ، $١٠ جـ = ٦٠$

$ص = \frac{٥٠}{٢}$ ، $جـ = \frac{٦٠}{١٠}$

ص = ٢٥ ، **جـ = ٦**

٢٣) **اكتشف الخطأ :** قارنت رهف ونوال بين المثلثين المتشابهين المجاورين. فأيّهما كانت مقارنتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.



رهف
ق ∠ س = ق ∠ ت
ق ∠ ص = ق ∠ و
ق ∠ ز = ق ∠ ف
Δ س ص ز ~ Δ ت و ف

نوال
ق ∠ س = ق ∠ و
ق ∠ ص = ق ∠ ف
ق ∠ ز = ق ∠ ت
Δ س ص ز ~ Δ و ف ت

مقارنتهما كلاهما غير صحيحة ؛

حيث أن ق ∠ س = ق ∠ ف ، ق ∠ ص = ق ∠ و ، ق ∠ ز = ق ∠ ت

∴ Δ س ص ز ~ Δ ف و ت

٩ – ٦ المثلثات المتشابهة

٧) **أشجار:** ترغب مريم في إيجاد ارتفاع شجرة في حديقتها، طول ظلها متران و٦٥ سنتمترًا. فإذا كان طول مريم متر و٥٠ سنتمترًا، وطول ظلها في تلك اللحظة ٧٥ سنتمترًا. فما ارتفاع الشجرة؟

- نفرض ارتفاع الشجرة = ع
- نكون تناسب $\frac{\text{طل الشجره}}{\text{طل مريم}} = \frac{\text{ارتفاع الشجره}}{\text{طول مريم}}$

$$\frac{ع}{١٥٠} = \frac{٢٦٥}{٧٥}$$

- نحل التناسب : ٧٥ ع = ٢٦٥ × ١٥٠

٧٥ ع = ٣٩٧٥٠

ع = ٥٣٠ سم

- ∴ ارتفاع الشجرة = ٥٣٠ سم = ٥,٣ م
- ارتفاع الشجرة = خمسة أمتار و ثلاثة سنتيمترات

---

٢١) **خرائط:** يظهر مقياس رسم لخريطة المملكة أن ٢,٥ سم على الخريطة تمثّل ١٠٠ كيلومتر في الواقع. فإذا كانت المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة على الخريطة ٨سم، فما البعد الحقيقي بينهما؟

- نفرض البعد الحقيقي بين مكة المكرمة و المدينة المنورة = س
- نكون التناسب : $\frac{\text{المسافة على الخارطة}}{\text{المسافة الحقيقية}} = \frac{\text{البعد بين مكة و المدينة على الخارطة}}{\text{البعد بين مكة و المدينة في الحقيقة}}$
- $\frac{٨}{س} = \frac{٢.٥}{١٠٠}$
- نحل التناسب : ٢,٥ س = ٨ × ١٠٠

$$س = \frac{٨ \times ١٠٠}{٢.٥}$$

س = ٣٢٠ كلم

- ∴ المسافة الحقيقية بين مكة و المدينة = ٣٢٠ كيلومتر .

٩ – ٦ المثلثات المتشابهة

٢٢) **مشروع المدرسة :** خطّط معلم التاريخ لعمل نموذج للكعبة المشرفة على مقياس رسم ٥ سم: ٠,٦ م. فإذا كان الارتفاع الفعلي للكعبة المشرفة ١٤ م، فكم سيكون ارتفاع النموذج؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

- نفرض ارتفاع النموذج = ع
- مقياس الرسم = $\frac{\text{ارتفاع نموذج الكعبة}}{\text{الارتفاع الفعلي للكعبة}}$
- $\frac{٥}{٠.٦} = \frac{ع}{١٤}$
- حل التناسب $٠,٦ \text{ ع} = ٥ \times ١٤$

$$ع = \frac{١٤ \times ٥}{٠.٦}$$

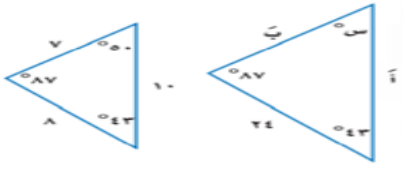
$$ع \approx ١١٦,٧ \text{ سم}$$

- ∴ ارتفاع النموذج = ١١٦,٧ سم تقريباً

تطبيق : جد القياسات المجهولة في المثلثين المتشابهين في كل مما يلي ؟؟

تحقق من فهمك

(أ٣



- س° = ٥٠°
- $\frac{أ}{١٠} = \frac{ب}{٧} = \frac{٢٤}{٨}$

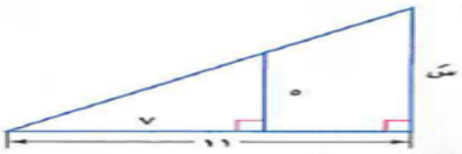
$\frac{أ}{١٠} = \frac{٢٤}{٨}$ و $\frac{ب}{٧} = \frac{٢٤}{٨}$

$٨ أ = ٢٤ \times ١٠$ $٨ ب = ٢٤ \times ٧$

$أ = \frac{٢٤ \times ١٠}{٨}$ $ب = \frac{٢٤ \times ٧}{٨}$

أ = ٣٠ **ب = ٢١**

(ب٣



$\frac{س}{٥} = \frac{١١}{٧}$

$٧ س = ١١ \times ٥$

$س = \frac{١١ \times ٥}{٧}$

$س \approx ٧,٩$

٩ – ٧ النسب المثلثية

حساب المثلثات :

هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث و أضلاعه .

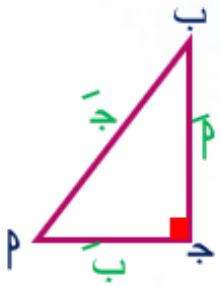
النسب المثلثية :

- هي النسب التي تُقارن بين طول ضلعين من أضلاع المثلث القائم .
- النسب المثلثية الأكثر شيوعا هي :

✓ الجيب رمزها جا و رمزها في الآلة الحاسبة sin .

✓ جيب التمام رمزها جتا و رمزها في الآلة الحاسبة cos .

✓ الظل رمزها ظا و رمزها في الآلة الحاسبة tan .



جيب الزاوية أ = الضلع المقابل للزاوية أ / الوتر ، جا أ = أ / جـ

جيب تمام الزاوية أ = الضلع المجاور للزاوية أ / الوتر ، جتا أ = ب / جـ

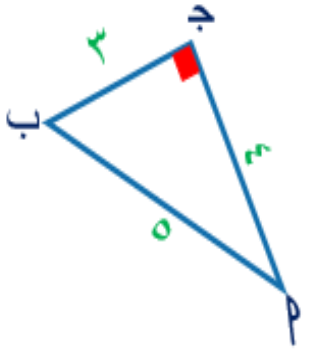
ظل الزاوية أ = الضلع المقابل للزاوية أ / الضلع المجاور للزاوية أ ، ظا أ = أ / ب

٩ – ٧ النسب المثلثية

مثال ١ : استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية التالية مقربا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف ؟؟

جا ٣٧° ≈ ٠,٦٠١٨	جتا ٤٤° ≈ ٠,٧١٩٣	جا ٣٠° ≈ $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥
ظا ٢° ≈ ٠,٠٣٤٩	ظا ٤٥° ≈ ١	جتا ٩٠° ≈ ٠

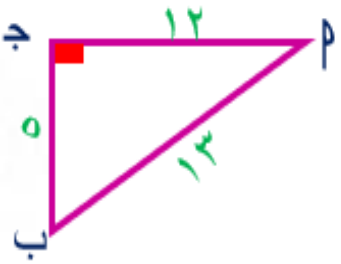
مثال ٢ : أوجد النسب المثلثية للزاوية م في كلاً مما يأتي ؟؟



$$\text{جا م} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$$

$$\text{جتا م} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{ظا م} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$$



$$\text{جا م} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٥}{١٣}$$

$$\text{جتا م} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١٢}{١٣}$$

$$\text{ظا م} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٥}{١٢}$$

٩ – ٧ النسب المثلثية

مثال ٣ : أوجد قيم النسب المثلثية الثلاثة للزاوية ب ؟؟

أولاً : نوجد الوتر

$$جـ^{٢} = م^{٢} + ب^{٢}$$

$$جـ^{٢} = ٢٥ + ١٢^{٢}$$

$$جـ^{٢} = ٢٥ + ١٤٤$$

$$جـ^{٢} = ١٦٩$$

$$\sqrt{جـ^{٢}} = \sqrt{١٦٩}$$

$$جـ = ١٣$$

ثانياً : نوجد النسب المثلثية للزاوية ب

$$جا\ ب = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٥}{١٣}$$

$$جتا\ ب = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١٢}{١٣}$$

$$ظا\ ب = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٥}{١٢}$$

الفصل التاسع : المعادلات الجذرية و المثلثات

٩ – ٧ النسب المثلثية

حل المثلث القائم :

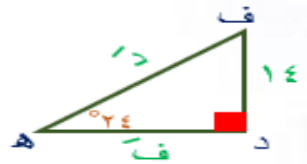
- هو إيجاد القياسات المجهولة لأضلاع المثلث القائم و زواياه .
- لحل المثلث يجب أن يتوفر : طول ضلعين أو طول ضلع و قياس إحدى الزاويتان الحادتين .

