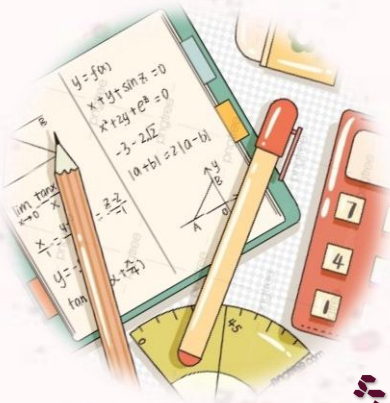
المفيد في الرياضيات

للصف الثالث متوسط

الفصل الدراسي الثاني



المؤلف

أ. مهره عبدالله عبدالله القحطاني

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

الأستاذة / مهره عبدالله عبدالله القحطاني

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بِ:

المفيد في الرياضيات للصف الثالث متوسط الفصل الدراسي الثاني

تحت رقم إيداع 1443/6663 وتاريخ 1443/06/23 هـ، ورقم ردمك 978-603-04-0800-9

الفهرس

الموضوع	رقم الصفحة
المقدمة	٤
شكر و تقدير	٥
إهداء	٦
الفصل الخامس " أنظمة المعادلات الخطية"	٧
الفصل السادس " كثيرات الحدود"	٢٥
الفصل السابع " التحليل و المعادلات التربيعية "	٥٠
المراجع	٧٢
الخاتمة	٧٣

المقدمة

حينما يمتزج الإبداع والاهتمام والاجتهاد حينها تظهر ثمرة الصبر والجد في نهاية الأمر وتشعر بلذة الانجاز والفخر وتستمر في العطاء بدون توقف . . .أضع بين أيديكم المفيد في الرياضيات ؛ يشرح بصورة مبسطة و سهلة وواضحة و شاملة كثير من التمارين و التعاريف و القوانين الهامة لطلاب الصف الثالث متوسط و معلمي مادة الرياضيات و أولياء الأمور و لكل من يستفيد منه . . .

نأمل أن ينال هذا العمل على رضاكم و استحسانكم

شكر وتقدير

أتقدم بالشكر و التقدير لمجموعة رفعة لأنها قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين و المعلمات ، وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات و التعليم العام

إهداء

الحمد لله وكفى والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى . . الحمد لله الذي وفقنا لإنجاز هذه الخطوة في مسيرتنا العلمية والعملية فهي ثمرة النجاح والجهد بفضل الله تعالى ومهداه

إلى من أشتاق إليه بكل جوارحي . . أبي الغالي الحبيب

إلى من قدَّمت سعادتي وراحتي على سعادتها . . . أمي الفاضلة الحبيبة

إلى أخواني وأخواتي . . . إلى مديرتي الفاضلة ... إلى مشرفاتي العزيزات . . . . . إلى رفيقات المشوار . . . . إلى كل من كان له أثر على حياتي

جعل الله تعالى عملنا خالصا لوجهه الكريم وأتمنى أن ينال رضاكم واستحسانكم

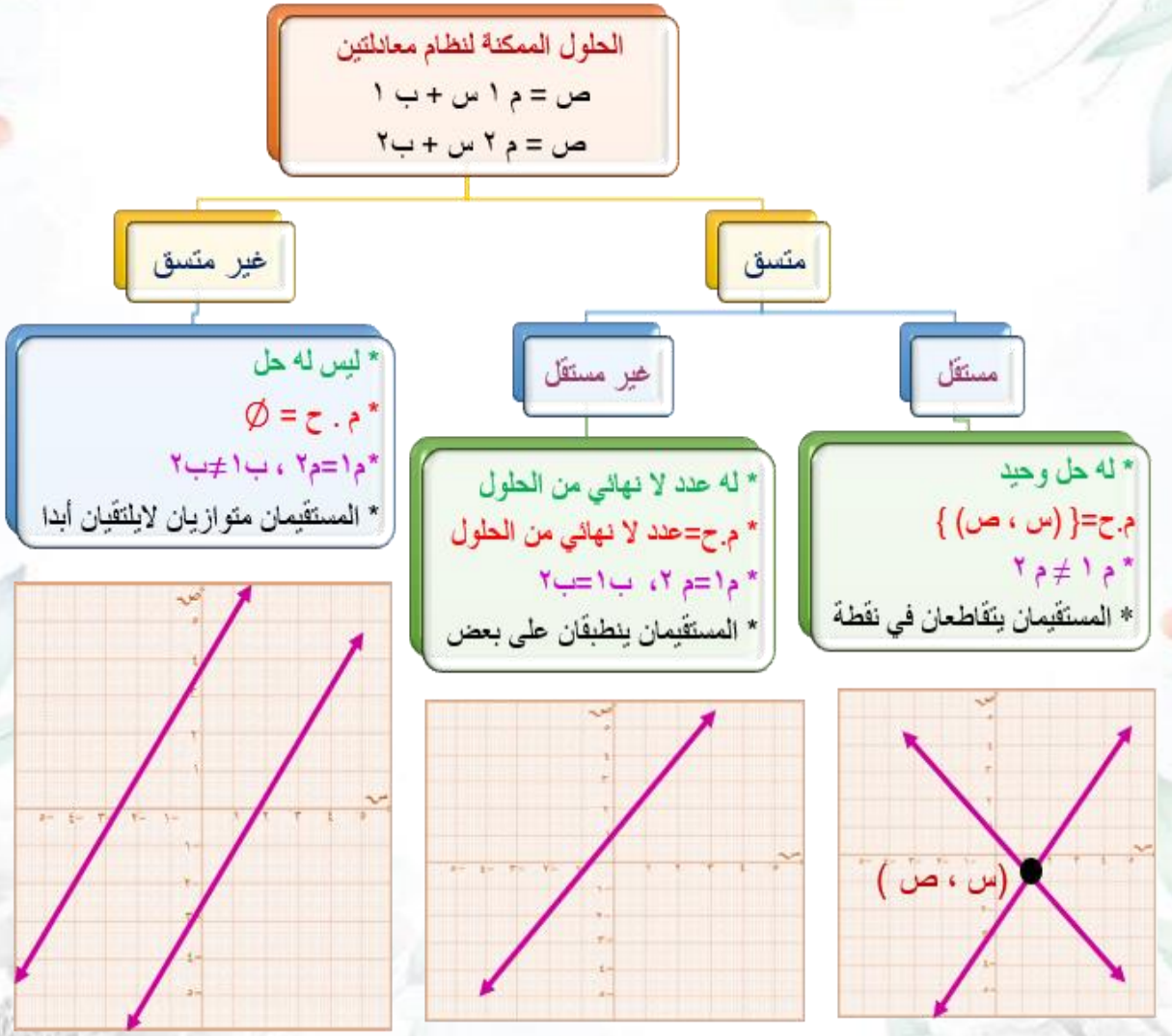
الفصل الخامس

أنظمة المعادلات الخطية

٥ – ١ حل نظام معادلتين خطيتين بيانيا

حل نظام معادلتين بيانيا :

أي تمثيل المعادلتين بيانيا و إيجاد نقطة التقاطع و التي تُمثل حل النظام .



٥ – ١ حل نظام معادلتين خطيتين بيانيا

مثال ١ : حدد إذا كانت الأنظمة التالية متسق أم غير متسق ، مستقل أم غير مستقل ؟

١) ص = - ٣ س + ١ ص = ٣ س + ١ • م١ = -٣ ، م٢ = ٣ م١ ≠ م ٢ ∴ النظام متسق مستقل للنظام حل وحيد	٢) ص = ٣ س + ١ ص = س – ٣ • م١ = ٣ ، م٢ = ١ م١ ≠ م ٢ ∴ النظام متسق مستقل للنظام حل وحيد
٣) ص = س – ٣ ص = س + ٣ • م١ = ١ ، م٢ = ١ م١ = م ٢ • ب١ = -٣ ، ب٢ = ٣ ب١ ≠ ب٢ ∴ النظام غير متسق النظام ليس له حل	٤) ص = س + ٣ ص = س + ٣ • م١ = ١ ، م٢ = ١ م١ = م ٢ • ب١ = ٣ ، ب٢ = ٣ ب١ = ب٢ ∴ النظام متسق غير مستقل للنظام عدد لانهائي من الحلول

٥ – ١ حل نظام معادلتين خطيتين بيانيا

مثال ٢ : مثل بيانياً كل نظام فيما يأتي و أوجد مجموعة الحل ؟؟

أ) ص = س+ ٤

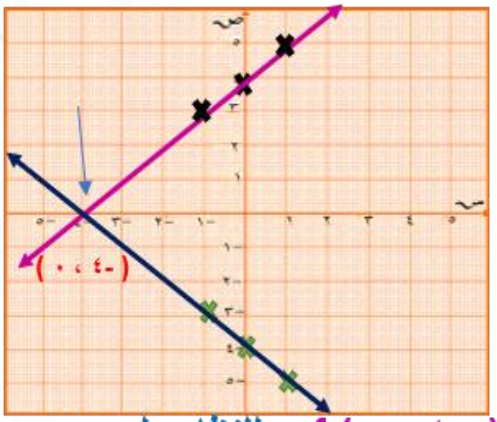
ص = - س - ٤

نكون جدول للمعادلة ص=س+٤

س	٠	١	١-
ص	٤	٥	٣

نكون جدول للمعادلة ص= - س-٤

س	٠	١	١-
ص	٤-	٥-	٣-



∴ م . ح = { (٠ ، ٤ -) } ، للنظام حل وحيد

ب) ص = س-٦

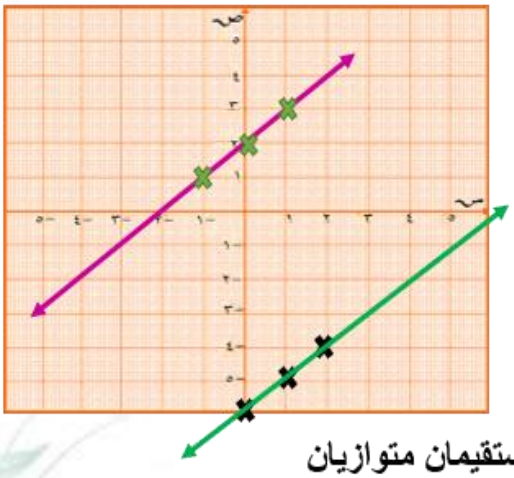
ص = س +٢

نكون جدول للمعادلة ص=س-٦

س	٠	١	٢
ص	٦-	٥-	٤-

نكون جدول للمعادلة ص= س+٢

س	٠	١	١-
ص	٢	٣	١



المستقيمان متوازيان

∴ النظام ليس له حل

∴ م . ح = ∅

٥ – ١ حل نظام معادلتين خطيتين بيانيا

ج) س + ص = ٤

٣ س + ٣ ص = ١٢

⟸ ص = -س + ٤

ص = - س +٤

نكون جدول للمعادلة ص=- س+٤

س	٠	١	١-
ص	٤	٣	٥

المستقيمان ينطبقان على بعض

∴ للنظام عدد لا نهائي من الحلول

د) ص = س+ ٣

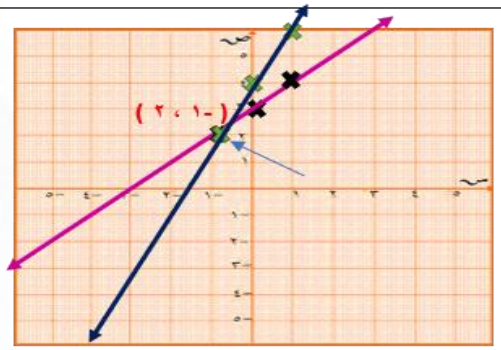
ص = ٢ س + ٤

نكون جدول للمعادلة ص=س +٣

س	٠	١	١-
ص	٣	٤	٢

نكون جدول للمعادلة ص= ٢ س+ ٤

س	٠	١	١-
ص	٤	٦	٢



∴ م . ح = { (٢ ، ١ -) }

للنظام حل وحيد

٣٣) أيٌّ من أنظمة المعادلات الآتية يختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى؟ فسّر إجابتك:

٣س – ٢ص = ١ ٢س + ٣ص = ١٨	٤س + ٢ص = ١٤ ١٢س + ٦ص = ١٨	-س + ٤ص = ٨ ٣س – ٦ص = ٦	٤س – ص = ٥ -٢س + ص = -١

نكتب المعادلات عل صيغة الميل و المقطع :

ص = $\frac{٣}{٢}$ س - $\frac{١}{٢}$ ص = $\frac{-٢}{٣}$ س +٦ النظام متسق مستقل	ص = -٢ س +٧ ص = -٢ س +٣ النظام غير متسق	ص = $\frac{١}{٤}$ س +٢ ص = $\frac{١}{٢}$ س -١ النظام متسق مستقل	ص =٤ س - ٥ ص = ٢ س - ١ النظام متسق مستقل

∴ النظام الثاني يختلف عن بقية الأنظمة لأنه غير متسق .

٥ – ٢ حل نظام معادلتين خطيتين بالتعويض

الحل بالتعويض :

هي إحدى طرائق إيجاد الحل الدقيق لنظام المعادلات .

