الرياضيات البسيطة

الصف الثالث متوسط

الفصل الدراسي الثاني

إعداد الأستاذه /أشواق محمد الغامدي

بكالوريوس رياضيات تربوي

الرياضيات البسيطة
(الصف الثالث المتوسط -الفصل الدراسي الثاني)

رقم الإيداع ١٤٤٢/٦٥٧٢ تاريخه ١ / ٨ /١٤٤٢

ه ، ورقم الردمك٤-٧٥٠٠-٠٣-٦٠٣-٩٧٨

مقدمة

أقدم بين أيديكم إعدادي المبسط لمنهج رياضيات المرحلة المتوسطة للصف الثالث متوسط الفصل الدراسي الثاني، والذي يشمل عرض الدرس بأسلوب مبسط مع الأمثلة وحلها .. أتمنى الفائدة للجميع..

حسابات مجموعة رفعة الرياضيات

[Twitter]

[Snapchat]

[الدورات التدريبية]

[YouTube]

[Instagram]

[المكتبة الرقمية]

[قناة ثالث متوسط]

لإضافة جميع حسابات وقنوات رفعة

[اضغط هنا]

الفهرس

الفصل السادس : كثيرات الحدود ١

الفصل السابع : التحليل والمعاملات التربيعية ٣٠

الفصل الثامن : الدوال التربيعية ٧٥

الفصل التاسع :المعادلات الجذرية المثلثات ٩٠

الفصل العاشر : الإحصاء والإحتمال ١١٨

رياضيات

للصف الثالث متوسط

الفصل الدراسي الثاني

كثيرات الحدود

ضرب وحيدات الحد

ماذا نقصد بوحيدات الحد ؟

هي العبارات الرياضيه التي تتكون من حد واحد فقط .
تكون عدداً أو متغيراً أو عدد مضروب في
متغير أو أكثر بأسس صحيحه غير سالبه .

ضرب وحيدات الحد

حدد إذا كانت العبارات التاليه وحيدة حد ، وفسر إجابتك .

العبارة	هل هي وحيدة حد ؟	التفسير
- س+٥	لا	وجود عملية الجمع
٢٣ أ ب ج د^{٢}	نعم	عدد مضروب في اكثر من متغير أسسها صحيحه وغير سالبه
$\frac{٢ف}{ن}$	لا	لوجود متغير في المقام

ضرب وحيدات الحد

تعتبر وحيدة الحد هي أبسط صوره
لكتابة العبارة الرياضيه

نحتاج لمعرفة قوانين القوى حتى نستطيع كتابة العبارة في أبسط صورة

في حالة ضرب قوتين لها نفس الأساس ، نجمع الأسس

مثال : بسّط العِباره $(٣س^{٤})(٧س^{٥})$

الحل

$= ٢١ س^{٤+٥}$

$= ٢١س^{٩}$

ضرب وحيدات الحد

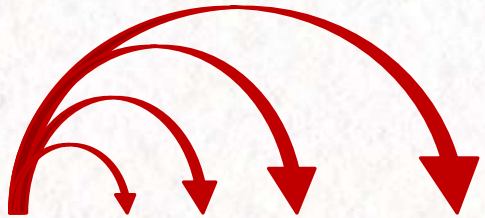
في حالة قوة القوة ، نضرب الأسس

مثال : بسّط العِباره $(ل^{٦})^{٧}$

الحل

$= ل^{٦ \times ٧}$

$= ل^{٤٢}$



في حالة قوة حاصل الضرب ،نوجد قوة كل عامل ثم نضرب

مثال : بسّط العِباره $(-٢ ف^{٢} ع^{٣} ط^{٦})^{٢}$

الحل

$= (-٢)^{٢} ف^{٢ \times ٢} ع^{٣ \times ٢} ط^{٦ \times ٢}$

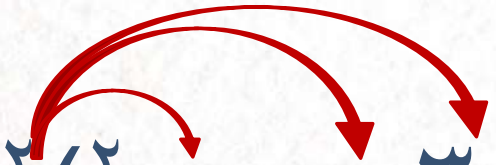
$= ٤ ف^{٤} ع^{٦} ط^{١٢}$

ضرب وحيدات الحد

عبّر عن مساحة المربع الذي طول ضلعه ٣س ص^{٢} على صورة وحيدة حد .

مساحة المربع=(طول الضلع)^{٢}

الحل



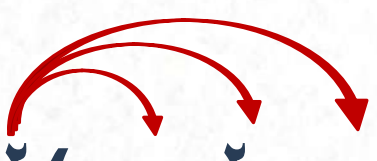
مساحة المربع $= (٣س ص^{٢})^{٢}$

$= ٣^{٢} س^{٢} ص^{٢ \times ٢}$

$= ٩ س^{٢} ص^{٤}$

ضرب وحيدات الحد

يمكننا استخدام خصائص القوى السابقه لتبسيط العبارات وكتابتها كوحيدات حد



مثال : بسّط العِباره $(٥\ س^{٢}\ ص)^{٢}\ (\ ٢\ س\ ص^{٣}\ ع\ )^{٣}\ (٤\ س\ ص\ ع)$

الحل

$$=[\ ٥^{\ ٢}\ س^{\ ٢\times٢}\ ص^{٢}][\ ٢^{\ ٣}\ س^{\ ٣}\ ص^{٣\times٣}ع^{٣}][\ ٤س\ ص\ ع]$$

$$=[\ ٢٥\ س^{٤}\ ص^{٢}]\ [\ ٨\ س^{\ ٣}\ ص^{٩}ع^{٣}]\ [\ ٤س\ ص\ ع]$$

$$= ٢٥ \times ٨ \times ٤ \times س^{٤+٣+١} \times ص^{٢+٩+١} \times ع^{٣+١}$$

$$= ٨٠٠\ س^{٨}\ ص^{\ ١٢}\ ع^{\ ٤}$$

قسمة وحيدات الحد

نحتاج لمعرفة قوانين القوى حتى نستطيع كتابة العبارة في أبسط صورة

في حالة قسمة قوتين لهما نفس الأساس ، نطرح الأسس

مثال : بسّط العِباره $\frac{س^{٣} ص^{٤}}{س^{٢} ص}$

الحل

$= س^{٣-٢} ص^{٤-١}$

$= س ص^{٣}$

أس البسط – أس المقام

قسمة وحيدات الحد

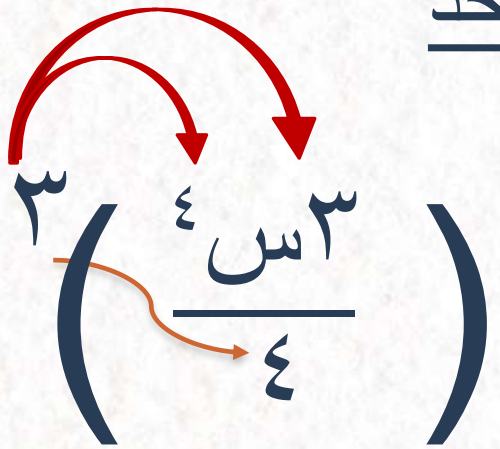
إرشادات للدراسة

قوانين القوة للمتغيرات

تطبق قوانين القوة على المتغيرات تمامًا كما تطبق على الأعداد. فمثلاً

$$\left(\frac{\text{أ}^{٣}}{\text{ب}^{٤}}\right)^{٣} = \frac{(\text{أ}^{٣})^{٣}}{(\text{ب}^{٤})^{٣}} = \frac{\text{أ}^{٢٧}}{\text{ب}^{٦٤}}$$

قسمة وحيدات الحد



مثال : بسّط العِبارة $\left(\frac{٣س^{٤}}{٤}\right)^{٣}$

الحل

$$= \frac{٣^{٣} \text{ س}^{٣\times٤}}{٤^{٣}}$$

$$= \frac{٢٧ \text{ س}^{١٢}}{٦٤}$$

لإيجاد قوة ناتج القسمة، نوجد قوة البسط وقوة المقام

قسمة وحيدات الحد

خاصية الأس الصفري

أي عدد غير الصفر مرفوعاً للقوة صفر يساوي ١

مثال :

$$\left(\frac{٣٦\ س^{٤}\ ص^{٥}}{٩\ س}\right)^{٠} = ١$$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري

انتبه للأقواس عند تبسيط أي عبارة.

فالعبارة $(٥س)^{٠}$ تساوي ١

إلا أن العبارة $٥س^{٠} = ٥$

قسمة وحيدات الحد

خاصية الأسس السالبة

لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر ، ولأي عدد صحيح ن فإن :

$$\text{مقلوب } أ^{ن} = أ^{-ن}$$

مثال :

$$\left(\frac{٣س^{٢}}{٥}\right)^{-١} = \frac{٥}{٣س^{٢}}$$

قسمة وحيدات الحد

تعد العبارة في أبسط صورة لها إذا

احتوت على أسس موجبة فقط

وظهر كل أساس مره واحده فقط

ولا تتضمن قوى القوى

وأن تكون جميع الكسور الإعتيادية فيها بأبسط صورة .

قسمة وحيدات الحد

رتبة المقدار

هي العدد مقرّباً إلى اقرب قوى العشرة

مثال : أوجد رتبة المقدار ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠

الحل

نقرب المقدار إلى أقرب قوة العشرة

٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ ≈ ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ أو $١١١٠^{١٠}$

ونكتب رتبة المقدار ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ هي $١١١٠^{١٠}$

كثيرات الحدود

ماذا نقصد بكثيرات الحدود؟

هي العبارات الرياضيه التي تتكون من حد واحد أو أكثر .
كل وحيدة حد تسمى حداً في العباره .

كثيرات الحدود

حدد إذا كانت العبارات التاليه كثيرة حدود ، ثم صنفها (وحيدة حد ،ثنائية حدود ، ثلاثية حدود).

العبارة	هل هي كثيرة حدود ؟	التصنيف
- س+٥	نعم	ثنائية حدود
٢٣ أ ب ج د^{٢}	نعم	وحيدة حد
١٠س$^{-١}$ -٨ س أ	لا تمثل كثيرة حدود	لوجود متغير في المقام ، ومتغير في الأس

كثيرات الحدود

ماهي درجة كثيرات الحدود؟

يسمى مجموع أسس جميع المتغيرات في وحيدة الحد درجة وحيدة الحد .

ودرجة كثيرة الحدود هي أكبر درجه بين حدودها .

كثيرات الحدود

تذكر أن أس العدد الثابت هو صفر

تذكر أن الأس ١ لا يكتب، المتغير بدون أس أسه ١

أوجد درجة كثيرة الحدود التالية :

$$٧ س^{١} ص^{٥} ع^{١}$$

الحل

بجمع أسس المتغيرات

$$١+٥+١=٧$$

الدرجة السابعة

كثيرات الحدود

تذكر أن أس العدد الثابت هو صفر

تذكر أن الأس ١ لا يكتب، المتغير بدون أس أسه ١

أوجد درجة كثيرة الحدود التالية :

$$د\ ن^{٣} + ٣\ د^{٢}ن^{٢} + ٢د + ١$$

الحل

٣+١ =٤ ٢+٢=٤ ١ صفر

بجمع أسس المتغيرات لكل حد

درجة كثيرة الحدود هي الدرجة الأكبر لحدودها

الدرجة الرابعة

كثيرات الحدود

يمكن كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب لحدودها

تكتب كثيرة الحدود بمتغير واحد بالصورة القياسية
تكتب الحدود بالترتيب التنازلي حسب درجتها

مثال : اكتب كثيرة الحدود ٨-٢س^{٢}+٤س^{٤}-٣س بالصورة القياسية .

الحل

الدرجه صفر ٢ ٤ ١

تكتب الحدود بالترتيب التنازلي حسب درجتها

٤س^{٤}-٢س^{٢}-٣س+٨

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

يمكن استعمال خاصية التوزيع لضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

تذكر :
عند ضرب وحيدتي حد نضرب الأعداد ونجمع أسس المتغيرات

مثال: أوجد ناتج الضرب:

$-٧أ^{٢}(٤أ^{٢}+٢أ-٩)$

الحل

باستخدام خاصية التوزيع

$= -٢٠أ^{٢+٢}+١٠أ^{٢+١}-٣٥أ^{٢}$

$= -٢٠أ^{٤}+١٠أ^{٣}-٣٥أ^{٢}$

حل معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

مثال: حل المعادلة :

$$د(د+٣) - د(د-٤) = ٩د - ١٦$$

الحل

باستخدام خاصية التوزيع

$$د^{٢} + ٣د - د^{٢} + ٤د = ٩د - ١٦$$

$$٧د = ٩د - ١٦$$

$$-٩د = -١٦$$

$$-٢ د = -١٦$$

بالقسمة على -٢

$$د = ٨$$

قوانين الإشارات في الضرب

في التشابه موجب في الإختلاف سالب

ضرب كثيرات الحدود

يمكن استعمال
خاصية التوزيع
لإيجاد ناتج ضرب
كثيرتي حدود

ضرب كثيرات الحدود

مثال: أوجد ناتج الضرب:

$$(٣س-٥)(٢س^{٢}+٧س-٨)$$

الحل

باستخدام خاصية التوزيع

$$= ٣س\,(٢س^{٢}+٧س-٨) - ٥\,(٢س^{٢}+٧س-٨)$$

$$= ٦\,س^{٢+١} + ٢١\,س^{١+١} - ٢٤س - ١٠س^{٢} - ٣٥س + ٤٠$$

$$= ٦\,س^{٣} + ٢١\,س^{٢} - ٢٤س - ١٠س^{٢} - ٣٥س + ٤٠$$

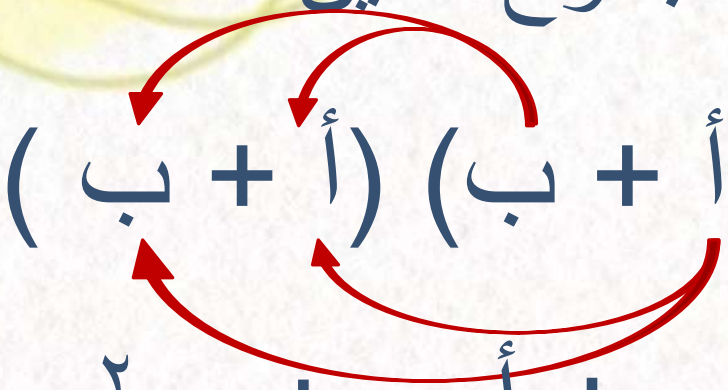
بجمع الحدود المتشابهة

$$= ٦\,س^{٣} + ١١\,س^{٢} - ٥٩\,س + ٤٠$$

تذكر :
عند ضرب وحيدتي حد نضرب الأعداد ونجمع أسس المتغيرات

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

الحالة الأولى : مربع مجموع حدين



$$(أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب)$$

$$= أ^{٢} + أ ب + أ ب + ب^{٢}$$

$$= أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$$

بعض الحالات الخاصة التي يمكن استعمالها لإيجاد ناتج الضرب بسهوله

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج $(٣س + ٤ص)^{٢}$

الحل

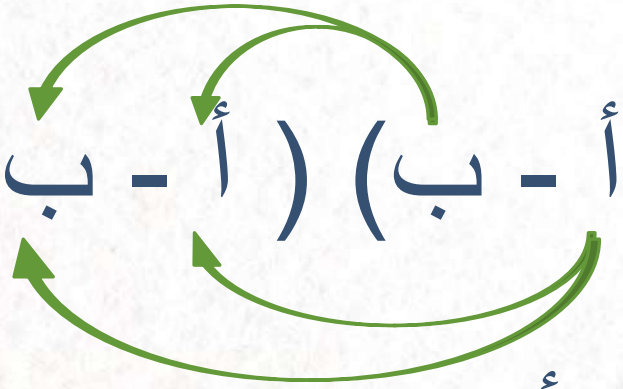
$$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$$

$$(٣س + ٤ص)^{٢} = (٣س)^{٢} + ٢(٣س)(٤ص) + (٤ص)^{٢}$$

$$= ٩س^{٢} + (٢ \times ٣ \times ٤) \text{ س ص} + ١٦ص^{٢}$$

$$= ٩س^{٢} + ٢٤ \text{ س ص} + ١٦ص^{٢}$$

الحالة الثانية : مربع الفرق بين حدين



$$(أ - ب)^{٢} = (أ - ب)(أ - ب)$$

$$= أ^{٢} - أ ب - أ ب + ب^{٢}$$

$$= أ^{٢} - ٢ أ ب + ب^{٢}$$

تنبيه !