ملحوظة :

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية = ١٨٠° .

مثال ٤ : حل كل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرباً طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة ؟؟

أ)



١) ق ∠ ف = ١٨٠ – (٩٠ + ٢٤)

= ١٨٠ – ١١٤ = ٦٦°

٢) جا هـ = المقابل / الوتر

جا ٢٤ = ١٤ / د

د (جا ٢٤°) = ١٤

د = ١٤ / جا ٢٤

د = ٣٤,٤

٣) ظا هـ = المقابل / المجاور

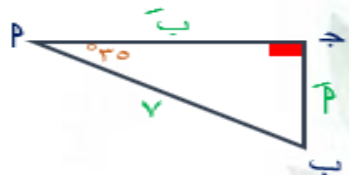
ظا ٢٤ = ١٤ / فـ

فـ (ظا ٢٤°) = ١٤

فـ = ١٤ / ظا ٢٤

فـ = ٣١,٤

ب)



١) ق ∠ ب = ١٨٠ – (٩٠ + ٣٥)

= ١٨٠ – ١٢٥ = ٥٥°

٢) جا أ = المقابل / الوتر

جا ٣٥ = أ / ٧

أ = ٧ × جا ٣٥°

أ = ٤,٠٢

٣) جتا أ = المجاور / الوتر

جتا ٣٥ = ب / ٧

ب = ٧ × جتا ٣٥

ب = ٥,٧

٩ – ٧ النسب المثلثية

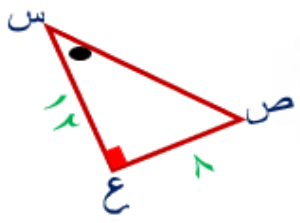
معكوس الدوال المثلثية :

إذا عُلمت النسب المثلثية الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة فإنه يمكن إيجاد قياسها باستعمال معكوس الدالة المثلثية .

الدالة	جا ﻫ = س	جتا ﻫ = س	ظا ﻫ = س
المعكوس	جا$^{-١}$ س =ق∠ﻫ	جتا$^{-١}$ س =ق∠ﻫ	ظا$^{-١}$ س =ق∠ﻫ

مثال ٥ : أوجد ق ∠ س لكل مثلث فيما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب درجة ؟؟

أ)

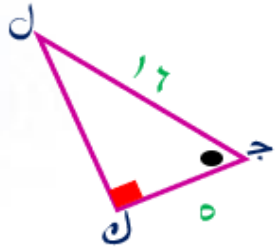


ظاس= المقابل / الجاور

ظا س = ٨/١٢

ق ∠ س = ظا$^{-١}$ (٨/١٢) ≈ ٣٤°

ب)

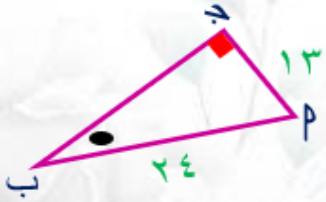


جتا جـ = المجاور / الوتر

جتا جـ = ٥/١٦

ق ∠ جـ = جتا$^{-١}$ (٥/١٦) ≈ ٧٢°

ج)



جا ب= المقابل / الجاور

جا ب = ١٣/٢٤

ق ∠ ب = جا$^{-١}$ (١٣/٢٤) ≈ ٣٢°

٩ – ٧ النسب المثلثية

١١) **تزلج على الجليد:** في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسي ١٠٠٠ م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض ١٨°، قدّر طول (ر).

$$\text{جا } ١٨^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الجاور}}$$

$$\text{جا } ١٨^\circ = \frac{١٠٠٠}{\text{ر}}$$

$$\text{ر} \times \text{جا } ١٨^\circ = ١٠٠٠$$

$$\text{ر} = \frac{١٠٠٠}{\text{جا } ١٨}$$

$$\text{ر} = ٣٢٣٦,١ \text{ م}$$

---

٢٩) **سلّم كهربائي:** يبلغ طول السلّم الكهربائي في أحد الأسواق الكبيرة ٣٥ مترًا، وقياس الزاوية التي يكوّنها مع الأرض ٢٩°، أوجد ارتفاع السلم.

$$\text{جا } ٢٩^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الجاور}}$$

$$\text{جا } ٢٩^\circ = \frac{\text{هـ}}{٣٥}$$

$$\text{هـ} = ٣٥ \times \text{جا } ٢٩^\circ$$

$$\text{هـ} = ١٧ \text{ م تقريباً}$$

∴ ارتفاع السلم الكهربائي = ١٧ م تقريباً .

---

٩ – ٧ النسب المثلثية

تحقق من فهمك

٤) **لوح التزلج:** ما طول لوح تزلج يصنع مع سطح الأرض زاوية قياسها ٢٥°، ويرتفع طرفه ٢ م؟

$$\text{جا } ٢٥^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جا } ٢٥^\circ = \frac{٢}{\text{ل}}$$

$$\text{ل} \times \text{جا } ٢٥^\circ = ٢$$

$$\text{ل} = \frac{٢}{\text{جا } ٢٥}$$

ل = ٤,٧ تقريباً .

∴ طول لوح التزلج = ٤,٧ م تقريباً .

الفصل العاشر

الإحصاء و الاحتمالات

الفصل العاشر :
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

العينة :

هي دراسة أجزاء من المجتمع الإحصائي .

المجتمع :

هو جملة الأشياء أو العناصر التي تُشكل هدف الدراسة .

أساليب جمع البيانات :

١. الدراسة المسحية : حيث تُؤخذ هذه البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع .. الاستعمال للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع .

٢. الدراسة القائمة على الملاحظة : حيث يتم تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة .. الاستعمال و ذلك لمقارنة ردود الأفعال و التوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع.

٣. التجربة : تُسجل البيانات بعد تغير العينة .. الاستعمال للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثة ما .

---

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

ملاحظات هامة :

١) نلجأ عادة إلى أسلوب العينة إذا تعذر علينا الوصول إلى جميع عناصر المجتمع الاحصائي .

٢) كلما كان حجم العينة أكبر أو استعملت عينات أكثر كانت النتائج أكثر تمثيلاً للمجتمع .

مثال ١ : حدد العينة و المجتمع الذي اختيرت منه ، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل في كل مما يلي ؟؟

١) أ) **بحوث:** قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من الفئران تجاه السكر.

المجموعة ١
طعام فيه سكر

المجموعة ٢
طعام بلا سكر

العينة : مجموعة الفئران الموجودة في مركز البحوث .

المجتمع : جميع الفئران .

أسلوب جمع البيانات : التجربة ؛ لأنه غير العينة من المجموعة (أ) إلى المجموعة (ب) للفئران .

---

٢) ب) **إعادة التدوير:** يرغب مجلس بلدي في أن يبدأ بمشروع إعادة تدوير، فأرسل لمجموعة من السكان اختيروا عشوائيًا ١٠٠٠ استبانة تضمنت سؤالاً حول المواد التي يرغبون في إعادة تدويرها.

العينة : ١٠٠٠ شخص اللذين استلموا الاستبانة .

المجتمع : جميع سكان المدينة .

أسلوب جمع البيانات : الدراسة المسحية ؛ لأنهم استعملوا الاستبانات .

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

٣) ١) **مجلات:** يريد القائمون على إعداد مجلة المدرسة اختيار تصميم لغلافها من بين خمسة تصاميم؛ لذا فقد اختير عشرة من طلاب المدرسة عشوائيًّا للانتقاء من بين هذه التصاميم.

العينة : الطلاب العشرة اللذين اختيروا من الدراسة .

المجتمع : جميع طلاب المدرسة .

أسلوب جمع البيانات : الملاحظة ؛ لأن الطلاب يسجلون ملاحظاتهم بعد مشاهدة التصميم .

---

٤) ٢) **رياضة:** يريد مدير نادٍ رياضي أن يحدّد شعارًا للنادي، فسأل ١٠٠ شخص من مشجعي النادي اختيروا عشوائيًّا عن آرائهم.

العينة : ١٠٠ شخص من مشجعي النادي .