للحل بالتعويض نتبع الآتي :

* نوجد ص من إحدى المعادلتين
* نعوض في المعادلة الثانية لإيجاد س
* نعوض في إحدى المعادلات الأساسية عن قيمة س لإيجاد ص
* نكتب م . ح = { (س ، ص) }
* للتأكد من صحة الحل نعوض في المعادلة الأخرى عن قيمة س ، ص

* نوجد قيمة ص من المعادلتين بصيغة الميل و المقطع
* نساوي المقدارين ببعض و نوجد قيمة س
* نعوض في إحدى المعادلات الأساسية عن قيمة س لإيجاد قيمة ص
* نكتب مجموعة الحل = { (س ، ص) }
* للتأكد من صحة الحل نعوض في المعادلة الأخرى عن قيمة س وَ ص

حل النظام

حل وحيد	عدد لا نهائي من الحلول	لا يوجد حل
م . ح = {(س ، ص) }	م . ح = عدد لا نهائي من الحلول	م . ح = ∅

٥ – ٢ حل نظام معادلتين خطيتين بالتعويض

مثال ١ : استخدم التعويض لحل النظام فيما يلي ؟؟

١) ص = ٤ س – ٦ ⟸ ١

٥ س + ٣ ص = – ١ ⟸ ٢

• بالتعويض من المعادلة ١ في المعادلة ٢ إيجاد قيمة س

٥ س + ٣ (٤ س – ٦) = – ١

٥ س + ١٢ س – ١٨ = – ١

١٧ س = – ١ + ١٨

١٧ س = ١٧

$\frac{١٧س}{١٧} = \frac{١٧}{١٧}$

س = ١

• بالتعويض في المعادلة ١ عن قيمة س لإيجاد قيمة ص

ص = ٤ × ١ – ٦

ص = ٤ – ٦

ص = – ٢

• للتأكد : نعوض في المعادلة الثانية عن س وَ ص

٥ س + ٣ ص = – ١

٥ × ١ + ٣ × (-٢) = – ١

٥ – ٦ = – ١

• ١ = – ١

∴ م . = { (١ ، – ٢) }

٢) س = ص – ١ ⟸ ١

– س + ص = – ١ ⟸ ٢

نعوض من المعادلة ١ في المعادلة ٢ لإيجاد قيمة ص

– (ص – ١) + ص = – ١

– ص + ١ + ص = – ١

١ + = – ١

هذه العبارة خاطئة

∴ لا يوجد حل للنظام

∴ م . ح = ∅

٣) س – ص = ١ ⟸ ١

٣ س = ٣ ص + ٣ ⟸ ٢

بقسمة جميع حدود المعادلة ٢ عل ٣

نحصل على س = ص + ١ ⟸ ٣

بالتعويض من المعادلة ٣ في المعادلة ١ لإيجاد قيمة ص

ص + ١ – ص = ١

١ = ١ +

هذه العبارة صحيحة دائما و تمثل متطابقة

∴ للنظام عدد لا نهائي من الحلول

٥ – ٢ حل نظام معادلتين خطيتين بالتعويض

٤) ص = ٣ س – ٢ ⟸ ١
ص = ٢ س – ٥ ⟸ ٢

- نساوي الطرفين في المعادلتين

٣ س – ٢ = ٢ س – ٥
٣ س – ٢ س = - ٥ + ٢
س = - ٣

- بالتعويض في المعادلة ١ عن قيمة س لإيجاد ص

ص = ٣ × (- ٣) – ٢
ص = - ٩ – ٢
ص = - ١١

- للتأكد نعوض في المعادلة ٢ عن قيمة س ، ص

ص = ٢ س – ٥
- ١١ = ٢ × (- ٣) – ٥
- ١١ = - ٦ – ٥
- ١١ = - ١١
∴ م . ح = { (- ٣ ، - ١١) }

٥ – ٢ حل نظام معادلتين خطيتين بالتعويض

٤) هندسة : إذا كان مجموع قياسي الزاويتين س، ص يساوي ١٨٠°، وقياس الزاوية س يزيد بمقدار ٢٤° على قياس الزاوية ص، فأجب عما يأتي:

أ) اكتب نظامًا من معادلتين لتمثيل هذا الموقف.

ب) أوجد قياس كل زاوية.

س + ص = ١٨٠° ⟸ ١

س = ص + ٢٤ ⟸ ٢

- بالتعويض من المعادلة ٢ في المعادلة ١ لإيجاد قيمة ص

ص + ٢٤ + ص = ١٨٠

٢ ص = ١٨٠ – ٢٤

٢ ص = ١٥٦

$\frac{٢ ص}{٢} = \frac{١٥٦}{٢}$

ص = ٧٨°

- بالتعويض في المعادلة ٢ عن قيمة ص لإيجاد قيمة س :

س = ٧٨ + ٢٤

س = ١٠٢°

∴ ق ∠ س = ١٠٢° ، ق ∠ ص = ٧٨°

٥ – ٣ حل نظام معادلتين خطيتين بالحذف بالجمع أو الطرح

الحذف باستعمال الجمع أو الطرح :

عند جمع أو طرح معادلتين خطيتين يتم حذف أحد المتغيرين و نتبع الآتي :

١. نكتب النظام بترتيب الحدين المتشابهين اللذين معامل أحداهما معكوس للآخر أو مساوياً له بعضهما فوق بعض .
٢. نجمع المعادلتين أو نطرحهما للتخلص من الحدين المتشابهين ثم نحل المعادلة .
٣. نعوض القيمة الناتجة من ٢ في أي من المعادلتين و نحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني .
٤. نكتب الحل كزوج مرتب .

ملاحظات هامة :

- في الحذف باستعمال الجمع يكون كلا معاملي أحد المتغيرين معكوس للآخر .
- في الحذف بالطرح يكون كلا معاملي أحد المتغيرين مساوياً للآخر .

مثال ١ : استعمل الحذف لحل النظم التالية ؟؟

أ) ص + ز = ٤ ⟸ ١
ص – ز = ٨ ⟸ ٢

- بجمع المعادلتين ١ ، ٢

٢ ص = ١٢

$\frac{٢ ص}{٢} = \frac{١٢}{٢}$

ص = ٦

- بالتعويض في المعادلة ١ عن قيمة ص لإيجاد قيمة ز :

ص + ز = ٤
٦ + ز = ٤
ز = ٤ – ٦
ز = - ٢

∴ م . ح = { (٦ ، - ٢) }

ب) - ٤ س + ٥ ص = ١٧ ⟸ ١
٤ س + ٦ ص = - ٦ ⟸ ٢

- بجمع المعادلتين ١ ، ٢

١١ ص = ١١

$\frac{١١ ص}{١١} = \frac{١١}{١١}$

ص = ١

- بالتعويض في المعادلة ٢ عن قيمة ص لإيجاد قيمة س :

٤ س + ٦ ص = - ٦
٤س + ٦ × ١ = - ٦
٤ س + ٦ = - ٦
٤ س = - ٦ – ٦
٤ س = - ١٢

$\frac{٤ س}{٤} = \frac{-١٢}{٤}$

س = - ٣

∴ م . ح = { (- ٣ ، ١) }

٥ – ٣ حل نظام معادلتين خطيتين بالحذف بالجمع أو الطرح

ج) ٥ م – ب = ٧ ⟸ ١

$\overset{-}{7}$ م $\overset{+}{-}$ ب = $\overset{-}{11}$ ⟸ ٢

• بطرح المعادلتين

– ٢ م = – ٤

$\frac{-٢م}{-٢} = \frac{-٤}{-٢}$

م = ٢

• بالتعويض في المعادلة ١ عن قيمة م لإيجاد قيمة ب :

٥ م – ب = ٧

٥ × ٢ – ب = ٧

١٠ – ب = ٧

– ب = ٧ – ١٠

– ب = – ٣

$\frac{-ب}{-١} = \frac{-٣}{-١}$

ب = ٣

∴ م . ح = { (٢ ، ٣) }

د) ٦ س – ٢ ص = ١ ⟸ ١

$\overset{-}{10}$ س $\overset{+}{-}$ ٢ ص = $\overset{-}{5}$ ⟸ ٢

• بطرح المعادلتين

– ٤ س = – ٤

$\frac{-٤س}{-٤} = \frac{-٤}{-٤}$

س = ١

• بالتعويض في المعادلة ٢ عن قيمة س لإيجاد قيمة ص :

١٠ س – ٢ ص = ٥

١٠ × ١ – ٢ ص = ٥

١٠ – ٢ ص = ٥

– ٢ ص = ٥ – ١٠

– ٢ ص = – ٥

$\frac{-٢ص}{-٢} = \frac{-٥}{-٢}$

ص = ٢,٥

∴ م . ح = { (١ ، ٢,٥) }

٥ - ٣ حل نظام معادلتين خطيتين بالحذف بالجمع أو الطرح

١٣) ما العددان اللذان مجموعهما ١١، وثلاثة أمثال أحدهما ناقص الآخر يساوي -٣؟

- نفرض العددان س ، ص
- نكون النظام

س + ص = ١١ ⟸ ١

٣ س - ص = -٣ ⟸ ٢

- نحل النظام : بجمع المعادلتين ١ ، ٢

٤ س = ٨

$\frac{٤س}{٤} = \frac{٨}{٤}$

س = ٢

بالتعويض في المعادلة ١ عن قيمة س لإيجاد قيمة ص :

س + ص = ١١

٢ + ص = ١١

ص = ١١ - ٢

ص = ٩

∴ العددان هما ٢ ، ٩

٥ – ٤ حل نظام معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب

الحذف باستعمال الضرب :

نستخدمه عندما لا يمكن حذف أي من المتغيرين بالجمع أو بالطرح .

مثال ١ : حل كلا من النظم التالية بالحذف ؟؟

أ) ٢ س^{٣} - ص^{٣} = ٤^{٣} ⟸ ١

٧ س^{١} + ٣ ص^{١} = ٢٧^{١} ⟸ ٢

- بضرب المعادلة ١ في (٣) و ضرب المعادلة ٢ في (١)

بالجمع
٦ س - ٣ ص = ١٢
٧ س + ٣ ص = ٢٧

١٣ س = ٣٩

$\frac{١٣س}{١٣} = \frac{٣٩}{١٣}$

س = ٣

- بالتعويض في المعادلة ١ عن قيمة س لإيجاد قيمة ص :

٢ س - ص = ٤

٢ × ٣ - ص = ٤

٦ - ص = ٤

- ص = ٤ - ٦

- ص = - ٢

$\frac{-ص}{-١} = \frac{-٢}{-١}$

ص = ٢

∴ م . ح = { (٣ ، ٢) }

ب) ٣ س^{٦} + ٤ ص^{٦} = ٢٩^{٦} ⟸ ١

٦ س$^{(-٣)}$ + ٥ ص$^{(-٣)}$ = ٤٣$^{(-٣)}$ ⟸ ٢

- بضرب المعادلة ١ في (٦) و ضرب المعادلة ٢ في (-٣)

بالجمع
١٨ س + ٢٤ ص = ١٧٤
-١٨ س - ١٥ ص = - ١٢٩

٩ ص = ٤٥

$\frac{٩ص}{٩} = \frac{٤٥}{٩}$

ص = ٥

- بالتعويض في المعادلة ٢ عن قيمة ص لإيجاد قيم س :

٦ س + ٥ ص = ٤٣

٦ س + ٥ × ٥ = ٤٣

٦ س + ٢٥ = ٤٣

٦ س = ٤٣ - ٢٥

٦ س = ١٨

$\frac{٦س}{٦} = \frac{١٨}{٦}$

س = ٣

∴ م . ح = { (٣ ، ٥) }

٥ – ٤ حل نظام معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب

١٣) نظرية الأعداد: ما العددان اللذان سبعة أمثال أحدهما زائد ثلاثة أمثال الآخر يساوي سالب واحد، ومجموعهما يساوي سالب ثلاثة؟

- نفرض العددان س ، ص
- نكون النظام : $٧س^{١\times} + ٣ص^{١\times} = -١^{١\times} \Longleftarrow ١$

$س^{(-٧)\times} + ص^{(-٧)\times} = -٣^{(-٧)\times} \Longleftarrow ٢$

- نحل النظام : بضرب المعادلة ١ في (١) و ضرب المعادلة ٢ في (-٧)

بالجمع
$$\begin{cases} ٧س + ٣ص = -١ \\ -٧س - ٧ص = ٢١ \end{cases}$$

$-٤ص = ٢٠$

$$\frac{-٤ص}{-٤} = \frac{٢٠}{-٤}$$

$ص = -٥$

بالتعويض في المعادلة ٢ عن قيمة ص لإيجاد قيمة س :

$س + ص = -٣$

$س + (-٥) = -٣$

$س = -٣ + ٥$

$س = ٢$

∴ العددان هما (٢) ، (-٥)

∴ م . ح = { (٢ ، -٥) }

٥ – ٤ حل نظام معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب

٢٠) **اكتشف الخطأ :** حُلّ كل من سعيد وحسين نظامًا من معادلتين، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سعيد

