الرياضيات

بين البساطة والمتعة

للصف الثالث المتوسط
الفصل الدراسي الثاني

تأليف :

الأستاذ / مطلق بن زائد الحارثي

مراجعة :

الأستاذة / جواهر بنت علي الزهراني

الأستاذ / مطلق بن زائد الحارثي

نفيدكم علماً بأن قد تم تسجيل عملكم الموسوم ب :

(الرياضيات بين البساطة والمتعة (للصف الثالث متوسط الفصل الدراسي الثاني)

تحت رقم إيداع 1442/3721 وتاريخ 16/ 05/ 1442 هـ
ورقم ردمك 978-603-03-6438-1

بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء :

أهدي هذا الكتاب لوالديّ حفظهما الله ولعائلتي

وإخوتي وأخواتي وأخص بالذكر أخي الأكبر عبدالله أدامه الله لنا

وأختي الغالية الأستاذة مها التي قامت مشكورة بتصميم غلاف الكتاب

سائلاً المولى عز وجل أن يبارك لي فيه ..

المؤلف

شكر وتقدير وعرفان

أتقدّم بالشكر الجزيل لمجموعة الإبداع والتميّز

مجموعة (رِفعة) التي تضم نخبة المبدعين والمبدعات لمعلمي

ومعلمات الرياضيات بالمملكة العربية السعودية ..

شكراً لكم ولي الفخر بأن أكون أحد أعضاء هذه المجموعة الرائعة .

شكر خاص

للزميلة الفاضلة الأستاذة / جواهر بنت علي الزهراني

التي قامت مشكورة بمراجعة هذا الكتاب .

المؤلف

الفهرس

كثيرات الحدود

ضرب وحيدات الحد

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- اضرب وحيدات الحد .
- أبسّط عبارات تتضمن وحيدات الحد .

تعريف

وحيدات الحد: تكون **وحيدة الحد**
عددًا **مثال: ٧**
أو متغيرًا **مثال: ص**
أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر **مثال: ٣ س**
بأسس صحيحة غير سالبة. **مثال: ٥ س ص^{٣}**
وتتكون من حد واحد فقط. **مثال: ٤ س ص^{٣}ك**

تعريف

الثابت: هو وحيدة حد تمثل عددًا حقيقيًا. **مثال: ٣ , -٧, $\sqrt{٨}$, $\frac{٤}{٥}$**
وحيدة الحد ٣ س هى مثال على عبارة خطية
وحيدة الحد ٢ س^{٢} فليست عبارة خطية

ملحوظات المعلم

تمرين

حدِّد إذا كانت العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك:

أ) −س + ٥

ب) ٢٣أ ب جـ د^{٢}

جـ) $\frac{س ص ع^{٢}}{٢}$

د) $\frac{م ف}{ن}$

اكتب:

عبارة لا تمثّل وحيدة حد ....

معادلة ليست خطية ....

لأي عدد حقيقي أ ؛ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن: $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م + ن}$.

لأي عدد حقيقي أ ؛ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

لأي عددين حقيقيين أ، ب وأي عدد صحيح ن، فإن: $(أب)^{ن} = أ^{ن}ب^{ن}$.

مفاهيم أساسية

مثال (المفهوم ١):

بسّط العبارة التالية:

(٣ ص^{٤}) (٧ ص^{٥}) = ...

تمرين :

(٣ن^{٢}) (٣ط ن) = ...

مثال (المفهوم ٢):

بسّط العبارة التالية:

$[(٢^{٣})]^{٢}$ = ...

تمرين :

$[(٤^{٢})]^{٢}$ = ...

مثال (المفهوم ٣):

بسّط العبارة التالية:

(−٢ س^{٣} ص^{٤})^{٢} = ...

تمرين :

(٣ ك^{٢} ن^{٤}) = ...

ملحوظات المعلم

خطأ شائع

$(٢^{٣})^{٤} \neq ٢^{٣^{٤}}$

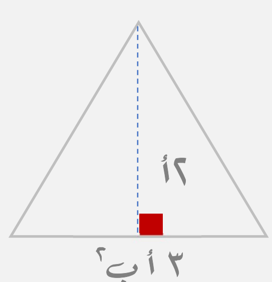
$٢^{١٢}$　　　$٢^{٨١}$

هندسة : عبّر عن مساحة المثلث المجاور كوحيدة حد .

....

....

....



تبسيط العبارات :

لتبسيط وحيدة حد , اكتب عبارة مكافئة لها على أن :

- يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة فقط.
- لا تتضمن العبارة قوة قوة.
- تكون جميع الكسور في أبسط صورة .

مثال :

بسّط العبارة :

$(٣\text{س ص}^{٤})^{٢}[(-٢\text{ص})^{٢}]^{٣}$.

$(٣\text{س ص}^{٤})^{٢}[(-٢\text{ص})^{٢}]^{٣} = (٣\text{س ص}^{٤})^{٢}(-٢\text{ص})^{٦}$	قوة القوة
$= (٣)^{٢}\text{س}^{٢}(\text{ص}^{٤})^{٢}(-٢)^{٦}(\text{ص})^{٦}$	قوة حاصل الضرب
$= ٩\text{س}^{٢}\text{ص}^{٨}(٦٤)\text{ص}^{٦}$	قوة القوة
$= ٩(٦٤)\text{س}^{٢}\text{ص}^{٨}\text{ص}^{٦}$	خاصية الإبدال
$= ٥٧٦\text{س}^{٢}\text{ص}^{١٤}$	ضرب القوى

تمرين :

بسّط العبارة :

$(-٧\text{ب}^{٢}\text{ن}^{٣}\text{م})^{٢}[(٤\text{ب}^{٣}\text{ن})^{٣}]^{٣}$

إذا كان : $٣\text{ت}^{٦} \times ٢\text{ت}^{\text{س}} = ٦\text{ت}^{١٣}$ فإن قيمة س = ...

إذا كان : $(٢\text{ص}^{٣}\text{ع}^{\text{س}})^{٤} = ١٦\text{ص}^{١٢}\text{ع}^{٨}$, فإن قيمة س = ...

إذا كان : $٨^{٤} = (٢)^{\text{س}}$, فإن قيمة س = ...

قسمة وحيدات الحد

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أجد ناتج قسمة وحيدتي حد
- أبسّط عبارات تحتوي أسساً سالبة أو صفراً

مفاهيم أساسية

لأي عدد حقيقي أ ≠ ٠، وأي عددين صحيحين م، ن، فإن: $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م - ن}$.

لأي عددين حقيقيين أ، ب ≠ صفر، وأي عدد صحيح م فإن: $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

خاصية الأس الصفري لأي عدد حقيقي أ لا يساوي صفرًا فإن: $أ^{٠} = ١$

لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، وأي عدد صحيح ن، فإن: $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$، $\frac{١}{أ^{-ن}} = أ^{ن}$.

بسّط العبارة $\frac{جـ^{٣}هـ^{٥}}{جـ هـ^{٢}}$ مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا .

$\frac{جـ^{٣}هـ^{٥}}{جـ هـ^{٢}} = \left(\frac{جـ^{٣}}{جـ}\right)\left(\frac{هـ^{٥}}{هـ^{٢}}\right)$ جمِّع القوى ذات الأساس نفسه

$= \left(جـ^{٣-١}\right)\left(هـ^{٥-٢}\right)$ اقسم القوى

$= جـ^{٢}هـ^{٣}$ بسّط

تمرين (المفهوم ١) :

بسّط العبارات التالية مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً:

$\frac{س^{٣}ص^{٤}}{س^{٢}ص} =$

$\frac{ت^{٣}م^{١٠}ب}{ت^{٥}م^{٣}ب} =$

بسّط العبارة: $\left(\frac{٣م^{٣}}{٧}\right)^{٢}$.

$\left(\frac{٣م^{٣}}{٧}\right)^{٢} = \frac{\left(٣م^{٣}\right)^{٢}}{٧^{٢}}$

$= \frac{٣^{٢}\left(م^{٣}\right)^{٢}}{٧^{٢}}$

$= \frac{٩م^{٦}}{٤٩}$

تمرين (المفهوم ٢) :

بسّط العبارات التالية مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً:

$\left(\frac{٣س^{٤}}{٤}\right)^{٣} =$

$\left(\frac{٢ص^{٣}}{٣ع^{٢}}\right)^{٢} =$

خاصية الأس الصفري

أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة صفر يساوي ١

أمثلة: $١٥^{٠} = ١$ ، $\left(\frac{ب}{جـ}\right)^{٠} = ١$ ، $\left(\frac{٢}{٧}\right)^{٠} = ١$

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $-\left(\frac{٤ن^{٢}ك^{٥}ر^{٢}}{٩ن^{٣}ك^{٢}ر}\right)^{٠}$ ب) $\frac{س^{٥}ص^{٠}}{س^{٣}}$

$-\left(\frac{٤ن^{٢}ك^{٥}ر^{٢}}{٩ن^{٣}ك^{٢}ر}\right)^{٠} = ١$ $أ^{٠} = ١$

$\frac{س^{٥}ص^{٠}}{س^{٣}} = \frac{س^{٥}(١)}{س^{٣}}$ $أ^{٠} = ١$

$= س^{٢}$ اقسم القوى

تمرين (المفهوم الثالث)

$$\left(\frac{٢ن^{٤}جـ^{٧}هـ^{٣}}{١٥ن^{٣}جـ^{٩}هـ^{٦}}\right)^{٠}$$

$$\frac{ب^{٤}جـ^{٢}د^{٠}}{ب^{٢}جـ}$$

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}}$

$\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}} = \left(\frac{ن^{-٥}}{١}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{١}{ر^{-٢}}\right)$ اكتب العبارة على صورة حاصل ضرب كسور اعتيادية

$= \left(\frac{١}{ن^{٥}}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{ر^{٢}}{١}\right)$ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $\frac{١}{أ^{-ن}} = أ^{ن}$

$= \frac{ف^{٤}ر^{٢}}{ن^{٥}}$ اضرب

ملحوظات المعلم

الأس الصفري

انتبه للأقواس عند تبسيط أي عبارة. فالعبارة $(٥س)^{٠}$ تساوي ١ إلا أن العبارة $٥س^{٠} = ٥$

الإشارة السالبة

تأكد من موقع الإشارة السالبة. فمثلاً، $٥^{-١} = \frac{١}{٥}$، في حين أن $-٥^{١} \neq \frac{١}{٥}$

تمرين :

بسّط العبارة التالية :

(بفرض أن المقام لا يساوي صفر)

$$\frac{٦س^{٨}ص^{٤}}{٣س^{٣}ص^{-١}}$$

تستعمل رتبة المقدار لمقارنة المقادير وتقدير الحسابات وإجرائها بسرعة وتعبر عن العدد مقرّبًا إلى أقرب قوى العشرة.