المجتمع : جميع مشجعي النادي .

أسلوب جمع البيانات : الدراسة المسحية ؛ لأنهم سألوا أفراد العينة عن رأيهم .

---

٥) ٧) **صحف:** يريد محل بيع صحف أن يعرف عدد النسخ التي يطلبها من كل صحيفة يومية، فأرسل رسائل إلى جميع بيوت أحد الأحياء يسألهم فيها عن الصحيفة التي يطالعونها.

أسلوب جمع البيانات :الدراسة المسحية ؛ لأنهم أرسلوا رسائل لأفراد العينة .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

٦) ٨) **رحلات:** سألت وكالة سياحية جميع زبائنها الذين تعاملوا معها خلال السنتين الماضيتين عن الأماكن الأكثر تفضيلاً والأقل تفضيلاً.

أسلوب جمع البيانات : الدراسة المسحية ؛ لأنهم سألوا عينة الزبائن اللذين تعاملوا معهم خلال سنتين .

أنواع العينات :

١) عينة متحيزة : إذا كانت طريقة اختيار العينة تُعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى ... و هنا تكون البيانات المأخوذة متحيزة .

٢) عينة غير متحيزة : إذا كان لكل فرد من أفراد العينة الاحتمال نفسه في الاختيار ، و تُسمى عينة عشوائية .

مثال ٢ : عيني في كل مما يأتي إذا كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة ؟؟ و فسر اجابتك ؟؟

٢ب) **مطاعم:** يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يخدمون الزبائن بأسلوب جيد، فراقب أحد العاملين مدة ساعة في اليوم.

عينة متحيزة لأن المدير راقب عامل واحد من بين العاملين ساعة واحدة فقط .

٢أ) **مدرسة:** سُئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

عينة غير متحيزة " عشوائية " لأن الطلاب اختيروا عشوائياً .

---

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

٣) **هوايات:** يقف عدد من الطلاب عند مدخل المدرسة ويسألون كل عاشر طالب يدخلها عن هوايته المفضلة.

عينة غير متحيزة " عشوائية " لأن لكل طالب الفرصة نفسها ليكون الطالب العاشر .

٤) **تسوق:** سُئل كل خامس عشر متسوِّق في متجر ملابس عن نوع الهدية التي يودّ أن تُقدم له.

عينة متحيزة لأن هؤلاء الأشخاص موجودون في متجر ملابس فيكون الاحتمال الأكبر أن تكون إجابتهم " الملابس " .

٩) **مكتبة:** سأل أمين مكتبة كل من يستعير كتابًا إن كان يستعمل الحاسب الموجود في المكتبة.

عينة متحيزة لأنه يسأل الأشخاص اللذين يستعيرون الكتب فقط .

١٠) **ملابس:** يُعطي محل بيع ملابس كل زبونٍ بطاقة يمكنه أن يعيدها بالبريد، يسأله فيها عن نوع الثياب التي يفضِّلها.

عينة غير متحيزة " عشوائية" لأن لكل زبون فرصة الاختيار نفسها .

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

أنواع العينات العشوائية :

١) العينة العشوائية البسيطة : التي لها فرص الاختيار نفسها كأي عينة أخرى من المجتمع .

٢) العينة العشوائية الطبقية : يتم تقسيم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات .

٣) العينة العشوائية المنتظمة : تختار أفرادها تبعاً لفترة زمنية محدودة أو فئة محدودة من العناصر " يتم اختيار أفرادها باتباع نمط معين " .

مثال ٣ : حدد في كلا مما يلي العينة و المجتمع الذي اختيرت منه ، ثم صنف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة ؟؟ فسر اجابتك ؟؟

الربط مع الحياة

افتتح مستشفى الدمام المركزي عام ١٣٨٣هـ بسعة ٥٠ سريرًا، واستمر في التطور وزيادة الأقسام والعيادات حتى أصبح مجمعًا طبيًا متكاملًا باسم مجمع الدمام الطبي، يقدم خدماته إلى سكان مدينة الدمام والمنطقة الشرقية من المملكة.

أ٣) مستشفى: اعتمادًا على المعلومات المبينة إلى اليمين، وفي ندوة تعريفية، يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائيًا ليقدم نبذة عن الخدمات التي يوفرها المستشفى في قسمه.

العينة : الأطباء اللذين تم اختيارهم من كل قسم .

المجتمع : جميع أطباء المستشفى .

نوع العينة : طبقية ؛ لأنه يتم أولا تقسيم الأطباء في مجموعات حسب الأقسام " التخصصات " ثم يتم الاختيار .

---

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

٣ب) **طعام:** يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة بدءًا بوقتٍ يُحدّد عشوائيًا.

العينة : الفطائر التي فحصها كل ٢٠ دقيقة .

المجتمع : جميع الفطائر التي يعدها المطعم .

نوع العينة : منتظمة ؛ لأنه يتم فحص الفطائر في فترات زمنية محددة .

٣جـ) **احتفالات:** تلصق نجمة فى أحد الاحتفالات أسفل ثلاثة أطباق، وتقدم هدايا للضيوف الذين تكون هذه الأطباق من نصيبهم.

العينة : الأطباق التي تحمل الملصقات .

المجتمع : جميع الأطباق .

نوع العينة : بسيطة ؛ لأن لكل فرد الفرصة أن يكون الملصق على طبقه .

٥) **بطاقات مصوّرة:** وزّع أحمد بطاقات الصور التي التقطها في مجموعات بحسب المدن التي تمثّلها هذه البطاقات، ثم اختار بطاقتين عشوائيًا من كل مجموعة.

العينة : أزواج البطاقات التي اختارها من المجموعات .

المجتمع : جميع البطاقات التي يملكها أحمد .

نوع العينة : طبقية ؛ لأنه صنف البطاقات في مجموعات قبل اختيار العينة .

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

٦) **تلفزة:** تود محطة تلفزة أن تحدد أكثر برامجها مشاهدة، فأرسلت استبانةً إلى عدة أشخاص اختيروا عشوائيًّا من أنحاء المملكة كافة.

العينة : الأشخاص اللذين تسلموا الاستبانة من المحطة .

المجتمع : مشاهدو المحطة من كافة مدن المملكة . .

نوع العينة : بسيطة ؛ لأن لكل شخص الفرصة نفسها أن يرسلوا المحطة له الاستبانة " اختير الأشخاص عشوائياً " .

---

١١) **توظيف:** صنّفت شركة طلبات التوظيف لديها في مجموعات بحسب مناطق سكن مقدميها، ليتم فرزها لاختيار طلبات الشباب.

نوع العينة : طبقية ؛ لأنه قُسمت الطلبات إلى مجموعات بحسب المناطق قبل اختيار العينة من كل منطقة .

---

١٢) **تسوق:** يقدم مركز تجاري هدية للزبون رقم ٥٠ من بين كل خمسين زبونًا.

نوع العينة : منتظمة ؛ لأنه يتم اختيار الزبائن على فترات منتظمة

---

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

١٣) **حقائب:** أجرت شركة لصناعة الحقائب دراسة على زبائنها حول تصميم الحقيبة، وذلك عن طريق تسجيل شكل ولون الحقيبة التي يشتريها الزبون.

أ) حدّد العينة، والمجتمع الذي اختيرت منه.

ب) صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل.

جـ) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

د) إذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة.

أ) العينة : الزبائن اللذين خضعوا للدراسة .

المجتمع : جميع زبائن الشركة .

ب) أسلوب جمع البيانات : الملاحظة ؛ لأنهم يسجلون البيانات بعد مشاهدة اللون و الشكل الذي يختاره أفرد العينة .

ج) العينة : غير متحيزة ؛ لأن لكل زبون الفرصة نفسها ليكون بين المختارين في العينة .

د) نوع العينة : منتظمة ؛ لأنه يتحدث عن فئة محددة و هي اللون و الشكل .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

تلخيص نتائج الدراسة المسحية :

بعد جمع البيانات من الدراسة المسحية فإنها تحتاج إلى تلخيصها كي تكون ذات معنى ، و يمكن تلخيص بيانات الدراسة المسحية باستعمال مقاييس النزعة المركزية .

مقاييس النزعة المركزية :

المقاييس	طريقة الاستخدام	متى تُستخدم ؟؟
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسوماً على عددها .	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة .	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات و لكن لا توجد فجوات في وسط البيانات .
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكراراً في مجموعة البيانات	عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات .

أنواع البيانات :

١. بيانات كمية : و هي بيانات تُعطى بصورة قيم عددية يمكن تحليلها مثل : - درجة الاختبار - ساعات الدراسة - أوزان الأجسام - ...