$٢ر + ٧ت = ١١$

$ر - ٩ت = -٧$

$٢ر + ٧ت = ١١$

$(-)\ ٢ر - ١٨ت = -١٤$

$٢٥ت = ٢٥$

$ت = ١$

$٢ر + ٧ت = ١١$

$٢ر + ٧(١) = ١١$

$٢ر + ٧ = ١١$

$٢ر = ٤$

$\frac{٢ر}{٢} = \frac{٤}{٢}$

$ر = ٢$

الحل (٢، ١)

حسين

$٢ر + ٧ت = ١١$

$(-)\ ر - ٩ت = -٧$

$ر = ١٨$

$٢ر + ٧ت = ١١$

$٢(١٨) + ٧ت = ١١$

$٣٦ + ٧ت = ١١$

$٧ت = -٢٥$

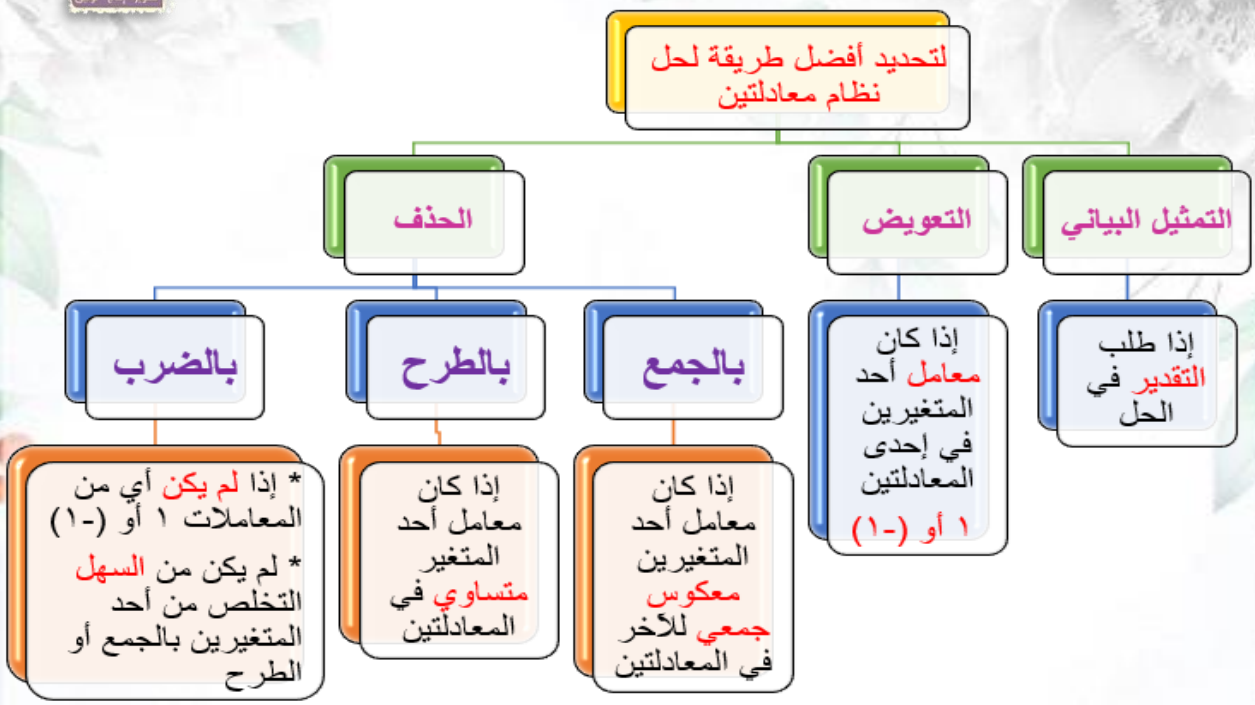
$\frac{٧ت}{٧} = \frac{-٢٥}{٧}$

$ت = -٣,٦$

الحل (١٨، -٣,٦) .

حل سعيد صحيح ؛ حيث أخطأ حسين باستخدام الحذف بالطرح .

٥ – ٥ تطبيق على النظام المكون من معادلتين خطيتين



مثال ١ : حدد أفضل طريقة لحل الأنظمة التالية ؟؟

أ) ٥س+٧ص=٢ -٢س+٧ص=٩ الحذف بالطرح	ب) ٣س-٤ص=١٠ ٥س+٨ص=-٢ الحذف بالضرب	ج) ٣س+٤ص=١١ ٢س+ص=-١ الحل بالتعويض
د) ٣س-٤ص=-٥ -٣س-٦ص=-٥ الحذف بالجمع	هـ) ص+٤س=٣ ص=-٤س-١ الحل بالتعويض	و) ٥س+٨ص=١ -٢س+٨ص=-٦ الحذف بالطرح

٥ – ٥ تطبيق على النظام المكون من معادلتين خطيتين

٥) تسوّق: اشترى عبدالله ٤ كراسات و ٣ حقائب بمبلغ ١٨١ ريالًا، واشترى عبدالرحمن كراسة وحقيبتين بمبلغ ٩٤ ريالاً.

أ) اكتب نظامًا من معادلتين يمكنك استعماله لتمثيل هذا الموقف.

ب) حدّد أفضل طريقة لحل هذا النظام.

جـ) حل النظام.

أ)

- نفرض ثمن الكراسة = س ، ثمن الحقيبة = ص
- نكون النظام : ٤ س + ٣ ص = ١٨١ ⟸ ١

س + ٢ ص = ٩٤ ⟸ ٢

ب) أفضل طريقة لحل هذا النظام هي التعويض .

ج) من المعادلة ٢ : س = -٢ص + ٩٤ ⟸ ٣

بالتعويض من المعادلة ٣ في المعادلة ١ لإيجاد قيمة ص :

٤ س + ٣ ص = ١٨١

٤ (-٢ص + ٩٤) + ٣ ص = ١٨١

-٨ ص + ٣٧٦ + ٣ ص = ١٨١

-٥ ص = ١٨١ - ٣٧٦

-٥ ص = -١٩٥

$$\frac{-٥ص}{-٥} = \frac{-١٩٥}{-٥}$$

ص = ٣٩

بالتعويض في المعادلة ٣ لإيجاد قيمة س :

س = -٢ ص + ٩٤

س = -٢ × ٣٩ + ٩٤

س = -٧٨ + ٩٤

س = ١٦

∴ ثمن الكراسة = ١٦ ريال ، ثمن الحقيبة = ٣٩ ريال ∴ م . ح = { (١٦ ، ٣٩) } .

٥ – ٥ تطبيق على النظام المكون من معادلتين خطيتين

١٩) أي أنظمة المعادلات الآتية يختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى؟

$ص = س + ١$ $ص = ٣س$	$ص = س - ٤$ $ص = \frac{٢}{س}$	$-س + ص = ٠$ $٥س = ٢ص$	$س - ص = ٣$ $س + \frac{١}{٢}ص = ١$

النظام الثاني يختلف عن بقية الأنظمة ؛ لأنه يحوي دالة كسرية و بقية الأنظمة الأخرى خطية .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
الفصل السادس
تكبيرات الحدود

٦ – ١ ضرب وحيدات الحد

وحيدات الحد :

تكون وحيدة الحد عدداً أو متغيراً أو حاصل ضرب عدد في متغير أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة ... و تتكون من حد واحد فقط .

مثال ١ :

١٣ وحيدة حد تمثل عدداً حقيقيا ؛ و تُسمى " ثابت "

س وحيدة حد تمثل متغيراً .

٧ ص وحيدة حد تمثل حاصل ضرب عدد في متغير ؛ تُسمى عبارة خطية لأن أس المتغير ١ .

$\frac{-٣}{٥}$ س^{٦} ع^{٤} وحيدة حد تمثل حاصل ضرب عدد في عدة متغيرات ؛ و تُسمى عبارة ليست خطية لأن أس المتغير أكبر من ١ .

---

٦ - ١ ضرب وحيدات الحد

مثال ٢ : حدد إذا كانت كل من العبارات التالية وحيدة حد ، اكتب نعم أو لا و فسر إجابتك ؟؟

العبارة	الإجابة	التفسير
١٥	نعم	لأنها مكونة من حد
٢ - ٣ م	لا	لأنها مكونة من حدين
٢ جـ + ٢	لا	لأنها مكونة من حدين
$\frac{٥ك}{١٠}$	نعم	لأنها حاصل ضرب عدد في متغير
$\frac{-٢جـ}{هـ}$	لا	لوجود المتغير في المقام
٢٣ م ب جـ د^{٢}	نعم	لأنها عبارة عن حاصل ضرب عدد في عدة متغيرات
س + ٥	لا	لأنها مكونة من حدين
$(س)^{-٤}$	لا	لوجود الأس السالب

القوى :

س^{ن} تُعبر عن ضرب العدد س في نفسه ن من المرات

س تُسمى الأساس ، ن تُسمى الأس .

٦ - ١ ضرب وحيدات الحد

قوانين القوى :

إذا كانت أ ، ب أعداد حقيقية ، ن ، م أعداد صحيحة فإن :

- ضرب القوى : $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

لضرب قوتين لهما الأساس نفسه أجمع أسيهما .

- قوة قوة : $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

لإيجاد قوة القوة لعدد أضرب الأسس .

- قوة حاصل الضرب : $(أ \times ب)^{م} = أ^{م} \times ب^{م}$

لإيجاد قوة ضرب عددين نوزع القوة على العددين ثم نضرب .

تبسيط عبارات تتضمن وحيدات حد :

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة إذا تحققت الشروط التالية :

١. يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة فقط و الأسس الموجبة.
٢. لا تتضمن العبارة قوة قوة .
٣. تكون جميع الكسور في أبسط صورة .
٤. عند تبسيط عبارات تحتوي على أقواس متداخلة ؛ أبدأ أولاً بالعبارات من الداخل ثم انتقل إلى الخارج .
٥. عندما لا يظهر أس المتغير أو معامله فإن كلاهما يساوي ١ ؛ أي أن $س = ١ س^{١}$.

---

٦ - ١ ضرب وحيدات الحد

مثال ٢ : بسطي كل عبارة مما يأتي ؟؟

١) $(٥م^{٤}ف)(٧م^{٤}ف^{٣})$ $= ٥ \times ٧ م^{٤+٤} ف^{١+٣}$ $= ٣٥ م^{٨} ف^{٤}$.	٢) $م^{٤}(م^{٢}) = م^{٤+٢} = م^{٦}$.
٣) $((٢٣)^{٢})^{٢} = ٢٣ \times ٢ \times ٢$ $= ٢٣^{٨} = ٦٥٦١$.	٤) $(ل^{٥} ك^{٧})^{٤} = ل^{٥ \times ٤} ك^{٧ \times ٤}$ $= ل^{٢٠} ك^{٢٨}$.
٥) $((-٢ س ص^{٢})^{٣})^{٢}$ $= ((-٢)^{٣} س^{٣} ص^{٢ \times ٣})^{٢}$ $= (-٨ س^{٣} ص^{٦})^{٢}$ $= (-٨)^{٢} س^{٣ \times ٢} ص^{٦ \times ٢}$ $= ٦٤ س^{٦} ص^{١٢}$.	٦) $(\frac{٤}{٥} ع^{٢})^{٢} = \frac{٤^{٢}}{٢٥} ع^{٢ \times ٢}$ $= \frac{١٦}{٢٥} ع^{٤}$
٧) $(ك^{٢})(٢ ك^{٤}) = ١ \times ٢ ك^{٢+٤} = ٢ ك^{٦}$	

س: عبر عن مساحة المثلث كوحيدة حد ؟

(٣٣

م = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ ق ع

م = $\frac{١}{٢} \times ٥ جـ^{٣} د \times ٨ جـ^{٢} د^{٤}$

م = $\frac{١}{٢} \times ٥ \times ٨ جـ^{٣+٢} د^{١+٤}$

م = ٢٠ $جـ^{٥} د^{٥}$.

س : عبر عن حجم المجسم على صورة وحيدة حد ؟؟

(٤٧

حجم المنشور = الطول × العرض × الارتفاع

ح = ل × ض × ع

ح = ٥ $س^{٣}$ × ٣ $س^{٢}$ × $س^{٢}$

ح = ٥ × ٣ × ١ $س^{٣+٢+٢}$

ح = ١٥ $س^{٧}$.

٦ - ١ ضرب وحيدات الحد

س:هل العبارة $\frac{٤}{٦}(س^{٢} ص^{٥})^{٣} \times ٢(س ص)^{٧} = \frac{٨}{٦} س^{١٣} ص^{٢٢}$ في أبسط صورة ؟؟ فسر اجابتك ؟؟

$\frac{٤}{٦}(س^{٢} ص^{٥})^{٣} \times ٢(س ص)^{٧} = \frac{٨}{٦} س^{١٣} ص^{٢٢}$ ليست في أبسط صورة فالتبسيط غير تام

$\frac{٤}{٦}(س^{٢} ص^{٥})^{٣} \times ٢(س ص)^{٧} = \frac{٤}{٦} س^{٢ \times ٣} ص^{٥ \times ٣} \times ٢ \times س^{٧} ص^{٧}$

$= \frac{٤}{٦} س^{٦} ص^{١٥} \times ٢ س^{٧} ص^{٧}$

$= \frac{٤}{٦} \times ٢ س^{٦+٧} ص^{١٥+٧}$

$= \frac{٨}{٦} س^{١٣} ص^{٢٢}$

$= \frac{٤}{٣} س^{١٣} ص^{٢٢}$. في أبسط صور

٦ - ٢ قسمة وحيدات الحد

تابع قوانين القوى :

إذا كانت أ ، ب أعداد حقيقية ، ن ، م أعداد صحيحة فإن :

- قسمة القوى : $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه أطرح أسيهما .