رتبة المقدار $\boxed{٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠}$ هي $١٠^{١١}$. قاعدة ٥ فأكثر ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

رتبة المقدار ٠,٠٠٠٨ هي $١٠^{-٣}$ قاعدة ٥ فأكثر $٠,٠٠١ = ١٠^{-٣}$

كثيرات الحدود

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أجد درجة كثيرة الحدود.
- أكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية .

كثيرة الحدود

ثنائية الحد

ثلاثية الحدود

درجة وحيدة الحد

درجة كثيرة الحدود

المعامل الرئيس

الصورة القياسية لكثيرة الحدود

كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد.

ثنائية الحد هي مجموع وحيدتي حد

ثلاثية الحدود هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل.

ملحوظات المعلم

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟	وحيدة حد / ثنائية حد / ثلاثية حدود
أ) $٤ص - ٥س ع$	نعم؛ $٤ص - ٥س ع$ هي مجموع وحيدتي حد هما: $٤ص$، $-٥س ع$.	ثنائية حد
ب) $-٥,٦$	نعم؛ $-٥,٦$ عدد حقيقي.	وحيدة حد
جـ) $٧أ^{-٣} + ٩ب$	لا؛ $٧أ^{-٣} = \frac{٧}{أ^{٣}}$، وهي ليست وحيدة حد.	—
د) $٦س^{٣} + ٤س + س + ٣$	نعم؛ $٦س^{٣} + ٤س + س + ٣ = ٦س^{٣} + ٥س + ٣$، مجموع ثلاثة حدود.	ثلاثية حدود

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنفها إلى وحيدة حدّ، أو ثنائية حد ، أو ثلاثية حدود:

١أ) $س$

١ب) $-٣ص^{٢} - ٢ص + ٤ص - ١$

١جـ) $٥ر س + ٧ ن ف ك$

١د) $١٠س^{-٤} - ٨س^{أ}$

درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

درجة كثيرة الحدود فهي أكبر درجة لأي حدٍّ من حدودها.

أوجد درجة كثيرة الحدود $٢د^{٣} - ٩جـ^{٥} د - ٧$

الخطوة ١ : أوجد درجة كل حد.

درجة الحد $٢د^{٣} = ٣$، درجة الحد $-٩جـ^{٥} د = ٥ + ١ = ٦$،

درجة الحد -٧ هي صفر.

الخطوة ٢ : درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وتساوي ٦

تمرين :

أوجد درجة كثيرة الحدود التالية :

$س^{٣} ص ع^{٥}$

$٣م ن^{٣} + ٤م^{٣} ص^{٢}$

تعريف

كثيرات الحدود بالصورة القياسية: يمكنك كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب. ولاستخدام **الصورة القياسية لكثيرة الحدود** بمتغير واحد، اكتب الحدود بترتيب تنازلي بحسب درجتها. وعندما تُكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية، فإن معامل أول حد فيها يُسمى **المعامل الرئيس** .

المعامل الرئيس   أكبر درجة

الصورة القياسية: $٤س^{٣} - ٥س^{٢} + ٢س + ٧$

مثال

اكتب كثيرة الحدود $٥ص - ٩ - ٢ص^{٤} - ٦ص^{٣}$ بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد .

الدرجة:	١	٠	٤	٣
كثيرة الحدود:	$٥ص$	$- ٩$	$- ٢ص^{٤}$	$- ٦ص^{٣}$

الخطوة ٢: اكتب الحدود بترتيب تنازلي لدرجاتها: $-٢ص^{٤} - ٦ص^{٣} + ٥ص - ٩$ فيكون المعامل الرئيس هو -٢

تمرين :

اكتب كل كثيرة حدود فيما يلي بالصورة القياسية ,وحدد المعامل الرئيس فيها .

$٤ع - ٢ع^{٢} - ٥ع^{٥}$ $٢أ + ٤أ^{٣} - ٥أ^{٢} - ١$

جمع كثيرات الحدود وطرحها

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أجمع كثيرات الحدود
- أطرح كثيرات الحدود

جمع كثيرات الحدود

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

أ) (٢س^{٢} + ٥س − ٧) + (٣ − ٤س^{٢} + ٦س)

(٢س^{٢} + ٥س − ٧) + (٣ − ٤س^{٢} + ٦س)

٢س^{٢} + ٥س − ٧

− ٤س^{٢} + ٦س + ٣

− ٢س^{٢} + ١١س − ٤

ملحوظات المعلم

في حال الجمع والطرح

اذا تشابهت الإشارات نضع اشارة العددين ونجمع

أما في حال اختلفت الإشارات نأخذ اشارة الأكبر

(بدون النظر لكونه سالب أو موجب)

ثم نطرح .

طرح كثيرات الحدود

أوجد ناتج: (٧ك + ٤ك^{٣} − ٨) − (٣ك^{٢} + ٢ − ٩ك)

غيرنا الإشارة

+ ٤ك^{٣} − ٣ك^{٢} ٧ك − ٨

+ ٩ك − ٢

نغير إشارات كثيرة الحدود الثانية

غيرنا الإشارات

= ٤ك^{٣} − ٣ك^{٢} + ١٦ك − ١٠

ملحوظات المعلم

(+) × (+) = (+)

(−) × (+) = (−)

(+) × (−) = (−)

(−) × (−) = (+)

أوجد ناتج كل مما يلي:

(٦ س^{٣} − ٤) + (−٢ س^{٣} + ٩)

(٣ ن^{٣} −٥ ن + ن^{٢}) − (−٨ ن^{٢} + ٢ ن^{٣})

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أضرب وحيدة حد في كثيرة حدود .
- أحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

أوجد ناتج: −٣س^{٢}(٧س^{٢} − س + ٤).

= −٢١س^{٤} + ٣س^{٣} − ١٢س^{٢}

×	٧س^{٢}	−س	+٤
−٣س^{٢}	−٢١س^{٤}	٣س^{٣}	−١٢س^{٢}

الناتج

جمعنا أسس المتغيرات المتشابهة

تدريب

أوجد ناتج: ٥أ^{٢}(−٤أ^{٢} + ٢أ − ٧)

تبسيط العبارات

بسّط ٢ل(−٤ل^{٢} + ٥ل) − ٥(٢ل^{٢} + ٢٠).

×	−٤ل^{٢}	+٥ل
٢ل	−٨ل^{٣}	١٠ل^{٢}

×	٢ل^{٢}	+٢٠
−٥	−١٠ل^{٢}	−١٠٠

−٨ل^{٣} + ١٠ل^{٢} − ١٠ل^{٢} − ١٠٠

= −٨ل^{٣} − ١٠٠

تدريب

بسّط ٣(٥س^{٢}+٢س − ٤) − س (٧س^{٢} + ٢س − ٣)

معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

X	د	+٣
د	$د^2$	٣د

X	د	-٤
-د	$-د^2$	+٤د

الناتج = ٧د

حل المعادلة: د(د + ٣) – د(د – ٤) = ٩د – ١٦

٧ د = ٩ د – ١٦

٧ د – ٩ د = – ١٦

–٢ د = –١٦

بالقسمة على (– ٢)

$\boxed{د = ٨}$

تمرين

حل المعادلة: ن(٢ن + ٣) + ٢٠ = ٢ن(ن – ٣)

ضرب كثيرات الحدود

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع
- اضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب

ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

(٢س + ٣) (س + ٥)

×	س	+ ٥
٢س	٢س^{٢}	١٠س
+٣	٣س	+١٥

= ٢س^{٢} + ١٣س + ١٥

٢س	٢س^{٢}	س
١٠س	١٣س	٣س
٥	١٥	٣

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(٣م + ٤)(م + ٥)

إذا كان ناتج (س − ٢) (٣س + ك) =

٣س^{٢} − ٢س −٨

فأوجد قيمة ك .

من واقع الحياة التوزيع بالترتيب

إذا كان طول طاولة الطعام ٨ م وعرضها ٦م ، فأوجد مساحة غرفة الطعام كاملة .

ملحوظات المعلم

العبارة التربيعية

هي عبارة ذات متغير واحد من الدرجة الثانية.

عدد الحدود الناتجة (قبل التبسيط) من حاصل ضرب كثيرتي الحدود

(س^{٤} + ٤ س^{٣} – ٢س^{٢} – ٦) (س^{٢} + ٢ س –٥) تساوي :

Ⓐ ٦ Ⓑ ٨ Ⓒ ٧ Ⓓ ١٢

ملحوظات المعلم

ضرب كثيرات الحدود

عند ضرب كثيرة حدود تحوي م حدًا في أخرى تحوي ن حدًا، سيكون ناتج الضرب قبل التبسيط كثيرة حدود تحوي م × ن حدًا، وفي المثال (٤أ) ناتج الضرب يحوي ٢×٣= ٦ حدود قبل التبسيط.

خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

(٦س + ٥) (٢س^{٢} – ٣س – ٥)

= ١٢س^{٣} – ٨س^{٢} – ٤٥س – ٢٥

–٥	–٣س	٢س^{٢}	
–٣٠س	–١٨س^{٢}	١٢س^{٣}	٦س
–٢٥	–١٥س	١٠س^{٢}	+٥

–٤٥س –٨س^{٢}

أوجد ناتج ضرب : (٣ س – ٥) (٢ س^{٢} + ٧ س – ٨)

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما .
- أجد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما .

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

مربع مجموع حدين

$(\text{أ} + \text{ب})^{٢}$

$(\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

$= \text{أ}^{٢} + ٢\,\text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^{٢}$

×	أ	ب
أ	$\text{أ}^{٢}$	أب
ب	أب	$\text{ب}^{٢}$

نجمع

٢أب

ملحوظات المعلم

خطأ شائع

$(\text{أ}\,\text{ب})^{٢} \neq (\text{أ} + \text{ب})^{٢}$

$(\text{أ} + \text{ب})^{٢} \neq \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$

مربع مجموع حدين = مربع الحد الأول + ٢الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني

أوجد ناتج: $(٣\text{س} + ٤\,\text{ص})^{٢}$

تحدي :

إذا كانت $(\text{س} + \text{ص})^{٢} = ٢٥$, وكانت $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٩$

فإن قيمة س ص = ؟

أ ٢٥ ب ١٦ ج ٩ د ٨

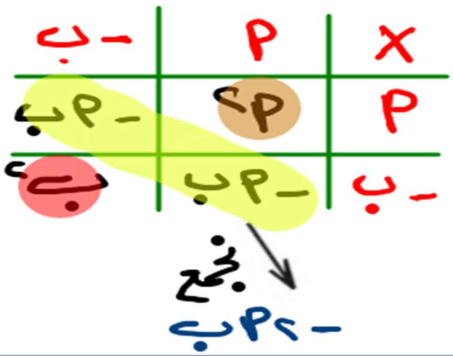
حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

مربع الفرق بين حدين

$(أ - ب)^2$

$(أ - ب)(أ - ب)$

$= أ^2 - 2أب + ب^2$



تنبيه !