٢. بيانات وصفية " نوعية " : و هي بيانات لا يمكن أن تأخذ قيما عددية مثل : - الجنس - الجنسية - البرنامج التلفزيوني المفضل - ...

١٠ – ٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

ملحوظة هامة :

أحياناً تكون البيانات كمية لا نستطيع إيجاد مقاييس النزعة المركزية لها عندما تمثل أشياء مختلفة .

مثال ١ : أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلاً مما يلي ؟؟ برر إجابتك ؟؟ احسب قيمة ذلك المقياس ؟؟

تحقق من فهمك

١أ) **تسوُّق:** سجَّل أحد محال بيع الأجهزة الإلكترونية عدد الزبائن في كل ساعة عمل في أحد الأيام كما هو موضح في الجدول المجاور.

عدد الزبائن			
٨٦	٧٩	٧١	٨٦
٨٦	٨٨	٣٢	٧٩
٧٠	٧١	٦٩	٨٢
٨٦	٨٥	٨١	٨٦

١ب) **كتب:** في دراسة مسحية لمصادر أبحاث عدد من طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المناطق التعليمية كانت الاستجابات على النحو الآتي: من المعلم: ٤٢٠؛ من مكتبة المدرسة: ١٣٢٠؛ من المكتبة العامة: ١٠٢٠؛ من متاجر الكتب: ١٠٢٠؛ من المكتبة المنزلية: ٧٢٠؛ من الإنترنت: ٥٤٠؛ من الأصدقاء: ٥٤٠ .

أ) المنوال ؛ لأن البيانات تحوي أعداداً مكررة .

المنوال = ٨٦

ب) قيم البيانات تمثل أشياء مختلفة فلا يمكن حساب مقاييس النزعة المركزية .

١٠ - ٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

١) **إعادة تدوير:** ترغب شركة في إعادة تدوير الأوراق الزائدة، فجمعتها في رزم ارتفاع الواحدة منها ٥٠سم، وقد أحصى خالد عدد الرزم في نهاية كل شهر من السنة فكانت: ١٥، ١٢، ١٤، ١٥، ١٨، ١٥، ١٣، ١٤، ١٣، ١٢، ١٥، ١٨.

الأنسب هو المنوال لأن مجموعة البيانات تتضمن قيما مكررة

المنوال = ١٥ .

٢) **سياحة:** تريد إحدى وكالات السياحة التي تعمل عبر الإنترنت أن تنظم رحلات للعائلات، فأجرت مسحًا حول المكان المفضل لها لقضاء الإجازة. وقد كانت الأماكن الخمسة الأولى هي: الشواطئ ٢٥٪؛ المتنزهات ٢٢٪؛ البر ٢١٪؛ المواقع الأثرية التاريخية ١٧٪؛ الجبال ١٥٪.

لا يمكن استخدام مقاييس النزعة المركزية لأن البيانات المعطاة تمثل أشياء مختلفة .

٧) **كتب:** أجرى متجر كتب مسحًا لمعرفة موضوع الكتب المفضلة لزبائنه، وكانت النتائج على النحو الآتي: الثقافية ٢١٪، القصص ١٩٪، المغامرات ١٢٪، العلمية ١٧٪، الدينية ١٨٪، التاريخية ١٣٪.

٨) **أنشطة صيفية:** أُجريت دراسة حول الأنشطة الصيفية المفضلة التي يمارسها الطلاب، وعُرضت نتائجها في الجدول المجاور.

الأنشطة الصيفية			
السباحة	٦٥٠	المخيمات	٤٣٢
الرحلات	٨٨٥	المطالعة	٢٨١
الرياضة	١١٢٣	أخرى	٥١٤

٧) لا يمكن استخدام مقاييس النزعة المركزية لأن البيانات المعطاة تمثل أشياء مختلفة .

٨) لا يمكن استخدام مقاييس النزعة المركزية لأن البيانات المعطاة تمثل أشياء مختلفة .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ – ٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

تقويم نتائج الدراسة المسحية :

هي القدرة على الحكم على مصداقية تقرير نتائج الدراسة المسحية عن طريق :

- التحقق من أن العينة عشوائية و كبيرة .
- مصدر البيانات موثوق به .
- العينة تمثل المجتمع تمثيلاً تاماً .

ملاحظات هامة :

١) لا بد أن تتحقق دائماً من أن الدراسة المسحية التي تُعطي بياناتها على صورة نسبة مئوية تدل على حجم العينة .

٢) يمكن أن تؤثر طريقة عرض نتائج الدراسة المسحية في طريقة تفسير نتائجها .

فمثلاً : ـ

- في التمثيل بالأعمدة و المدرج التكراري قد يؤدي تغير عرض الأعمدة إلى تضخم الاختلافات .
- فترات التدرج في التمثيل البياني أطوالها غير ثابتة .
- قد تؤثر درجات اللون الواحد على التمثيل البياني في اختلاط المجموعات بصرياً .

---

١٠ - ٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

مثال ٢ : حدد صحة المعلومات و الاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يلي ؟؟

٣) **تلفاز:** إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث تريد محطة تلفزيونية أن تغير نشاطها ، فأرسلت ١٠٠٠ استبانة بالبريد إلى أشخاص تمّ اختيارهم عشوائيًا تقع ضمن منطقة بثها وتلقت ٧٥٠ ردًا.
السؤال: ما نوع البرامج التلفزيونية التي تفضلها؟
الاستنتاج: يجب أن تتحول المحطة إلى محطة إخبارية.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
رياضية	٪٢٦
دينية	٪٣٢
إخبارية	٪٣٩
تعليمية	٪٣

التقرير غير صحيح ؛ بسبب عدم ذكر نوع المحطة التي نفذت الدراسة فيُحتمل أن يكون الأشخاص اللذين استجابوا للدراسة يشاهدون تلك المحطة أو محطات مشابهة لها .

٤) **رياضة:** استطلعت إدارة التعليم في إحدى المناطق آراء ٣٥٨٥ طالبًا عن رياضتهم المفضلة.
السؤال: ما الرياضة التي تفضل المشاركة فيها؟
النتائج: كرة الطائرة ٢٧١، كرة القدم ٥٧٠، كرة السلة ٤٣٦، التايكوندو ٢٧٩، المصارعة ١٩٧، جري التتابع ٢٠٩، السباحة ٣١٩، الجمباز ١٩٧، كرة اليد ٢٨٩، التنس ٢٠٢، رياضات أخرى ٦١٦.
الاستنتاج: كرة القدم هى الرياضة التى يفضل الطلاب المشاركة فيها.

١) لا يوجد تحيز ٢) المصدر موثوق ٣) البيانات تؤكد الاستنتاج

∴ كلاً من الدراسة المسحية و الاستنتاج صحيحان .

حدد إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.

٥) **مسحوق غسيل:** وزعت عينات من مسحوق غسيل على مجموعة من السيدات لمقارنته بمسحوق الغسيل الذي يستخدمنه.
السؤال: مارأيك باستبدال مسحوقك القديم بالمسحوق الجديد
الاستنتاج: لن تستبدل معظم السيدات مسحوق الغسيل الذي يقمن باستعماله

البيانات المعروضة في التمثيل تُؤيد الاستنتاج فطريقة العرض صحيحة .

١٠ - ٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

حدّد صحة كلٍّ من المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:

٩) **قيادة:** أجرت صحيفة استطلاعًا شمل ٧٥٠ شخصًا من سكان إحدى المدن.

السؤال: هل تتحدث عبر الهاتف الجوّال في أثناء قيادة السيارة؟

النتائج: لا ٢٠,٧٪؛ بضع مرات ٤٨,٧٪؛ على الأكثر ١,٥٪؛ دائمًا ٢٥,٥٪.

الاستنتاج: سائقو هذه المدينة غير حريصين.

البيانات غير دقيقة و الاستنتاج غير صحيح .

حدِّد ما إذا كانت طريقة تمثيل النتائج تعطي صورة صحيحة حول نتائج كلٍّ من الدراسات المسحية الآتية، وفسّر إجابتك.

١١) **بيئة:** التمثيل بالأعمدة المجاور يمثل نتائج إجراء مجلة بيئية دراسة مسحية شملت ١٠٠٠٠ شخص تم اختيارهم عشوائيًا.

السؤال: ما التحدي البيئي الأكبر في القرن الحادي والعشرين؟

الاستنتاج: إيجاد مكان لوضع النفايات أمر غير مهم.

الاستنتاج واسع جداً بالنسبة للبيانات المقدمة

---

١٠ - ٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

١٠) **قراءة:** أجرت مجلة نسائية استطلاعًا طلبت فيه من الطلاب والطالبات ذكر سبب القراءة.