- قوة القسمة : $(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

لإيجاد قوة قسمة عددين توزع القوى ثم نقسم .

- الأس الصفري : $أ^{٠} = ١$ أي عدد أس صفر يساوي ١ .
- القوة ١ : $أ^{١} = أ$ أي عدد أس واحد يساوي نفس العدد .
- الأس السالب : $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ أي عدد لأس (-١) يساوي مقلوب العدد.

$أ^{-م} = \frac{١}{أ^{م}}$ أي عدد أس سالب = مقلوب العدد بأس موجب .

$(\frac{أ}{ب})^{-م} = (\frac{ب}{أ})^{م}$

- العدد السالب المرفع لقوى $(-أ)^{م} = -أ^{م}$ إذا كانت م فردي.

$(-أ)^{م} = أ^{م}$ إذا كانت م زوجي .

٦ - ٢ قسمة وحيدات الحد

مثال ١ : بسط كل عبارة فيما يأتي :

أ) $\frac{س^{٣} ص^{٤}}{س^{٢} ص} = س^{٣-٢} ص^{٤-١} = س ص^{٣}$.

ب) $\left[\frac{٢ ص^{٢}}{٣ ع^{٣}}\right]^{٢} = \frac{(٢ ص^{٢})^{٢}}{(٣ ع^{٣})^{٢}} = \frac{٤ ص^{٢\times٢}}{٩ ع^{٣\times٢}} = \frac{٤ ص^{٤}}{٩ ع^{٦}}$

ج) $\left[\frac{٣ س ص^{٤} ع^{٢}}{س^{٣} ص ع^{٤}}\right]^{٠} = ١$

د) $\frac{-٢ ب^{٣} جـ^{٢} هـ^{٠}}{٨ ب^{٢} جـ^{٢}} = \frac{-٢}{٨} ب^{٣-٢} جـ^{٢-٢} هـ^{٠} = \frac{-١}{٤} ب^{١} جـ^{٠} هـ^{٠}$

$= \frac{-١}{٤} ب \times ١ \times ١ = \frac{-١}{٤} ب$

هـ) $\frac{١٢ م^{-٤} ل^{٢}}{-١٥ م^{٣} ل^{-٩}} = \frac{١٢}{-١٥} م^{-٤-٣} ل^{٢-(-٩)} = \frac{٤}{-٥} م^{-٧} ل^{١١}$

$= \frac{-٤ ل^{١١}}{٥ م^{٧}}$.

و) $\frac{س^{-٤} ص^{٩}}{ع^{-٢}} = \frac{ص^{٩} ع^{٢}}{س^{٤}}$

ز) $\left[\frac{٤ س^{٣}}{٥ ص^{٤}}\right]^{٣} = \frac{٤^{٣} س^{٣}}{٥^{٣} ص^{٤\times٣}} = \frac{٦٤ س^{٣}}{١٢٥ ص^{١٢}}$.

٦ - ٢ قسمة وحيدات الحد

رتبة المقدار :

هي التعبير عن العدد مقربا لأقرب قوى العشرة .

تُستعمل للمقارنة بين المقادير و تقدير الحسابات و سرعة إجرائها .

مثال ٢ :

رتبة المقدار ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ هي $١٠^{١١}$.

رتبة المقدار ٩٩٩٩ هي $١٠^{٤}$.

رتبة المقدار ٩٧٠٠٠٠٠ هي $١٠^{٧}$.

تطبيق :

$$\frac{٥ س^{-٣}}{ع} = \frac{٥}{ع س^{٣}}$$

$$\frac{٥ س^{٣}}{ع^{-٢}} = ٥ س^{٣} ع^{٢}$$

٦ - ٣ كثيرات الحدود

كثيرا الحدود :

- هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد .
- تُسمى كل وحيدة حد فيها حداً
- بعض كثيرات الحدود تحمل أسماء خاصة مثل ثنائية حد أو ثلاثية حد أو ...

درجة كثيرة الحدود :

٦ - ٣ كثيرات الحدود

قسمة كثيرات الحدود اعتماداً على درجتها :

الدرجة ٠	الدرجة ١	الدرجة ٢	الدرجة ٣
الدالة ثابته	الدالة خطية	الدالة تربيعية	الدالة تكعيبية

مثال ١ : حدد إذا كانت العبارات التالية كثيرات حدود أم لا ؟ ثم صنفها إلى وحيدة حد و ثنائية و ثلاثية حدود ؟ و أوجد درجتها ؟

العبارة	كثيرة حدود أم لا	التصنيف	الدرجة
س	نعم	وحيدة حد	١
$٢ص + ٥ + ٣ص^{٢}$	نعم	ثلاثية حد	٢
-٣	نعم	وحيدة حد	٠
$٥ل^{-٤} + ٦ل$	لا لوجود الأس السالب . $٥ل^{-٤} + ٦ل = \frac{٥}{ل^{٤}} + ٦ل$		
$٥ن^{٣} + ن ل^{٣}$	نعم	ثنائية حد	١+٣=٤

٦ - ٣ كثيرات الحدود

مثال ٢ : اوجد درجة كثيرة الحدود في كلا مما يلي ؟

١)	$٦ ب^{٣} - ب^{٤}$	من الدرجة ٤
٢)	$٣ س - ٨$	من الدرجة ١
٣)	$٢ ع^{٢} ص^{٢} - ٧ + ٥ ص^{٣} ب^{٤}$ ٢+٢ . ٤+٣	من الدرجة ٣+٤=٧

الصورة القياسية لكثيرة حدود ذات المتغير الواحد :

لكتابة كثيرة الحدود بالصورة القياسية ؛ نكتب الحدود بترتيب تنازلي بحسب درجتها و يكون معامل أول حد فيها يُسمى " المعامل الرئيسي " .

مثال ٣ : اكتب كل كثيرة حدود فيما يلي بالصورة القياسية ؟ و حدد المعامل الرئيسي فيها ؟

كثيرة الحدود	الصورة القياسية	المعامل الرئيسي
$٤ ع - ٢ ع^{٢} - ٥ ع^{٤}$	$- ٥ ع^{٤} - ٢ ع^{٢} + ٤ ع$	-٥
$٥ س^{٢} - ٢ + ٣ س$	$٥ س^{٢} + ٣ س - ٢$	٥
$\frac{١}{٢} س - ٣ س^{٤} + ٧$	$- ٣ س^{٤} + \frac{١}{٢} س + ٧$	-٣
$- ٩ ب^{٢} + ١٠ ب - ب^{٦}$	$- ب^{٦} - ٩ ب^{٢} + ١٠ ب$	-١

٦ - ٣ كثيرات الحدود

٣٤) ألعاب نارية : أطلق صاروخ ألعاب نارية من ارتفاع ١ م من الأرض وبسرعة ١٥٠ م/ ث. ويمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ ع بعد ن ثانية بالمعادلة ع = $-٥ن^{٢} + ٥٠ن + ١$

أ) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٣ ثوانٍ؟

ب) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٥ ثوانٍ؟

ع = $-٥ن^{٢} + ٥٠ن + ١$

أ) بعد ٣ ثوانٍ

ع = $-٥ \times ٣^{٢} + ٥٠ \times ٣ + ١$

ع = $-٥ \times ٩ + ١٥٠ + ١$

ع = $-٤٥ + ١٥٠ + ١$

ع = ١٠٦ متر .

ب) بعد ٥ ثوانٍ

ع = $-٥ \times ٥^{٢} + ٥٠ \times ٥ + ١$

ع = $-٥ \times ٢٥ + ٢٥٠ + ١$

ع = $-١٢٥ + ١٥٠ + ١$

ع = ١٢٦ متر .

٦ - ٤ جمع كثيرات الحدود وطرحها

جمع كثيرات الحدود :

يتم جمع كثيرات الحدود بطريقة رأسية أو أفقية و ذلك بجمع معاملات الحدود المتشابهة باستخدام قاعدة إشارات جمع الأعداد الحقيقية .

مثال ١ : أوجد ناتج كلاً مما يلي ؟؟

١) $(٥س^{٢} - ٣س + ٤) + (٦س - ٣س^{٢} - ٣)$

الطريقة الرأسية	الطريقة الأفقية
$٥س^{٢} - ٣س + ٤$ $+ \quad -٣س^{٢} + ٦س - ٣$ $٢س^{٢} + ٣س + ١$	$(٥س^{٢} - ٣س + ٤) + (-٣س^{٢} + ٦س - ٣)$ $= ٢س^{٢} + ٣س + ١$.

---

٢) $(جـ^{٣} - ٢جـ^{٢} + ٥جـ + ٦) + (-جـ^{٢} - ٢جـ)$

$$\begin{array}{r} جـ^{٣} - ٢جـ^{٢} + ٥جـ + ٦ \\ + \quad ٠ - جـ^{٢} - ٢جـ + ٠ \\ \hline جـ^{٣} - ٣جـ^{٢} + ٣جـ + ٦ \end{array}$$

طرح كثيرات الحدود :

يمكن طرح كثيرة حدود بإضافة نظيرها الجمعي :

١. الكثيرة الأولى تكتب في صورتها القياسية
٢. أغير عملية الجمع إلى طرح
٣. أغير إشارات جميع حدود الكثيرة الثانية .
٤. أتمم عملية الجمع الناتجة .

٦ - ٤ جمع كثيرات الحدود وطرحها

مثال ٢ : أوجد ناتج كلا مما يلي ؟؟

١) $(٢س - ٢ص + ١) - (٣ص - ٤س)$

الطريقة الرأسية	الطريقة الأفقية
$٢س - ٢ص + ١$ $\pm$ $\mp ٤س \mp ٣ص \mp ٠$ $٦س - ٥ص + ١$	$(٢س - ٢ص + ١) - (-٤س + ٣ص)$ $= ٢س - ٢ص + ١ + ٤س - ٣ص$ $= ٦س - ٥ص + ١$

---

٢) $(٣ب^{٣} + ٣ب - ١٠) - (٤ب^{٢} - ٥ب) + (٤ب^{٣} - ٣ب^{٢} - ٩ب + ٤)$

$= ٣ب^{٣} + ٣ب - ١٠ - ٤ب^{٢} + ٥ب + ٤ب^{٣} - ٣ب^{٢} - ٩ب + ٤$

$= ٧ب^{٣} - ٧ب^{٢} - ب - ٦$.

---

٣) $(٨ص - ١٠ + ٥ص^{٢}) - (٧ - ص^{٣} + ١٢ص)$

$٠ + ٥ص^{٢} + ٨ص - ١٠$

$\pm$

$\mp ص^{٣} \mp ٠ \mp ١٢ص \mp ٧$

$ص^{٣} + ٥ص^{٢} - ٤ص - ١٧$

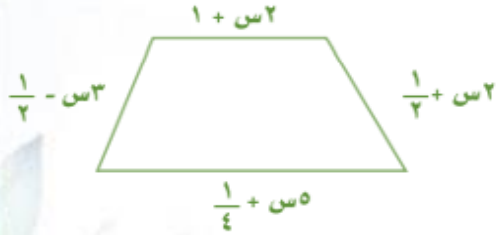
٦ - ٤ جمع كثيرات الحدود و طرحها

٢٠) اكتشف الخطأ : يجد كل من ثامر وسلطان ناتج: (٢س^{٢} – س) – (٣س +٣س^{٢} – ٢). فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ثامر	سلطان
(٢س^{٢} – س) – (٣س+٣س^{٢} –٢)	(٢س^{٢} – س) – (٣س+٣س^{٢} –٢)
=(٢س^{٢} – س) + (–٣س+٣س^{٢} +٢)	=(٢س^{٢} – س) + (–٣س–٣س^{٢} +٢)
=٥س^{٢} –٤س – ٢	=– س^{٢} –٤س – ٢

- حل ثامر خطأ لأنه لم يُغير إشارات الحد الثاني و الثالث من كثيرة الحدود الثانية
- حل سلطان خطأ لأنه لم يغير إشارة الحد الثالث من كثيرة الحدود الثانية .

تطبيق : اكتب كثيرة حدود تمثل محيط الشكل المقابل ؟؟



مح = مجموع أطوال الأضلاع

مح = ٢ س + $\frac{١}{٢}$ + ٢ س + ١ + ٣ س - $\frac{١}{٢}$ + ٥ س + $\frac{١}{٤}$

مح = ١٢ س + $\frac{١}{٤}$ ١ .