مربع الفرق بين حدين

تذكّر أن ناتج $(س - ٧)^{٢}$

لا يساوي $س^{٢} - ٧^{٢}$ أو

$س^{٢} - ٤٩$، وأن

$(س - ٧)^{٢} =$

$(س - ٧)(س - ٧) =$

$س^{٢} - ١٤ س + ٤٩$

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج $(٦ب - ١)^{٢}$

الحل

$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢ أ ب + ب^{٢}$

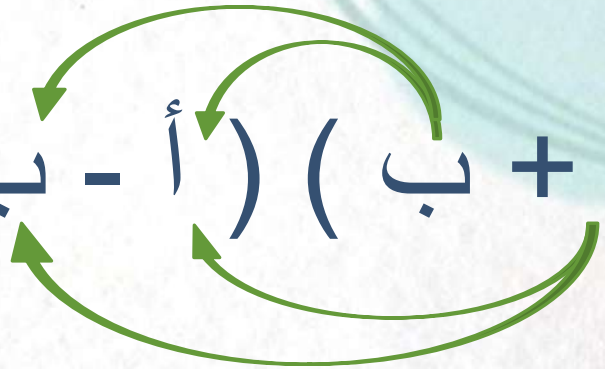
$(٦ب - ١)^{٢} = (٦ب)^{٢} - ٢(٦ب)(١) + (١)^{٢}$

$= ٣٦ب^{٢} - (٢ \times ٦ \times ١) ب + ١$

$= ٣٦ب^{٢} - ١٢ ب + ١$

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

الحالة الثالثة : ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما



$$(أ + ب)(أ - ب) = أ^{٢} - أ ب + أ ب - ب^{٢}$$

$$= أ^{٢} - ب^{٢}$$

أنماط: عند استعمال أي من هذه القواعد فإن أ، ب قد يكونان عددين، أو متغيرين، أو عبارتين بأعداد ومتغيرات.

أوجد ناتج $(أ-٣)(أ+٣) = أ^{٢} - ٣^{٢}$

$$= أ^{٢} - ٩$$

رياضيات

للصف الثالث متوسط

الفصل الدراسي الثاني

التحليل والمعادلات التربيعية

ماذا نقصد بتحليل وحيدات الحد ؟

تحليل وحيدات الحد يشبه تحليل الأعداد الكلية

تكون وحيدة الحد بالصيغة التحليلية إذا عُبِر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأُسّ١

حلّل وحيدة الحد ١٢ ج^{٣} ل^{٤}

= ٢ × ٢ × ٣ × ج × ج × ج × ل × ل × ل × ل

الصيغة التحليلية

عند كتابة وحيدة الحد بالصيغة التحليلية نقول :أننا حللنا وحيدة الحد تحليلاً تاماً.

يسمى حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركه لوحيدتي حد بالقاسم المشترك الأكبر لهما .

أوجد القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ) لوحيدتي الحد

٦س ص^{٣} ، ١٨ ص ع

الحل

نحلل كل وحيدة حد تحليلاً تاماً

٦ س ص^{٣} = ٢ × ٣ × س × ص × ص × ص

١٨ ص ع = ٢ × ٣ × ٣ × ص × ع

نضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة

بضرب العوامل الأولية المشتركة

٢ × ٣ × ص = ٦ص

استعمال خاصية التوزيع

التحليل باستعمال خاصية التوزيع يعني كتابة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عاملين أحدهما القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحد.

ولإيجاد العامل الآخر يُقسم كل حد في كثيرة الحدود على القاسم المشترك الأكبر.

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كثيرة الحدود

٣٠ س + ٥٠ص

الحل

نحلل كل وحيدة حد تحليلاً تاماً

٣٠ س = ٢×٣×٥×س

٥٠ ص = ٢×٥×٥×ص

نضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة

بضرب العوامل الأولية المشتركة ٢×٥ = ١٠

٣٠ س + ٥٠ص = ١٠(٣س + ٥ص)

استعمال خاصية التوزيع

يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود إذا كانت تتكون من أربعة حدود أو أكثر .

نجمع الحدود ذات العوامل المشتركه .

يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعي للآخر.

حلل كثيرة الحدود ن م+٢ن +٨م +١٦

الحل

نجمع الحدود ذات العوامل المشتركة

=(ن م+٨م)+(٢ن+١٦)

٢×٢×٢×٢

= م (ن +٨) + ٢(ن +٨)

بأخذ (ن+٨) عامل مشترك

=(ن+٨)(م+٢)

نضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة لكل تجميع

استعمال خاصية التوزيع

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.

حلل كثيرة الحدود $٣ف - ٢ف^{٢} - ١٨ف + ٢٧$

الحل

نجمع الحدود ذات العوامل المشتركة

نضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة لكل تجميع

$$= (٣ف + ٢٧) + (-٢ف^{٢} - ١٨ف)$$

$$= (٣ف + [٣ \times ٣ \times ٣]) + ([-٢ف \times ف] - [٢ \times ٣ \times ٣ \times ف])$$

$$= ٣(ف + ٩) - ٢ف(ف + ٩)$$

$$= (ف + ٩)(٣ - ٢ف)$$

خاصية الضرب الصفري:

يمكن حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الضرب الصفري "إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا، فإن أحدهما على الأقل يساوي صفرًا". ولحل معادلات باستعمال هذه الخاصية، اكتب أحد طرفَي المعادلة في الصورة المحلّلة، وصفرًا في الطرف الآخر. ثم ساوِ كل عامل بالصفر، وحُلّ المعادلات الناتجة.

حل المعادلة ٨ب^{٢} - ٤٠ب = ٠

الحل

بأخذ ب عامل مشترك

ب (٨ب - ٤٠) = ٠

إما ب = ٠ أو ٨ب - ٤٠ = ٠

٨ب = ٤٠

بالقسمة على ٨

ب = ٥

الحل هو ٠، ٥

ماهي المعادلات التربيعية ؟

هي المعادلات من الدرجة الثانية أي أن أكبر أُس لمتغيراتها هو ٢.

يمكن إستعمال نمط ضرب ثنائيات الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود .

المعادلات التربيعية $س^{٢}+ب\ ص+ج=٠$

$$(س+٣)(س+٤) = س^{٢}+٤\ س+٣س+(٣\times٤)$$

خاصية التوزيع

$$= س^{٢}+٧\ س+١٢$$

تجميع الحدود المتشابهة

$٣+٤$ ٣×٤

$$(س+\ م\ )(س+\ ن) = س^{٢}+(م+ن)\ س+(م\times ن)$$

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $س^{٢}+ب\ ص+ج$

حيث $ب=م+ن$ ، $ج=م\times ن$

إشارة ج تحدد تشابه أو إختلاف إشارة م وَ ن

حيث $ب=م+ن$ ، $ج=م\times ن$

عندما ج موجب فإن م وَ ن متشابها الإشارة

ولهما نفس إشارة ب

عندما ج سالب فإن م وَ ن مختلفا الإشارة

إشارة ب هي إشارة العدد ذو القيمة المطلقة الأكبر بينهما

حلل كثيرة الحدود

د^{٢} +١١د +٢٤

الحل

نبحث عن عددين حاصل جمعهم ١١ وحاصل ضربهم ٢٤

نوجد عوامل ٢٤	مجموع العاملين
١×٢٤	٢٥
٢×١٢	١٤
٣×٨	١١
٤×٦	١٠

ج موجب
م وَ ن لها نفس الإشارة
لها نفس إشارة ب

د^{٢} +١١د +٢٤ = (د+٨)(د+٣)

حلل كثيرة الحدود

و^{٢} –١١و+٢٨

الحل

نبحث عن عددين حاصل جمعهم -١١ وحاصل ضربهم ٢٨

نوجد عوامل ٢٨	مجموع العاملين
-١ ، -٢٨	-٢٩
-٢ ، -١٤	-١٦
-٤ ، -٧	-١١

ج موجب
م وَ ن لها نفس الإشارة
لها نفس إشارة ب

و^{٢} –١١و+٢٨ = (و -٧)(و-٤)

حلل كثيرة الحدود

ص^{٢} +١٣ ص -٤٨

الحل

نبحث عن عددين حاصل جمعهم١٣ وحاصل ضربهم -٤٨

نوجد عوامل -٤٨	مجموع العاملين
-١ ، ٤٨	٤٧
-٢ ، ٢٤	٢٢
-٣ ، ١٦	١٣
-٤ ، ١٢	٨
-٦ ، ٨	٢

ج سالب
م وَ ن لها إشارتين مختلفه

إشارة ب هي إشارة العدد ذو القيمة المطلقة الأكبر

ص^{٢} +١٣ ص -٤٨ = (ص-٣)(ص+١٦)

حل المعادلات التربيعية بالتحليل

يمكن حل المعادلات التربيعية بتحليلها؛، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري .

حل المعادلة ، وتحقق من صحة الحل

ن^{٢}-٣ن+٢=٠

الحل

نبحث عن عددين حاصل جمعهم -٣ وحاصل ضربهم ٢

نوجد عوامل ٢ مجموع العاملين

-١ ، -٢ -٣

ج موجب
م وَ ن لها نفس الإشارة
لها نفس إشارة ب

ن^{٢}-٣ن+٢= (ن-٢)(ن-١) =٠

إما ن-٢=٠ أو ن-١=٠

ن =٢ ن=١

حل المعادلة ، وتحقق من صحة الحل

$$ن^{٢}-٣ن+٢=٠$$

الحل

التحقق من صحة الحل

بالتعويض عن قيم ن في المعادلة المعطاة

ن = ٢

$(٢)^{٢}-٣(٢)+٢=٠$

٤ -٦ +٢=٠

-٢ +٢=٠ ✓

ن = ١

$(١)^{٢}-٣(١)+٢=٠$

١ -٣ +٢=٠

-٢ +٢=٠ ✓

المعادلات التربيعية أس^{٢}+ب ص +ج=٠

لتحليل ثلاثية حدود على الصورة أ س^{٢}+ب ص + ج عندما أ≠١

نوجد عددين م وَ ن حاصل ضربهما يساوي أ×ج،
وحاصل جمعهما يساوي ب

نكتب ثلاثية الحدود المعطاة على الصورة
أ س^{٢}+م ص+ن ص + ج
ثم نحلل بتجميع الحدود

حلل كثيرة الحدود ٥س^{٢} +١٣ س +٦

الحل

نبحث عن عددين حاصل جمعهم ١٣ وحاصل ضربهم ٥×٦=٣٠

نوجد عوامل ٣٠	مجموع العاملين
٣٠×١	٣١
١٥×٢	١٦
١٠×٣	١٣
٦×٥	١٠

ج موجب
م وَ ن لها نفس الإشارة
لها نفس إشارة ب

٥س^{٢} +١٣ س +٦ = (٥س^{٢} +١٠ س)+(٣س+٦)

بإخراج القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ)

= ٥ س (س +٢) +٣(س+٢)

بأخذ (س+٢)عامل مشترك

= (س +٢) (٥ س+٣)

المعادلات التربيعية أس^{٢}+ب ص +ج=٠

إرشادات للدراسة

القاسم المشترك الأكبر

ابحث عن القاسم المشترك الأكبر لحدود كثيرة الحدود قبل تحليلها.

حلل كثيرة الحدود ٦س^{٢} +٢٢ س -٨

الحل

نلاحظ أن للأعداد ٦، ٢٢، -٨قاسم مشترك أكبر وهو ٢

نخرج ق.م.أ ، ثم نحلل باقي المعادلة

٢)٣س^{٢}+١١س - ٤)

نبحث عن عددين حاصل جمعهم ١١ وحاصل ضربهم٣-×٤-=١٢

نوجد عوامل -١٢	مجموع العاملين
-١×١٢	١١
-٢×٦	٤
-٣×٤	١

ج سالب

م وَ ن لها اشارتين مختلفة

إشارة ب هي نفس إشارة العدد ذو القيمة المطلقة الأكبر بينهما

٢)٣س^{٢}+١١س - ٤= (٢)٣س^{٢} - س + ١٢س - ٤)

حلل كثيرة الحدود ٦س^{٢} +٢٢ س -٨

الحل

$$٢)٣س^{٢} - س + ١٢س-٤)$$

بإخراج القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ)

$$= ٢[س (٣س-١) +٤(٣س-١)]$$

بأخذ (٣س-١)عامل مشترك

$$= ٢ (٣س-١) (س+٤)$$

حلل كثيرة الحدود ٤س^{٢}-١٣ س +١٠

الحل

نبحث عن عددين حاصل جمعهم -١٣ وحاصل ضربهم ٤×١٠=٤٠

نوجد عوامل ٤٠	مجموع العاملين
-١×-٤٠	-٤١
-٢×-٢٠	-٢٢
-٤×-١٠	-١٤
-٥×-٨	-١٣

ج موجب
م وَ ن لها نفس الإشارة
لها نفس إشارة ب

بإخراج القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ)

بأخذ (س-٢)عامل مشترك

٤س^{٢}-١٣ س + ١٠ = [٤س^{٢} - ٨ س]+[(-٥)س+١٠]

= ٤س(س -٢)-٥(س-٢)

= (س -٢) (٤ س-٥)

حلل كثيرة الحدود ٢س^{٢}-٣ س -٩

الحل

نبحث عن عددين حاصل جمعهم -٣ وحاصل ضربهم ٢×(-٩)=-١٨

نوجد عوامل -١٨	مجموع العاملين
١×-١٨	-١٧
٢× -٩	-٧
٣×-٦	-٣

ج سالب
م وَ ن لها إشارات مختلفه
إشارة ب هي إشارة العدد ذو القيمة المطلقة الأكبر

٢س^{٢}-٣ س - ٩= [٢س^{٢} -٦ س]+[٣س -٩]

= ٢س(س -٣) +٣(س-٣)

بإخراج القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ)

بأخذ (س-٣)عامل مشترك

= (س -٣) (٢ س+٣)

تسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن
كتابتها كحاصل ضرب كثيرتي
حدود بمعاملات صحيحة

كثيرة حدود أولية

حلل كثيرة الحدود ٥س^{٢} -٣ س +٤

الحل

نبحث عن عددين حاصل جمعهم -٣ وحاصل ضربهم ٥×٤=٢٠

نوجد عوامل ٢٠	مجموع العاملين
-١×-٢٠	-٢١
-٢× -١٠	-١٢
-٤× -٥	-٩

ج موجب

م وَ ن لها نفس الإشارة

لها نفس إشارة ب

لا يوجد أي من عوامل ٢٠ مجموعها -٣ ،

لذا نقول عن المعادلة المعطاة بأنها أولية .