النتائج: للاستمتاع ٢٥٪، لتعلم أشياء جديدة ٢٤٪، لتلبية طلبات المدرسة ١٨٪، بسبب الملل وعدم وجود شيء آخر ١٧٪، لأن أصدقاءهم يحبون القراءة ويتحدثون عن الكتب ١٦٪.

الاستنتاج: يقرأ الطلاب والطالبات الكتب لأسباب متعددة.

المصدر مجلة نسائية فقط ، فقد يكون معظم العينة من الفتيات

∴ لا يمكن الحصول على استنتاج غير متحيز بالنسبة للشباب بصورة عامة .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ – ٣ إحصائية العينة و معالم المجتمع

إحصائية العينة و معالم المجتمع :

هو تحليل نتائج الدراسة المسحية على مجتمع كامل باستخدام إحصائية العينة .

الإحصاء الاستدلالي :

استعمال احصائيات العينة للتوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملاً .

الإحصائي :

مقياس يصف إحدى خصائص العينة .

المَعْلَمَة :

مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع .

ملاحظات هامة :

- ✓ يتم تقدير معالم المجتمع بناء على إحصائيات عينة عشوائية ممثلة .
- ✓ تتغير قيمة الإحصائي عادة من عينة إلى أخرى ، إلا أن معلمة المجتمع تبقى ثابتة ؛ لأنها تُمثل المجتمع كاملاً .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ٣ إحصائية العينة ومعالم المجتمع

عيّن العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيين، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع:

١) **تعليم:** اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة، وسُئلوا إن كانوا راغبين في دراسة الهندسة بالجامعة، ثم حُسبت النسبة المئوية للذين كانت إجاباتهم "نعم".

٢) **كتب:** أُجريت دراسة شملت عينة مكوّنة من ١٠٠٠ طالب في الجامعات السعودية حول المبالغ التي ينفقونها في شراء الكتب الإضافية في كل عام، ثم حُسب المتوسط الحسابي لهذه المبالغ.

١) العينة : ١٠٠٣ طلاب من الصف ثالث ثانوي في المدارس الثانوية في جدة .

المجتمع : جميع طلاب ثالث ثانوي بمدارس جدة .

إحصائي العينة : النسبة المئوية لـ ١٠٠٣ طلاب من ثالث ثانوي من مدارس جدة الراغبين بدراسة الهندسة .

مَعْلَمَة المجتمع : النسبة المئوية لجميع طلاب ثالث ثانوي بمدارس جدة الراغبين بدراسة الهندسة .

٢) العينة : ١٠٠ طالب في الجامعات السعودية .

المجتمع : جميع طلاب الجامعات السعودية .

إحصائي العينة : المتوسط الحسابي للمبالغ التي ينفقها ١٠٠٠ طالب جامعي سعودي في شراء الكتب الإضافية كل عام .

مَعْلَمَة المجتمع : المتوسط الحسابي للمبالغ التي ينفقها جميع الطلاب الجامعيين بالسعودية في شراء الكتب الإضافية كل عام .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ٣ إحصائية العينة ومعالم المجتمع

التحليل الإحصائي :

تُسمى البيانات التي تتضمن متغيراً واحداً بيانات وحيدة المتغير .
و يمكن التعبير عن هذه البيانات بمقاييس النزعة المركزية مثل المتوسط الحسابي وَ الوسيط وَ المنوال ، كما يمكن التعبير عنها أيضاً بمقاييس التشتت مثل المدى وَ الرُبيعيات وَ المدى الرُبيعي .

الانحراف المتوسط :

هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة و المتوسط الحسابي لمجموعة بيانات ...

و لإيجاد الانحراف المتوسط اتبع الخطوات التالية : ـ

١) أوجد المتوسط الحسابي .
٢) أوجد مجموعة القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات و المتوسط الحسابي .
٣) أقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ٣ إحصائية العينة ومعالم المجتمع

٣) **عمل إضافي:** أحصى مدير أحد المصانع عدد ساعات العمل الإضافي لعمال أحد الأقسام في الأسبوع فكانت: ١٠، ١٢، ٠، ٦، ٩، ١٥، ١٢، ١٠، ١١، ٢٠.
أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

- المتوسط الحسابي = $\frac{١٠+١٢+٠+٦+٩+١٥+١٢+١٠+١١+٢٠}{١٠}$

$$= \frac{١٠٥}{١٠} = ١٠,٥$$

-

القيمة	| القيمة - المتوسط الحسابي |
١٠	| ١٠ - ١٠,٥ | = | -٠,٥ | = ٠,٥
١٢	| ١٢ - ١٠,٥ | = | ١,٥ | = ١,٥
٠	| ٠ - ١٠,٥ | = | -١٠,٥ | = ١٠,٥
٦	| ٦ - ١٠,٥ | = | -٤,٥ | = ٤,٥
٩	| ٩ - ١٠,٥ | = | -١,٥ | = ١,٥
١٥	| ١٥ - ١٠,٥ | = | ٤,٥ | = ٤,٥
١٢	| ١٢ - ١٠,٥ | = | ١,٥ | = ١,٥
١٠	| ١٠ - ١٠,٥ | = | -٠,٥ | = ٠,٥
١١	| ١١ - ١٠,٥ | = | ٠,٥ | = ٠,٥
٢٠	| ٢٠ - ١٠,٥ | = | ٩,٥ | = ٩,٥
المجوع	٣٥

- الانحراف المتوسط = $\frac{٣٥}{١٠} = ٣,٥$

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ٣ إحصائية العينة ومعالم المجتمع

١٠) **مبيعات:** رصد صاحب محل عدد الأكياس التي تُباع في كل ساعة من أحد أنواع الحلوى، فكانت:

١٦، ٢٤، ١٥، ١٧، ٢٢، ١٦، ١٨، ٢٤، ١٧، ١٣، ٢٥، ٢١

- المتوسط الحسابي =

$$\frac{٢١+٢٥+١٣+١٧+٢٤+١٨+١٦+٢٢+١٧+١٥+٢٤+١٦}{١٢} = \frac{٢٢٨}{١٢} = ١٩$$

-

القيمة	| القيمة - المتوسط الحسابي |
١٦	| ١٦ - ١٩ | = | -٣ | = ٣
٢٤	| ٢٤ - ١٩ | = | ٥ | = ٥
١٥	| ١٥ - ١٩ | = | -٤ | = ٤
١٧	| ١٧ - ١٩ | = | -٢ | = ٢
٢٢	| ٢٢ - ١٩ | = | ٣ | = ٣
١٦	| ١٦ - ١٩ | = | -٣ | = ٣
١٨	| ١٨ - ١٩ | = | -١ | = ١
٢٤	| ٢٤ - ١٩ | = | ٥ | = ٥
١٧	| ١٧ - ١٩ | = | -٢ | = ٢
١٣	| ١٣ - ١٩ | = | -٦ | = ٦
٢٥	| ٢٥ - ١٩ | = | ٦ | = ٦
٢١	| ٢١ - ١٩ | = | ٢ | = ٢
المجوع	٤٢

- الانحراف المتوسط = $\frac{٤٢}{١٢} = \frac{٧}{٢} = ٣,٥$.

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ٣ إحصائية العينة ومعالم المجتمع

الانحراف المعياري و التباين :

الانحراف المعياري : هو القيمة التي تحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي و يرمز لها بالرمز " ع " .

التباين : هو مربع الانحراف المعياري لمجموعة البيانات قيمته " $ع^{٢}$ " .

خطوات إيجاد التباين و الانحراف المعياري :

١) أوجد المتوسط الحسابي $\bar{س}$.

٢) أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات و المتوسط الحسابي ثم أجمع هذه المربعات .

٣) أقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لنحصل على التباين .

٤) أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين .

---

١٠ - ٣ إحصائية العينة ومعالم المجتمع

مثال : أوجد المتوسط الحسابي والتباين و الانحراف المعياري مقرباً لقرب جزء من عشرة ؟؟

٤) ٣ ، ٤ ، ١٨ ، ٢١ ، ١٧

- المتوسط الحسابي = $\overline{س} = \frac{٣+٤+١٨+٢١+١٧}{٥} = \frac{٦٣}{٥} \approx ١٢,٦$

القيمة	(القيمة - $\overline{س}$)^{٢}
٣	$(٣ - ١٢,٦)^{٢} = (-٩,٦)^{٢} = ٩٢,٢$
٤	$(٤ - ١٢,٦)^{٢} = (-٨,٦)^{٢} = ٧٤$
١٨	$(١٨ - ١٢,٦)^{٢} = (٥,٤)^{٢} = ٢٩,٢$
٢١	$(٢١ - ١٢,٦)^{٢} = (٨,٤)^{٢} = ٧٠,٦$
١٧	$(١٧ - ١٢,٦)^{٢} = (٤,٤)^{٢} = ١٩,٤$
المجوع	٢٨٥,٤

- التباين = $ع^{٢} = \frac{٢٨٥,٤}{٥} = ٥٧,٠٨ \approx ٥٧,١$
- الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

$ع = \sqrt{ع^{٢}} = \sqrt{٥٧,٠٨} \approx ٧,٦$

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ - ٣ إحصائية العينة ومعالم المجتمع

١١) ٣ ، ٨ ، ٧ ، ١٢

- المتوسط الحسابي = $\overline{س} = \frac{٣+٨+٧+١٢}{٤} = \frac{٣٠}{٤} \approx ٧,٥$
-

القيمة	(القيمة - $\overline{س}$)^{٢}
٣	$(٣ - ٧,٥)^{٢} = (-٤,٥)^{٢} = ٢٠,٢٥$
٨	$(٨ - ٧,٥)^{٢} = (٠,٥)^{٢} = ٠,٢٥$
٧	$(٧ - ٧,٥)^{٢} = (-٠,٥)^{٢} = ٠,٢٥$
١٢	$(١٢ - ٧,٥)^{٢} = (٤,٥)^{٢} = ٢٠,٢٥$
المجوع	٤١

- التباين = $ع^{٢} = \frac{٤١}{٤} = ١٠,٢٥ \approx ١٠,٣$
- الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

$ع = \sqrt{ع^{٢}} = \sqrt{١٠,٣} \approx ٣,٢$

---

١٥) **اكتشف الخطأ :** تصف كلٌّ من سحر ورغد طريقة لزيادة دقة دراسة مسحية، فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سحر	رغد
يجب أن تشتمل الدراسة المسحية على أكبر عدد ممكن من أفراد المجتمع .	يجب اختيار عينة الدراسة المسحية عشوائيًا، ويجب أن تُؤخذ عدة عينات عشوائية .

سحر و رغد كلاهما إجابته صحيحة ؛ لأن كلا الإجابتين تؤدي إلى دقة الدراسة المسحية .

١٠ – ٤ التباديل و التوافيق

فضاء العينة :

جميع الأشخاص و الأشياء في مجموعة العينة .

المضروب :

مضروب العدد الصحيح الموجب (ن) هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن (ن) أو تساويه و نرمز لذلك بالرمز ن !

و نكتب ن ! = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)×...×٣×٢×١ ، ن ≥ ١

مثال ١ : أوجد ما يلي ؟؟

٤! = ٤×٣×٢×١ = ٢٤ .	١ ! = ١ .
٧! = ٧×٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٥٠٤٠ .	
٠ ! = ١ .	$\frac{٣!}{٢!} = \frac{١\times٢\times٣}{١\times٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$.

١) **جوائز:** يريد أحد المراكز التجارية أن يعرض صور جوائزه الستِّ التي يوزِّعها على الزبائن على لوحة. بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صفٍّ واحدٍ؟

عدد الطرق لتنظيم الجوائز في صف واحد = ٦ !

= ٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٧٢٠ طريقة .

١٠ – ٤ التباديل و التوافيق

٨) تصوير: اصطفَّ الطلاب الأربعة الأوائل في فصول الصف الثالث المتوسط في إحدى المدارس في صفٍّ لالتقاط صورة؛ لعرضها على لوحة الشرف في المدرسة. فبكم طريقة يمكن أن ينظِّم المصور الطلاب الأربعة ليلتقط الصورة؟

عدد الطرق لينظم المعلم طلابه لالتقاط الصورة = ٤ !

= ٤×٣×٢×١ = ٢٤ طريقة .

التباديل :

هو تنظيم مجموعة من العناصر يكون ترتيبها مهماً و يكون عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة ر في كل مرة . و يرمز لها بالرمز $ل^{ن}_{ر}$ و يُعطى بالعلاقة : $ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ و يرمز أيضاً للتباديل بالرمز ل (ن ، ر) .

مثال ٢ : أوجد قيمة كلاً مما يلي ؟؟

١) $ل^{٧}_{٢}$	$= \frac{٧!}{(٧-٢)!} = \frac{٧!}{٥!} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} = ٤٢$.
٢) $ل^{٦}_{١}$	$= \frac{٦!}{(٦-١)!} = \frac{٦!}{٥!} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} = ٦$.
٣) $ل^{٥}_{١}$	$= \frac{٥!}{(٥-١)!} = \frac{٥!}{٤!} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥}{١\times٢\times٣\times٤} = ٥$.
٤) $ل^{٩}_{٣}$	$= \frac{٩!}{(٩-٣)!} = \frac{٩!}{٦!} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧\times٨\times٩}{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦} = ٥٠٤$.
٥) $ل^{٦}_{٦}$	$= \frac{٦!}{(٦-٦)!} = \frac{٦!}{٠!} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦}{١} = ٧٢٠$.

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ – ٤ التباديل و التوافيق

تحقق من فهمك

٢) **لوحات:** رسم فنان ١٥ لوحة فنية. فبكم طريقة يمكنه اختيار ١٠ لوحات منها لعرضها في معرض فني.

ترتيب اللوحات في المعرض الفني مهم

∴ نستخدم التباديل

$$\text{ل}_{١٠}^{١٥} = \frac{!\,١٥}{!\,(١٠-١٥)} = \frac{!\,١٥}{!\,٥} = ١,٩ \times ١٠^{١٠} \text{ طريقة}$$

---

١٨) **مجوهرات:** يعمل قاسم في محل لبيع المجوهرات. وقد طلب منه مديره أن يضع ثلاثًا من القلائد الاثنتي عشرة في خزانة العرض الأمامية. فبكم طريقة يمكن أن يرتب قاسم القلائد في خزانة العرض؟

ترتيب المجوهرات في المحل مهم

∴ نستخدم التباديل

$$\text{ل}_{٣}^{١٢} = \frac{!\,١٢}{!\,(٣-١٢)} = \frac{!\,١٢}{!\,٩} = \frac{!٩ \times ١٠ \times ١١ \times ١٢}{!\,٩} = ١٣٢٠ \text{ طريقة}$$

---

٢٥) **وظائف:** أجرى ٥١ شخصًا مقابلة لشغل إحدى الوظائف، فقامت لجنة المقابلة باختيار مرشح لهذه الوظيفة و٤ بُدلاء.

أ) هل تتضمن عملية الاختيار تباديل أم توافيق؟

ب) بكم طريقة يمكن أن تختار اللجنة المرشَّح للوظيفة والبُدلاء الأربعة؟

أ) تباديل .

ب) $\text{ل}_{٥}^{٥١} = \frac{!\,٥١}{!\,(٥-٥١)} = \frac{!\,٥١}{!\,٤٦} = \frac{!٤٦ \times ٤٧ \times ٤٨ \times ٤٩ \times ٥٠ \times ٥١}{!\,٤٦}$

$= ٢٨١٨٨٧٢٠٠$ طريقة .

١٠ – ٤ التباديل و التوافيق

التوافيق :

هو تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب غير مهم .

عدد توافيق ن من العناصر المختلفة مأخوذة ر في كل مرة يرمز له بالرمز $ن ق ر$ و تُعطى بالعلاقة $ن ق ر = \frac{ن !}{(ن-ر)! ر !}$.

ملحوظة هامة :

يمكن استعمال التباديل و التوافيق لإيجاد احتمال حدث .

مثال ٣ : أوجد قيمة كلاً مما يلي ؟؟

١) $٦ ق ٤ = \frac{٦ !}{(٦-٤)! ٤!} = \frac{٦!}{٢! ٤!} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ١ \times ٢} = ١٥$.

٢) $٥ ق ٥ = \frac{٥ !}{(٥-٥)! ٥!} = \frac{٥!}{٠! ٥!} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ١} = ١$.

٣) $٣ ق ٠ = \frac{٣ !}{(٣-٠)! ٠!} = \frac{٣!}{٠! ٣!} = \frac{١ \times ٢ \times ٣}{١ \times ١ \times ٢ \times ٣} = ١$.

٤) $٧ ق ٦ = \frac{٧ !}{(٧-٦)! ٦!} = \frac{٧!}{١! ٦!} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ١} = ٧$.

١٠ – ٤ التباديل و التوافيق

٧) **مثلجات:** يعرض أحد مصانع المثلجات ٥ أنواع مختلفة بطعم الشوكولاتة، و ٤ أنواع مختلفة بطعم الفراولة و ٦ أنواع بطعم التوت.