٦ - ٥ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود :

يمكننا استخدام خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود ؛ و ذلك باتباع الخطوات التالية :

١. نستخدم التوزيع
٢. نضرب كل وحيدة في كل حد من الكثيرة ؛ حيث نضرب الأعداد في بعض بتطبيق قاعدة إشارات ضرب الأعداد الحقيقية وَ نضرب المتغيرات باستخدام قواعد القوى لضرب وحيدات الحد .
٣. نبسط حاصل الضرب بتجميع الحدود المتشابهة .

مثال ١ : بسط كل عبارة فيما يأتي :

١) $٥ن(-٣ن^{٢}+٢ن-٤)$

الطريقة الرأسية	الطريقة الأفقية
$-٣ن^{٢}+٢ن-٤$ $\times$ $٥ن$ $-١٥ن^{٣}+١٠ن^{٢}-٢٠ن$	$٥ن(-٣ن^{٢}+٢ن-٤)$ $=-١٥ن^{٣}+١٠ن^{٢}-٢٠ن$

---

٢) $٢ب^{٢}(٧ب^{٤}+ب^{٢}-٥ب^{٢}+٢)$

$=١٤ب^{٥}+٢ب^{٦}-٤ب^{٢}$.

---

٣) $ن(٤ن^{٢}+١٥ن+٤)-٤(٣ن-١)$

$=٤ن^{٣}+١٥ن^{٢}+٤ن-١٢ن+٤$

$=٤ن^{٣}+١٥ن^{٢}-٨ن+٤$.

---

٤) $س(٣س^{٢}+٤)+٢(٧س-٣)$

$=٣س^{٣}+٤س+١٤س-٦$

$=٣س^{٣}+١٨س-٦$.

---

٦ – ٥ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

حل معادلات تتضمن كثيرة حدود :

- نستخدم العمليات على كثيرة الحدود (جمع - طرح - ضرب - توزيع) لتبسيط كل طرف من طرفي المعادلة .
- نستخدم خطوات حل المعادلة متعددة الخطوات أو ذات متغير في طرفيها لإيجاد حل المعادلة .

مثال ٢ : حل كلا من المعادلات التالية :

أ) $-٦(١١-٢جـ)=٧(-٢-٢جـ)$

$-٦٦+١٢جـ=-١٤-١٤جـ$

$١٢جـ+١٤جـ=-١٤+٦٦$

$٢٦جـ=٥٢$

$\frac{٢٦جـ}{٢٦}=\frac{٥٢}{٢٦}$

$جـ=٢$

ب) $د(د+٣)-د(د-٤)=٩د-١٦$

$د^{٢}+٣د-د^{٢}+٤د=٩د-١٦$

$٧د=٩د-١٦$

$٧د-٩د=-١٦$

$-٢د=-١٦$

$\frac{-٢د}{-٢}=\frac{-١٦}{-٢}$

$د=٨$

ج) $ن(٢ن+٣)+٢٠=٢ن(ن-٣)$

$٢ن^{٢}+٣ن+٢٠=٢ن^{٢}-٦ن$

$٢ن^{٢}-٢ن^{٢}+٣ن+٦ن=-٢٠$

$٩ن=-٢٠$

$\frac{٩ن}{٩}=\frac{-٢٠}{٩}$

$ن=-٢,٢$

٦ – ٥ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

تطبيق : بسط كل عبارة مما يأتي ؟؟

(١)

$$-\frac{٢}{٣}س ب^{٢}\left(٣٠ب^{٢}+٩س^{٢}ب-١٢\right)$$

$$=-٢٠س ب^{٤}+٦س^{٣}ب^{٣}-٨س ب^{٢}$$

(٢)

$$\frac{٣}{٥}ر^{٢}ل\left(١٠ر^{٣}+٥ر ل^{٣}+١٥ل^{٢}\right)$$

$$=٦ر^{٥}ل+٣ر^{٣}ل^{٤}+٩ر^{٢}ل^{٣}$$

٦ – ٥ ضرب كثيرات الحدود

ضرب كثيرات الحدود :

نستخدم خاصية التوزيع بالترتيب لضرب كثيرات الحدود أفقياً أو رأسياً ثم نجمع الحدود المتشابهة .

ملاحظات هامة :

- عند ضرب عبارتين خطيتين تكون النتيجة عبارة تربيعية ذات متغير واحد من الدرجة الثانية
- ناتج ضرب ثلاث عبارات خطية هو عبارة من الدرجة الثالثة .
- عند ضرب كثيرة حدود تحوي م حداً في كثيرة حدود تحوي ن حداً فإن عدد الحلول قبل التبسيط = م × ن حداً .

مثال ١ : أوجد ناتج الضرب فيما يلي ؟

١) $(٥ص - ٤)(٣ص - ١)$

الطريقة الرأسية	الطريقة الأفقية
$٥ص - ٤$ $\times$ $٣ص - ١$ $١٥ص^{٢} - ١٢ص$ $+$ $- ٥ص + ٤$ $١٥ص^{٢} - ١٧ص + ٤$	$(٥ص - ٤)(٣ص - ١)$ $= ١٥ص^{٢} - ٥ص - ١٢ص + ٤$ $= ١٥ص^{٢} - ١٧ص + ٤$

٦ – ٥ ضرب كثيرات الحدود

٢) $(س + ٥)(س + ٢)$

$س + ٥$

$\times$ $س + ٢$

$س^{٢} + ٥ س$

$+ \quad + ٢ س + ١٠$

$س^{٢} + ٧ س + ١٠$

٣) $(٨ ل + ٤ س)(٥ ل - ٦ س)$

$٨ ل + ٤ س$

$\times$ $٥ ل - ٦ س$

$٤٠ ل^{٢} + ٢٠ ل س$

$+ \quad - ٤٨ ل س - ٢٤ س^{٢}$

$٤٠ ل^{٢} - ٢٨ ل س - ٢٤ س^{٢}$

٤) $(٤ ص^{٢} - ٣)(٤ ص^{٢} + ٧ ص + ٢)$

$٤ ص^{٢} + ٧ ص + ٢$

$\times$ $٤ ص^{٢} - ٣$

$١٦ ص^{٤} + ٢٨ ص^{٣} + ٨ ص^{٢}$

$+ \quad - ١٢ ص^{٢} - ٢١ ص - ٦$

$١٦ ص^{٤} + ٢٨ ص^{٣} - ٤ ص^{٢} - ٢١ ص - ٦$

٥) $(٢ ص - ١١)(ص^{٢} - ٣ ص + ٢)$

$ص^{٢} - ٣ ص + ٢$

$\times$ $٢ ص - ١١$

$٢ ص^{٣} - ٦ ص^{٢} + ٤ ص$

$+ \quad - ١١ ص^{٢} + ٣٣ ص - ٢٢$

$٢ ص^{٣} - ١٧ ص^{٢} + ٣٧ ص - ٢٢$

٦ – ٥ ضرب كثيرات الحدود

٢٤) كرة طائرة: تمثل العبارتان: (٧ص – ٥) متر، (٨ص + ٢) متر بعدي ملعب كرة طائرة.

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الملعب.

ب) إذا كان طول ملعب كرة طائرة ١٨ م، فأوجد مساحته.

أ) المساحة = الطول × العرض

$م = (٧ص - ٥)(٨ص + ٢)$

$م = ٥٦ص^{٢} + ١٤ص - ٤٠ص - ١٠$

$م = ٥٦ص^{٢} - ٢٦ص - ١٠$ وحدة مربعة

ب) عندما طول الملعب = ١٨ ⟸

$٨ص + ٢ = ١٨$

$٨ص = ١٨ - ٢$

$٨ص = ١٦$

$\frac{٨ص}{٨} = \frac{١٦}{٨}$

$ص = ٢$

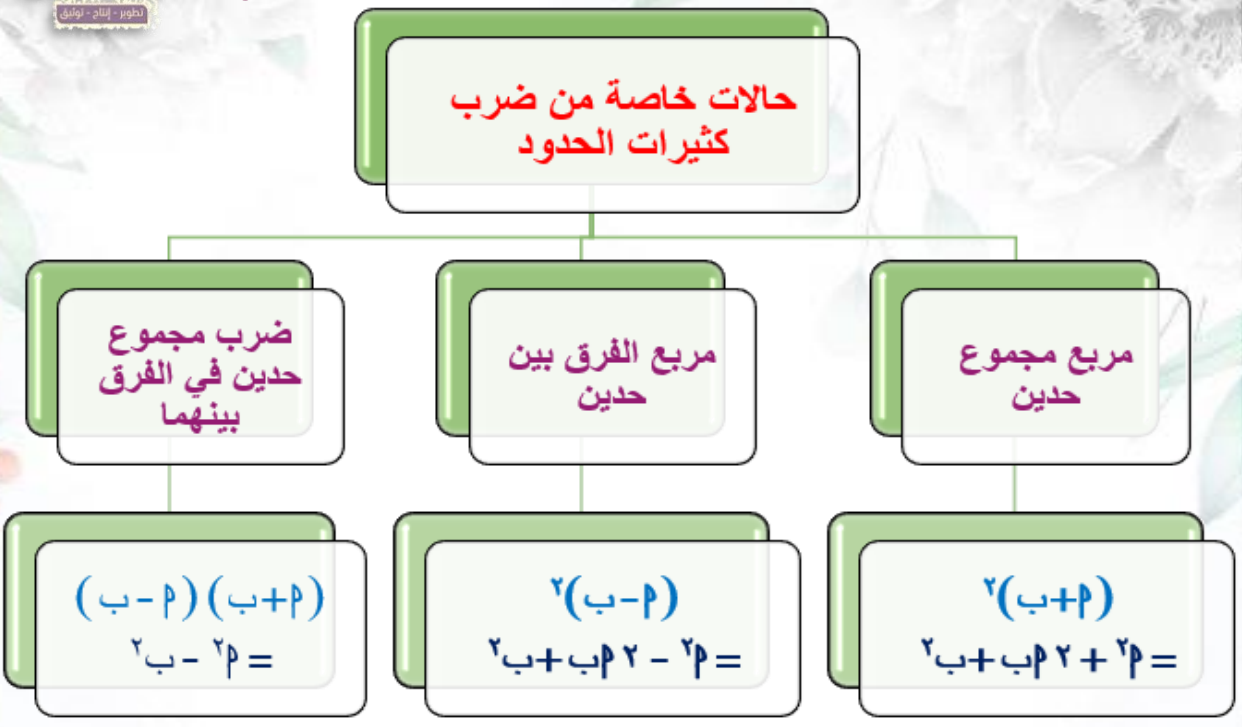
⟸ المساحة $م = ٥٦ (٢)^{٢} - ٢٦ \times ٢ - ١٠$

$م = ٥٦ \times ٤ - ٥٢ - ١٠$

$م = ٢٤٤ - ٥٢ - ١٠$

م = ١٦٢ وحدة مربعة .

٦ - ٦ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود



ملاحظات هامة :

- $(أ \pm ب)^{٢}$ = (الأول)^{٢} $\pm$ ٢ × الأول × الثاني + (الثاني)^{٢}

مربع المجموع أو مربع الفرق يُسمى مربع كامل .

- $(أ+ب)(أ-ب)$ = (الأول)^{٢} - (ب)^{٢}

ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما = الفرق بين مربعيهما .

- $(س+ص)^{٢} \neq س^{٢} + ص^{٢}$
- $(س-ص)^{٢} \neq س^{٢} - ص^{٢}$
- عند استعمال أي من هذه القواعد فإن أ ، ب قد يكونا عددين أو متغيرين أو عبارتين بأعداد و متغيرات .

٦ - ٦ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

مثال ١ : أوجد ناتج كلا مما يأتي ؟؟

١) $(٨جـ + ٣د)^{٢}$ $= (٨جـ)^{٢} + ٢ \times ٨جـ \times ٣د + (٣د)^{٢}$ $= ٦٤جـ^{٢} + ٤٨جـد + ٩د^{٢}$	٢) $(س + ٥)^{٢}$ $= (س)^{٢} + ٢ \times س \times ٥ + (٥)^{٢}$ $= س^{٢} + ١٠س + ٢٥$
٣) $(ب - ٦)(ب - ٦)$ $= (ب - ٦)^{٢}$ $= ب^{٢} - ٢ \times ب \times ٦ + ٦^{٢}$ $= ب^{٢} - ١٢ب + ٣٦$	٤) $(م + ١٠)(م + ١٠)$ $= (م + ١٠)^{٢}$ $= م^{٢} + ٢ \times م \times ١٠ + ١٠^{٢}$ $= م^{٢} + ٢٠م + ١٠٠$
٥) $(٩ - ٢ص)^{٢}$ $= ٩^{٢} - ٢ \times ٩ \times ٢ص + (٢ص)^{٢}$ $= ٨١ - ٣٦ص + ٤ص^{٢}$	٦) $(٣ك - ٥ر)^{٢}$ $= (٣ك)^{٢} - ٢ \times ٣ك \times ٥ر + (٥ر)^{٢}$ $= ٩ك^{٢} - ٣٠ك ر + ٢٥ر^{٢}$
٧) $(م - ٣)(م + ٣)$ $= م^{٢} - ٣^{٢}$ $= م^{٢} - ٩$	٨) $(٣ن + ٢)(٣ن - ٢)$ $= (٣ن)^{٢} - ٢^{٢}$ $= ٩ن^{٢} - ٤$
٩) $(٤ - س)(٤ + س)$ $= ٤^{٢} - س^{٢}$ $= ١٦ - س^{٢}$	١٠) $(\frac{٢}{٥} - ١٠م)(\frac{٢}{٥} + ١٠م)$ $= (\frac{٢}{٥})^{٢} - (١٠م)^{٢}$ $= \frac{٤}{٢٥} - ١٠٠م^{٢}$

٦ - ٦ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

تحقق من فهمك

٣) **حديقة:** لدى عماد حديقة، طولها وعرضها ل مترًا، ويريد إضافة ٣ أمتار إلى كل من الطول والعرض.