مربع أ مربع ب

$$أ^{٢} - ب^{٢} = (أ-ب)(أ+ب)$$

الفرق

الفرق بين مربعين يساوي حاصل ضرب مجموع وحيدتي الحد في الفرق بينهما .

حلّل كثيرات الحدود التالية

$$٨١ - ج^{٢}$$

الحل

$$٢٩ - ج^{٢} = (٩ - ج)(٩ + ج)$$

$$٤أ^{٢} - ٢٥$$

الحل

$$٤أ^{٢} - ٢٥ = (٢أ)^{٢} - ٥^{٢}$$

$$= (٢أ - ٥)(٢أ + ٥)$$

مجموع مربعين:

لا يمكن تحليل مجموع المربعين $أ^{٢} + ب^{٢}$ إلى $(أ+ب)(أ+ب)$. فمجموع المربعين هو كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

قد تحتاج إلى استعمال قاعدة الفرق بين مربعين أكثر من مرة حتى تحصل على تحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً .

حلل كثيرة الحدود $س^{٤}-٢٦٥$

الحل

فرق بين مربعين

$$(س^{٢})^{٢}-(٢٥)^{٢}=(\ س^{٢}-٢٥\ )(س^{٢}+٢٥)$$

$$=(\ س^{٢}-٢٥\ )(س^{٢}+٢٥)$$

$$=(\ س-٥\ )(س+٥)(س^{٢}+٢٥)$$

حل المعادلات بالتحليل

يمكن إستخدام خاصية الضرب الصفري بعد تحليل المعادلة المكتوبه كحاصل ضرب عدة عوامل يساوي الصفر .

حل المعادلة بالتحليل ، ثم تأكد من صحة الحل :

$$١٠٠=٢٥س^{٢}$$

الحل

بترتيب المعادلة $١٠٠-٢٥س^{٢}=٠$

$٢١٠-(٥س)^{٢}=٠$ الفرق بين مربعين

بتطبيق خاصية الضرب الصفري

$(١٠-٥س)(١٠+٥س)=٠$

إما $١٠-٥س=٠$ بالقسمة على -٥

$-٥س=-١٠$

$س=٢$

أو $١٠+٥س=٠$ بالقسمة على ٥

$٥س=-١٠$

$س=-٢$

حل المعادلة بالتحليل ، ثم تأكد من صحة الحل :

$$١٠٠ = ٢٥ س^{٢}$$

الحل

التحقق من صحة الحل

بالتعويض عن س = ٢ وس=-٢ في المعادلة المعطاة

س =٢

$١٠٠ = ٢٥ (٢)^{٢}$

$١٠٠ = ٤ \times ٢٥$ ✓

س =-٢

$١٠٠ = ٢٥ (-٢)^{٢}$

$١٠٠ = ٤ \times ٢٥$ ✓

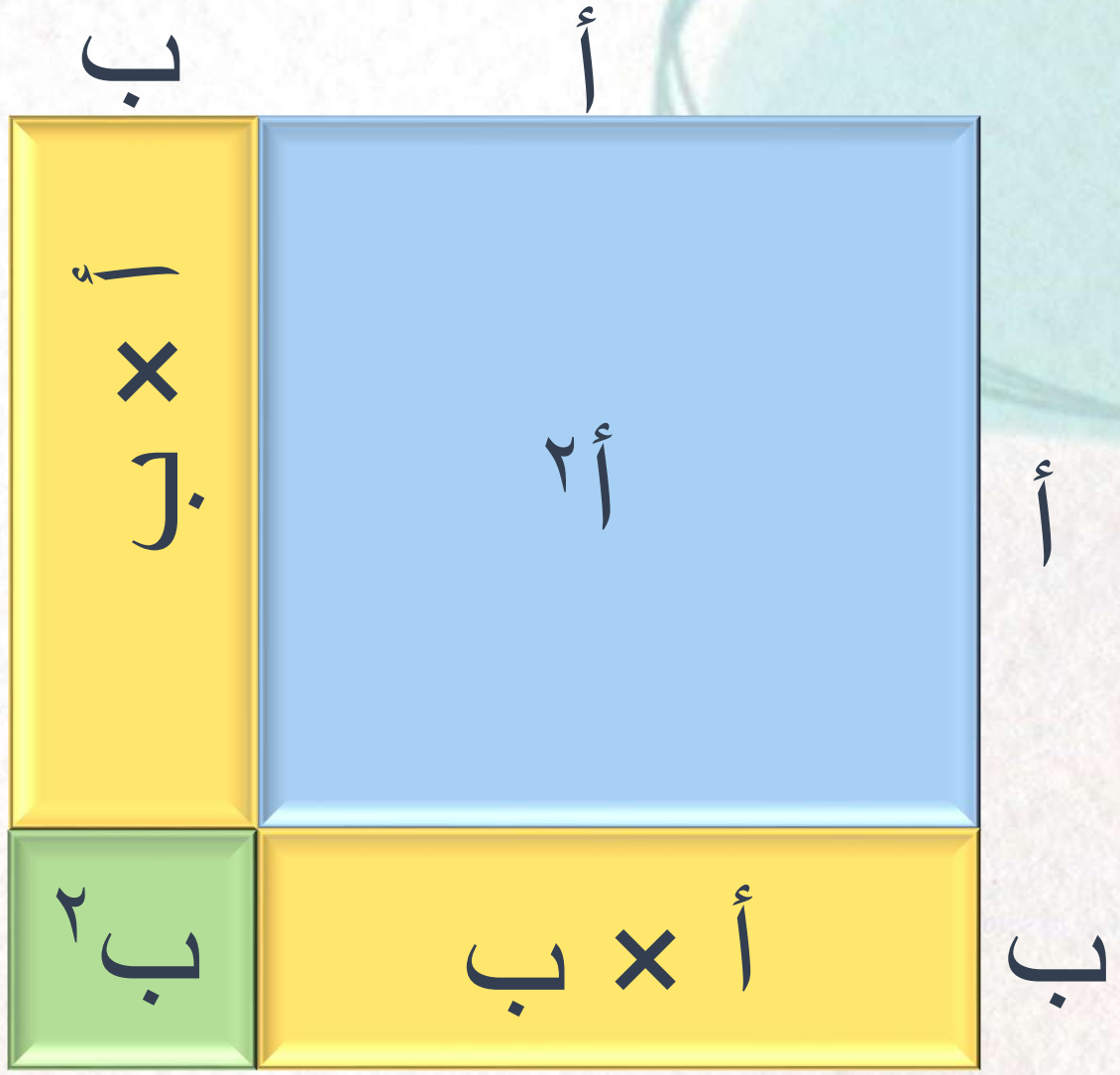
المعادلات التربيعية

المربع المجاور طول ضلعه أ+ب

مساحته = مربع طول الضلع

$$(أ+ب)^{٢} =$$

$$= أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$$



المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

$$(أ+ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$$

مربع ثنائية حد — مربع كامل لثلاثية حدود

يقال عن ثلاثية الحدود أنها تمثل مربع كامل إذا كان :

- الحدان الأول والأخير مربعين كاملين .

- الحد في الوسط يساوي ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة .

حدد إذا كانت ثلاثية الحدود تمثل مربع كامل أم لا :

$$٩ص^{٢}+٢٤ص+١٦$$

الحل

الحدان الأول والأخير مربعين كاملين .

$$(٣ص)^{٢}+٢٤ص+(٤)^{٢}$$

الحد في الوسط يساوي ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة .

$$٢(٣ص)(٤)=٢٤ص$$

ثلاثية الحدود تمثل مربع كامل

حدد إذا كانت ثلاثية الحدود تمثل مربع كامل أم لا :

$$٢ص^{٢}+١٠ص+٢٥$$

الحل

الحد الأول ٢ ع^{٢} لا يمثل مربع كامل .

ثلاثية الحدود لا تمثل مربع كامل

إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً، لذا ليس من الضروري التحقق من الشروط الأخرى.

كيف نحلل كثيرة الحدود ؟

الخطوة الأولى : إخراج القاسم المشترك الأكبر.

الخطوة الثانيه : نحدد نوع كثيرة الحدود هل هي فرق بين مربعين(ثنائية الحد) أو مربع كامل لثلاثية حدود .

الخطوة الثالثة :طبّق أنماط الحليل $س^{٢}$ +ب س +ج أو أس٢ +ب ص+ج أو حلل بتجميع الحدود .

حلل كثيرة الحدود

٢س^{٢} – ٣٢

الحل

- نخرج ق.م.أ ٢(س^{٢} – ١٦)
- نلاحظ أننا حصلنا على فرق بين مربعين

٢(س^{٢} – ١٦) = ٢(س-٤)(س+٤)

حلل كثيرة الحدود ١٢س^{٢} +٥س-٢٥

الحل

- ق.م.أ للحدود ١٢س^{٢} ،٥س، ٢٥ هو ١
- نلاحظ أن الحد الأول بثلاثية الحدود لا يمثل مربع كامل ، بالتالي ثلاثية الحدود لا تمثل مربع كامل .
- نحلل باستعمال النمط أس^{٢} +ب ص +ج .

نبحث عن عددين حاصل ضربهم ١٢×(-٢٥)=-٣٠٠ وحاصل جمعهم ٥

١٢س^{٢}+٢٠س -١٥س-٢٥

=٤س(٣س+٥) -٥(٣س+٥)

بأخذ (٣س+٥) عامل مشترك

= (٣س+٥) (٤س-٥)

المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

نستخدم خاصية الأس الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة ، يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر .

حل المعادلة ، وتحقق من صحة الحل : $أ^{٢} + ١٢أ + ٣٦ = ٠$

الحل

- ق.م.أ للحدود $أ^{٢}$ ، ١٢أ، ٣٦ هو ١
- نلاحظ أن الحد الأول والأخير بثلاثية الحدود تمثل مربعات كاملة ، بالتالي ثلاثية الحدود تمثل مربع كامل . $أ^{٢} + ٢ \times ٦ \times أ + ٦^{٢} = ٠$
- نحلل باستعمال النمط $س^{٢} + ب ص + ج$.

$$(أ + ٦)^{٢} = ٠$$

$$أ + ٦ = ٠$$

$$أ = -٦$$

لحل المعادلة التربيعية على الصورة س^{٢}=ن ، خذ الجذر التربيعي لكل طرف

حل المعادلة $(أ-١٠)^{٢} = ١٢١$

الحل

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$(أ-١٠) = \pm \sqrt{١٢١}$

$(أ-١٠) = \pm ١١$

إما $أ-١٠ = +١١$ أو $أ-١٠ = -١١$

$أ = ١١+١٠$ $أ = ١١-١٠$

$أ = ٢١$ $أ = ١$

إذا كانت ن ليست مربعاً كاملاً ، فتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي أو استعمل الآلة الحاسبة

رياضيات

للصف الثالث متوسط

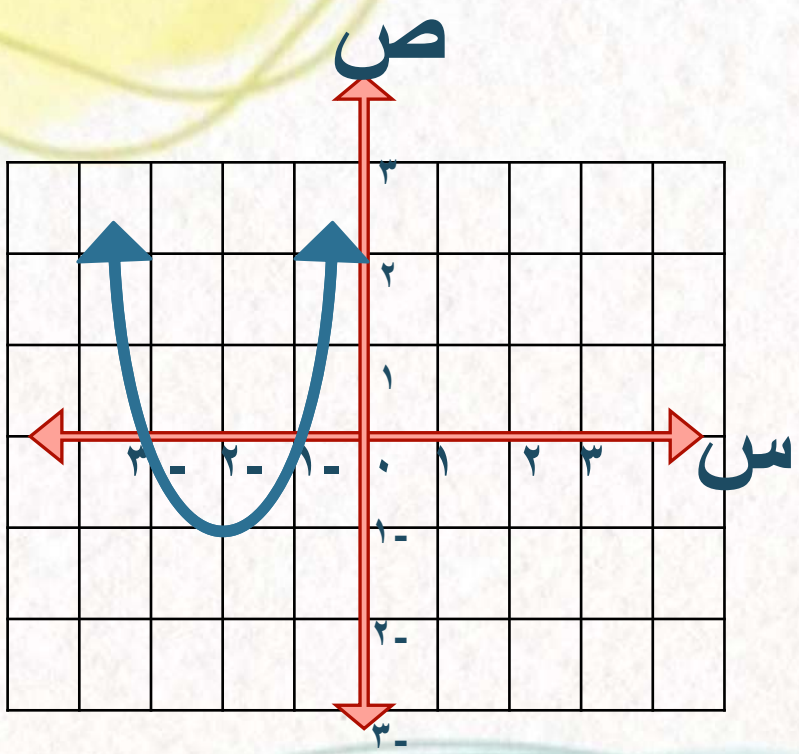
الفصل الدراسي الثاني

الدوال التربيعية

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

ماهي الدوال التربيعية؟

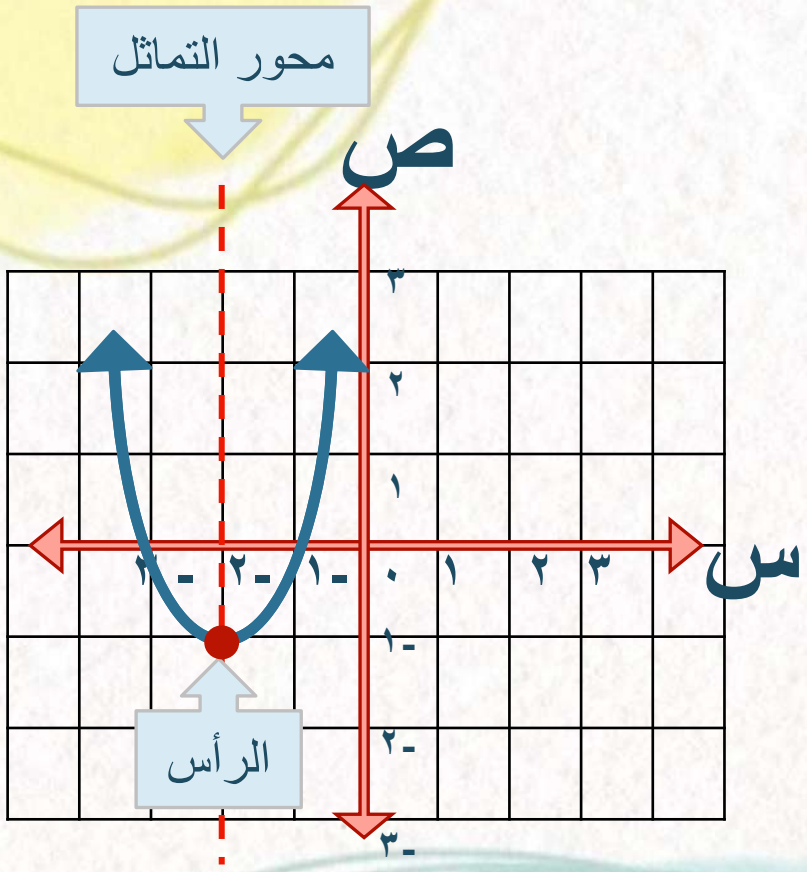
هي دوال من الدرجة الثانية ، غير خطية ،
صورتها القياسية على الصورة
د)س =(أس^{٢}+ب س +ج
حيث أ≠ صفر



تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

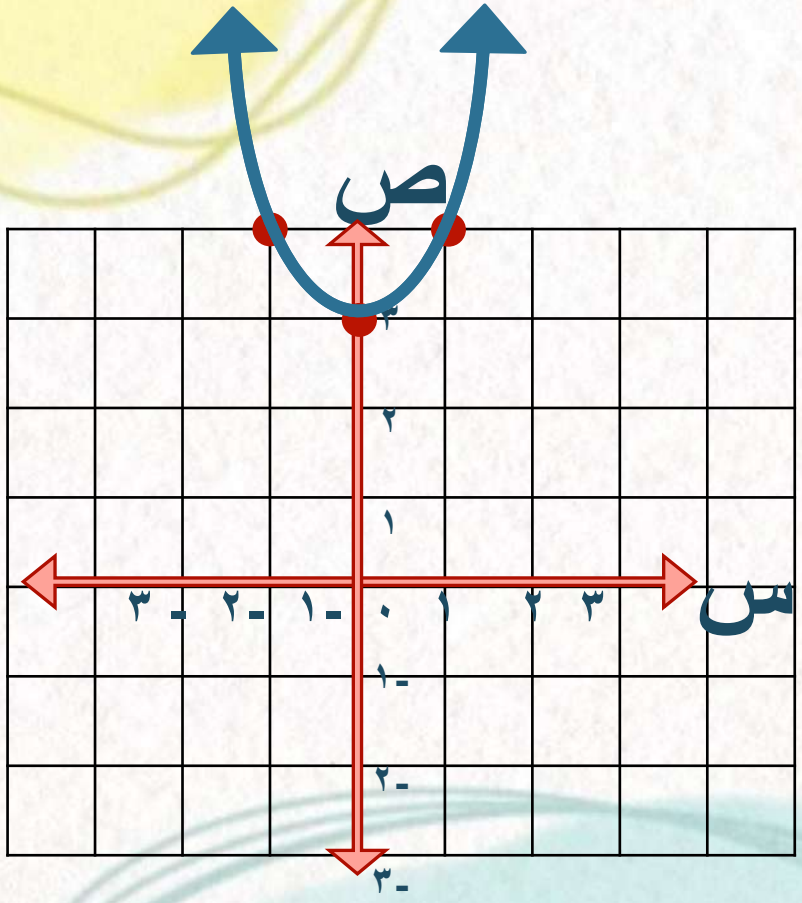
ماهي الدوال التربيعية؟

يسمى التمثيل البياني لها (القطع المكافئ)
يتماثل القطع المكافئ حول خط يتوسطه
يسمى محور التماثل .
يقطع القطع المكافئ في نقطة واحدة تسمى
الرأس .



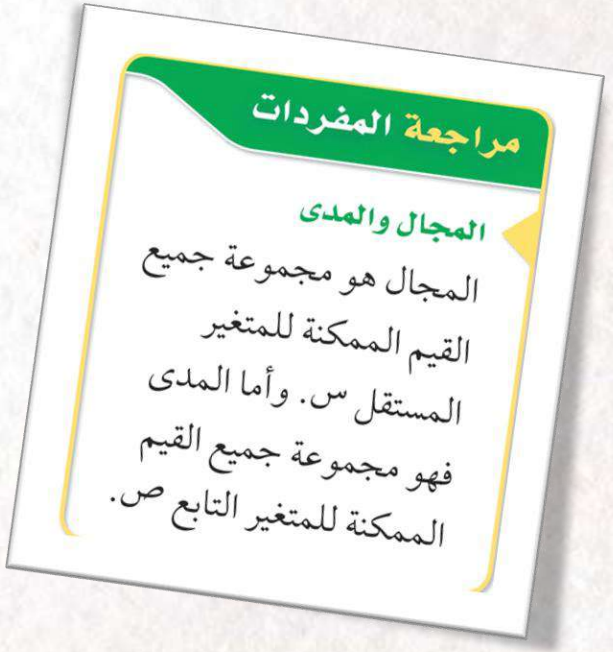
تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مثال : استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص=س^{٢}+٣ بيانياً ، وحدد المجال والمدى.



الحل

س	س^{٢}+٣	ص
١	١+٣=٤	٤
٠	٠+٣=٣	٣
١-	٢(١-)+٣ ١+٣=٤	٣

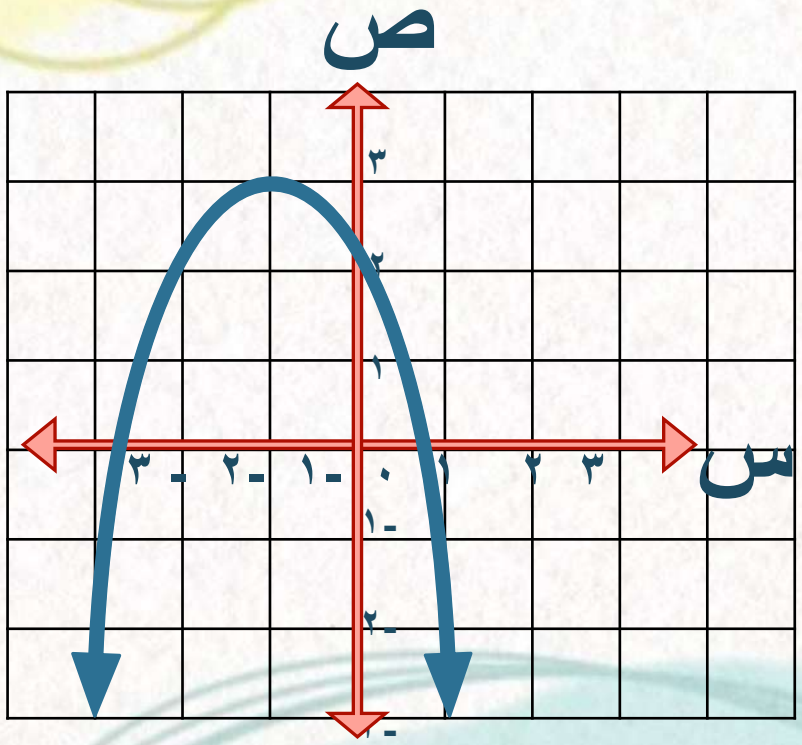


المجال هي مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = {ص|ص≥٣}

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مثال :أوجد الرأس ، ومعادلة محور التماثل ،والمقطع الصادي للتمثيل البياني



الحل

إيجاد الرأس القطع المكافئ مفتوح للأسفل فالرأس يمثل القيمة العظمى له وهو النقطة (١-، ٣)

إيجاد معادلة محورالتماثل وهو المستقيم المار بالرأس ويقسم القطع المكافئ إلى قسمين متطابقين ويكون س=-١

إيجاد المقطع الصادي وهو نقطة تقاطع القطع المكافئ مع المحور الصادي وهو (٠،١-)، فالمقطع الصادي هو ١-

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

معادلة محور التماثل س= - $\frac{ب}{٢أ}$

مثال :أوجد الرأس ، ومعادلة محور التماثل ،والمقطع الصادي للدالة

ص= -٣س^{٢}+٦س-٥

الحل

معادلة محور التماثل

$$س= - \frac{ب}{٢أ}$$

$$س= - \frac{٦}{(٣-)٢} = \frac{٦-}{٦-} = ١$$

معادلة محور التماثل س= ١

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

معادلة محور التماثل س = - $\frac{ب}{2أ}$

مثال :أوجد الرأس ، ومعادلة محور التماثل ،والمقطع الصادي للدالة

ص = -٣س^{٢} + ٦س - ٥

الحل

إيجاد الرأس بالتعويض عن قيمة س بالقيمة الناتجة من معادلة محور التماثل

ص = -٣(١)^{٢} + ٦(١) - ٥

= -٣ + ٦ - ٥

= -٣ + ٦ - ٥ = -٢

الرأس (١ ، -٢)

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

معادلة محور التماثل س = $-\frac{ب}{2أ}$

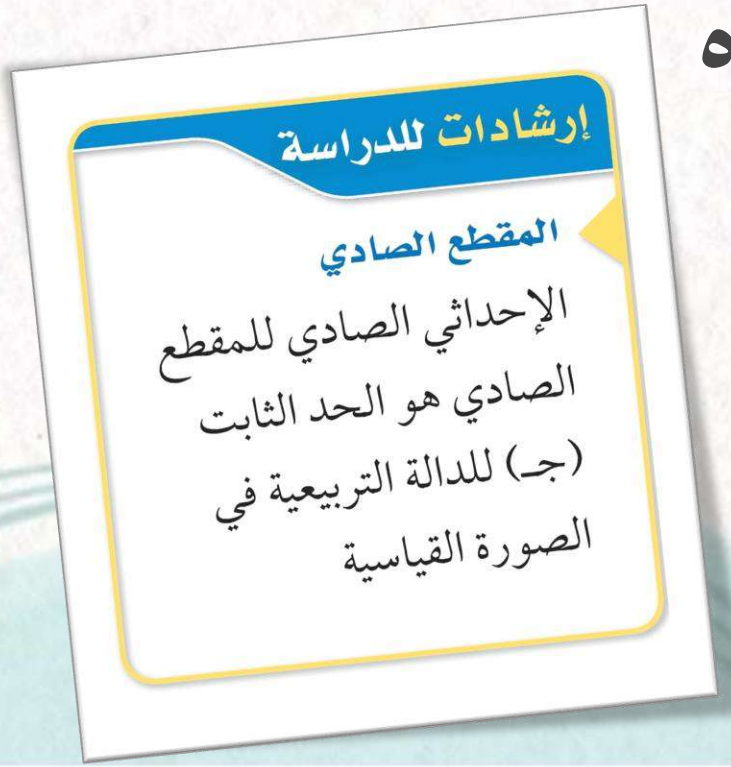
مثال :أوجد الرأس ، ومعادلة محور التماثل ،والمقطع الصادي للدالة

ص = $-٣س^{٢}+٦س-٥$

الحل

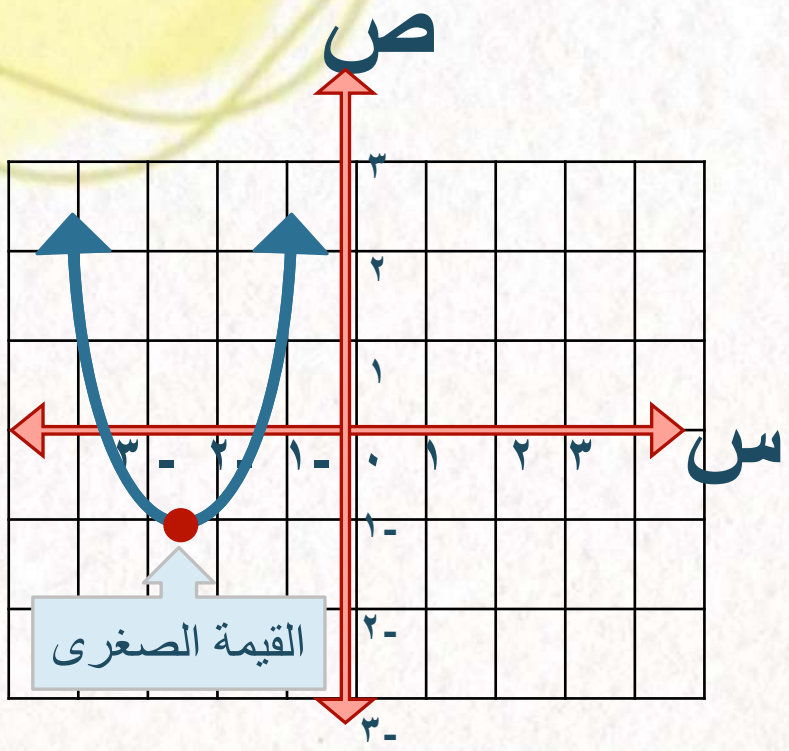
إيجاد المقطع الصادي

الحد الصادي هو -٥



تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

حالات القطع المكافئ



يكون القطع المكافئ للدالة

ص=أس^{٢} +ب س+ج مفتوحاً

إلى أعلى عندما أ>٠

وتمثل أدنى نقطة فيه القيمة الصغرى .

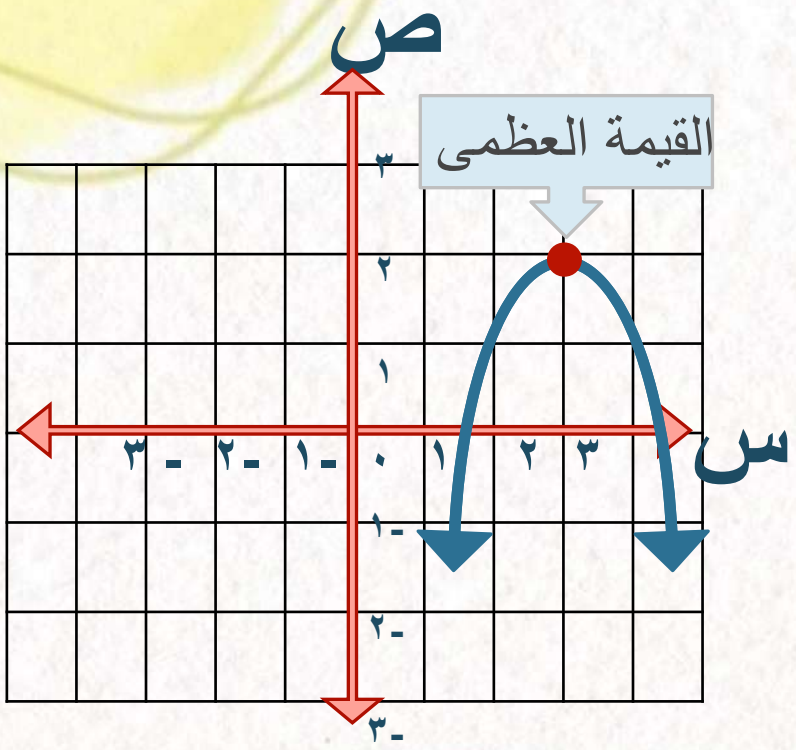
القيمة الصغرى هي الإحداثي الصادي للرأس.