أ) بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الزبائن ٣ أنواع مختلفة من المثلجات؟

ب) هل تتضمن عملية الاختيار التباديل أم التوافيق؟

جـ) إذا تم اختيار أنواع «المثلجات» عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الأنواع الثلاثة التي اختارها أحد الزبائن بطعم الشوكولاتة؟

أ) ${}^{١٥}ق_{٣} = \frac{!١٥}{!٣(٣-١٥)!} = \frac{!١٥}{!٣\times!١٢} = \frac{!١٢\times١٣\times١٤\times١٥}{١\times٢\times٣\times!١٢} = ٤٥٥$ طريقة .

ب) توافيق لأن الترتيب غير مهم .

ج) ح (الأنواع الثلاثة بطعم الشوكولاتة) = ${}^{٥}ق_{٣} \div {}^{١٥}ق_{٣}$

$$= \frac{!٥}{!٣\times!(٣-٥)} \div \frac{!١٥}{!٣\times!(٣-١٥)} = \frac{!٥}{!٣\times!٢} \div \frac{!١٥}{!٣\times!١٢}$$

$$= ١٠ \div ٤٥٥ = \frac{٢}{٩١} = ٠,٠٢ = ٢,٢\%$$

١٠ – ٤ التباديل و التوافيق

٢٠) **كرة قدم:** رشّح معلم التربية الرياضية ٩ طلاب من الصف الأول المتوسط، و٦ طلاب من الصف الثاني المتوسط، و٨ طلاب من الصف الثالث المتوسط؛ لتشكيل فريق كرة القدم المدرسي. إذا علمت أن الفريق يتكون من ١١ لاعبًا أساسيًّا.

أ) ما عدد طرق اختيار الفريق الأساسي؟

ب) إذا تم اختيار الفريق الأساسي عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من بينهم طالب واحد على الأقل من الصف الثالث المتوسط؟

أ) عدد الطلاب المرشحين = ٩ + ٦ + ٨ = ٢٣ .

الترتيب غير مهم فنستخدم التوافيق .

$$ق^{٢٣}_{١١} = \frac{!٢٣}{!١١(١١-٢٣)} = \frac{!٢٣}{!١١ \times !١٢} = ١٣٥٢٠٧٨ .$$

ب) لإيجاد احتمال أن يكون طالب واحد على الأقل من الصف الثالث نوجد احتمال عدم وجود طالب من الصف الثالث في الفريق ثم نطرحه من ١ (احتمال متممة حادثة)

عدد طرق عدم وجود أي طالب من الصف الثالث (أي أن الفريق يتكون من طلاب الصفين الأول و الثاني فقط)

$$ق^{١٥}_{١١} = \frac{!١٥}{!١١(١١-١٥)} = \frac{!١٥}{!١١ \times !٤} = ١٣٦٥ .$$

ح (عدم وجود أي طالب من الصف الثالث) = $\frac{١٣٦٥}{١٣٥٢٠٧٨}$

ح (وجود طالب على الأقل من الصف الثالث) = ١ - $\frac{١٣٦٥}{١٣٥٢٠٧٨}$ = ٠,٩٩

١٠ – ٤ التباديل و التوافيق

٤) **كتب:** أراد أربعة طلاب أن يختاروا كتبًا يقرؤونها من بين ١٨ كتابًا مختلفًا، تتكون من ٤ روايات، و٦ كتب علمية ، و٨ كتب إسلامية. بكم طريقة يمكنهم اختيار الكتب الأربعة؟

الترتيب غير مهم

∴ نستخدم التوافيق

$$^{18}ق_{٤} = = \frac{!١٨}{!٤(٤-١٨)} = \frac{!١٨}{!٤ \times !١٤} = ٣٠٦٠ \text{ طريقة .}$$

حدّد هل يتضمن كل موقف من المواقف الآتية تباديل أم توافيق:

٢١) اختيار ٣ أنواع مختلفة من الفطائر من قائمة تحتوي على ١٢ نوعًا.

٢٢) اختيار الفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى في مسابقة ثقافية.

٢٣) اختيار ٥ كتب لقراءتها من بين ٨ كتب على رفٍّ.

٢٤) ترتيب حروف كلمة «سعودي».

٢١) توافيق .

٢٢) تباديل .

٢٣) توافيق .

٢٤) تباديل .

---

١٠ – ٤ التباديل و التوافيق

٢٧) **اكتشف الخطأ:** تريد كلٌّ من سلمى ونوف أن يكوِّنا لجنة مؤلفة من ٤ طالبات؛ للإشراف على تزيين المدرسة استعدادًا لاحتفال تكريم الأوائل. تريد كلٌّ منهما أن تحدد عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا تطوَّعت ١٠ طالبات للقيام بهذا العمل. فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سلمى

$$ل^{١٠}_{٤} = \frac{!١٠}{!(٤-١٠)}$$

$$= ٥٠٤٠$$

نوف

$$ق^{١٠}_{٤} = \frac{!١٠}{!٤!(٤-١٠)}$$

$$= ٢١٠$$

الترتيب غير مهم فحل نوف صحيح لأنها استخدمت التوافيق .

١٠ – ٥ احتمالات الحوادث المركبة

لحادثة المركبة :

حادثة تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر .

أنواع الحوادث المركبة :

١) حادثتان مستقلتان : تكون أ ، ب حادثتان مستقلتان إذا كان احتمال حدوث أ لا يؤثر في احتمال حدوث ب

مع الارجاع

ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب) .

٢) حادثتان غير مستقلتان : تكون أ ، ب حادثتان غير مستقلتان إذا كان احتمال حدوث أ يُغير بطريقة ما احتمال حدوث ب

بدون الارجاع
و ⇔ ثم

ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ) .

٣) حادثتان متنافيتان : تكون أ ، ب حادثتان متنافيتان عندما لا يمكن وقوعهما معاً " لا توجد بينهما عناصر مشتركة "

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) .

٤) حادثتان غير متنافيتان : تكون أ ، ب حادثتان غير متنافيتان إذا وجد بينهما عناصر مشتركة

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ وَ ب) .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ – ٥ احتمالات الحوادث المركبة

ملاحظات هامة :

١) الحرف (و) يدل على وقوع الحادثتين معاً و يشير إلى ضرب الاحتمالات .

٢) العبارة ح (أ ، ب) تقرأ : ـ احتمال وقوع أ وَ وقوع ب .

٣) الحادثة البسيطة هي حادثة تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة للتجربة .

٤) العبارة ح (ب بعد أ) تقرأ : ـ احتمال ب بشرط وقوع أ أولاً ، و تُسمى الاحتمال المشروط .

٥) مجموع احتمالي أي حادثتين متتامتان = ١ ، فإذا كانت $\bar{أ}$ متممة أ فإن ح ($\bar{أ}$) = ١ - ح (أ) .

٦) الحرف (أو) يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل ، و يشير إلى جمع الاحتمالات .

٧) العبارة ح (أ أو ب) تقرأ : ـ احتمال وقوع أ أو وقوع ب .

---

١) **ألعاب الأطفال:** يحتوي صندوق ألعاب على ١٢ دمية و ٨ سيارات صغيرة و ٣ كرات. إذا اختارت أمينة اثنتين عشوائيًا من هذه الألعاب لأخيها الأصغر، فما احتمال أن تكون قد اختارت سيارتين صغيرتين؟

- عدد عناصر فضاء العينة = ١٢ + ٨ + ٣ = ٢٣ .
- الحوادث غير مستقلة
- ح (اختيار سيارتين صغيرتين) = $\frac{٨}{٢٣} \times \frac{٧}{٢٢}$

$= \frac{٥٦}{٥٠٦} = \frac{٢٨}{٢٥٣} = ٠,١١ = ١١٪$ تقريباً .

١٠ – ٥ احتمالات الحوادث المركبة

٣) **كتب:** اختار حسن كتابًا من الرف المجاور عشوائيًا، وأعاده ثم اختار كتابًا آخر. فما احتمال أن يكون قد اختار كتابين من كتب الرياضيات؟

- عدد الكتب = ٤ علوم + ٥ تاريخ + ٨ رياضيات = ١٧ كتاب
- اختار كتاب و أعاده ؛ فتكون الحوادث مستقلة .
- ح (كتابين رياضيات) = $\frac{٨}{١٧} \times \frac{٨}{١٧} = \frac{٦٤}{٢٨٩}$ = ٠,٢٢ = ٢٢٪ .

---

٩) **حلوى:** يحتوي صندوق على ١٠ قطع شوكولاتة بالحليب و٨ قطع شوكولاتة سوداء و ٦ قطع شوكولاتة بيضاء. اختار محمد قطعة واحدة عشوائيًا وأكلها، ثم اختار قطعة ثانية عشوائيًا. فما احتمال أن يكون قد اختار قطعة شوكولاتة بالحليب، ثم قطعة شوكولاتة بيضاء؟

- عدد قطع الشكولاتة = ١٠ بالحليب + ٨ سوداء + ٦ بيضاء

= ٢٤ قطعة .