أ) بيِّن كيف يمكن التعبير عن مساحة الحديقة الجديدة بمربع ثنائية حد.

ب) أوجد مربع ثنائية الحد السابقة.

وزارة التعليم
Ministry of Education

طول الحديقة الجديدة = عرضها = ل + ٣

أ) مساحة الحديقة = (طول الضلع)^{٢}

$م = (ل + ٣)^{٢}$

$م = ل^{٢} + ٢ \times ل \times ٣ + ٣^{٢}$

ب) $م = ل^{٢} + ٦ ل + ٩$

---

٧) **ألعاب:** تحوي لعبة القرص الطائر قرصًا على شكل دائرة نصف قطرها (س + ٤) سم.

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة القرص الطائر.

ب) إذا كان قطر القرص الطائر ٢٤ سم، فما مساحته؟ (ط ≈ ٣,١٤).

أ) مساحة القرص = $نق^{٢}$ ط

$= (س + ٤)^{٢}$ ط

$= (س^{٢} + ٢ \times س \times ٤ + ٤^{٢})$ ط

$= س^{٢}$ ط + ٨ س ط + ١٦ ط

ب) ق = ٢٤ سم $\Longleftarrow$ $نق$ = ١٢ سم

$\Longleftarrow$ مساحة القرص = $نق^{٢}$ ط

$= ٣,١٤ \times ١٢^{٢}$ $= ٣,١٤ \times ١٤٤$

$= ٤٥٢,١٦$ سم^{٢} .

الفصل السابع

التحليل و المعادلات التربيعية

٧ - ١ تحليل وحيدات الحد

تحليل وحيدات الحد :

تكون وحيدة الحد بالصيغة التحليلية إذا عُبر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية و متغيرات بأس ١ .

عند كتابة وحيدة حد بالصيغة التحليلية نقول أننا حللنا وحيدة الحد تحليلاً تاماً .

مثال ١ : حلل كل وحيدات الحد التالية تحليلاً تاماً ؟

١) ٣٤ س^{٤} ص^{٣} = ٢ × ١٧ × س × س × س × س × ص × ص × ص × ص
٢) ١٢ جـ^{٢} هـ^{٤} = ٢ × ٢ × ٣ × جـ × جـ × هـ × هـ × هـ × هـ
٣) -٣٨ ر ب^{٢} ن^{٢} = -١ × ٢ × ١٩ × ر × ب × ب × ن × ن
٤) ٤٢ جـ^{٣} هـ = ٢ × ٣ × ٧ × جـ × جـ × جـ × هـ
٥) ٨١ ن^{٥} ب^{٢} = ٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ن × ن × ن × ن × ن × ب × ب

القاسم المشترك الأكبر :

- هو حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة و يرمز له بالرمز (ق.م.أ) .
- القاسم المشترك الأكبر لعوامل ذات قوى هو ذات القوى الأصغر .

٧ - ١ تحليل وحيدات الحد

مثال ٢ : أوجد (ق.م.أ) لكل زوج من وحيدات الحد التالية ؟؟

١) ٦ س ص^{٣} ، ١٨ ص ع

٦ س ص^{٣} = ٢ × ٣ × س × ص × ص × ص

١٨ ص ع = ٢^{٢} × ٣ × ص × ع

∴ ق.م.أ = ٢ × ٣ × ص = ٦ ص.

٦	٢
٣	٣
١	

١٨	٢
٩	٣
٣	٣
١	

٢) ٢٤ جـ د^{٣} ، ٤٨ جـ^{٢} د

٢٤ جـ د^{٣} = ٢^{٣} × ٣ × جـ د^{٣}

٤٨ جـ^{٢} د = ٢^{٤} × ٣ × جـ^{٢} د

∴ ق . م . أ = ٢^{٣} × ٣ × جـ × د = ٢٤ جـ د .

٢٤	٢
١٢	٢
٦	٢
٣	٣
١	

٤٨	٢
٢٤	٢
١٢	٢
٦	٢
٣	٣
١	

٣) ٢٥ س^{٣} ، ٤٥ س^{٤} ، ٦٥ س^{٢}

٢٥ س^{٣} = ٢٥ س^{٣}

٤٥ س^{٤} = ٥ × ٣^{٢} س^{٤}

٦٥ س^{٢} = ٥ × ١٣ س^{٢}

∴ ق . م . أ = ٥ × س^{٢} = ٥ س^{٢}

٢٥	٥
٥	٥
١	

٤٥	٥
٩	٣
٣	٣
١	

٦٥	٥
١٣	١٣
١	

٤) ١٢ ك ر، ٨ ر^{٢} ، ١٦ ر ل

١٢ ك ر = ٢^{٢} ك ر

٨ ر^{٢} = ٢^{٣} ر^{٢}

١٦ ر ل = ٢^{٤} ر ل

∴ ق . م . أ = ٢^{٢} × ر = ٤ ر .

١٢	٢
٦	٢
٣	٣
١	

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

٧ - ١ تحليل وحيدات الحد

٢٦) **تبرّع:** اشترى صقر مجموعة اللوازم المدرسية التالية: ٢٠ قلم رصاص، ١٥٠ ورقة ملونة، ١٢٠ ملف أوراق، ويريد وضعها في حزم متماثلة؛ ليتبرع بها لأكبر عدد ممكن من الطلاب. كم حزمة يمكنه عملها؟ وكم قطعة من كل نوع ستكونُ في كل حزمة؟

$٢٠ = ٥ \times ٢^{٢}$

$١٥٠ = ٢ \times ٣ \times ٥^{٢}$

$١٢٠ = ٣ \times ٥ \times ٢^{٣}$

٢٠	٥
٤	٢
٢	٢
١	

١٥٠	٥
٣٠	٥
٦	٣
٢	٢
١	

١٢٠	٢
٦٠	٢
٣٠	٢
١٥	٣
٥	٥
١	

عدد الحزم التي يمكن عملها = ق . م . أ

= ٢ × ٥ = ١٠

عدد القطع من أقلام الرصاص = ٢٠ ÷ ١٠ = ٢ قلم رصاص

عدد القطع من الورق الملون = ١٥٠ ÷ ١٠ = ١٥ ورق ملون

عدد القطع من ملف الأوراق = ١٢٠ ÷ ١٠ = ١٢ ملف ورق .

---

٢٢) **كعك:** يريد حامد وضع العدد نفسه من كل نوع من الكعك في كلّ كيس، بحيث يحتوي الكيس على أنواع الكعك جميعها. ما أكبر عدد ممكن من الأكياس يلزمه؟

٥٤	٤٠	٣٠
برقائق الشوكولاتة	بالشوفان والزبيب	بزبدة الفول السوداني

$٥٤ = ٢ \times ٣^{٣}$

$٤٠ = ٥ \times ٢^{٣}$

$٣٠ = ٢ \times ٣ \times ٥$

عدد الأكياس التي يحتاجها حامد = ق.م.أ

= ٢ كيس يحوي كلا منها على :

٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

٤٠	٥
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

٣٠	٥
٦	٣
٢	٢
١	

٥٤ ÷ ٢ = ٢٧ برقائق الشكولاتة

٤٠ ÷ ٢ = ٢٠ بالشوفان و الزبيب

٣٠ ÷ ٢ = ١٥ بزبدة الفول السوداني .

٧ – ٢ استخدام خاصية التوزيع

تحليل كثيرات الحدود :

١. نستخدم خاصية التوزيع في العمل عكسياً للتعبير عن كثيرة حدود بصورة حاصل ضرب عاملين (وحيدة حد في كثيرة حدود)

٢. يمكن تحليل كثيرة حدود بتجميع الحدود إذا توافرت الشروط التالية :

- تتكون كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر .
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معاً عوامل مشتركة .
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعي للآخر .

٣. يمكن تحليل كثيرة الحدود بإيجاد (ق . م . أ) لجميع الحدود ثم قسمة كل حد من كثيرة الحدود على (ق . م . أ) لإيجاد العوامل المتبقية .

مثال ١ : حلل كلا من كثيرات الحدود التالية :

١) ٢١ب – ١٥م = ٣ (٧ب – ٥م)	٢) ٤جـ^{٢} + ٢جـ = ٢جـ (٢جـ + ١)
٣) ١٢ل ن + ٦ل^{٢} ن + ٢ل ن^{٢} = ٢ل ن (٦ + ٣ل + ل ن) .	
٤) ن م + ٢ ن + ٨ م + ١٦ = (ن م + ٨ م) + (٢ ن + ١٦) = م (ن + ٨) + ٢ (ن + ٨) = (ن + ٨) (م + ٢) .	٥) ٣ف – ٢ف^{٢} – ١٨ف + ٢٧ = (٣ف + ٢٧) + (– ٢ف^{٢} – ١٨ف) = ٣ (ف + ٩) – ٢ف (ف + ٩) = (ف + ٩) (٣ – ٢ف) .
٦) س ص – ٧ س + ٧ ص – ٤٩ = (س ص + ٧ ص) + (– ٧ س – ٤٩) = ص (س + ٧) – ٧ (س + ٧) = (س + ٧) (ص – ٧) .	

٧ – ٢ استخدام خاصية التوزيع

حل المعادلات بالتحليل :

يمكننا حل بعض المعادلات بالتحليل باستخدام خاصية الضرب الصفري .

مثال ٢ : حل كلا من المعادلات التالية ؟؟

١) $٣ك(ك + ١٠) = ٠$

إما $٣ك = ٠$ أو $ك + ١٠ = ٠$

$\frac{٣ك}{٣} = \frac{٠}{٣}$ ، $ك = -١٠$

$ك = ٠$ ، $ك = -١٠$

∴ م.ح = { ٠ ، -١٠ } .

٢) $(٨ع + ٤)(٥ع + ١٠) = ٠$

إما $٨ع + ٤ = ٠$ أو $٥ع + ١٠ = ٠$

$٨ع = -٤$ ، $٥ع = -١٠$

$\frac{٨ع}{٨} = \frac{-٤}{٨}$ ، $\frac{٥ع}{٥} = \frac{-١٠}{٥}$

$ع = -\frac{١}{٢}$ ، $ع = -٢$

∴ م.ح = { $-\frac{١}{٢}$ ، -٢ } .

٣) $ر^{٢} = ١٤ر$

$ر^{٢} - ١٤ر = ٠$

$ر(ر - ١٤) = ٠$

إما $ر = ٠$ أو $ر - ١٤ = ٠$

$ر = ١٤$

∴ م.ح = { ٠ ، ١٤ } .

٤) $٨ب^{٢} - ٤٠ب = ٠$

$٨ب(ب - ٥) = ٠$

إما $٨ب = ٠$ أو $ب - ٥ = ٠$

$\frac{٨ب}{٨} = \frac{٠}{٨}$ ، $ب = ٥$

$ب = ٠$

∴ م.ح = { ٠ ، ٥ }

٧ – ٢ استخدام خاصية التوزيع

١٠) **صواريخ:** أُطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ ثانية. وتمثّل المعادلة ع = ٤٢ ن – ٥ن^{٢} ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟

ب) حلّ المعادلة ٤٢ ن – ٥ ن^{٢} = ٠

جـ) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

أ) ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض ع = ٠

ب) ٤٢ ن ـ ٥ ن^{٢} = ٠

ن (٤٢ ـ ٥ ن) = ٠

إما ن = ٠ أو ٤٢ ـ ٥ ن = ٠

ـ٥ ن = ـ٤٢

$\frac{-٤٢}{-٥}$ = ن

ن = ٨,٤

ج) يحتاج الصاروخ ليعود للأرض ٨,٤ ثانية .

٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة ٢ م^{٢} = ٤ م. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

راشد

٢م^{٢} = ٤م

٢م^{٢} – ٤م = ٠

٢م(م – ٢) = ٠

٢م = ٠ أو م – ٢ = ٠

م = ٠ أو م = ٢

حمد

٢م^{٢} = ٤م

$\frac{٢م^{٢}}{٢م} = \frac{٤م}{٢م}$

م = ٢

حل راشد صحيح ؛ لأن حمد يجب أن يجعل المعادلة صفرية

" أحد طرفي المعادلة = ٠ " ، و لأنه لا يجوز القسمة على متغير.