مربع الفرق بين حدين

تذكّر أن ناتج $(س - ٧)^2$ لا يساوي $س^2 - ٧^2$ أو $س^2 - ٤٩$، وأن

$(س - ٧)^2 =$

$(س - ٧)(س - ٧) =$

$س^2 - ١٤س + ٤٩$

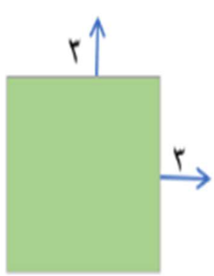
مربع الفرق بين حدين = مربع الحد الأول − ٢×الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني

أوجد ناتج:

$(٦ب - ١)^2$

$(أ - ٢ب)^2$

تمرين



حديقة: لدى عماد حديقة، طولها وعرضها ل مترًا، ويريد إضافة ٣ أمتار إلى كل من الطول والعرض.

أ) بيِّن كيف يمكن التعبير عن مساحة الحديقة الجديدة بمربع ثنائية حد.

ب) أوجد مربع ثنائية الحد السابقة.

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

(أ + ب)(أ − ب) = (أ − ب)(أ + ب)

أو

أ^{٢} − ب^{٢}

(أ + ب)(أ − ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

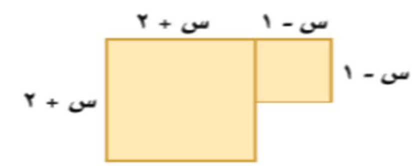
×	أ	−ب
أ	أ^{٢}	−أب
ب	أب	−ب^{٢}

الناتج = صفر

أوجد ناتج: (٣ن + ٢)(٣ن − ٢)

(٤جـ − ٧د)(٤جـ + ٧د)

هندسة: اكتب كثيرة حدود تمثّل مساحة الشكل أدناه.



حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى فيما يأتي:

(٢جـ − د)(٢جـ − د)	(٢جـ + د)(٢جـ − د)	(٢جـ + د)(٢جـ + د)	(جـ + د)(جـ + د)

التحليل والمعادلات التربيعية

تحليل وحيدات الحد

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

✅ أحلل وحيدة الحد إلى عواملها .

✅ أجد القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحد .

ملحوظات المعلم

الجمل مثل :

ما أطول , ما أكثر , ما أكبر ...

غالباً ما تدل على أن المطلوب

هو إيجاد ق. م. أ

تحليل وحيدة الحدّ

الصيغة التحليلية

تكون وحيدة الحدّ **بالصيغة التحليلية** إذا عُبّر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأُسّ ١

حلّل: $-٢٠س^{٣}ص^{٢}$ تحليلًا تامًا.

$-٢٠س^{٣}ص^{٢} = -١×٢×٢×٥×س×س×س×ص×ص$

حلّل كل وحيدة حدّ فيما يأتي تحليلًا تامًا:

أ) $٣٤س^{٤}ص^{٣}$

ب) $-٥٢أ^{٢}ب$

القاسم المشترك الأكبر (ق. م. أ)

لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملًا لكلٍّ من هذه الأعداد

مثال

أوجد (ق.م.أ) لوحيدتي الحدّ ١٢أ^{٢}ب^{٢}جـ ، ١٨أ ب^{٣}.

١٨	١٢	٢
٩	٦	٣
٣	٢	

عددان أوليان

ق.م.أ = ٢ × ٣ × أ × ب^{٢}

أخذ العناصر المشتركة بأصغر أس.

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحدّ الآتية:

٦س ص^{٣}، ١٨ص ع

١١أ^{٢}ب، ٢١أ ب^{٢}

مثال ٣ من واقع الحياة

كعك: يريد حامد وضع العدد نفسه من كل نوع من الكعك في كلّ كيس، بحيث يحتوي الكيس على أنواع الكعك جميعها. ما أكبر عدد ممكن من الأكياس يلزمه؟

٥٤	٤٠	٣٠
برقائق الشوكولاتة	بالشوفان والزبيب	بزبدة الفول السوداني

كيسان؛ بحيث يحتوي كل كيس على ١٥ بزبدة الفستق، ٢٠ بالشوفان والزبيب، ٢٧ برقائق الشوكولاتة.

٥٤	٤٠	٣٠	٢
٢٧	٢٠	١٥	

لا يوجد عدد يقبل القسمة على الأعداد الثلاثة في آن واحد.

ما أكبر قيمة يمكن أن تمثّل الطول المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتاهما ٨٤سم^{٢}، ٧٠سم^{٢}، علمًا بأن بُعديْ كل منهما عددان كليان؟

استعمال خاصية التوزيع

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- استعمل خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود .
- أحل معادلات تربيعية على الصورة : أ س^٢ + ب س = ٠

تحليل كثيرة الحدود تحليلها إلى عواملها الأوليّة.

استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل

استعمل خاصيّـة التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية: ٢٧ص^٢ + ١٨ص

أصغر أس

٢٧	١٨	٣
٩	٦	٣
٣	٢	

لا يوجد عدد يقبل القسمة على ٣، ٢ في آن واحد.

٢٧ص^٢ + ١٨ص

① ع.م.أ = ٣ × ٣ × ص
= ٩ص

② (٢٧ص^٢ + ١٨ص) ÷ ٩ص

٩ص (٣ص + ٢)

تمرين

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

١) ٢١ب – ١٥أ   ٢) ١٤جـ^٢ + ٢جـ   ٣) ١٢ل ك^٢ + ٦ل^٢ك + ٢ل^٢ك^٢

التحليل بتجميع الحدود

حلّل: ٣ن ك + ١٥ك − ٤ن − ٢٠

أخذنا (−١) عامل مشترك

٣ن ك + ١٥ك − ٤ن − ٢٠

(٣ن ك + ١٥ك) − (٤ن + ٢٠)

ع.م.أ = ٣

حدود لها عوامل مشتركة

٣ك (ن + ٥) − ٤ (ن + ٥)

(٣ك − ٤)(ن + ٥)

حلّل: ن م + ٢ن + ٨م + ١٦

خاصية الضرب الصفري

إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا، فيجب أن يكون أحدهما على الأقل صفرًا.

حل المعادلات

حلّ كلاًّ من المعادلات الآتية وتحقق من صحة الحل:

٣ن(ن + ٢) = ٠

إما ٣ ن = ٠

∴ ن = ٠

أو ن + ٢ = ٠

∴ ن = −٢

التحقق :

٣ × ٠ (٠ + ٢) | ٣ × −٢ (−٢ + ٢)

٠ × ٢ = ٠ | −٦ × ٠ = ٠

٨ب^{٢} − ٤٠ب = ٠

نحلل ثنائية الحد

٢	٨	٤٠
٢	٤	٢٠
٢	٢	١٠
	١	٥

٨ ب (ب − ٥) = ٠

إما ٨ ب = ٠

∴ ب = ٠

أو ب − ٥ = ٠

∴ ب = ٥

تمرين

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

٣ك(ك + ١٠) = ٠

(٤م + ٢)(٣م − ٩) = ٠

المعادلات التربيعية : س^{٢} + ب س + جـ = ٠

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أحلل ثلاثية الحدود على الصورة س^{٢} + ب س + جـ = ٠
- أحل معادلات على الصورة : س^{٢} + ب س + جـ = ٠

خطوات طريقة تحليل ثلاثية الحدود عندما يكون معامل س^{٢} يساوي ١

١- ننظر إلى إشارة الحد الثالث
- \+ إشارة الحد الأوسط هي إشارة القوسين
- − إشارة القوسين مختلفة

٢- نوجد عددين حاصل مجموعهما **الحد الأوسط** وحاصل ضربهما **الحد الثالث** .

٣- إذا كانت إشارة الحد الثالث
- \+ نضع كل عدد من العددين بأي قوس
- − نضع العدد الأكبر منهما مع القوس الذي فيه إشارة المنتصف

ملاحظة : في حالة اذا كانت اشارة الحد الثالث سالبة نستطيع التفكير بإيجاد عددين الفرق بينهما الحد الأوسط دون النظر لإشارته .

حلل كثيرات الحدود التالية :		
س^{٢} + ١١ س + ٢٤ (٣ ، ٨) (س + ٣) (س + ٨) إشارة الحد الثالث موجبة	س^{٢} − ٢٢ س + ٢١ (٢١ ، ١) (س − ١) (س − ٢١) إشارة الحد الثالث موجبة	ص^{٢} − ٢ ص − ٢٤ (٦ ، ٤) (ص − ٦) (ص + ٤) العدد الأكبر يأخذ إشارة الحد الأوسط

حل المعادلات التربيعية بالتحليل نساويها بالصفر أولاً . ثم نحلل حدودها .		
س^{٢} + ١١ س + ٢٤ = ٠ (س + ٣) (س + ٨) = ٠ إما (س + ٣) = ٠ س = −٣ أو (س + ٨) = ٠ س = −٨	س^{٢} − ٢٢ س = ٢١ س^{٢} −٢٢ س −٢١ = ٠ (س −١)(س − ٢١) = ٠ إما س −١ =٠ س = ١ أو (س − ٢١) = ٠ س = ٢١	ص^{٢} = − ٢ ص + ٢٤ ص^{٢} + ٢ص −٢٤ =٠ (ص −٦)(ص + ٤) = ٠ إما (ص −٦) = ٠ ص = ٦ أو (ص + ٤) = ٠ ص = −٤

تمرين

إطار صورة: اشترت لطيفة إطارًا لصورة، إلا أن الصورة كانت أكبر من الإطار، لذا فإنها بحاجة إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه، على أن تصبح مساحتها نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بُعدا الصورة الأصلية ١٢، ١٦ سم. فما بُعدا الصورة المصغَّرة؟

مساحة المستطيل = الطول × العرض
نفرض أن مقدار التصغير = س

(١٦ − س) (١٢ − س) = $\frac{١}{٢}$ (١٦ × ١٢)   نفك الأقواس

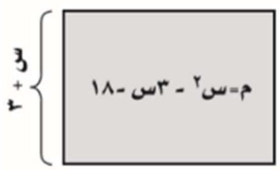
١٩٢ − ٢٨س + س^{٢} = ٩٦   نساوي المعادلة بالصفر ونحلل ثلاثية الحدود

س^{٢} − ٢٨ س + ٩٦ = ٠   (س − ٤) (س − ٢٤) = ٠

إما (س −٤) = ٠ ∴ س = ٤ أو (س − ٢٤) = ٠ ∴ س = ٢٤ (مستبعد)

طول الصورة الجديدة = ١٦ − ٤ = ١٢ سم ,عرض الصورة الجديدة = ١٢ −٤ =٨سم

هندسة: ما العبارة التي تمثّل طول المستطيل في الشكل المجاور؟



أ) س + ٥   جـ) س − ٦

ب) س + ٦   د) س − ٥

الفكرة :

نحلل المساحة الى حاصل ضرب عاملين هما الطول والعرض

في السؤال العرض معطى فيصبح العامل الآخر هو الطول

س^{٢} − ٣ س − ١٨ = (س −٦) (س + ٣)

إذن العبارة التي تمثل الطول هي : س − ٦

اختيار من متعدد: إذا كانت مساحة المستطيل أدناه تساوي ٣س^{٢} + ٦س − ١٢ وحدةً مربعةً، فكم وحدةً عرضه؟

أ) وحدتان   جـ) ٤ وحداتٍ

ب) ٣ وحداتٍ   د) ٦ وحدات

المعادلات التربيعية : أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أحلل ثلاثية الحدود على الصورة : أس^{٢} + بس + جـ = ٠
- أحل معادلات على الصورة : أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

حلل كل ثلاثية حد فيما يأتي :

ⓐ ٧ س^{٢} + ٢٩ س + ٤

١- ننظر هل معامل س^{٢} قاسم مشترك أكبر للعبارة .
٢- نوجد حاصل ضرب ٧ × ٤
٣- في حالة أنه لا يوجد قاسم مشترك لحدود العبارة جميعاً نقسم على معامل س^{٢} .
٤- لا نقسم على الحد الأوسط .
٥- نحلل العبارة على أساس أن أ = ١
٦- بعد التحليل نقسم على العددين اللذين حاصل ضربهما ٢٨
٧- نعيد كتابة العوامل بالشكل الجديد .