ويكون المدى هي الأعداد الحقيقية

التي تزيد أو تساوي القيمة الصغرى.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

حالات القطع المكافئ



يكون القطع المكافئ للدالة

ص=أس^{٢} +ب س+ج مفتوحاً

إلى أسفل عندما أ< ٠

وتمثل أعلى نقطة فيه القيمة العظمى .

القيمة العظمى هي الإحداثي الصادي للرأس.

ويكون المدى هي الأعداد الحقيقية

التي تقل أو تساوي القيمة العظمى.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

ليكن د(س) = ٢س^{٢}-٤س-١.

أ)حدد فيما إذا كان الدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى .

في الدالة قيمة أ =٢ موجبة ..لذلك القطع المكافئ مفتوح لأعلى ..

الدالة قيمة قيمة صغرى .

ب)أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

القيمة الصغرى هي الإحداثي الصادي للرأس.

الإحداثي السيني = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-(-٤)}{٢\times٢}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

بالتعويض عن س=١ في د(س) = ٢س^{٢}-٤س-١.

١)-١.× د(س) = ٢(١)^{٢}-(٤

٣-=٤-١- د(س) = ٢

ج)حدد مجال الدالة ومداها.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى ص={ص |ص ≥-٣}

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

كيف أمثل الدالة التربيعية بيانيا؟

١- أوجد معادلة محور التماثل.

٢- أوجد الرأس وحدد إذا كان يمثل قيمة صغرى أو عظمى .

٣- أوجد المقطع الصادي للدالة.

٤- إستعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.

٥- صل بين النقاط بمنحنى .

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مثال :مثل الدالة د(س)= -٢س^{٢}+٢س-١ بيانيا .

الحل

١-أوجد معادلة محور التماثل

معادلة محور التماثل

$$س = -\frac{ب}{٢أ}$$

$$س = -\frac{٢}{(-٢)٢} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$$

٢- أوجد الرأس وحدد إذا كان يمثل قيمة صغرى أو عظمى .

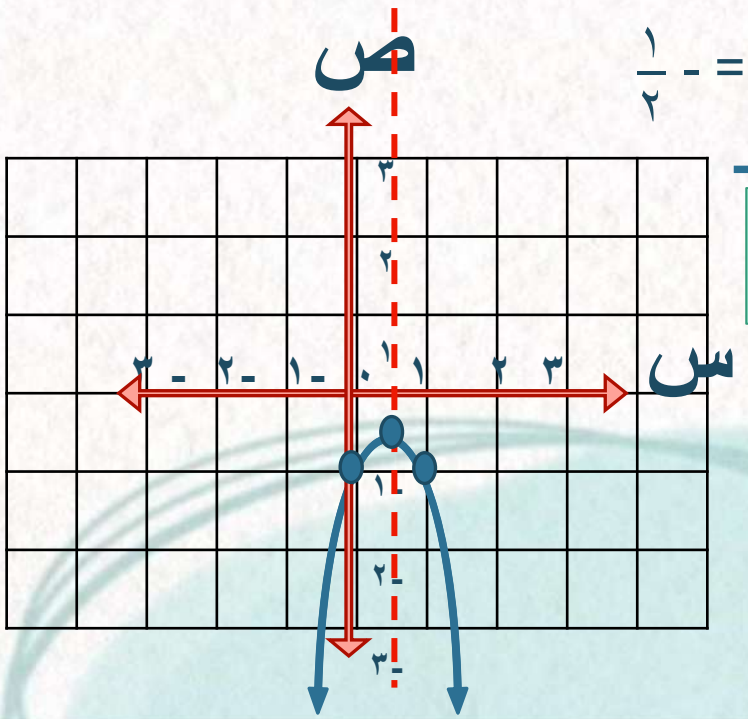
بالتعويض عن قيمة س بالقيمة الناتجة من معادلة محور التماثل

د(س)= -٢س^{٢}+٢س-١

$د(\frac{١}{٢}) = -٢(\frac{١}{٢})^{٢} + ٢(\frac{١}{٢}) - ١$

$د(\frac{١}{٢}) = -٢(\frac{١}{٤}) + ١ - ١ = -\frac{١}{٢}$

محور التماثل س= $\frac{١}{٢}$



٣- أوجد المقطع الصادي للدالة.

بالتعويض عن قيمة س بصفر

د(س)= -٢س^{٢}+٢س-١

د(٠)= -٢(٠)^{٢}+٢(٠)-١ = -١

المقطع الصادي يساوي -١

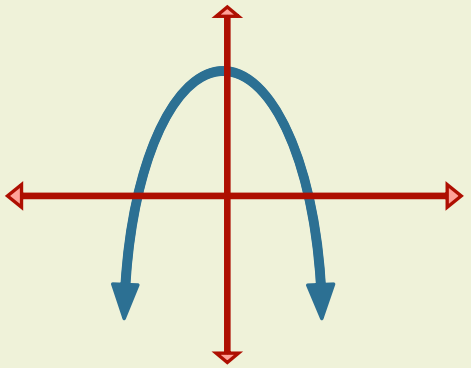
٤-إستعمل التماثل لإيجاد نقطة أخرى على التمثيل البياني للدالة.

٥- صل بين النقاط بمنحنى .

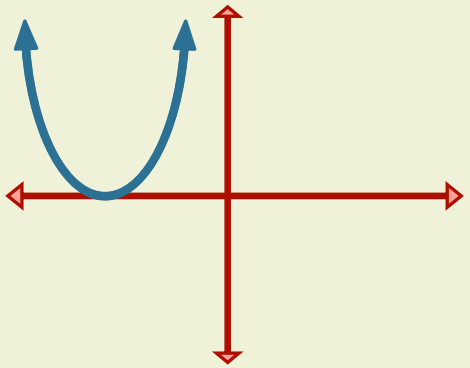
حل المعادلات التربيعية بيانياً

لكتابة الدالة التربيعية على صورة معادلة إستبدل
ص أو د(س) بصفر

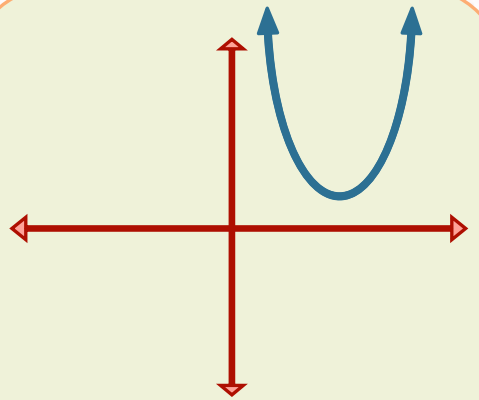
حلول المعادلات التربيعية.



حلان حقيقيان مختلفان.



حل حقيقي واحد



لا يوجد حلول حقيقية

حل المعادلات التربيعية بيانياً

مثال :حل المعادلة س^{٢}-٤س+٣ = ٠ بيانيا .

الحل

بتمثيل الدالة د(س)=س^{٢}-٤س+٣

١-أوجد معادلة محور التماثل.

معادلة محور التماثل

$$س = -\frac{ب}{٢أ}$$

$$س = -\frac{(٤-)}{(١)٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

٢-أوجد الرأس وحدد إذا كان يمثل قيمة صغرى أو عظمى .

بالتعويض عن قيمة س بالقيمة الناتجة من معادلة محور التماثل

د(س)= س^{٢}-٤س+٣

د(٢)= (٢)^{٢}-٤(٢) +٣

د(٢)= ٤ - ٨+٣=-١

٣- أوجد المقطع الصادي للدالة.

بالتعويض عن قيمة س بصفر

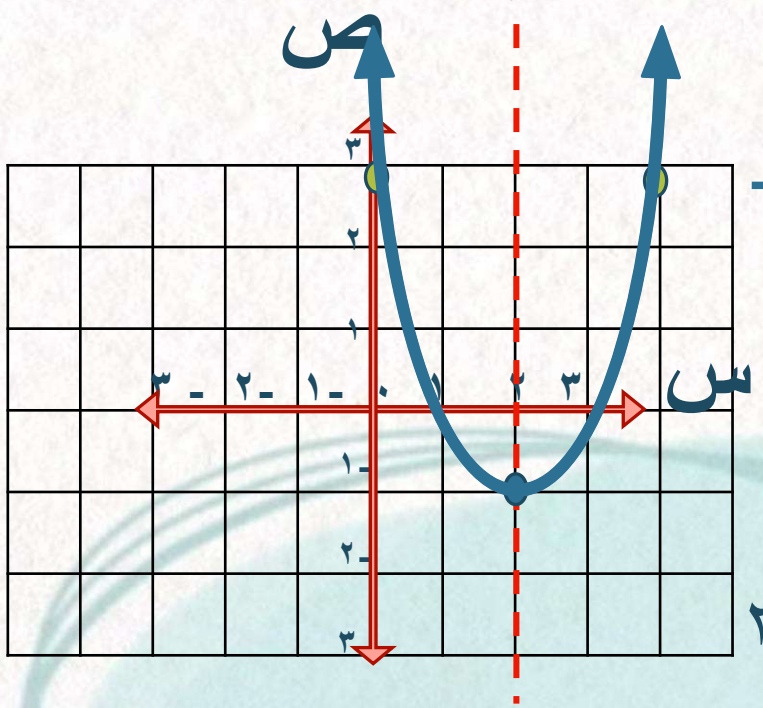
د(س)= س^{٢} س+٣

د(٠)= (٠)^{٢} (٠)-١ = -١

المقطع الصادي يساوي -١

٤- إستعمل التماثل لإيجاد نقطة أخرى على التمثيل البياني للدالة.

٥- صل بين النقاط بمنحنى .



للمعادله حلان هما ١و ٣

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

خطوات إكمال المربع

لإكمال المربع في أي عبارة تربيعيه على الصورة $س^{٢}+ب\ س$ ، اتبع الخطوات الآتية :

١- أوجد نصف ب (معامل س)

٢- ربّع الناتج في الخطوه ١

٣- أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $س^{٢}+ب\ س$ ، ثم اكتب العبارة على صورة مربع كامل .

ونكتب : $س^{٢}+ب\ س+(\frac{ب}{٢})^{٢}=(س+\frac{ب}{٢})^{٢}$

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

أوجد قيمة ج التي تجعل ثلاثية الحدود $ر^{٢}$ -٨ر+ج مربعاً كاملاً .

الحل

١- أوجد نصف ٨ =٤

٢- ربّع الناتج $(٤)^{٢}$ =١٦

٣-أضف الناتج إلى $ر^{٢}$ -٨ر ،

$ر^{٢}$ -٨ر+ ١٦= $(ر +٤)^{٢}$

يمكن استعمال طريقة إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية، والتي تتطلب فصل الحدين $س^{٢}$ +ب س

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

حل المعادلة :$س^{٢}$ -١٢س +٣=٨ بإكمال المربع.

الحل

$س^{٢}$ -١٢س =٥

بطرح ٣ من الطرفين

$س^{٢}$ -١٢س +٣٦=٥+٣٦

بما أن $(\frac{-١٢}{٢})^{٢}$=٣٦ ، لذا نضيف ٣٦ إلى الطرفين

س٢ -١٢س +٣٦=٤١

$(س-٦)^{٢}$=٤١

حلل $س^{٢}$-١٢س+٣٦

س-٦ = $\pm$ $\sqrt{٤١}$ = $\pm$ ٦,٤

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

س-٦ = ٦,٤

س= ٠,٤

س-٦ = - ٦,٤

س= ١٢,٤

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

لحل معادلة تربيعية
معاملها الرئيس لا
يساوي ١ ، أقسم كل
حد على هذا المعامل ،
ثم أفصل الحدين اللذين
يحتويان $س^{٢}$ ، س ثم
أكمل المربع .

حل المعادلات التربيعية بإستعمال القانون العام

حل المعادلة التربيعية :

أس^{٢} +ب س+ج=٠ ،

حيث أ=٠ يعبر عنه

بالقانون العام :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أج}}{٢أ}$$

حل المعادلات التربيعية بإستعمال القانون العام

تنبيه !

الحلول

لا يُعدّ نوع الطريقة المستعملة لحل المعادلة التربيعية مهمًّا، إذ إن جميع الطرق تُعطي الحل نفسه أو الحلول نفسها.

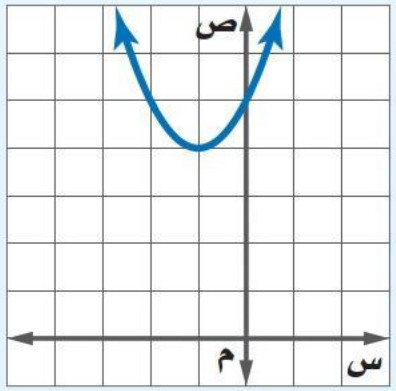
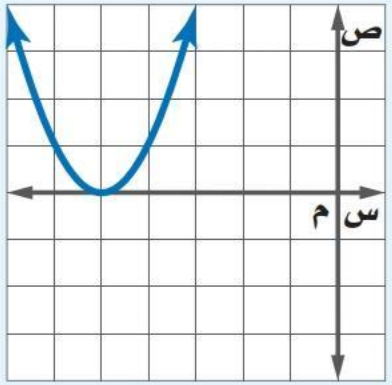
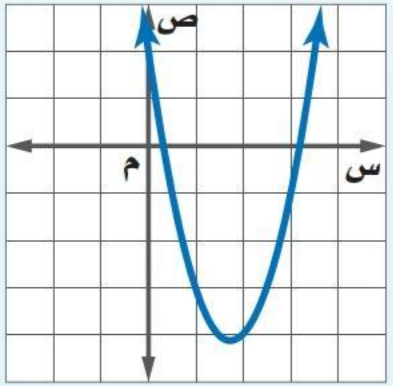
حل المعادلات التربيعية بإستعمال القانون العام

في القانون العام ، تسمى العبارة التي تحت الجذر (ب^{٢} -٤أج) المميز ، ويمكنك استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية .

حل المعادلات التربيعية بإستعمال القانون العام

مفهوم أساسي

استعمال المميز

المعادلة	$س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠$	$س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠$	$٢س^{٢} - ٧س + ٢ = ٠$
المميز	$ب^{٢} - ٤أ جـ = -١٦$ سالب	$ب^{٢} - ٤أ جـ = ٠$ صفر	$ب^{٢} - ٤أ جـ = ٣٣$ موجب
تمثيل الدالة المرتبطة	 عدد المقاطع السينية = ٠	 عدد المقاطع السينية = ١	 عدد المقاطع السينية = ٢
عدد الحلول الحقيقية	٠	١	٢

رياضيات

للصف الثالث متوسط

الفصل الدراسي الثاني

المعادلات الجذرية والمثلثات

حل المعادلات التربيعية بإستعمال القانون العام

حل المعادلة $٣س^{٢}+٥س=١٢$ إستعمال القانون العام .

أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية

الحل

$٣س^{٢}+٥س-١٢=٠$ بطرح ١٢ من الطرفين

طبّق القانون العام $س=\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢}-٤أجـ}}{٢أ}$

$$= \frac{-(٥) \pm \sqrt{(٥)^{٢}-٤(٣)(-١٢)}}{(٣)٢}$$

$$= \frac{-(٥) \pm \sqrt{(٢٥)+١٤٤}}{٦}$$

$$= \frac{-(٥) \pm \sqrt{١٦٩}}{٦} = \frac{-(٥) \pm ١٣}{٦} =$$

$$\frac{-(٥)-١٣}{٦} = -٣$$

$$\frac{-(٥)+١٣}{٦} = \frac{٤}{٣}$$

تبسيط العبارات الجذرية

خاصية ضرب الجذور التربيعية

$\sqrt{أ ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$ حيث أ ≥ ٠ ، ب ≥ ٠

مثال :بسط العبارة $\sqrt{٥٤}$

$\sqrt{٥٤} = \sqrt{٢ \times ٣ \times ٣ \times ٣}$ التحليل إلى عوامل

$= \sqrt{٢ \times ٣} \times \sqrt{٣^{٢}}$ خاصية ضرب الجذور

$= ٣\sqrt{٦}$

تبسيط العبارات الجذرية

مثال :بسط العبارة $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠}$

الحل

$$\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٧}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= \sqrt{٢٢} \times \sqrt{٧}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= \sqrt{٢} \sqrt{٧}$$

تبسيط العبارات الجذرية

مثال :بسط العبارة $\sqrt{٣٢\ ر^{٢}\ ك^{٤}\ ت^{٥}}$

الحل

التحليل إلى عوامل أولية

$$= \sqrt{٢\times٢\times٢\times٢\times٢\times ر^{٢}\times ك^{٤}\times ت^{٥}}$$

$$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{ر^{٢}} \times \sqrt{ك^{٢}} \times \sqrt{ك^{٢}} \times \sqrt{ت^{٢}} \times \sqrt{ت^{٢}} \times \sqrt{ت}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= ٢ \times ٢ \times \sqrt{٢ \times ر \times ك \times ك \times ت \times ت \times ت}$$

$$= ٤ \sqrt{٢\ ر\ ك^{٢}\ ت^{٢}\ ت}$$

تبسيط العبارات الجذرية

خاصية قسمة الجذور التربيعية

$$\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$$

حيث أ ≥ ٠ ، ب > ٠

مثال: بسط العبارة $\sqrt{\frac{٤٥}{١٠}}$

الحل

$$= \sqrt{\frac{٩ \times ٥}{٢ \times ٥}}$$

$$= \frac{\sqrt{٢٣}}{\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{٢} \times ٣}{\sqrt{٢} \times ٢}$$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$$

إنطاق المقام

إرشادات للاختبار

تبسيط:

انظر أولاً إلى ما تحت الجذر إن كان يمكن تبسيطه؛ لأن ذلك يجعل حساباتك أبسط.

العمليات على العبارات الجذرية

جمع عبارات ماتحت جذورها غير متشابهه وطرحها

إرشادات للدراسة

بسّط:

يجب تبسيط كل حد جذري أولًا، ثم إجراء العمليات الحسابية المطلوبة.

بسط العبارة $\sqrt[4]{54} + 2\sqrt[4]{24}$

الحل

$\sqrt[4]{54} + 2\sqrt[4]{24}$

$\sqrt[4]{9\times6} + 2\sqrt[4]{4\times6}$

$\sqrt[4]{3^2\times6} + 2\sqrt[6]{2^2\times6}$

$\sqrt[12]{6} + \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{16}$

العمليات على العبارات الجذرية

ضرب العبارات الجذرية
باستخدام خاصية التوزيع

بسط العبارة $٢\sqrt{٦} \times ٧\sqrt{٣}$

الحل

$= (٢\times٧)\left(\sqrt{٦}\times\sqrt{٣}\right)$

$= ١٤\sqrt{١٨}$

$= ١٤\sqrt{٩\times٢}$

$= ١٤\sqrt{٣\times٢} = ٤٢\sqrt{٢}$

المعادلات الجذرية

إذا ربّعت طرفي معادلة صحيحة ، فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة .

لحل معادلة جذرية :اجعل الجذر في طرف من المعادلة أولاً ، ثم ربّع طرفيها .

حل المعادلة

$\sqrt{١٠ ن + ١} = ٢١$

الحل

$\sqrt{١٠ ن} = ٢١ - ١$

بطرح ١من الطرفين

$\sqrt{١٠ ن} = ٢٠$

بتربيع الطرفين

$١٠ ن = ٢٠^{٢}$

$١٠ ن = ٤٠٠$

بالقسمة على ١٠

$ن = ٤٠$

المعادلات الجذرية

ينتج عن تربيع طرفي المعادلة أحياناً حل لا يحقق المعادلة الأصلية .

وهذه الحلول تسمى حلولاً دخيلة ، لذا عليك التحقق من الحلول كلها في المعادلة الأصلية .

حل المعادلة $\sqrt{\text{ت} + ٥} = \text{ت} + ٣$

الحل

$\text{ت} + ٥ = (\text{ت}+٣)^{٢}$ بتربيع الطرفين

$\text{ت} + ٥ = \text{ت}^{٢} + ٢ \times ٣ \times \text{ت} + ٣^{٢}$ مفكوك مربع حاصل الجمع

$\text{ت} + ٥ = \text{ت}^{٢} + ٦\text{ت} + ٩$

$٠ = \text{ت}^{٢} + ٥\text{ت} + ٤$

$٠ = (\text{ت}+١)+(\text{ت} + ٤)$

إما $\text{ت}+١=٠$ أو $\text{ت} + ٤=٠$

إما $\text{ت}+١=٠$ أو $\text{ت} + ٤=٠$

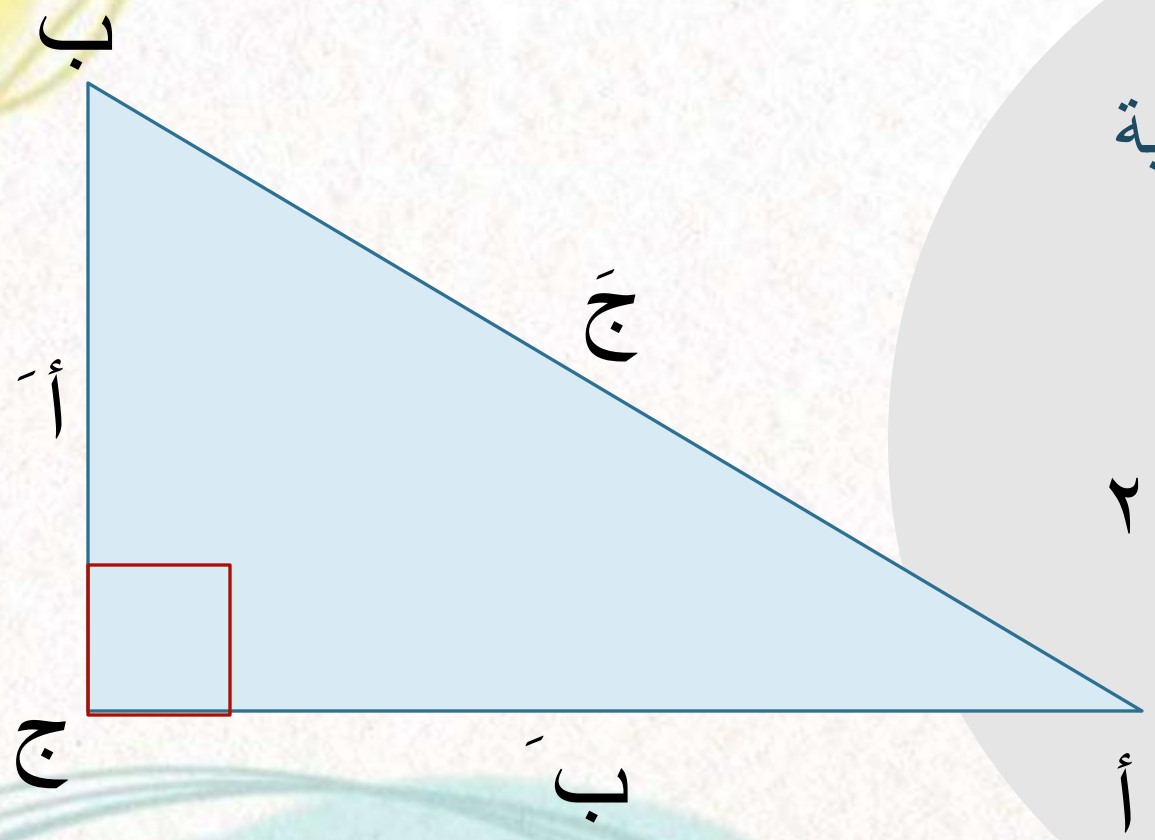
$\text{ت}=-١$ $\text{ت} =-٤$

بالتعويض عن قيم ت في المعادلة المعطاة

$-١+٥=-١+٣$ $-٤+٥=-٤ +٣$

$٤ =٢$ ✓ $١ = -١$ ✗

نظرية فيثاغورس

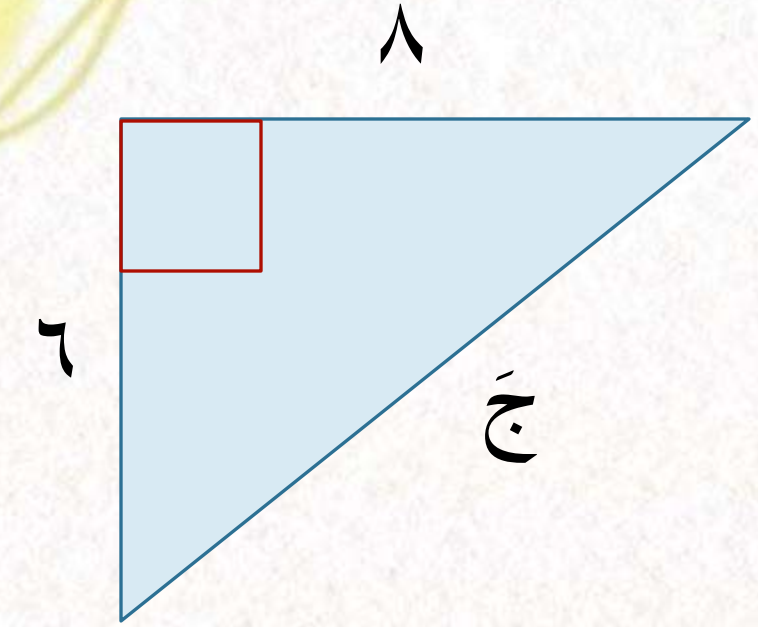


إذا كان المثلث قائم الزاوية
فإن مربع الوتر يساوي
مجموع مربعي ضلعيه.

$$جَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢}$$

نظرية فيثاغورس

أوجد طول الضلع المجهول



الحل

$$جَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢}$$

$$جَ^{٢} = ٦^{٢} + ٨^{٢}$$

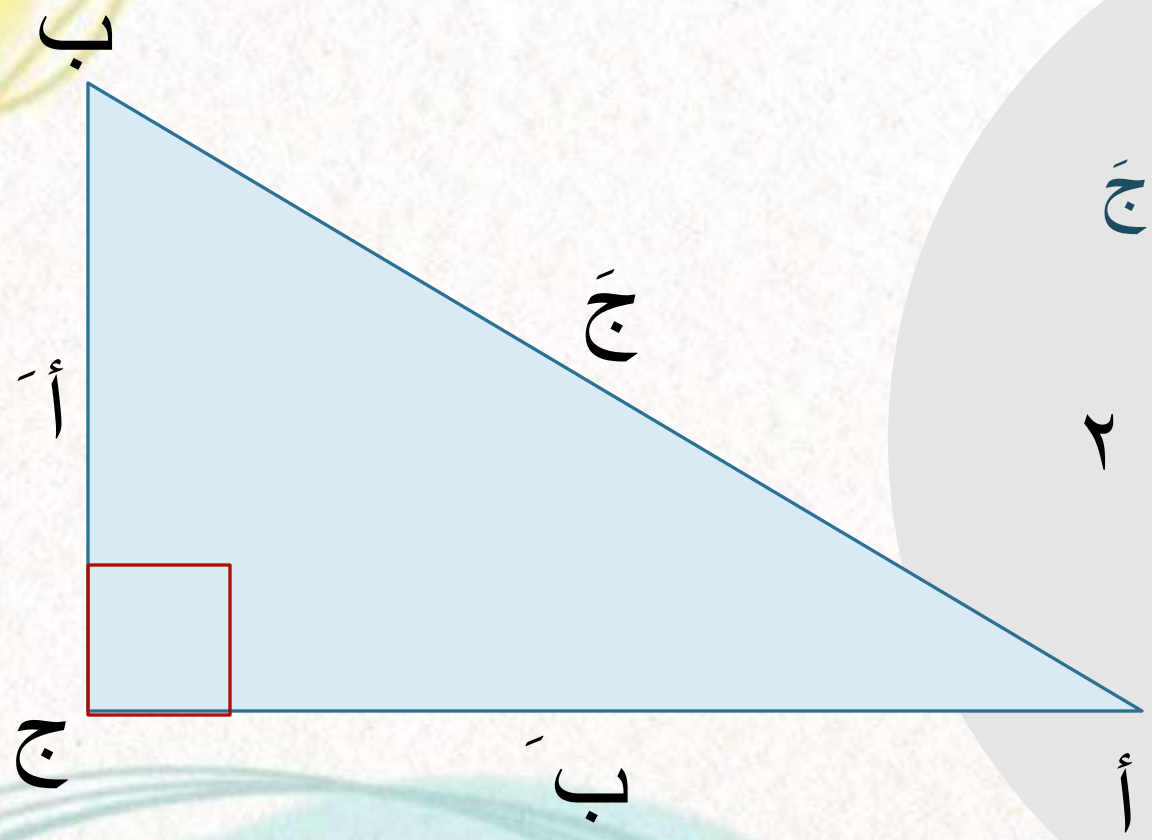
$$= ٣٦ + ٦٤$$

$$= ١٠٠$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $جَ = \sqrt{١٠٠}$

$$جَ = ١٠$$

نظرية فيثاغورس



إذا كانت الأطوال أَ ، بَ ، جَ
تحقق المعادلة

$$جَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢}$$

فإن المثلث قائم الزاوية

حدد إذا كانت الأطوال ٦،١٢،١٨ تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا

الحل

$$جَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢}$$

$$(١٨)^{٢} \stackrel{؟}{=} (٦)^{٢} + (١٢)^{٢}$$

$$٣٢٤ \stackrel{؟}{=} ٣٦ + ١٤٤$$

$$٣٢٤ \neq ١٨٠$$

تذكر
الوتر هو أطول ضلع في المثلث القائم الزاوية

الأطوال لا تحقق نظرية فيثاغورس
إذن المثلث غير قائم الزاوية..

المسافة بين نقطتين

المسافة بين نقطتين إحداثياتهما $(س_1، ص_1)، (س_2، ص_2)$ يعبر عنها بالقانون :

$$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

يمكنك استعمال هذا القانون لإيجاد المسافه بين أي نقطتين على المستوى الإحداثي

المسافة بين نقطتين

أوجد المسافة بين النقطتين (٤، ٢) ،(-٣،-١)

الحل

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$= \sqrt{(-٣ - ٤)^٢ + (-١ - ٢)^٢}$$

$$= \sqrt{(-٧)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٤٩ + ٩} = \sqrt{٥٨}$$

المسافة بين نقطتين

أوجد القيم الممكنة للمتغير(أ) إذا كانت المسافه بين النقطتين (٢، أ) ،(-٦، ٢) تساوي ١٠ وحدات .

الحل

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$١٠ = \sqrt{(-٦ - ٢)^٢ + (-٢أ)^٢} = \sqrt{٦٤ + (-٢أ)^٢}$$

مربع الفرق بين حدين

$$١٠٠ = ٦٤ + (٢)^٢ - ٢(٢)×أ + أ^٢ = ٦٤ + أ^٢ + ١٢أ + ٤$$

$$١٠٠ = أ^٢ + ٤أ + ٦٨$$

بطرح ١٠٠ من الطرفين

$$٠ = أ^٢ + ٤أ - ٣٢ = (أ - ٨)(أ + ٤)$$

إما أ - ٨ = ٠ ⟵ أ = ٨

أو أ + ٤ = ٠ ⟵ أ = -٤

المسافة بين نقطتين

يستعمل القانون :

$$م = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$$

لإيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتها النقطتين (س١،ص١) وَ(س٢،ص٢)

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين (-١،-٢) ، (٣، -٤).

الحل

قانون نقطة المنتصف

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{-٢ + (-٤)}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{-٦}{٢} \right) = (١ ، -٣)$$

المثلثات المتشابهة

إذا تشابه مثلثان ، فإن
قياسات زواياهما
المتناظرة متساوية ،
وقياسات أضلاعهما
المتناظرة متناسبة ،

حدد ما إذا كان △ أ ب ج والذي فيه أب =٦ ، ب ج = ١٦ ، أج =٢٠ يشابه △ع ك ل ، حيث ع ك =٣ ، ك ل =٨ ، ع ل =٩ . وفسر إجابتك .

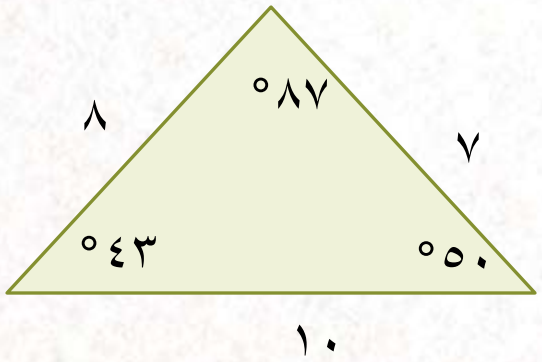
الحل

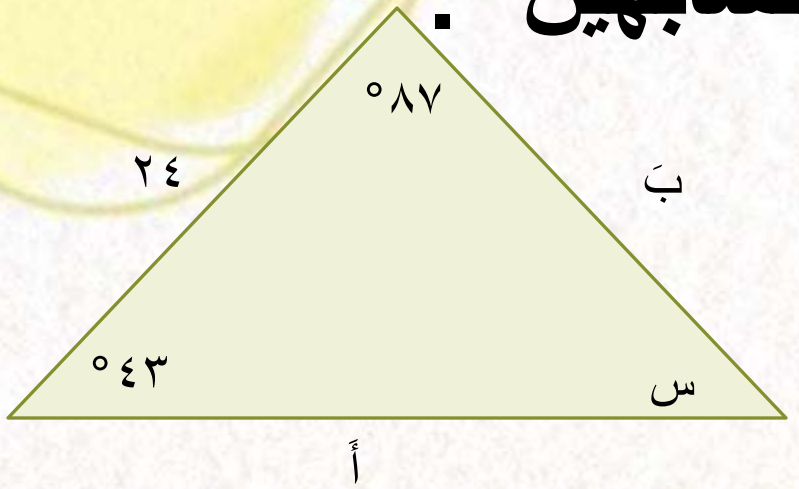
إذا كان المثلثان متشابهان، فإن أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

$$\frac{\text{أب}}{\text{ع ك}} = \frac{٦}{٣} = ٢ \qquad \frac{\text{ب ج}}{\text{ك ل}} = \frac{١٦}{٨} = ٢ \qquad \frac{\text{أج}}{\text{ع ل}} = \frac{٢٠}{٩} = ٢\frac{٢}{٩}$$

بما أن الأضلاع المتناظره غير متناسبه .. فإن المثلثين غير متشابهين

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين .





الحل

بما أن المثلثان متشابهان،
فإن أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

$$\frac{\text{أ}}{١٠} = \frac{\text{بَ}}{٧} = \frac{٢٤}{٨} = ٣$$

$$\frac{\text{أ}}{١٠} = ٣ \Leftarrow \text{أ} = ٣ \times ١٠ = ٣٠$$

$$\frac{\text{بَ}}{٧} = ٣ \Leftarrow \text{بَ} = ٣ \times ٧ = ٢١$$

الزاوية س تساوي الزاوية المناظرة لها س = °٥٠

النسب المثلثية

إرشادات للدراسة

تذكّر رموز أطوال أضلاع المثلث

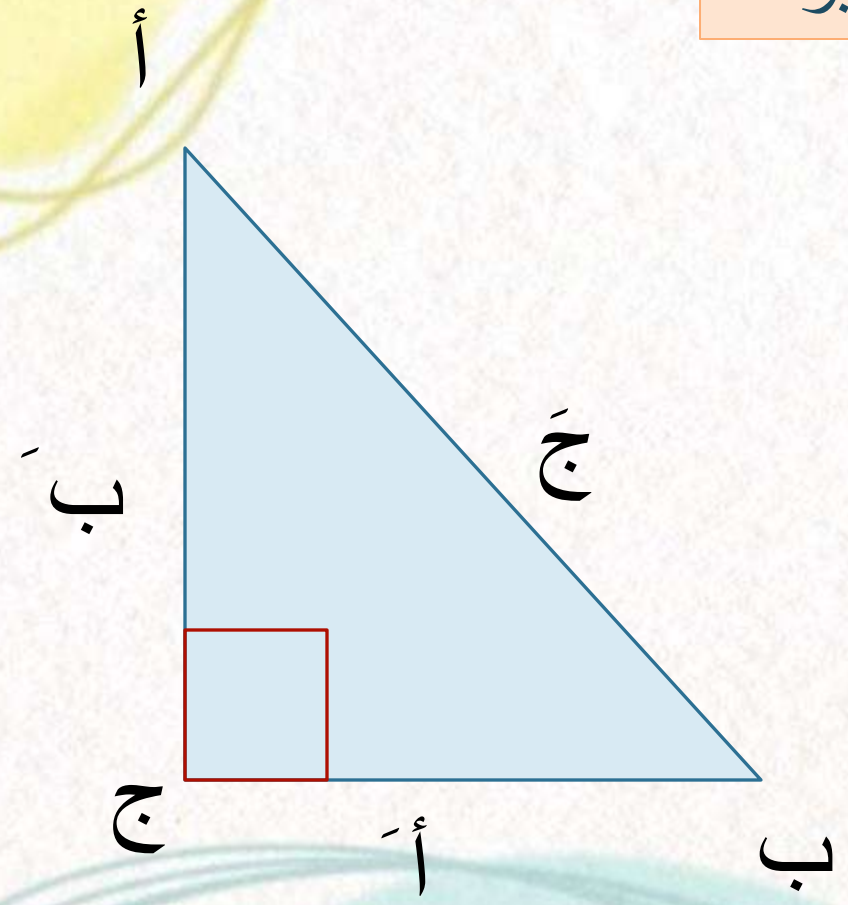
يُرمز إلى طول الضلع المقابل للرأس أ في المثلث أ ب جـ بالرمز أَ، وإلى طول الضلع المقابل للرأس ب بالرمز بَ، وإلى طول الضلع المقابل للرأس جـ بالرمز جَـ.

النسب المثلثية

حساب المثلثات هو
دراسة العلاقة بين زوايا
المثلث وأضلاعه، والنسب
المثلثية هي النسبة التي
تقارن بين طولي ضلعين
من أضلاع المثلث القائم

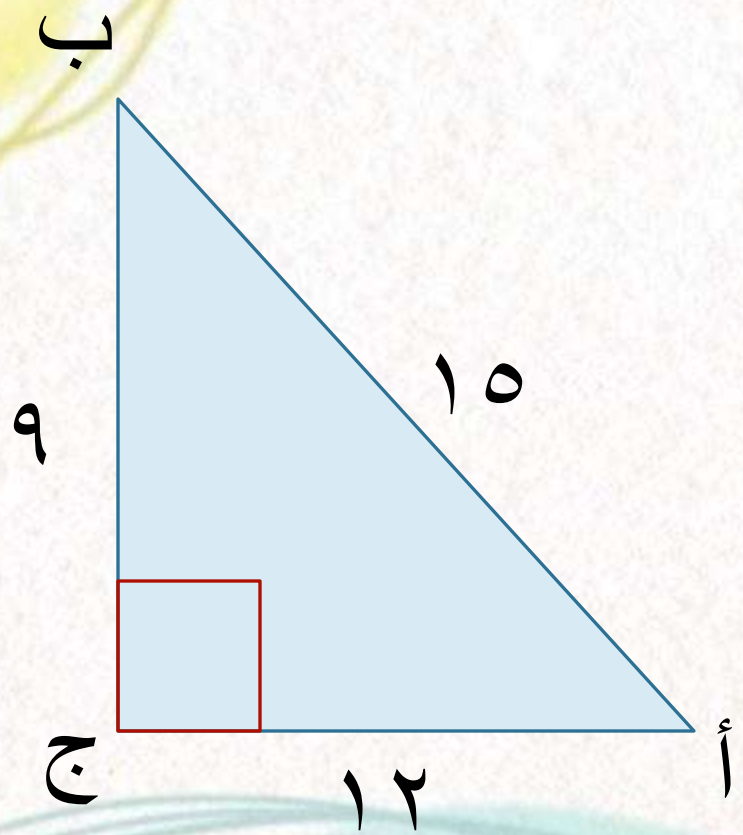
النسب المثلثية

النسب المثلثية الأكثر شيوعاً



التعبير اللفظي	الرموز
جيب الزاوية أ = الضلع المقابل للزاوية أ / الوتر	جا أ = أَ / جَ
طيب تمام الزاوية أ = الضلع المجاور للزاوية أ / الوتر	جتا أ = ب َ / جَ
ظل الزاوية أ = الضلع المقابل للزاوية أ / الضلع المجاور للزاوية أ	ظا أ = أَ / ب َ

أوجد قيم النسب المثلثية للزاوية ب .



الحل

$$\text{جا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$$

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$$

النسب المثلثية

حل المثلث هو إيجاد القياسات المجهولة لأضلاعه وزواياه

معكوس الدوال المثلثية : إذا كانت ∠أ زاوية حادة وكان :

معكوس جيب س	معكوس جيب تمام س	معكوس ظل س
إذا كان جا أ =س فإن جا$^{-1}$س =ق∠أ	إذا كان جتا أ =س فإن جتا$^{-1}$س =ق∠أ	إذا كان ظا أ =س فإن ظا$^{-1}$س =ق∠أ

رياضيات

للصف الثالث متوسط

الفصل الدراسي الثاني

الإحصاء والإحتمال

تصميم دراسة مسحية

تعد العينة جزءاً من مجموعة أكبر تسمى المجتمع . وحيث إن فحص كل عنصر في المجتمع أمر غير عملي ، يتم إختيار عينة لتمثل هذا المجتمع . وبعد تحليل النتائج الخاصة بالعينة يمكن التوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملاً . وكلما كان حجم العينة أكبر أو استعملت عينات أكثر كانت النتائج اكثر تمثيلاً للمجتمع .

تصميم دراسة مسحية

أساليب جمع البيانات

الأسلوب	التعريف/ الاستعمال	مثال
الدراسة المسحية	• تؤخذ البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع.	لتحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالبًا عن رأيهم في فقرات الإذاعة.
الدراسة القائمة على الملاحظة	• تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة. • لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع.	تراقب شركة لصناعة الدمى بعض الأطفال وهم يلعبون، وتلاحظ نوع الدمى التي يفضلونها أكثر. ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر السنتين يفضلون الدمى التي تصدر أصواتًا على تلك التي لا تصدر أصواتًا.
التجربة	• تُسجّل البيانات بعد تغيير العينة. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثةٍ ما.	يقوم مراقب ضبط الجودة بتشغيل آلة بسرعة معينة عشر مرات، فإذا وجد أن المنتج يكون معيبًا في كل مرة فإنه يستنتج أن المنتج سيكون معيبًا في كل مرة تدور فيها الآلة بهذه السرعة.

أساليب جمع البيانات

إذا كانت طريقة اختيار العينة ذات تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى فإن العينة تكون عينة متحيزة

وتكون العينة غير متحيزه إذا كان لكل فرد منها الإحتمال نفسه في الإختيار تسمى عينة عشوائية

تصميم دراسة مسحية

العينات العشوائية

النوع	التعريف	مثال
العينة العشوائية البسيطة	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأي عينة أخرى من المجتمع.	سحب أرقام مئة طالب من كيس، وإخضاع هؤلاء الطلاب لدراسة مسحية.
العينة العشوائية الطبقية	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.	يختار الباحث عينات من صفوف مختلفة من الطلاب بناءً على النسبة المئوية لهذه الصفوف في المدرسة؛ ليعكس التنوع في صفوف المدرسة.
العينة العشوائية المنتظمة	العينة التي يُختار أفرادها تبعًا لزمن معين أو فترة زمنية محددة.	تُفحص قطعة من خط إنتاج كل عشر دقائق، أو تُفحص قطعة من كل ٥٠ قطعة.

تحليل نتائج الدراسة المسحية

تلخيص نتائج الدراسة المسحية : بعد جمع البيانات من الدراسة المسحية، فإنها تحتاج إلى تلخيصها كي تكون ذات معنى. ويمكن تلخيص بيانات الدراسة المسحية باستعمال مقاييس النزعة المركزية .

النوع	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسومًا على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.	عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

تحليل نتائج الدراسة المسحية

بعض البيانات لا يمكن تحليلها باستعمال الطرق الإحصائية، لكن **البيانات الكمية** التي تُعطى بصورة قيم عددية يمكن تحليلها. مثّل درجات الاختبارات أو ساعات الدراسة، أو أوزان الأجسام. بينما **البيانات النوعية** لا يمكن أن تأخذ قيمة عددية، ومن أمثلتها: الجنس أو الجنسية أو البرنامج التلفزيوني المفضل. ويمكن أحيانًا أن تكون البيانات كمية ولا نستطيع أن نجد مقاييس النزعة المركزية، ويحدث هذا عندما تمثل البيانات أشياء مختلفة؛ أي لا تكون الأعداد أو النسب للشيء نفسه.

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع: تُستعمل في هذا الموقف إحصائيات العينة للتوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملًا. وهو ما يُسمى **الإحصاء الاستدلالي**. وفي الموقف المذكور أعلاه يسحب كل طالب عينة من قطع النقد من الوعاء، حيث تمثل قطع النقود الألف المجتمع. و**الإحصائي**: مقياس يصف إحدى خصائص العينة. أما **المَعْلَمَة** فهي مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع. ويتم تقدير معالم المجتمع بناءً على إحصائيات عينة عشوائية ممثلة. وتتغير قيمة الإحصائي عادة من عينة إلى أخرى إلا أن معلمة المجتمع تبقى ثابتة؛ لأنها تمثّل المجتمع كاملًا.

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

التحليل الإحصائي: تُسمّى البيانات التي تتضمن متغيرًا واحدًا **بيانات وحيدة المتغير**. ويمكن التعبير عن هذه البيانات بمقاييس النزعة المركزية مثل المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. كما يمكن التعبير عنها أيضًا **بمقاييس التشتت** مثل المدى والربيعات والمدى الربيعي.

مفهوم أساسي — **مقاييس التشتت**

المقياس	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المدى	الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.	لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات.
الربيعات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.	لتحديد القيم الواقعة في الجزء الأعلى أو الجزء الأسفل من مجموع البيانات.
المدى الربيعي	مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات؛ وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.	لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات.

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات.
تذكّر أن القيمة المطلقة لعدد معين هي بعده عن الصفر على خط الأعداد.

مفهوم أساسي — **الانحراف المتوسط**

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي.

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي.

الخطوة ٣: اقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات.

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

قراءة: سأل معلم طلابه عن عدد الكتب التي يقرؤونها أسبوعيًّا. وقد تلقّى الإجابات الآتية: ٢، ٢، ٣، ٤، ١٤. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ١: المتوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي ٥

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي.

$$|٢ - ٥| + |٢ - ٥| + |٣ - ٥| + |٤ - ٥| + |١٤ - ٥| = ٣ + ٣ + ٢ + ١ + ٩ = ١٨$$

الخطوة ٣: اقسم المجموع على عدد القيم: $١٨ \div ٥ = ٣,٦$

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

الانحراف المعياري هو القيمة التي تُحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. ويُرمز إليه بالرمز "ع". أما **تباين** مجموعة من البيانات فهو مربع الانحراف المعياري لتلك البيانات.

خطوات حساب التباين والإنحراف المعياري

الخطوة ١ : أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$.

الخطوة ٢ : أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لتحصل على التباين.

الخطوة ٣ : أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة للأعداد ٣، ٦، ١١، ١٢، ١٣.

الخطوة ١: لإيجاد المتوسط الحسابي اجمع قيم البيانات، ثم اقسم المجموع على عددها.

$$\overline{س} = \frac{٣ + ٦ + ١١ + ١٢ + ١٣}{٥} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$

الخطوة ٢: لإيجاد التباين أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم.

$$ع^{٢} = \frac{(٣ - ٩)^{٢} + (٦ - ٩)^{٢} + (١١ - ٩)^{٢} + (١٢ - ٩)^{٢} + (١٣ - ٩)^{٢}}{٥}$$

$$= \frac{(-٦)^{٢} + (-٣)^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢}}{٥}$$

$$= \frac{٣٦ + ٩ + ٤ + ٩ + ١٦}{٥} = \frac{٧٤}{٥}$$

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

الخطوة ٣: الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$ع^{٢} = \frac{٧٤}{٥}$ التباين

$\sqrt{ع^{٢}} = \sqrt{\frac{٧٤}{٥}}$ أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$ع \approx ٣,٨$ استعمل الحاسبة

المتوسط الحسابي ٩، والتباين $\frac{٧٤}{٥}$ ، والانحراف المعياري ٣,٨ تقريبًا.

التوافيق والتباديل

التباديل: تُسمى قائمة جميع الأشخاص أو الأشياء في مجموعة معينة **فضاء العينة**. وعندما تُنظّم العناصر، بحيث يكون ترتيبها مهمًّا، وتُكتب جميع التراتيب الممكنة لهذه العناصر، يُسمَّى كلٌّ من هذه التراتيب **تبديلًا**.

المضروب

التعبير اللفظي: **مضروب** العدد الصحيح الموجب (ن)، هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن (ن) أو تساويه.

الرموز: $ن! = ن (ن - ١) (ن - ٢) (ن - ٣) \times ... \times ١$، $ن \geq ١$، أيضاً $٠! = ١$

قانون التباديل

التعبير اللفظي: عدد التباديل لعناصر عددها (ن) مأخوذة (ر) عنصرًا في كل مرة هو ناتج قسمة ن! على (ن – ر)!

الرموز: $ن ل ر = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

التوافيق و التباديل

مكتبة: يريد أمين المكتبة أن يعرض ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة على رفٍّ. فبكم طريقة يمكنه ذلك؟

$$ن\,ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$ قانون التباديل

$$١٠\,ل_{٦} = \frac{١٠!}{(١٠ - ٦)!}$$ ن= ١٠، ر= ٦

$$= \frac{١٠!}{٤!}$$ بسّط

$$= \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= ١٥١٢٠٠$$ بسّط

التوافيق و التباديل

التوافيق: يُسمّى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية **التوافيق**. ولإيجاد التوافيق المكوّنة من حرفين من بين الحروف أ، ب، جـ يجب أن تكتب جميع التراتيب التي يتكون كلٌّ منها من حرفين وهي:

أ ب　　ب أ　　أ جـ　　جـ أ　　ب جـ　　جـ ب

وبما أن الترتيب غير مهم في التوافيق، فإن أب وَ ب أ يمثّلان الاختيار نفسه. أيْ أن هناك ٢! طريقة لكتابة الحرفين من دون ترتيب؛ لذا اقسم عدد التباديل ^{ن}ل $_{ر}$ على ٢! لحذف عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها.

قانون التوافيق

التعبير اللفظي: عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذة (ر) عنصرًا كل مرة، يساوي ناتج قسمة ن! على (ن– ر)! ر!

الرموز:

$$ق_{ر}^{ن} = \frac{ن!}{(ن - ر)!ر!}$$

التوافيق و التباديل

وظائف: أعلنت شركة عن ٥ وظائف شاغرة لديها، فتقدم للإعلان ٨ أشخاص. بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمس؟

$$ن\,ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!ر!}$$ قانون التوافيق

$$= \frac{!٨}{!٥!(٥ - ٨)}$$ ن =٨، ر= ٥

$$= \frac{!٨}{!٥!٣}$$ بسّط

$$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= \frac{٣٣٦}{٦} = ٥٦$$ هناك ٥٦ طريقة لشغل الوظائف

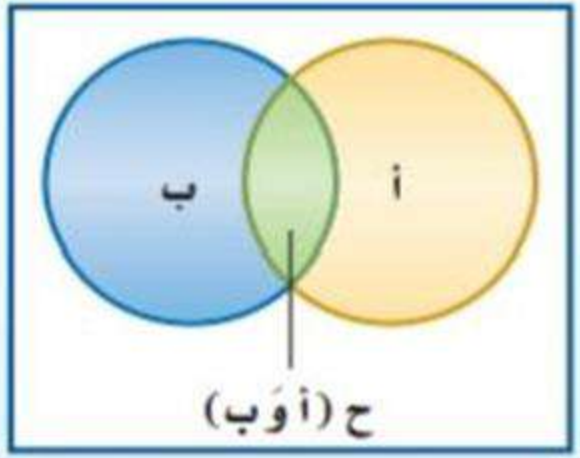
احتمال الحوادث المركبة

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة : تذكّر أن الحادثة الواحدة، مثل الطيران إلى جدة تُسمى حادثة بسيطة. وأن **الحادثة المركبة** تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر. فاحتمال وصول الطائرة في موعدها وعدم فقدان الأمتعة مثال على الحادثة المركبة. وقد لا يؤثر وصول الطائرة في موعدها على فقدان الأمتعة أو عدمه، وتُسمّى هاتان الحادثتان **حادثتين مستقلتين**؛ لأن نتيجة إحداهما لا تؤثر فى نتيجة الأخرى.

احتمال الحوادث المستقلة

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا، يساوي حاصل ضرب احتمال الحادثة أ في احتمال الحادثة ب.

النموذج:



الرموز: ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب)

احتمال الحوادث المركبة

قراءة الرياضيات

أ أو ب

يختلف استعمال أ أو ب عن الاستعمال اللغوي، فالعبارة أ أو ب تسمح بإمكانية وقوع الحادثتين أ و ب معًا أيضًا.

احتمال الحوادث المستقلة

كرات زجاجية : يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائيًا ثم أُعيدت وسُحِبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

الكرة الأولى: ح(سوداء) $= \frac{٦}{٢١}$ ← عدد الكرات السوداء / عدد الكرات الكلي

الكرة الثانية: ح(صفراء) $= \frac{٤}{٢١}$ ← عدد الكرات الصفراء / عدد الكرات الكلي

احتمال الحوادث المستقلة: ح (سوداء وصفراء) = ح (سوداء) × ح (صفراء)

$= \frac{٦}{٢١} \times \frac{٤}{٢١} = \frac{٢٤}{٤٤١}$ عوّض

الاحتمال يساوي $\frac{٢٤}{٤٤١} = ٤,٥\%$ تقريبًا.

احتمال الحوادث غير المستقلة

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة (أ) في احتمال وقوع الحادثة (ب) بعد وقوع الحادثة أ.

الرموز: ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)

احتمال الحوادث المركبة

بطاقات: يوجد في صندوق ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ صفراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء. وبطاقات كل مجموعة مرقّمة بالأرقام من ١ إلى ١٠ . فإذا سحب عبد الكريم ثلاث بطاقات عشوائيًّا من الصندوق واحدة تلو الأخرى من دون إرجاع. فأوجد احتمال أن تكون البطاقات المسحوبة بالترتيب المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

أ) ح (حمراء، بيضاء، حمراء)

البطاقة الأولى: ح (حمراء) $= \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء}}{\text{عدد البطاقات الكلي}} = \frac{١٠}{٤٠} = \frac{١}{٤}$

البطاقة الثانية: ح (بيضاء) $= \frac{\text{عدد البطاقات البيضاء}}{\text{عدد البطاقات المتبقية}} = \frac{١٠}{٣٩}$

البطاقة الثالثة: ح (حمراء) $= \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء المتبقية}}{\text{عدد البطاقات المتبقية}} = \frac{٩}{٣٨}$

ح (حمراء، بيضاء، حمراء) = ح (حمراء) × ح (بيضاء) × ح (حمراء)

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١٠}{٣٩} \times \frac{٩}{٣٨} = \frac{١٥}{٩٨٨}$ عوّض

إذن الاحتمال يساوي $\frac{١٥}{٩٨٨} = ١,٥\%$ تقريبًا.

احتمال الحوادث المركبة

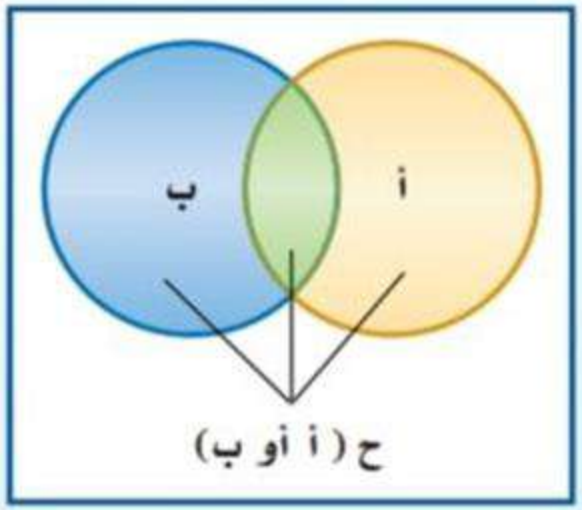
الحوادث المتنافية: تُسمّى الحادثتان اللتان لا يمكن وقوعهما معًا **حادثتين متنافيتين**. افترض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة حمراء أو بطاقة زرقاء من وعاء يحتوي على بطاقات ملوّنة. بما أنه لا يمكن أن تكون البطاقة حمراء وزرقاء في الوقت نفسه فتُسمى هاتان الحادثتان حادثتين متنافيتين.

الحوادث غير المتنافية

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتماليهما ناقص احتمال وقوع الحادثتين معًا.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح(ب) − ح (أ وَ ب)

النموذج:



احتمال الحوادث المركبة

تنبيه !

تقاطع الحوادث

عند إيجاد احتمالات الحوادث غير المتنافية، نحسب تقاطع الحادثتين مرتين؛ لأنه يوجد في كلتا الحادثتين. لذا يجب الانتباه إلى أنه في الحقيقة يقع في تقاطعهما مرة واحدة.

احتمال الحوادث المركبة

الطلاب الرياضيون: يوجد من بين ٢٤٠ طالبًا في مدرسة ما ١٧٦ طالبًا متفوقًا علميًّا و ٤٨ طالبًا متفوقًا رياضيًّا. وهناك ٣٦ طالبًا متفوقًا علميًّا ورياضيًّا. اختير طالب عشوائيًّا فما احتمال أن يكون متفوقًا علميًّا أو رياضيًّا ؟

بما أن بعض الطلاب متفوقون علميًّا ورياضيًّا فالحادثتان غير متنافيتين.

ح (متفوق رياضيًّا)$=\frac{٤٨}{٢٤٠}$، ح (متفوق علميًّا) $=\frac{١٧٦}{٢٤٠}$، ح (متفوق رياضيًّا وعلميًّا)$=\frac{٣٦}{٢٤٠}$

ح (متفوق رياضيًّا أو علميًّا)= ح (متفوق رياضيًّا)+ ح (متفوق علميًّا)− ح (متفوق رياضيًّا وعلميًّا)

$$=\frac{٤٨}{٢٤٠}+\frac{١٧٦}{٢٤٠}-\frac{٣٦}{٢٤٠}$$ عوّض

$$=\frac{١٨٨}{٢٤٠}=\frac{٤٧}{٦٠}$$ بسط.

الاحتمال يساوي $\frac{٤٧}{٦٠}$ = ٧٨٪ تقريبًا.