٧ – ٣ المعادلة التربيعية
"س^{٢} + ب س + جـ = ٠"

تحليل س^{٢} + ب س + جـ :

لتحليل س^{٢} + ب س + جـ و هي ثلاثية حد كما يلي :

١. أوجد عددين صحيحين م ، ن بحيث

م × ن = جـ أي ضربهما = جـ

م + ن = ب أي مجموعهما = ب .

٢. اكتب س^{٢} + ب س + جـ على الصورة (س + م) (س + ن) .

ملاحظات هامة :

عند تحليل ثلاثي الحدود س^{٢} + ب س + جـ على الصورة (س+م)(س+ن)

١. إذا كانت جـ موجبة فإن :

م ، ن موجبة إذا كانت ب موجبة

م ، ن سالبة إذا كانت ب سالبة

٢. إذا كانت جـ سالبة فإن :

م ، ن مختلفتان في الإشارة ، و أكبرهما عددياً له نفس إشارة ب .

مثال ١ : حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي ؟

١) د^{٢} + ١١ د + ٢٤

= (د + ٨) (د + ٣)

٨ د + ٣ د = ١١ د الحد الأوسط

٢) ص^{٢} – ١٧ ص + ٧٢

= (ص-٩) (ص-٨)

-٨ص + (-٩ص) = -١٧ص الحد الأوسط

٣) ٩^{٢} + ٨ ٩ – ٤٨

= (٩ + ١٢) (٩ – ٤)

-٤ ٩ + ١٢ ٩ = +٨ ٩ الحد الأوسط

٤) ن^{٢} – ٢ ن – ٣٥

= (ن – ٧)(ن + ٥)

-٧ن + ٥ن = -٢ن الحد الأوسط

٧ – ٣ المعادلة التربيعية "س^{٢} + ب س + جـ = ٠"

حل المعادلات بالتحليل :

- يمكن كتابة المعادلات التربيعية على الصورة القياسية :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠

- و يمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل ثم باستخدام خاصية الضرب الصفري .

مثال ٢ : حل كلاً من المعادلات التالية ؟؟

أ) س^{٢} – ٧ س + ١٢ = ٠

(س – ٣)(س – ٤) = ٠

إما س – ٣ = ٠ أو س – ٤ = ٠

س = ٣ س = ٤

∴ م . ح = { ٣ ، ٤ }

ب) ص^{٢} + ص = ٢٠

ص^{٢} + ص – ٢٠ = ٠

(ص + ٥) (ص – ٤) = ٠

إما ص + ٥ = ٠ أو ص – ٤ = ٠

ص = – ٥ ص = ٤

∴ م . ح = { – ٥ ، ٤ }

ج) هـ^{٢} + ٤٨ = ١٦ هـ

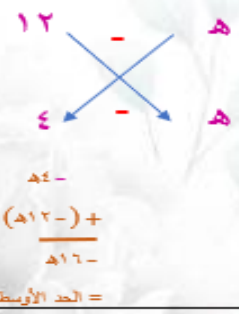
هـ^{٢} – ١٦ هـ + ٤٨ = ٠

(هـ – ١٢) (هـ – ٤) = ٠

إما هـ – ١٢ = ٠ أو هـ – ٤ = ٠

هـ = ١٢ هـ = ٤

∴ م . ح = { ١٢ ، ٤ } .



٧ – ٣ المعادلة التربيعية
"س^{٢} + ب س + جـ = ٠"

د) س^{٢} – ٤ س – ٢١ = ٠

(س – ٧) (س + ٣) = ٠

إما س – ٧ = ٠ أو س + ٣ = ٠

س = ٧ س = – ٣

∴ م . ح = { ٧ ، – ٣ } .

س ٧ –
س ٣ +
– ٧س
+ ٣س
– ٤س = الحد الأوسط

٢٥) **هندسة :** تمثّل العبارة (س^{٢} – ٤س – ١٢) سم^{٢} مساحة مستطيل طوله (س + ٢) سم. فما عرضه؟

مساحة المستطيل = الطول × العرض

العرض = مساحة المستطيل ÷ الطول = (س^{٢} – ٤ س – ١٢) ÷ (س + ٢)

= (س – ٦)(س + ٢) ÷ (س + ٢)

= (س – ٦) سم .

س ٦ –
س ٢ +
– ٦س
+ ٢س
– ٤س = الحد الأوسط

٣٢) **اكتشف الخطأ :** حلّل كلٌّ من خليل وماجد العبارة: س^{٢} + ٦س – ١٦ . فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

ماجد	خليل
س^{٢} + ٦س – ١٦ = (س + ٢) (س – ٨)	س^{٢} + ٦س – ١٦ = (س – ٢) (س + ٨)

حل خليل صحيح ؛ لأن ماجد أخطأ في تحليل الإشارات .

٧ – ٤ حل المعادلة التربيعية

"م س^{٢} + ب س + جـ = ٠"

تحليل م س^{٢} + ب س + جـ :

لتحليل ثلاثي الحدود م س^{٢} + ب س + جـ نتبع الآتي :

١. نوجد عددين م ، ن بحيث م × ن = م جـ ، م + ن = ب

٢. نكتب م س^{٢} + ب س + جـ على الصورة م س^{٢} + ن س + م س + جـ

ملاحظات هامة :

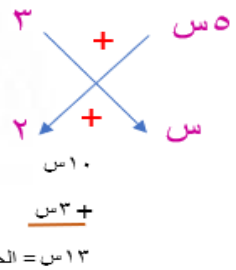
١) تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة كثيرة حدود أولية .

٢) ابحث عن القاسم المشترك الأكبر لحدود كثيرة الحدود قبل تحليلها.

مثال ١ : حلل كثيرات الحدود التالية فيما يأتي ؟؟ و إذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب أولية ؟؟

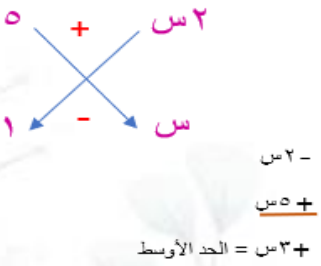
١) ٥ س^{٢} + ١٣س + ٦

= (٥ س + ٣) (س + ٢)



٢) ٢ س^{٢} + ٣س - ٥

= (٢ س + ٥) (س - ١)



٣) ٤ ر^{٢} - ر + ٧

كثيرة حدود أولية .

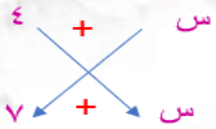
٧ – ٤ حل المعادلة التربيعية

"م س^{٢} + ب س + جـ = ٠"

٤) ٢ س^{٢} + ٢٢ س + ٥٦

= ٢ (س^{٢} + ١١ س + ٢٨)

= ٢ (س + ٤) (س + ٧) .



٤س

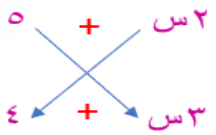
+٧س

+١١س = الحد الأوسط

٥) -٦ س^{٢} -٢٣ س - ٢٠

= - (٦ س^{٢} +٢٣ س +٢٠)

= - (٢س+٥) (٣س+٤) .



٨س

+١٥س

+٢٣س

= الحد الأوسط

مثال ٢ : حلي كل معادلة مما يأتي ؟؟

١) ٢ س^{٢} + ٩ س + ٩ = ٠

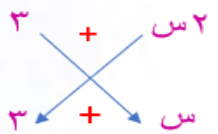
(٢س+٣) (س+٣) = ٠

إما ٢س+٣=٠ أو س + ٣ = ٠

٢س = -٣ س= -٣

س = $\frac{-٣}{٢}$

∴ م . ح = { - ١,٥ ، - ٣ }



٦س

+٣س

+٩س = الحد الأوسط

٢) -٣ س^{٢} +٢٦ س = ١٦

-٣ س^{٢} +٢٦ س - ١٦ =٠

٣س^{٢} -٢٦ س + ١٦ =٠

(٣س - ٢) (س - ٨) = ٠

إما ٣س-٢=٠ أو س-٨ = ٠

٣س = ٢ س=٨

س = $\frac{٢}{٣}$

∴ م . ح = { $\frac{٢}{٣}$ ، ٨ } .

بقسمة جميع الحدود على (-١)

-٢٤س

+ (-٢س)

-٢٦س= الحد الأوسط

٧ – ٤ حل المعادلة التربيعية

"م س^{٢} + ب س + جـ = ٠"

٣) ٣ س^{٢} - ٥ س - ٢ = ٠

(٣ س + ١) (س - ٢) = ٠

إما ٣ س + ١ = ٠ أو س - ٢ = ٠

٣ س = - ١ س = ٢

$س = \frac{-١}{٣}$

∴ م . ح = { $\frac{-١}{٣}$ ، ٢ } .

٣س ١ + ، س ٢ -

- ٦س

+ س

- ٥س

= الحد الأوسط

٤) ٢ س^{٢} + ٩ س - ١٨ = ٠

(٢س - ٣) (س + ٦) = ٠

إما ٢س - ٣ = ٠ أو س + ٦ = ٠

٢ س = ٣ س = - ٦

$س = \frac{٣}{٢}$

∴ م . ح = { ١,٥ ، - ٦ } .

٢س ٣ - ، س ٦ +

- ٣س

+ ١٢س

+ ٩س

= الحد الأوسط

٣٣) **اكتشف الخطأ :** حلّ كلّ من زكريا وسامي المعادلة ٦ س^{٢} – س = ١٢ . فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك.

زكريا

٦س^{٢} – س = ١٢

٦س^{٢} – س – ١٢ = ٠

(٢س – ٣)(٣س + ٤) = ٠

٢س – ٣ = ٠ أو ٣س + ٤ = ٠

$س = \frac{٣}{٢}$ أو س = $-\frac{٤}{٣}$

سامي

٦س^{٢} – س = ١٢

س(٦س – ١) = ١٢

س = ١٢ أو ٦س – ١ = ١٢

٦س = ١٣ أو س = $\frac{١٣}{٦}$

حل زكريا صحيح ؛ لأن سامي لم يُعيد كتابة المعادلة على صورة معادلة أحد طرفيها = ٠

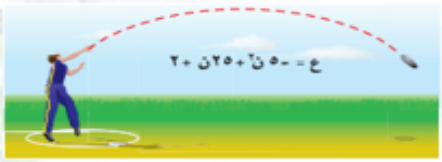
٧ – ٤ حل المعادلة التربيعية

"م س^{٢} + ب س + جـ = ٠"

٧) **رمي القرص:** يرمي خالد القرص المعدني كما في الشكل المجاور.

أ) ما الارتفاع الابتدائي للقرص؟

ب) بعد كم ثانية يصل القرص إلى الارتفاع نفسه الذي قذف منه؟



ع = $-٥ن^{٢} + ٢٥ن + ٢$

أ) نوجد الارتفاع الابتدائي بوضع ن = ٠

$\Longleftarrow$ ع = $-٥(٠)^{٢} + ٢٥ \times ٠ + ٢$ $\Longleftarrow$ ع = ٢ متر

ب) الارتفاع الذي قذف منه القرص ع = ٢ متر

$-٥ن^{٢} + ٢٥ن + ٢ = ٢$

$-٥ن^{٢} + ٢٥ن + ٢ - ٢ = ٠$

$-٥ن^{٢} + ٢٥ن = ٠$

$-٥ن(ن - ٥) = ٠$

إما $-٥ن = ٠$ أو $ن - ٥ = ٠$

$ن = \frac{٠}{-٥}$ $ن = ٥$

$ن = ٠$

∴ بعد ٥ ثواني يصل القرص إلى الارتفاع الذي قذف منه .

٧ – ٤ حل المعادلة التربيعية

"م س^{٢} + ب س + جـ = ٠"

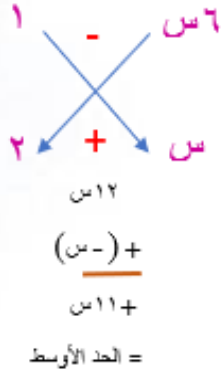
٢٤) **نظرية الأعداد:** ستة أمثال مربّع العدد س مضافًا إليها ١١ مِثْلًا للعدد يساوي ٢. ما القيم الممكنة لـ س؟

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

- نفرض العدد = س
- نكون المعادلة : ٦ س^{٢} + ١١س = ٢

٦ س^{٢} + ١١س - ٢ = ٠

- نحل المعادلة :



(٦ س - ١) (س + ٢) = ٠

إما ٦ س - ١ = ٠ أو س + ٢ = ٠

٦ س = ١ س = - ٢

$س = \frac{١}{٦}$

∴ قيم س الممكنة هي $\frac{١}{٦}$ ، -٢ .

٧ – ٥ المعادلات التربيعية
"الفرق بين مربعين"

تحليل الفرق بين مربعين :

الصورة المحللة للفرق بين مربعين تُسمى ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما .

$$أ^{٢} - ب^{٢} = (أ + ب)(أ - ب) \text{ أو } (أ - ب)(أ + ب)$$

ملاحظات هامة :

١) لا يمكن تحليل مجموع مربعين $أ^{٢} + ب^{٢}$ لأنهما كثيرة حدود أولية.
٢) في بعض الأحيان نُحلل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً باستعمال التحليل أكثر من مرة .