- اختار محمد قطعة واحدة و أكلها ؛ فالحوادث غير مستقلة .
- ح (شكولاتة بالحليب وَ شكولاتة بيضاء) = $\frac{١٠}{٢٤} \times \frac{٦}{٢٣}$

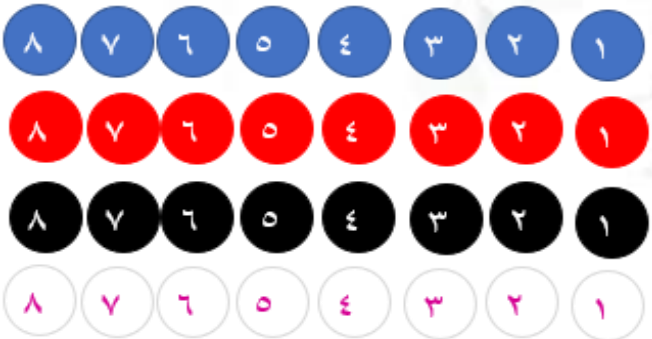
= $\frac{٦٠}{٥٥٢} = \frac{٥}{٤٦}$ = ٠,١١ = ١١٪ .

الفصل العاشر
الإحصاء و الاحتمالات

١٠ – ٥ احتمالات الحوادث المركبة

يحتوي صندوق على ٨ كرات حمراء و٨ سوداء و ٨ بيضاء و ٨ زرقاء، وقد رُقّمت كرات كل لون بالأرقام من ١ إلى ٨، فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًا من الصندوق. حدّد هل الحادثتان في كلٍّ ممّا يأتي متنافيتان أم غير متنافيتين، ثم أوجد الاحتمال:

٤) ح (٢ أو ٨)　　٥) ح (حمراء أو زرقاء)　　٦) ح (زوجي أو سوداء)



- عدد الكرات = ٨ حمراء + ٨ سوداء + ٨ بيضاء + ٨ زرقاء

= ٣٢ كرة .

٤) ح (٢ أو ٨) = ح (٢) + ح (٨)　　الحوادث متنافية

$= \frac{٤}{٣٢} + \frac{٤}{٣٢} = \frac{٨}{٣٢} = \frac{١}{٤} = ٠,٢٥ =$ ٢٥٪ .

٥) ح(حمراء أو زرقاء)=ح(حمراء)+ح(زرقاء)　الحوادث متنافية

$= \frac{٨}{٣٢} + \frac{٨}{٣٢} = \frac{١٦}{٣٢} = \frac{١}{٢} = ٠,٥ =$ ٥٠٪ .

٦) ح (زوجي أو سوداء)

الحوادث غير متنافية لأنه يوجد كرات زوجية سوداء

∴ ح (زوجي أو سوداء) = ح (زوجي) + ح (سوداء) - ح (سوداء زوجية)

$= \frac{١٦}{٣٢} + \frac{٨}{٣٢} - \frac{٤}{٣٢} = \frac{٢٠}{٣٢} = \frac{٥}{٨} = ٠,٦٣ =$ ٦٣٪ .

١٠ – ٥ احتمالات الحوادث المركبة

١١) **لعبة البولينج:** تشير نتائج سابقة إلى أن احتمال أن يُسقِط مشعل جميع القوارير في المحاولة الأولى ٣٠٪ ، واحتمال إسقاطها في المحاولة الثانية ٤٥٪ ، واحتمال عدم إسقاطها في المحاولتين ٢٥٪. فما احتمال أن يسقط مشعل القوارير جميعها في المحاولة الأولى أو الثانية لأيِّ إطارٍ؟

- الحوادث متنافية .
- ح (أن تسقط القوارير في المحاولة الأولى أو الثانية)

$$= \frac{٣٠}{١٠٠} + \frac{٤٥}{١٠٠} = \frac{٧٥}{١٠٠} = \frac{٣}{٤} = ٧٥٪ .$$

---

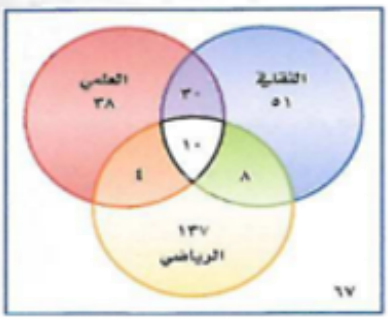
١٢) **صغار القطط:** أنجبت هرة ٨ قطط صغيرة: خمس إناث ؛ اثنتان برتقاليتان، و ٣ ملونة ، وثلاثة ذكور؛ واحد برتقالي، واثنان ملونان. فأراد خالد أن يحتفظ بواحدة من القطط الصغيرة، فما احتمال أن يختار منها واحدًا برتقالي اللون أو أنثى عشوائيًّا؟

- الحوادث غير متنافية لأنه يوجد قطط أنثى برتقالية .
- ح (اختيار قط برتقالي أو أنثى)

=ح (برتقالي) + ح (أنثى) - ح (أنثى برتقالي اللون)

$$= \frac{٣}{٨} + \frac{٥}{٨} - \frac{٢}{٨} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} = ٧٥٪ .$$

١٠ – ٥ احتمالات الحوادث المركبة



١٩) **النشاط المدرسي:** يمثّل شكل ڤن الآتي النشاطات المدرسية التي يشارك فيها طلاب المرحلة المتوسطة في إحدى المدارس.

أ) ما عدد طلاب المرحلة المتوسطة في هذه المدرسة؟

ب) ما عدد الطلاب المشاركين في النشاط الرياضي؟

جـ) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائيًا، فما احتمال أن يكون مشاركًا في النشاط الرياضي أو العلمي؟

د) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائيًا، فما احتمال أن يكون مشاركًا في النشاطين الثقافي والعلمي فقط؟

أ) عدد طلاب المرحلة المتوسطة

= ٥١+٣٠+٣٨+١٠+٤+٨+١٣٧+٦٧ = ٣٤٥ طالب .

ب) عدد الطلاب المشاركين في النشاط الرياضي

= ٨+١٠+٤+١٣٧= ١٥٩ طالب .

ج) ح(أن يكون الطالب مشاركاً في النشاط الرياضي أو العلمي)

$$= \frac{١٥٩}{٣٤٥} + \frac{٣٠+٣٨}{٣٤٥} = \frac{١٥٩}{٣٤٥} + \frac{٦٨}{٣٤٥} = \frac{٢٢٧}{٣٤٥} = ٠,٦٦ = ٦٦٪ .$$

د) ح (أن يكون الطالب مشاركاً في النشاطين الثقافي و العلمي فقط)

$$= \frac{٣٠}{٣٤٥} = \frac{٢}{٢٣} = ٠,٠٩ = ٩٪ .$$

١٠ – ٥ احتمالات الحوادث المركبة

٢١) **اكتشف الخطأ:** يريد كلٌّ من حمدٍ وجمالٍ تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء أو حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على ٨ كرات زرقاء و ٦ حمراء و ٨ صفراء و ٤ بيضاء. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ اشرح تبريرك.

حمد

ح (زرقاء أو حمراء)
= ح(زرقاء) + ح (حمراء)
$= \frac{٨}{٢٦} + \frac{٦}{٢٦}$
$= \frac{١٤}{٢٦}$ = ٥٤٪ تقريبًا

جمال

ح (زرقاء أو حمراء)
= ح (زرقاء) × ح (حمراء)
$= \frac{٨}{٢٦} \times \frac{٦}{٢٦}$
$= \frac{٤٨}{٦٧٦}$ = ٧٪ تقريبًا

ح (كرة زرقاء أو حمراء) يعني أن الحوادث متنافية

∴ حل حمد صحيح .

المراجع

- كتاب الطالب للصف الثالث متوسط عام ١٤٤٢هـ
- كتاب المعلم للصف الثالث متوسط
- قناة عين التعليمية
- منتديات يزيد التعليمية
- شبكة الرياضيات التعليمية
- سلسلة العبيكان لتبسيط الرياضيات

خاتمة

الحمد لله الذي هدانا و أعاننا إلى ما بلغناه من نتائج و أفكار .... الحمد لله على التمام

أتمنى أن أكون قد وفقت في عرض كل مفيد و مهم في هذا العمل المتواضع ....و ما حصل من صواب فمن الله العزيز الكريم و ما حصل من خطأ أو تقصير فمن النفس و الشيطان ....

تمنياتي للجميع بالتوفيق و النجاح و آخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.