١١

عددين حاصل ضربهما ٢٨ ومجموعهما ٢٩

٢٩   ١ ، ٢٨

٧س^{٢} + ٢٩س + ٤

نقسم على معامل س^{٢} للحد الأول فقط

س^{٢} + ٢٩ س + ٤

نحلل (س + ٢٨)(س + ١)

نقسم على معامل س^{٢}

(س + $\frac{٢٨}{٧}$)(س + $\frac{١}{٧}$)

لا يقبل

(س + ٤)(٧س + ١)

/ /

ب $٣ س^{٢} - ١٧ س + ٢٠$

بعض كثيرات الحدود لا يمكن تحليلها باستعمال الأعداد الصحيحة .

فنسميها كثيرة **حدود أولية** .

مثال : $٤ س^{٢} - ٣ س + ٥$

ملحوظات المعلم

المعادلات التربيعية : الفرق بين مربعين

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أحلل ثنائية حد على صورة الفرق بين مربعين
- أحل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين

تذكّر :

(أ + ب) (أ − ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

الآن سنتعرّف على عكس العملية وهذا ما يسمى تحليل الثانية الفرق بين مربعين

أ^{٢} − ب^{٢} = (أ + ب) (أ − ب)

يكون المثال تحليله مباشراً :

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي :

٨١ − ص^{٢} = (٩ − ص) (٩ + ص)

٦٤ جـ^{٢} − هـ^{٢} =

يكون المثال تحليله أكثر من خطوة :

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي :

٣ س^{٢} − ٢٧ = ٣ (س^{٢} − ٩) = ٣ (س + ٣) (س − ٣)

−٤ ص^{٣} + ٩ ص =

٥ س^{٢} − ٤٥ س =

المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أحلل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل
- أحل معادلات تتضمن مربع كامل

تذكير: (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}

هل العبارة س^{٢} + ٨س + ١٦ تمثّل مربعاً كاملاً ؟

جذرها   جذرها

س   ٢×س×٤   ٤

∴ العبارة تمثّل مربعاً كاملاً ويمكن كتابتها كالتالي:

(س + ٤)^{٢}

مثال:

أكمل العبارة س^{٢} − ١٠س لتصبح مربعاً كاملاً .

الحل: نضيف حداً ثالثاً يساوي مربع نصف معامل س

فتصبح العبارة كالتالي : س^{٢} − ١٠س + (٥)^{٢}

= س^{٢} − ١٠س + ٢٥ ونستطيع كتابتها أيضاً كالتالي:

(س − ٥)^{٢}

تدريب : أكمل العبارات التالية لتصبح مربعاً كاملاً :

س^{٢} − ٢س س^{٢} − ٢س + (−١)^{٢} نصف معامل س تربيع س^{٢} − ٢س + ١	س^{٢} + ١٠س
س^{٢} + ٧س	س^{٢} − $\frac{٣}{٥}$ س (−$\frac{٣}{٥}$) × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{-٣}{١٠}$ س^{٢} − $\frac{٣}{٥}$ س + (−$\frac{٣}{١٠}$)^{٢} س^{٢} − $\frac{٣}{٥}$ س + $\frac{٩}{١٠٠}$

خطوات حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع :

١ – نجعل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد على الصورة : أس^{٢} + ب س = ج

٢ – نضيف مربع نصف معامل س للطرفين.

٣ – نحلل الطرف الأيمن (مربع كامل) , ونبسّط الطرف الأيسر.

٤ – نوجد الجذر التربيعي للطرفين ثم نوجد قيمة س .

ملاحظة

إذا كان معامل س^{٢} ≠ ١ فنقسم على معامل س^{٢} حتى تصبح المعادلة على الصورة أس^{٢} + ب س = ج حيث : أ = ١

تمرين : حل معادلات الدرجة الثانية التالية بطريقة إكمال المربع :

س^{٢} + ٤س = ٥ س^{٢} + ٤س + (٢)^{٢} = ٥ + (٢)^{٢} مربع كامل (س + ٢)^{٢} = ٩ بأخذ الجذر التربيعي س + ٢ = ± ٣ إما س + ٢ = ٣ ∴ س = ٣ −٢ = ١ أو س + ٢ = −٣ ∴ س = −٣ −٢ = −٥	٢س^{٢} + ١٦س + ١٤ = ٠ ....
(س − ١)^{٢} = ٤٩	(س + ٥)^{٢} = −٩ ....

الدوال التربيعية

تمثيل الدوال التربيعية
وحلها بيانياً
ص ٣٧

حل المعادلات التربيعية
باستعمال القانون العام
ص ٤٠

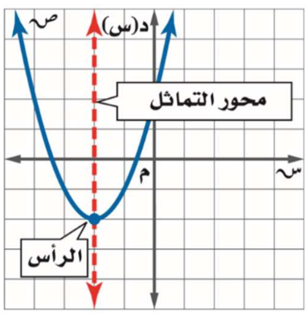
تمثيل الدوال التربيعية وحلّها بيانيًا

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أمثّل الدوال التربيعية بيانيًا
- أحل المعادلات التربيعية بيانيًا وجبريًا .

الدالة التربيعية :

هي دالة غير خطية من الدرجة الثانية وتمثّل بيانيا على شكل قطع مكافئ



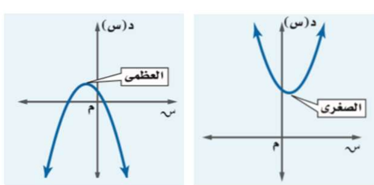
الدالة المولدة : د(س) = س^{٢}

الصورة القياسية : د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

محور التماثل : س = $-\frac{\text{ب}}{\text{٢ أ}}$

حيث جـ المقطع الصادي

د(س) = **أ** س^{٢} + ب س + جـ



أ : هو من يحدد اتجاه فتحة القطع المكافئ

أ : موجب فتحة القطع المكافئ للأعلى وله قيمة صغرى

أ : سالب فتحة القطع المكافئ للأسفل وله قيمة عظمى

س هو الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ

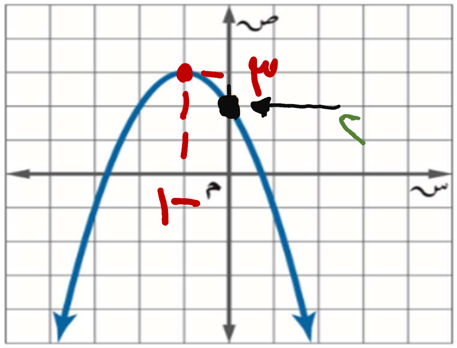
س هو محور التماثل للقطع المكافئ

ص هو الإحداثي الصادي لرأس القطع

ص هو القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

ص من خلاله يمكن معرفة مدى الدالة

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للتمثيل البياني الآتي:



الرأس (-١ , ٣)

معادلة التماثل = الإحداثي السيني س = -١

المقطع الصادي ٢

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدالة: ص = س^{٢} + ٢س + ٢

① نوجد معادلة محور التماثل : س = $-\frac{ب}{٢ أ} = -\frac{٢}{٢\times١} = -\frac{٢}{٢} = -١$

② نوجد الإحداثي الصادي بالتعويض عن قيمة س في الدالة .

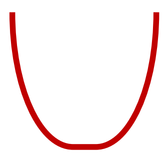
ص = (-١)^{٢} + ٢ (-١) + ٢

= ١ - ٢ + ٢ = ١

الرأس (-١ , ١) , المقطع الصادي ٢

ليكن د(س) = ٢ س^{٢} - ٤ س - ١

أ) حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى .



أ = ٢ موجب ∴ قيمة صغرى

ب) أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة .

① نوجد س س = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢\times٢} = \frac{٤}{٤} = \boxed{١}$

② نوجد ص ص = ٢ (١) - ٤ (١) - ١ = ٢ - ٥

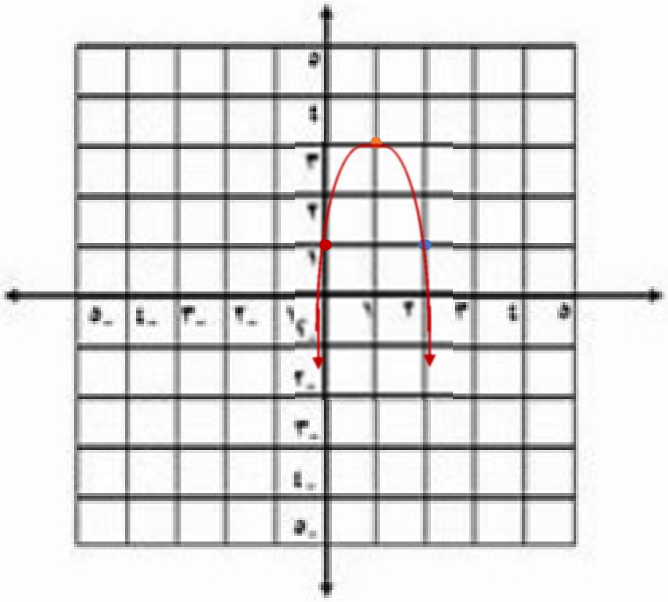
= $\boxed{-٣}$

قيمة صغرى

ج) حدد مجال الدالة ومداها .

المجال ح المدى = { ص | ص ≥ -٣ }

مثّل الدالة : د (س) = −٢ س^{٢} + ٤ س + ١ بيانياً



١-نوجد إحداثيي الرأس .

$\text{س} = -\frac{\text{ب}}{٢\,\text{أ}} = \frac{-٤}{-٢ \times ٢} = ١$

٢-نعوض عن قيمة س في الدالة

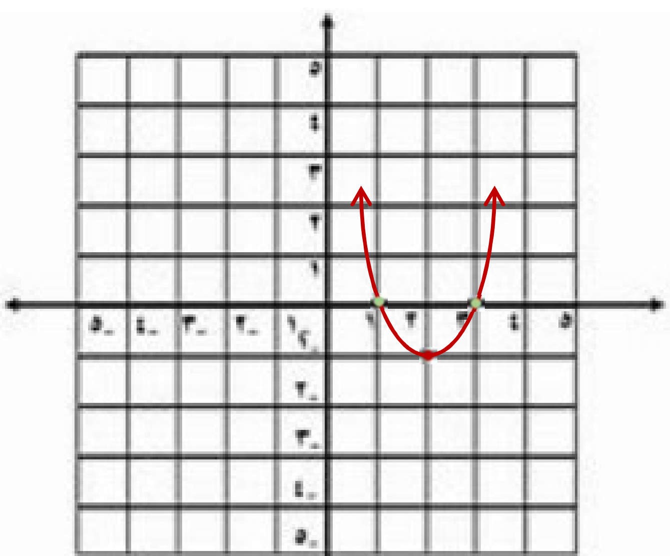
لإيجاد الإحداثي الصادي .

ص = −٢ (١)^{٢} + ٤ (١) +١

ص = −٢ + ٤ + ١ = ٣

الرأس (١ , ٣) والمقطع الصادي ١

حل المعادلة : س^{٢} − ٤ س + ٣ = ٠ بيانياً



١- نوجد إحداثيي الرأس .

$\text{س} = -\frac{\text{ب}}{٢\,\text{أ}} = \frac{-(-٤)}{٢ \times ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$

٢- نعوض عن قيمة س في الدالة

لإيجاد الإحداثي الصادي .

ص = (٢)^{٢} − ٤ (٢) + ٣

ص = ٤ − ٨ + ٣ = −١

الرأس (٢ , −١) والمقطع الصادي ٣

نقاط تقاطع القطع المكافئ مع محور السينات هي حلول المعادلة.

الحل ١ , ٣

حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

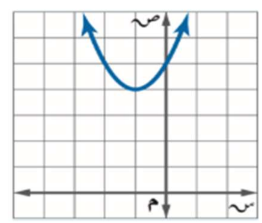
- استعمل المميز لتحديد عدد الحلول .
- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام .

القانون العام.

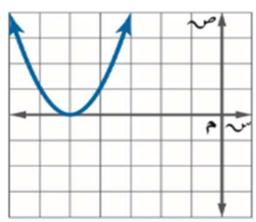
$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

المميز

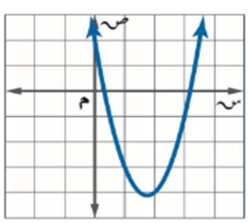
في القانون العام، تُسمى العبارة التي تحت الجذر (ب^{٢} – ٤أجـ) **المميز** ويمكنك استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.



المميز سالب
عدد الحلول : ٠



المميز صفر
عدد الحلول : ١



المميز موجب
عدد الحلول : ٢

أوجد قيمة المميز للمعادلة : ٢ س^{٢} + ١١ س + ١٥ = ٠

الحل :

المميز = ب^{٢} – ٤أجـ = (١١)^{٢} – ٤ × (٢) × (١٥) = ١٢١ – ١٢٠ = ١ عدد موجب

للمعادلة حلين حقيقيين .

حل المعادلة : $س^2 - ٤س = ١٢$ بطرق مختلفة

طريقة ١ : إكمال المربع

المعادلة مكتوبة بالصورة المناسبة لإكمال المربع؛ لأن المعامل الرئيس يساوي ١، والحدين اللذين يحتويان $س^2$، س تم فصلهما.

$س^2 - ٤س = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س^2 - ٤س + ٤ = ١٢ + ٤$	بما أن $\left(\frac{-٤}{٢}\right)^2 = ٤$، لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين
$(س - ٢)^2 = ١٦$	حلّل $س^2 - ٤س + ٤$.
$س - ٢ = \pm ٤$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$س = ٢ \pm ٤$	أضف ٢ لكلا الطرفين
$س = ٢ + ٤$ أو $س = ٢ - ٤$	افصل الحلين
$= ٦$ $\quad$ $= -٢$	بسّط

طريقة ٢ : التحليل إلى عوامل

$س^2 - ٤س = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س^2 - ٤س - ١٢ = ٠$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين
$(س - ٦)(س + ٢) = ٠$	حلّل
$س - ٦ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$س = ٦$ $\quad$ $س = -٢$	إيجاد قيم س

طريقة ٣ : القانون العام

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$	القانون العام
$= \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^2 - ٤(١)(-١٢)}}{٢(١)}$	أ = ١، ب = -٤، جـ = -١٢
$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ + ٤٨}}{٢}$	اضرب
$= \frac{٤ \pm \sqrt{٦٤}}{٢} = \frac{٤ \pm ٨}{٢}$	اجمع وبسّط
$س = \frac{٤ - ٨}{٢}$ أو $س = \frac{٤ + ٨}{٢}$	افصل الحلين
$= -٢$ $\quad$ $= ٦$	بسّط

أوجد حل المعادلة التالية باستخدام القانون العام

$$٣ س^{٢} \ ٩ س - ١٨ = ٠$$

ملحوظات المعلم

المعادلات الجذرية والمثلثات

العمليات على العبارات الجذرية

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أجري العمليات الحسابية على العبارات الجذرية .
- أحل معادلات تتضمن الجذور .

بسّط ما يلي :

$٣\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢} = (٣ - ٥ + ٤)\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

$١٥\sqrt{٣} - ١٤\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٥} - ١١\sqrt{٣} =$

$(١٥ - ١١)\sqrt{٣} + (-١٤ + ٦)\sqrt{٥} = ٤\sqrt{٣} - ٨\sqrt{٥}$

بسّط ما يلي :

$٤\sqrt{٥٤} + ٢\sqrt{٢٤} =$

٩×٦ ٤×٦

جذر   جذر

٣ ٢

$(٣ \times ٤)\sqrt{٦} + (٢ \times ٢)\sqrt{٦} = ١٦\sqrt{٦}$

ضرب العبارات الجذرية

$٢\sqrt{٦} \times ٧\sqrt{٣} = (٢ \times ٧)(\sqrt{٦} \times \sqrt{٣}) = ١٤\sqrt{١٨} = ١٤\sqrt{\underset{\downarrow\, ٣}{٩} \times ٢} = ٣ \times ١٤\sqrt{٢} = ٤٢\sqrt{٢}$

$٣\sqrt{٢}\,(٤\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٢}) =$

$(٨\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٦})(٦\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٣}) =$

عند تبسيط العبارات الجذرية، إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغير ذا أس زوجي، وناتج تبسيطه ذا أس فردي، يجب استعمال القيمة المطلقة والأمثلة التالية توضح ذلك.

$\sqrt{س^{٢}} = |س|$ $\sqrt{س^{٣}} = |س|\sqrt{س}$ $\sqrt{س^{٤}} = س^{٢}$ $\sqrt{س^{٦}} = |س^{٣}|$

تبسيط الجذور التربيعية للمتغيرات :

بسّط العبارة:

$\sqrt{٣٢ ر^{٢} ك^{٤} ت^{٥}}$ $\sqrt{٥٦ س ص^{١٠} ك^{٥}}$

العبارة الجذرية

خاصية ضرب الجذور التربيعية: تتضمن **العبارة الجذرية** جذرًا، كالجذر التربيعي مثلاً، وتكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط التالية في العبارة التي تحت الجذر:

- لا يكون أيٌّ من عوامله مربعًا كاملاً عدا ١ .
- لا يتضمن كسورًا.
- لا يظهر أي جذر في مقام الكسر.

إنطاق المقام

يمكنك استعمال خصائص الجذر التربيعي **لإنطاق المقام** وكتابته على صورة عدد نسبي إذا كان جذرًا، وهذا يتضمن ضرب كل من البسط والمقام في عامل يؤدي إلى حذف الجذر من المقام.

المرافق

كلٌّ من ثنائيتي الحد أ$\sqrt{ب}$ + جـ$\sqrt{د}$ ، أ$\sqrt{ب}$ − جـ$\sqrt{د}$ تُسمى **مرافقة** للأخرى

بسّط العبارة :

$$\frac{١٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\cancel{١٢}\sqrt{٣}}{\cancel{٣}} = ٤\sqrt{٣}$$

$$\frac{\sqrt{٦ص}}{\sqrt{١٢}}$$

المقدار المرافق للعبارة : ٢$\sqrt{٣}$ − ٥ هو ٢$\sqrt{٣}$ + ٥

المقدار المرافق للعبارة : ٣ − $\sqrt{٢}$ هو ....

الهدف من ضرب المقام بالمقدار المرافق للعبارة حتى نستطيع استخدام قاعدة ضرب حدين مجموع حدين بالفرق بينهما .

بسّط العبارة : $\frac{٣}{٢ + \sqrt{٢}} \times \frac{٢ - \sqrt{٢}}{٢ - \sqrt{٢}}$

$$= \frac{٣(٢ - \sqrt{٢})}{(٢ - \sqrt{٢})(٢ + \sqrt{٢})} = \frac{٦ - ٣\sqrt{٢}}{٤ - ٢} = \frac{٦ - ٣\sqrt{٢}}{٢}$$

بسّط العبارة : $\frac{٧}{٣ - \sqrt{٧}}$

المعادلات الجذرية

حل المعادلة : $\sqrt{ج - ٣} - ٢ = ٤$

أضف (+ ٢) للطرفين

$\sqrt{ج - ٣} = ٦$

نربع الطرفين , نبسّط

$(\sqrt{ج - ٣})^{٢} = ٣٦$

$ج - ٣ = ٣٦$

$ج = ٣٩$

حل المعادلة : $٤ + \sqrt{هـ + ١} = ١٤$

حلول دخيلة : ينتج عن تربيع طرفي المعادلة أحيانًا حلّ لا يحقق المعادلة الأصلية. وهذه الحلول تُسمى **حلولًا دخيلة**؛ لذا عليك التحقق من الحلول كلها في المعادلة الأصلية.

حل المعادلة : $\sqrt{ك + ٥} = ك + ٣$

١- نربع الطرفين :

$ك + ٥ = (ك + ٣)^{٢}$

$ك + ٥ = ك^{٢} + ٦ك + ٩$

٢- نرتب المعادلة ونساويها بالصفر

$ك^{٢} + ٥ك + ٤ = ٠$

٣- نحلل الطرف الأيمن

$(ك + ٤)(ك + ١) = ٠$

إما $(ك + ٤) = ٠$ $\therefore$ $ك = -٤$

أو $(ك + ١) = ٠$ $\therefore$ $ك = -١$

نتحقق :

بالتعويض بـ -٤ في المعادلة لا يحقق المعادلة فيكون حل دخيل .

بالتعويض بـ -١ في المعادلة يحقق المعادلة فيكون -١ هو حل المعادلة .

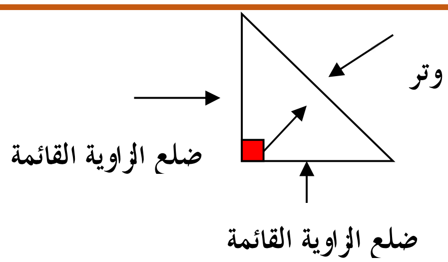
حل المعادلة : $س - ٣ = \sqrt{س - ١}$

نظرية فيثاغورس

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أحل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس .
- أحدد إذا كان المثلث المعطى قائم الزاوية أم لا .

أطول ضلع في المثلّث القائم الزاوية يُسمى (الوتر) وهو الضلع المقابل للزاوية القائمة.



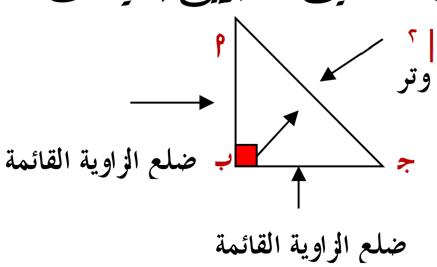
نظرية فيثاغورس :

في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طول الضلعين الآخرين , أي أن :

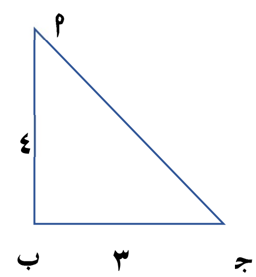
$|الوتر|^{٢} = |ضلع\ الزاوية\ القائمة\ الأول|^{٢} + |ضلع\ الزاوية\ القائمة\ الآخر|^{٢}$

أي أن : $|أ\ جـ|^{٢} = |أ\ ب|^{٢} + |ب\ جـ|^{٢}$

$|أي\ ضلع|^{٢} = |الوتر|^{٢} - |الضلع\ الآخر|^{٢}$



أوجد أطوال الأضلاع المطلوبة :

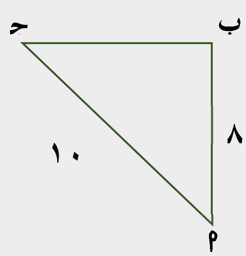


$|أ\ جـ|^{٢}$

$= (٣)^{٢} + (٤)^{٢}$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥$

$|أ\ جـ| = \sqrt{٢٥} = ٥$

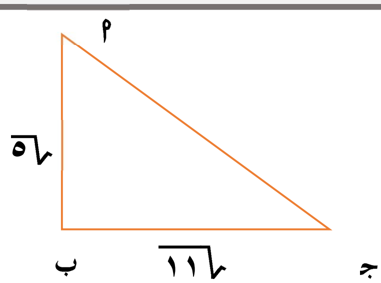


$|ب\ جـ|^{٢}$

$= (١٠)^{٢} - (٨)^{٢}$

$= ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦$

$|ب\ جـ| = \sqrt{٣٦} = ٦$



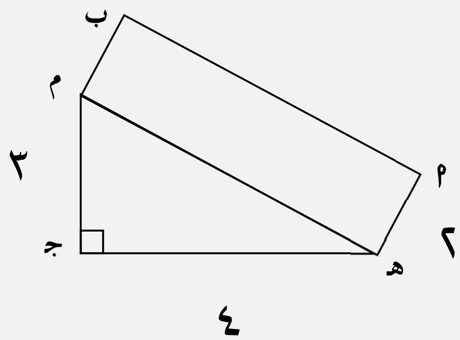
$|أ\ جـ|^{٢}$

$= (\sqrt{١١})^{٢} + (\sqrt{٥})^{٢}$

$= ١١ + ٥ = ١٦$

$|أ\ جـ| = \sqrt{١٦} = ٤$

احسب مساحة المستطيل ٢ ب م هـ .



الوتر في المثلث م جـ هـ = الطول في المستطيل أ ب م هـ

نوجد الوتر باستخدام نظرية فيثاغورس :

| م هـ |٢ = | م جـ |٢ + | هـ م |٢

| م هـ |٢ = ٩ + ١٦ = ٢٥ ∴ | م هـ | = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

مساحة المستطيل ٢ ب م هـ = الطول × العرض

= ٥ × ٢ = ١٠

إبحار: يكون شراع الزورق النهري على صورة مثلثٍ قائم الزاوية كما في الشكل المجاور، أوجد ارتفاع هذا الشراع.

(ارتفاع الشراع)٢ = (٩)٢ − (٤)٢

= ٨١ − ٣٦

= ٤٥

ارتفاع الشراع = $\sqrt{٤٥}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ م

عكس نظرية فيثاغورس

إذا كان مربع طول ضلع في مثلث يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم الزاوية.

س / كيف نعرف أن المثلث قائم الزاوية أم لا؟

ج / نقوم بالخطوات التالية:

١- نربع أطوال أضلاع المثلث

٢- نجمع أصغر ناتجين.

٣- إذا تساوى مع مربع الضلع الثالث فإن المثلث قائم الزاوية.

هل الأطوال التالية تمثّل أطوال مثلث قائم الزاوية ؟

٣ سم , ٤ سم , ٥ سم

(٣)٢ = ٩

(٤)٢ = ١٦

(٥)٢ = ٢٥

٩ + ١٦ = ٢٥ ∴ المثلث قائم الزاوية .

أثبت أن أطوال المثلث التالية تمثّل مثلثاً غير قائم الزاوية .

١٢ سم , ٩ سم , ٦ سم

$(١٢)^٢ = ١٤٤$

$(٩)^٢ = ٨١$ $\qquad ٨١ + ٣٦ = ١١٧$

$(٦)^٢ = ٣٦$ $\qquad ١١٧ \neq ١٤٤$ غير قائم

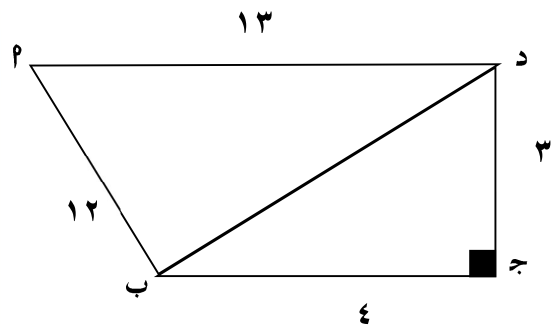
هل الأطوال التالية تمثّل أطوال مثلث قائم الزاوية ؟

$\sqrt{٢}$ سم , ١ سم , $\sqrt{٣}$ سم

تمرين :

من الشكل الذي أمامك :

أثبت أن : $\hat{أ ب د} = ٩٠°$



الفكرة :

باستخدام نظرية فيثاغورس نوجد طول د ب

ثم نستخدم عكس النظرية للمثلث أ ب د لنتأكد بأنه قائم الزاوية في ب أم لا .

$|د ب|^٢ = (٣)^٢ + (٤)^٢$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥$

$\therefore |د ب| = \sqrt{٢٥} = ٥$

عكس النظرية :

$(٥)^٢ = ٢٥$

$(١٢)^٢ = ١٤٤$

$(١٣)^٢ = ١٦٩$

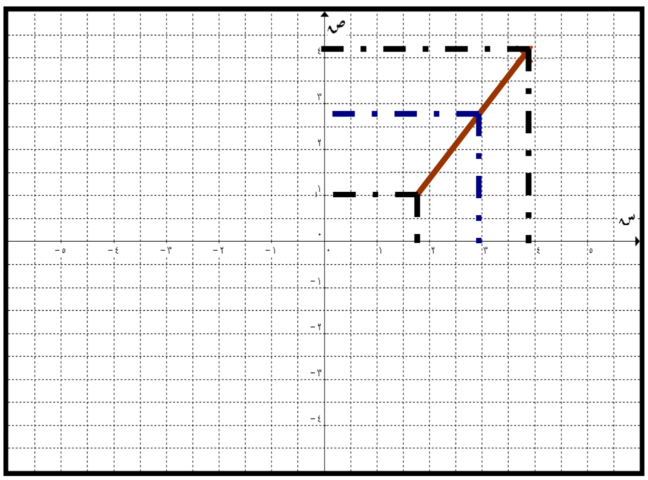
$٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$

$\therefore$ الزاوية ب قائمة .

المسافة بين نقطتين

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي .
- أجد نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى الإحداثي .



إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة طرفاها النقطتان

(س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) :

$$= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \;,\; \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} \;,\; \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

في المستوى ح × ح ، إذا كانت :

أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) فإن : $|\text{أ ب}| = \sqrt{(\text{س}_1 - \text{س}_2)^2 + (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)^2}$

طول قطعة مستقيمة (المسافة بين نقطتين) $|\text{أ ب}| = \sqrt{(\text{س}_1 - \text{س}_2)^2 + (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)^2}$

مثال

إذا كانت ج (−٢ ، ٧) ، د (١ ، ٣) فاحسب | ج د | .

$|\text{ج د}| = \sqrt{(−٢−١)^2 + (٧ − ٣)^2}$

$= \sqrt{(−٣)^2 + (٤)^2}$

$= \sqrt{٩ + ١٦}$

$= \sqrt{٢٥}$ ∴ | ج د | = ٥

تمرين

إذا كانت ٢ (٤ , –١٠) , ب (٤ , –٦) فاحسب |٢ ب| .

الحل = ٤

مثال

إذا كانت ٢ (٣ , ٢) , ب (٧ , ٦) فأوجد إحداثي منتصف القطعة [٢ ب].

$$\text{احداثي منتصف القطعة} = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} , \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

مجموع السينات = ٣ + ٧ = ١٠

المنتصف = ١٠ ÷ ٢ = ٥

مجموع الصادات = (٢) + (٦) = ٨

المنتصف = (٨) ÷ ٢ = ٤

احداثي منتصف القطعة (٥ ، ٤)

تمرين

إذا كانت ٢ (–٤ , ٢) , ب(٦ , –٨) فأوجد إحداثي منتصف القطعة [٢ ب].

الحل (١ ، –٣)

المثلثات المتشابهة

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أحدد ما إذا كان مثلثان متشابهان أم لا .
- أجد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين .

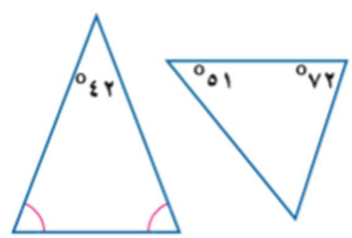
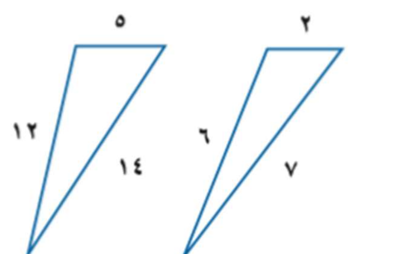
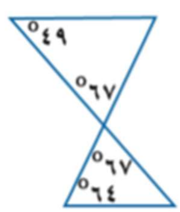
تعريف

المثلثات المتشابهة : تسمى المثلثات التي لها الشكل نفسه **المثلثات المتشابهة**، إلا أنه ليس من الضروري أن تكون لها أطوال الأضلاع نفسها. والرمز ~ يُستعمل ليشير إلى مثلثين متشابهين.

إذا تشابه مثلثان، فإن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

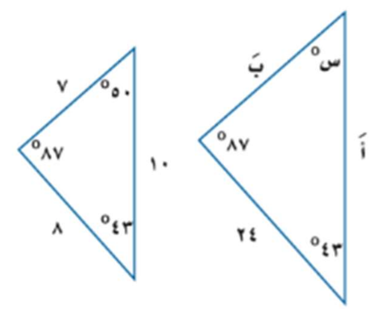
تحديد المثلثين المتشابهين

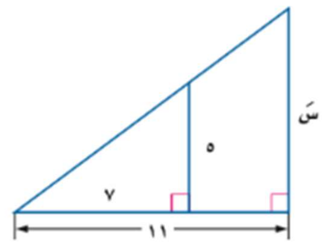
حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

		
المثلث الأيمن : ١٨٠ − (٧٢ + ٥١) = ٥٧° المثلث الأيسر : ١٨٠ − ٤٢ = ١٣٨° ١٣٨ ÷ ٢ = ٦٩° الزوايا المتناظرة غير متساوية المثلثان غير متشابهان .	نوجد نسبة التشابه بين الأضلاع المتناظرة $\frac{١٢}{٦}$ = ٢ $\frac{١٤}{٧}$ = ٢ $\frac{٥}{٢}$ = ٢,٥ الأضلاع غير متناسبة المثلثان غير متشابهان	نوجد الزوايا المجهولة . ١٨٠ − (٦٧ + ٤٩) = ٦٤° ١٨٠ − (٦٧ + ٦٤) = ٤٩° ٦٧° متقابلة بالرأس ٤٩° = ٤٩° بالتبادل ٦٤° = ٦٤° بالتبادل المثلثان متشابهان لتساوي الزوايا المتناظرة .

إيجاد قياس العناصر المجهولة

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:





$$\frac{٧}{١١} = \frac{٥}{س}$$

س = (١١ × ٥) ÷ ٧

$$س = \frac{٥٥}{٧}$$

المثلثات المتداخلة

في المثلثين المتداخلين يمكنك رسم كل منهما على حدة، مع التأكد من كون العناصر المتناظرة في الموقع نفسه، وضع إشارات لتوضيح الزوايا والأضلاع المتناظرة.

القياسات الغير مباشرة

إذا كان طول أحمد ١,٨ م وطول ظله ١,٢ ، إذا وقف بجوار مئذنة طول ظلها ٦ م فاحسب طول ارتفاع المئذنة .

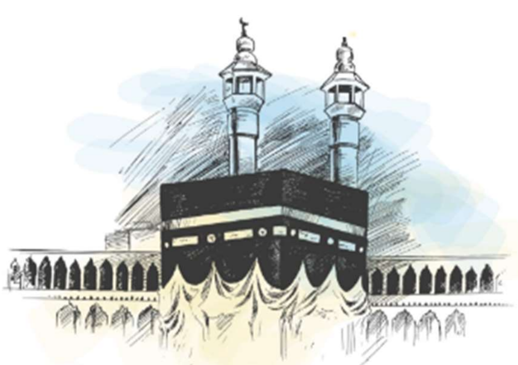
طول ارتفاع المئذنة = (١,٨ × ٦) ÷ ١,٢ = ٩ م

خطّط معلم التاريخ لعمل نموذج للكعبة المشرفة على مقياس رسم ٥ سم: ٠,٦م.
فإذا كان الارتفاع الفعلي للكعبة المشرفة ١٤م، فكم سيكون ارتفاع النموذج؟

ارتفاع النموذج = (٥ × ١٤) ÷ ٠,٦

= ٧٠ ÷ ٠,٦

ارتفاع النموذج = ١١٦,٦٧ تقريباً



النسب المثلثية

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

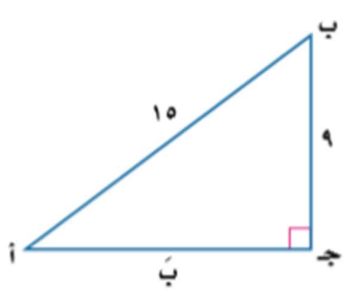
- أجد النسب المثلثية للزوايا .
- استعمل حساب المثلثات لحل المثلثات .

حساب المثلثات هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه .

النسبة المثلثية هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم

التعبير اللفظي	الرموز	النموذج
جيب الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$	جا أ = $\frac{\text{أَ}}{\text{جَ}}$	
جيب تمام الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$	جتا أ = $\frac{\text{بَ}}{\text{جَ}}$	
ظل الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}$	ظا أ = $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ}}$	

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب.



الخطوة الأولى :

نوجد طول الضلع المجهول ب استخدام نظرية فيثاغورس .

$(١٥)^{٢} - (٩)^{٢} = ٢٢٥ - ٨١ = ١٤٤$

طول الضلع أ جـ = $\sqrt{١٤٤} = ١٢$

الخطوة الثانية :

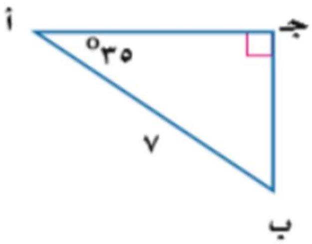
نوجد قيم النسب المثلثية . جا ب = $\frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

حل المثلث هو إيجاد القياسات المجهولة لأضلاع المثلث وزواياه .

النسب المثلثية الغير عكسية
تستخدم لإيجاد طول الأضلاع

النسب المثلثية العكسية
تستخدم لإيجاد قياس الزوايا

حُلّ المثلث القائم الزاوية مقرِّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.



نوجد قياس الزاوية ب :

١٨٠ – (٣٥ + ٩٠) = ١٨٠ – ١٢٥ = ٥٥°

نوجد طول الضلع أ جـ :

الضلع أ جـ هو الضلع المقابل للزاوية ب ومن البيانات على الرسم قياس الضلع أ ب = ٧ وهو الوتر ، لذلك نستخدم النسبة المثلثية (جا ب) لأنها تشمل المقابل والوتر .

جا ٥٥° = المقابل ÷ الوتر ، جا ٥٥° = أ جـ ÷ ٧ ∴ أ جـ = جا ٥٥° × ٧ = ٠,٨٢ × ٧ = ٥,٧

نوجد طول الضلع جـ ب :

الضلع جـ ب هو الضلع المقابل للزاوية أ ومن البيانات على الرسم قياس الضلع أ ب = ٧ وهو الوتر ، لذلك نستخدم النسبة المثلثية (جا أ) لأنها تشمل المقابل والوتر .

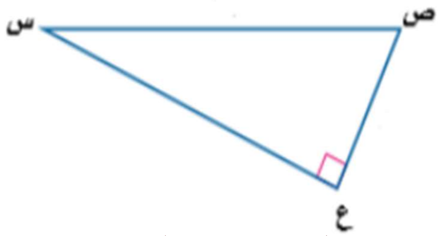
جا ٣٥° = المقابل ÷ الوتر ، جا ٣٥° = أ جـ ÷ ٧ ∴ أ جـ = جا ٣٥° × ٧ = ٠,٧٥ × ٧ = ٤,٠٢

جتا ص = $\frac{٨}{١٩}$ تعريف جيب التمام

استعمل الحاسبة البيانية ودالة جتا$^{-١}$ [$\cos^{-1}$] لإيجاد قياس الزاوية.

اضغط على المفاتيح: trig COS 8 ÷ 19) enter 65.098937 لذا فإن ق ∠ ص = ٦٥°.

أوجد ق ∠ س مقربًا إلى أقرب درجة إذا كان س ص = ١٤، ص ع = ٥ .



من المعطى في السؤال :

القابل للزاوية س هو الضلع ص ع ، ص ع = ٥

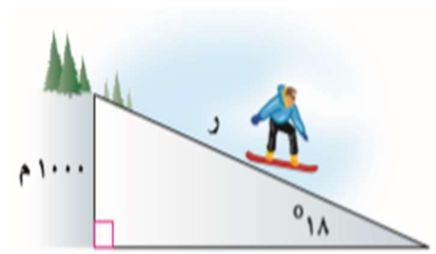
الوتر للمثلث هو س ص ، س ص = ١٤

الطلوب قياس الزاوية س ، ∴ نستخدم النسب المثلثية العكسية جا$^{-١}$ س = $\frac{١٥}{٤}$

Trig ⟶ $\sin^{-1}$ (15 ÷ 4) = 21

قياس الزاوية س يساوي تقريباً ٢١°

تزلج على الجليد: في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسي ١٠٠٠ م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض ١٨°، قدّر طول (ر).



من المعطى في السؤال طول ارتفاع التلّة التي تمثّل المقابل للزاوية ١٨°

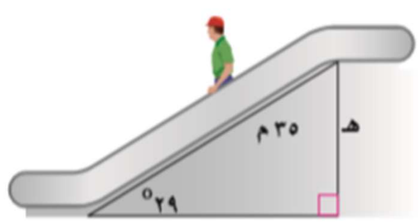
المطلوب هو (ر) الذي يمثّل الوتر

تنبيه : طالما المطلوب هو طول ضلع ! نستخدم إحدى النسب المثلثية وهي جا ١٨°

جا ١٨° = المقابل ÷ الوتر ، جا ١٨° = ١٠٠٠ ÷ ر

ر = ١٠٠٠ ÷ جا ١٨° ، ر = ١٠٠٠ ÷ ٠,٣١ = ٣٢٢٦ ، طول ر تقريباً ٣٠٠٠ م

سلّم كهربائي: يبلغ طول السلّم الكهربائي في أحد الأسواق الكبيرة ٣٥ مترًا، وقياس الزاوية التي يكوّنها مع الأرض ٢٩°، أوجد ارتفاع السلم.



الحل : ١٧ م تقريباً

الإحصاء والاحتمالات

تصميم دراسة مسحية

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- أصمم دراسة مسحية .
- أتعرّف على الطرق المختلفة لاختيار العينة .

تُعدّ **العينة** جزءًا من مجموعة أكبر تُسمى **المجتمع**.

أساليب جمع البيانات

- **الدراسة المسحية**
- **الدراسة القائمة على الملاحظة**
- **التجربة**

عينة متحيزة طريقة اختيار العينة تعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى

سُئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

عينة عشوائية إذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار وتكون العينة غير متحيزة

يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يخدمون الزبائن بأسلوب جيد فراقب أحد العاملين مدة ساعة في اليوم.

العينات العشوائية

العينة العشوائية البسيطة

تلصق نجمة في أحد الاحتفالات أسفل ثلاثة أطباق وتقدم هدايا للضيوف الذين تكون هذه الأطباق من نصيبهم.

العينة العشوائية الطبقية

يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائيًا ليقدم نبذة عن الخدمات التي يوفرها المستشفى في قسمه.

العينة العشوائية المنتظمة

يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة

تبرير: قارن بين أوجه شبه وأوجه اختلاف أساليب جمع البيانات الثلاثة التي عَرضها الدرس.

مسألة مفتوحة: صف مثالاً من واقع الحياة لدراسة قائمة على الملاحظة.

تحليل نتائج الدراسة المسحية

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- ألخص نتائج الدراسة المسحية .
- أقوّم نتائج الدراسة المسحية .

مقاييس النزعة المركزية.

المتوسط الحسابي

مجموع البيانات مقسومًا على عددها.

متى يفضل استعماله؟

عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.

الوسيط

العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.

متى يفضل استعماله؟

عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.

المنوال

العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.

متى يفضل استعماله؟ عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

البيانات الكمية التي تُعطى بصورة قيم عددية يمكن تحليلها. مثّل درجات الاختبارات أو ساعات الدراسة

البيانات النوعية لا يمكن أن تأخذ قيمة عددية، ومن أمثلتها: الجنس أو الجنسية أو البرنامج التلفزيوني المفضل.

احصائيات العينة ومعالم المجتمع

ماذا نريد أن نتعلم في هذا الدرس ؟

- استعمل إحصائيات العينة لتحليل نتائج الدراسة المسحية.
- أحلل البيانات باستعمال إحصائيات العينة .

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع:

الإحصاء الاستدلالي تُستعمل في هذا الموقف إحصائيات العينة للتوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملًا.

الإحصائي: مقياس يصف إحدى خصائص العينة.

المَعْلَمَة فهي مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع.

عيّن العينة والمجتمع في كل من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع.

اختيرت عينة عشوائية من إحدى الجامعات مكوّنة من ٤٠ من طالبي المنح الدراسية، ثم حُسب متوسط درجاتهم.

العينة :	مجموعة الطلاب الأربعين المتقدمين بطلبات المنح الدراسية .
المجتمع :	جميع الطلاب طالبي المنح الدراسية .
إحصائي العينة :	متوسط درجات الطلاب الأربعين .
مَعْلَمة المجتمع :	متوسط درجات جميع طالبي المنح الدراسية .

التحليل الإحصائي: تُسمّى البيانات التي تتضمن متغيرًا واحدًا **بيانات وحيدة المتغير**. ويمكن التعبير عن هذه البيانات بمقاييس النزعة المركزية مثل المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. كما يمكن التعبير عنها أيضًا **بمقاييس التشتت** مثل المدى والربيعات والمدى الربيعي.

المدى	الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.
الربيعات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.
المدى الربيعي	مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات؛ وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.

الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات.

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي.

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي.

الخطوة ٣: اقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات.

رصد محل تجاري عدد القطع التي يشتريها المتسوقون في يوم معين فكانت

(٧ , ٢٠ , ٣ , ١٠)

أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات .

الحل :

١- نوجد المتوسط الحسابي .

المتوسط الحسابي = مجموع القيم ÷ عددها

٧ + ٢٠ + ٣ + ١٠ = ٤٠ ٤٠ ÷ ٤ = ١٠

٢- | ٧ − ١٠ | + | ٢٠ − ١٠ | + | ٣ − ١٠ | + | ١٠ − ١٠ | = ٣ + ١٠ + ٧ + ٠ = ٢٠

٣- الانحراف المتوسط = ٢٠ ÷ ٤ = ٥

أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية :

٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ١١ ، ٨

التباين والانحراف المعياري

الانحراف المعياري هو القيمة التي تُحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. ويُرمز إليه بالرمز "ع". أما **تباين** مجموعة من البيانات فهو مربع الانحراف المعياري لتلك البيانات.

استعمل الطريقة المبينة أدناه لحساب التباين والانحراف المعياري.

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$.

الخطوة ٢: أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لتحصل على التباين.

الخطوة ٣: أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

أوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات التالية : ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٧

الحل :

المتوسط الحسابي = مجموع القيم ÷ عددهم

٦ + ٤ + ٣ + ٧ = ٢٠

٢٠ ÷ ٤ = ٥

(٦ – ٥)^{٢} + (٤ – ٥)^{٢} + (٣ – ٥)^{٢} + (٧ – ٥)^{٢}

١ + ١ + ٤ + ٤ = ١٠

التباين = ١٠ ÷ ٤ = ٢,٥

الانحراف المعياري = $\sqrt{٢,٥}$ ≈ ١,٦

التباديل والتوافيق

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أستعمل التباديل .
- أستعمل التوافيق .

فضاء العينة قائمة جميع الأشخاص أو الأشياء في مجموعة معينة

مضروب العدد الصحيح الموجب هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن العدد أو تساويه.

ن! = ن (ن – ١) (ن – ٢) (ن – ٣) × ... × ١ ، ن ≥ ١ ، أيضاً ٠! = ١

التباديل

التباديل : يُسمّى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر لترتيبها أهمية **التبديل**

$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

طريقة استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد المضروب والتباديل والتوافيق

المضروب :

مثال : أوجد ٤!

٤ ← shift ← x^{-1} ← = ٢٤

التباديل :

مثال : أوجد $^{٥}ل_{٢}$

٥ ← shift ← علامة الضرب ← ٢ = ٥ npr ٢ = ٦٠

التوافيق :

مثال : أوجد $^{٥}ق_{٢}$

٥ ← shift ← علامة القسمة ← ٢ = ٥ nCr ٢ = ١٠

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

$^{٧}ل_{٢}$ $\frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$

= ٤٢

$^{٩}ل_{٣}$

يريد سعيد أن يزرع ٣ أنواع مختلفة من بين ٨ أنواع مختلفة من الأزهار على جانب ممرٍّ في حديقته. بكم طريقة يمكنه زراعة هذه الأزهار؟

$^{٨}ل_{٣}$ = ٣٣٦ طريقة

التوافيق

التوافيق: يُسمّى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية **التوافيق**.

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!ر!}$$

طريقة استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد المضروب والتباديل والتوافيق

المضروب :

مثال : أوجد ٤!

٤ ← shift ← x⁻¹ ← = ٢٤

التباديل :

مثال : أوجد ٥ ل ٢

٥ ← shift ← علامة الضرب ← ٢ = ٥ npr ٢ = ٦٠

التوافيق :

مثال : أوجد ٥ ق ٢

٥ ← shift ← علامة القسمة ← ٢ = ٥ nCr ٢ = ١٠

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

$${}^{٥}ق_{٣} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥}{١\times٢\times٣\times١\times٢} = ١٠$$

$${}^{٥}ق_{٥}$$

إجراءات قضائية: يرغب المجلس الأعلى للقضاء في اختيار ٣ قضاة من بين ٨ قضاة للنظر في قضايا جنائية. وكان خمسة من القضاة يحملون درجة الدكتوراه في القانون، و٣ يحملون درجة الماجستير في القانون.

بكم طريقة يمكن اختيار القضاة الثلاثة؟

${}^{٨}ق_{٣}$ = ٥٦ طريقة

اختبار: تقدّم سعيد لاختبار في التاريخ، طلب فيه الإجابة عن ١٠ أسئلة من بين ١٢ سؤالًا.

بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟

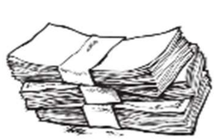
${}^{١٢}ق_{١٠}$ = ٦٦ طريقة

مثلجات: يعرض أحد مصانع المثلجات ٥ أنواع مختلفة بطعم الشوكولاتة، و ٤ أنواع مختلفة بطعم الفراولة و ٦ أنواع بطعم التوت. بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الزبائن ٣ أنواع مختلفة من المثلجات؟

عدد أنواع المثلجات = ٥ + ٤ + ٦ = ١٥

${}^{١٥}ق_{٣}$ = ٤٥٥ طريقة

نقود: مع فيصل كيس يحتوي على ١٠ أوراق نقدية من فئة الريال، و٦ أوراق من فئة ٥ ريالاتٍ، و٤ أوراق من فئة ١٠ ريالاتٍ، وورقتان من فئة ٥٠ ريالًا. بكم طريقة يمكن أن يسحب ٤ أوراق نقد من الكيس؟



عدد الأوراق = ١٠ + ٦ + ٤ + ٢ = ٢٢

${}^{٢٢}ق_{٤}$ = ٧٣١٥ طريقة

احتمالات الحوادث المركبة

ماذا نريد أن نتعلّم في هذا الدرس ؟

- أجد احتمال حادثتين مستقلتين أو حادثتين غير مستقلتين
- أجد احتمال حادثتين متنافيتين أو حادثتين غير متنافيتين

الحادثة المركبة

تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر.

نتيجة إحداهما لا تؤثر في نتيجة الأخرى.

(و) – ضرب

نتيجة إحداهما تؤثر في نتيجة الأخرى.

ارجاع – إعادة

بدون ارجاع – بدون إعادة

مثال

فواكه: تحتوي سلة على ٦ تفاحات و ٥ موزات و ٤ برتقالات و ٥ درّاقات.
إذا اختار ماجد حبة واحدة من الفاكهة عشوائيًّا وأكلها
ثم اختار حبة ثانية. فما احتمال أن يكون قد اختار موزة ثم تفاحة؟

$\frac{٥}{٢٠} \times \frac{٦}{١٩} = \frac{٣}{٣٨} = ٨\%$ تقريباً

مثال

رمي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور عددين مختلفين؟

$\frac{٦}{٦} \times \frac{٥}{٦} = \frac{٣٠}{٣٦} = \frac{٥}{٦} = ٨٣\%$ تقريباً

الحادثة المركبة

تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر.

الحادثتان اللتان لا يمكن وقوعهما معًا

لا يوجد بينهما عناصر مشتركة

مثال

أوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية عند رمي مكعب أرقام:

ح (أقل من ٣) = $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣} =$ ٣٣٪ تقريباً

ح (عدد زوجي) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢} =$ ٥٠٪

(أو) – جمع

الحادثتان اللتان يمكن وقوعهما معًا

يوجد بينهما عناصر مشتركة

مثال

عند رمي مكعب أرقام، ما احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟

$\frac{٣}{٦} + \frac{٣}{٦} - \frac{٢}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} =$ ٦٦٪ تقريباً

المراجع /

ماجروهيل رياضيات الصف الثالث المتوسط

الفصل الدراسي الثاني

وزارة التعليم

مجموعة العبيكان للاستثمار .