مثال ١ : حللي كثيرة الحدود فيما يأتي ؟؟

١) $س^{٢} - ٩ = (س - ٣)(س + ٣)$.
٢) $٤أ^{٢} - ٢٥ = (٢أ + ٥)(٢أ - ٥)$.
٣) $٢ص^{٤} - ٥٠ = ٢(ص^{٤} - ٢٥)$ $= ٢(ص^{٢} + ٥)(ص^{٢} - ٥)$.
٤) $٢ل^{٣} - ١٦٢ل = ٢ل(ل^{٢} - ٨١) = ٢ل(ل - ٩)(ل + ٩)$.
٥) $٢جـ^{٣} + ٣جـ^{٢} - ٢جـ - ٣ = (٢جـ^{٣} - ٢جـ) + (٣جـ^{٢} - ٣)$ $= ٢جـ(جـ^{٢} - ١) + ٣(جـ^{٢} - ١)$ $= (جـ^{٢} - ١)(٢جـ + ٣)$ $= (جـ + ١)(جـ - ١)(٢جـ + ٣)$.
٦) $ل^{٣}ر^{٥} - ل^{٣}ر = ل^{٣}ر(ر^{٤} - ١)$ $= ل^{٣}ر(ر^{٢} + ١)(ر^{٢} - ١)$ $= ل^{٣}ر(ر^{٢} + ١)(ر + ١)(ر - ١)$.

٧ – ٥ المعادلات التربيعية
"الفرق بين مربعين "

٧) ر^{٣} – ٥ر^{٢} – ١٠٠ر + ٥٠٠
= (ر^{٣} – ١٠٠ر) + (– ٥ر^{٢} + ٥٠٠)
= ر (ر^{٢} – ١٠٠) – ٥ (ر^{٢} – ١٠٠)
= (ر^{٢} – ١٠٠) (ر – ٥)
= (ر + ١٠) (ر – ١٠) (ر – ٥) .

مثال ٢ : حل كلاً من المعادلات التالية ؟؟

١) ٣٦ ل^{٢} = ١٢١
٣٦ ل^{٢} – ١٢١ = ٠
(٦ل – ١١) (٦ل + ١١) = ٠
إما ٦ل – ١١ = ٠ أو ٦ل + ١١ = ٠
٦ل = ١١ ٦ل = – ١١
ل = $\frac{١١}{٦}$ ل = $\frac{-١١}{٦}$
∴ م . ح = {$\frac{١١}{٦}$ ، – $\frac{١١}{٦}$} .

٣٦ل^{٢} = ١٢١
ل^{٢} = $\frac{١٢١}{٣٦}$
$\sqrt{ل^{٢}}$ = $\sqrt{\frac{١٢١}{٣٦}}$
ل = ± $\frac{١١}{٦}$

٢) ٩د^{٢} – ٨١ = ٠
(٣د + ٩) (٣د – ٩) = ٠
إما ٣د + ٩ = ٠ أو ٣د – ٩ = ٠
٣د = – ٩ ٣د = ٩
د = – $\frac{٩}{٣}$ د = $\frac{٩}{٣}$
د = – ٣ د = ٣
∴ م . ح = {– ٣ ، ٣} .

٩د^{٢} – ٨١ = ٠
٩د^{٢} = ٨١
د^{٢} = $\frac{٨١}{٩}$
د^{٢} = ٩
$\sqrt{د^{٢}}$ = $\sqrt{٩}$
د = ± ٣

٧ – ٥ المعادلات التربيعية "الفرق بين مربعين"

٣) $١٠٠ = ٢٥ س^{٢}$

$١٠٠ - ٢٥ س^{٢} = ٠$

$(١٠ + ٥ س)(١٠ - ٥ س) = ٠$

إما $١٠ + ٥ س = ٠$ أو $١٠ - ٥ س = ٠$

$٥ س = -١٠$ $\quad$ $-٥ س = -١٠$

$س = \frac{-١٠}{٥}$ $\quad$ $س = \frac{-١٠}{-٥}$

$س = -٢$ $\quad$ $س = +٢$

$\therefore$ م . ح $= \{-٢ ، ٢\}$.

$١٠٠ = ٢٥ س^{٢}$

$س^{٢} = \frac{١٠٠}{٢٥}$

$س^{٢} = ٤$

$\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{٤}$

$س = \pm ٢$

٤٥) **اكتشف الخطأ:** حلَّلت كلٌّ من هلا ومنى العبارة الآتية، فأيهما إجابتها صحيحة؟ فسِّر ذلك.

هلا	منى
$١٦ س^{٤} - ٢٥ ص^{٢} =$	$١٦ س^{٤} - ٢٥ ص^{٢} =$
$(٤ س - ٥ ص)(٤ س + ٥ ص)$	$(٤ س^{٢} - ٥ ص)(٤ س^{٢} + ٥ ص)$

حل منى صحيح ؛ لأن هلا أخطأت في تحليل $س^{٤}$.

تطبيق :

$(س^{٤} - ١) = (س^{٢} + ١)(س^{٢} - ١)$

$= (س^{٢} + ١)(س + ١)(س - ١)$.

$(س^{٢} - \frac{٩}{١٦}) = (س + \frac{٣}{٤})(س - \frac{٣}{٤})$.

٧ – ٦ المعادلات التربيعية
"المربعات الكاملة "

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل :

ثلاثية الحدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل إذا تحقق ما يلي :

- الحد الأول مربع كامل
- الحد الأخير مربع كامل
- الحد الأوسط = $\pm$ ٢ × الجذر التربيعي للحد الأول × الجذر التربيعي للحد الأخير .

$$(أ+ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$$

$$(أ-ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$$

ملاحظات هامة :

- بعد تكوين ثلاثي الحدود كمربع كامل استخدم الجذر التربيعي لحل المعادلة .
- إذا كانت إشارة الحد الثالث في ثلاثي الحد سالبة فلا نستطيع التحليل كمربع كامل و إنما نحللها كمعادلة تربيعية أ س^{٢} +ب س +جـ .
- يكون تحليل ثلاثي الحد تحليلاً تاماً إذا كتبت على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية ، و قد نستخدم أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً .

٧ – ٦ المعادلات التربيعية
"المربعات الكاملة "

مثال ١ : حدد إذا كانت ثلاثي الحدود فيما يلي مربع كامل أم لا ؟؟ و إذا كانت كذلك فحللها ؟ ؟

أ) $٩ص^{٢}+٢٤ص+١٦$

الحد الأول= $٩ص^{٢}$ مربع ٣ ص

الحد الأخير = ١٦ مربع ٤

الحد الأوسط = ٢٤ ص

= ٢ × الأول × الثاني

= ٢ × $٩ص^{٢}$ × ١٦

= ٢ × ٣ص × ٤ = ٢٤ص

∴ ثلاثي الحدود مربع كامل

$٩ص^{٢}+٢٤ص+١٦=(٣ص+٤)^{٢}$

ب) $١٦س^{٢}-٥٦س+٤٩$

الحد الأول= $١٦س^{٢}$ مربع ٤س

الحد الأخير = ٤٩ مربع ٧

الحد الأوسط = – ٥٦ س

= – ٢ × الأول × الثاني

= – ٢ × $١٦س^{٢}$ × ٤٩

= – ٢ × ٤س × ٧ = – ٥٦ س

∴ ثلاثي الحدود مربع كامل

$١٦س^{٢}-٥٦س+٤٩=(٤س-٧)^{٢}$

ج) $٢٥س^{٢}+٦٠س+٣٦$

الحد الأول= $٢٥س^{٢}$ مربع ٥س

الحد الأخير = ٣٦ مربع ٤٦

الحد الأوسط = ٦٠س

= ٢ × الأول × الثاني

= ٢ × $٢٥س^{٢}$ × ٣٦

= ٢ × ٥س × ٦ = ٦٠س

∴ ثلاثي الحدود مربع كامل

$٢٥س^{٢}+٦٠س+٣٦=(٥س+٦)^{٢}$

د) $٦س^{٢}+٣٠س+٣٦$

الحد الأول= $٦س^{٢}$ ليست مربعاً

∴ ثلاثي الحدود ليست مربع كامل .

هـ) $٤س^{٢}-٤٢س+١١٠$

الحد الأول= $٤س^{٢}$ مربع $٢س$

الحد الأخير = ١١٠ ليست مربعاً

∴ ثلاثي الحدود مربع كامل .

٧ – ٦ المعادلات التربيعية
"المربعات الكاملة "

مثال ٢ : حللي كثيرات الحدود فيما يلي بالطريقة المناسبة ؟؟

١) $٢س^{٢} - ٣٢ = ٢(س^{٢} - ١٦) = ٢(س + ٤)(س - ٤)$.
٢) $٢٤د^{٢} + ٣٩د - ١٨ = ٣(٨د^{٢} + ١٣د - ٦)$ $= ٣(٨د - ٣)(د + ٢)$. ٣ ، ٨د ، ٢ ، د ، - ، + ، ١٦د ، + (-٣د) ، +١١١٣د ، = الحد الأوسط
٣) $١٦م^{٢} - ١٢١ب^{٢} = (٤م + ١١ب)(٤م - ١١ب)$.
٤) $٤س^{٢} + ٦٤ = ٤(س^{٢} + ١٦)$.
٥) $٨س^{٢} + ١٠س - ٢١$ أولية .

٤٠) **اكتشف الخطأ:** حلّل منصور وفيصل العبارة $س^{٨} - س^{٤}$ تحليلاً تامًا ، فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك.

منصور	فيصل
$س^{٨} - س^{٤} = س^{٤}(س^{٢} + ١)(س^{٢} - ١)$	$س^{٨} - س^{٤} = س^{٤}(س^{٢} + ١)(س - ١)(س + ١)$

حل فيصل صحيح لأنه حلل تحليلاً تاماً ؛ لكن منصور لم يكمل تحليل $(س^{٢} - ١)$.

٧ – ٦ المعادلات التربيعية
"المربعات الكاملة "

مثال ٣ : حل كلاً من المعادلات التالية ؟؟

١) $٦٤ص^{٢} - ٤٨ص + ١٨ = ٩$

$٦٤ص^{٢} - ٤٨ص + ١٨ - ٩ = ٠$

$٦٤ص^{٢} - ٤٨ص + ٩ = ٠$

$(٨ص - ٣)^{٢} = ٠$

$\sqrt{(٨ص - ٣)^{٢}} = \sqrt{٠}$

$٨ص - ٣ = ٠$

$٨ص = ٣$

$ص = \frac{٣}{٨}$

∴ م . ح = $\{\frac{٣}{٨}\}$ حل واحد مكرر

٢) $٤م^{٢} - ٢٤م + ٣٦ = ٠$

$(٢م - ٦)^{٢} = ٠$

$\sqrt{(٢م - ٦)^{٢}} = \sqrt{٠}$

$٢م - ٦ = ٠$

$٢م = ٦$

$م = \frac{٦}{٢}$

$م = ٣$

∴ م . ح = { ٣ } حل واحد مكرر

٣) $(ع + ٥)^{٢} = ٤٧$

$\sqrt{(ع + ٥)^{٢}} = \sqrt{٤٧}$

$ع + ٥ = \pm\sqrt{٤٧}$

إما $ع + ٥ = \sqrt{٤٧} \Leftarrow ع = \sqrt{٤٧} - ٥ \Leftarrow ع = ١,٩$

أو $ع + ٥ = -\sqrt{٤٧} \Leftarrow ع = -\sqrt{٤٧} - ٥ \Leftarrow ع = -١١,٩$

٤) $(ب - ١٠)^{٢} = ١٢١$

$\sqrt{(ب - ١٠)^{٢}} = \sqrt{١٢١}$

$ب - ١٠ = \pm ١١$

إما $ب - ١٠ = ١١ \Leftarrow ب = ١١ + ١٠ \Leftarrow ب = ٢١$

أو $ب - ١٠ = -١١ \Leftarrow ب = -١١ + ١٠ \Leftarrow ب = -١$

٥) $٤س^{٢} = ٣٦$

$\sqrt{٤س^{٢}} = \sqrt{٣٦}$

$٢س = \pm ٦$

إما $٢س = +٦ \Leftarrow س = \frac{٦}{٢} \Leftarrow س = ٣$

أو $٢س = -٦ \Leftarrow س = -\frac{٦}{٢} \Leftarrow س = -٣$

المراجع

- كتاب الطالب للصف الثالث متوسط عام ١٤٤٢هـ
- كتاب المعلم للصف الثالث متوسط
- قناة عين التعليمية
- منتديات يزيد التعليمية
- شبكة الرياضيات التعليمية
- سلسلة العبيكان لتبسيط الرياضيات

خاتمة

الحمد لله الذي هدانا و أعاننا إلى ما بلغناه من نتائج و أفكار .... الحمد لله على التمام

أتمنى أن أكون قد وفقت في عرض كل مفيد و مهم في هذا العمل المتواضع ....و ما حصل من صواب فمن الله العزيز الكريم و ما حصل من خطأ أو تقصير فمن النفس و الشيطان ....

تمنياتي للجميع بالتوفيق و النجاح و آخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين .