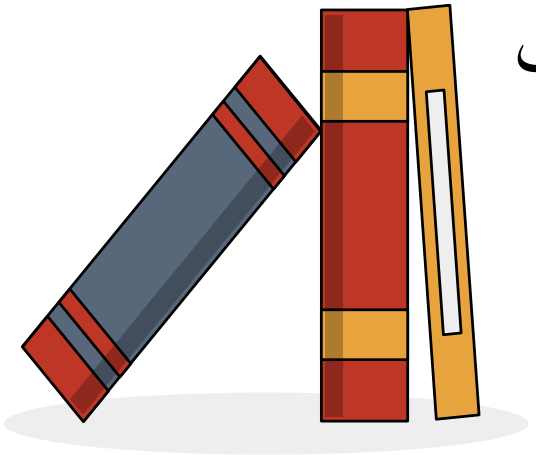


سلسلة عروض رفعة الرياضيات
للصف الثالث متوسط
الفصل الدراسي الثالث

أعداد وتصميم

أ.صالحه عسيري

المقدمة :

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد :

نبذة تعريفية لمجموعة رفعة : هي مجموعة تدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع انحاء المملكة وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم عامة وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات ، تقدم مجموعة رفعة بين أيديكم هذا العمل ضمن (سلسلة عروض رفعة للصف الثالث متوسط)

وهي عبارة عن عروض شاملة لدروس الفصل الدراسي الثالث مع شروحات لكل درس

والله ولي التوفيق

الأستاذة / صالحه بنت عبدالله بن علي عسيرى

نفيدكم علماً بأنه تم تسجيل عملكم الموسوم بـ :
سلسلة عروض رفعة الرياضيات للصف الثالث متوسط
الفصل الدراسي الثالث

تحت رقم إيداع 9266 / 1443 وتاريخ 1443 /09/04
رقم الرديمك 978-603-04-1219-8

الفصل الثامن
(الدوال التربيعية)

التهيئة	PPT	Pdf	
تمثيل الدوال التربيعية بيانياً	PPT	Pdf	
حل المعادلات التربيعية بيانياً	PPT	Pdf	
حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع	PPT	Pdf	
حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام	PPT	Pdf	
اختبار الفصل الثامن	PPT	Pdf	

للانتقال للعرض أنقر على عنوان الدرس

وللتحميل أنقرعلى الصيغة المناسبة
ppt , pdf

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إعداد - توثيق
Salha ASIRI

الفصل التاسع
(المعادلات الجذرية والمثلثات)

التهيئة	PPT	Pdf	
تبسيط العبارات الجذرية	PPT	Pdf	
العمليات على العبارات الجذرية	PPT	Pdf	
المعادلات الجذرية	PPT	Pdf	
نظرية فيثاغورس	PPT	Pdf	

للانتقال للعرض أنقر على عنوان الدرس

وللتحميل أنقر على الصيغة المناسبة
ppt , pdf

مجموعة رفعة الرياضيات

Salha ASIRI

الفصل التاسع
(المعادلات الجذرية و المثلثات)

المسافة بين نقطتين	PPT	Pdf	
المثلثات المتشابهة	PPT	Pdf	
النسب المثلثية	PPT	Pdf	
اختبار الفصل التاسع	PPT	Pdf	

للانتقال للعرض أنقر
على عنوان الدرس

وللتحميل أنقرعلى
الصيغة المناسبة
ppt , pdf

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

Salim ASIRI

الفصل العاشر
(الإحصاء والاحتمال)

التهيئة	PPT	Pdf	
تصميم دراسة مسحية	PPT	Pdf	
تحليل نتائج الدراسة المسحية	PPT	Pdf	
إحصائيات العينة ومعالم المجتمع	PPT	Pdf	
التباديل والتوافيق	PPT	Pdf	
احتمالات الحوادث المركبة	PPT	Pdf	
اختبار الفصل	PPT	Pdf	

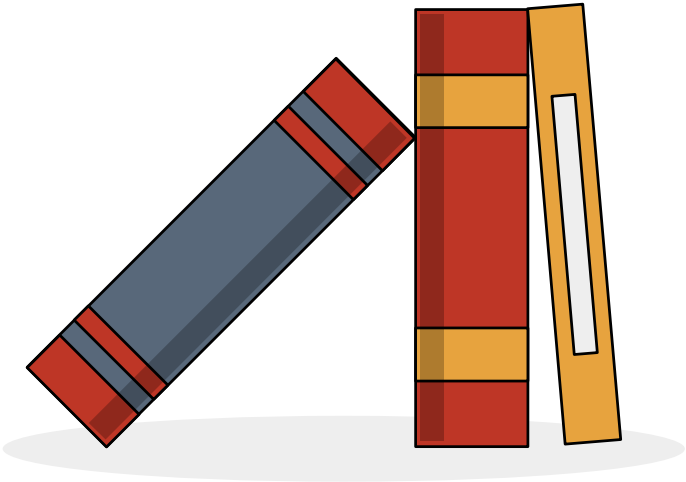
للانتقال للعرض أنقر على عنوان الدرس

وللتحميل أنقر على الصيغة المناسبة
ppt , pdf

مجموعة رفعة الرياضيات

Salha ASIRI

التهيئة للفصل ٨



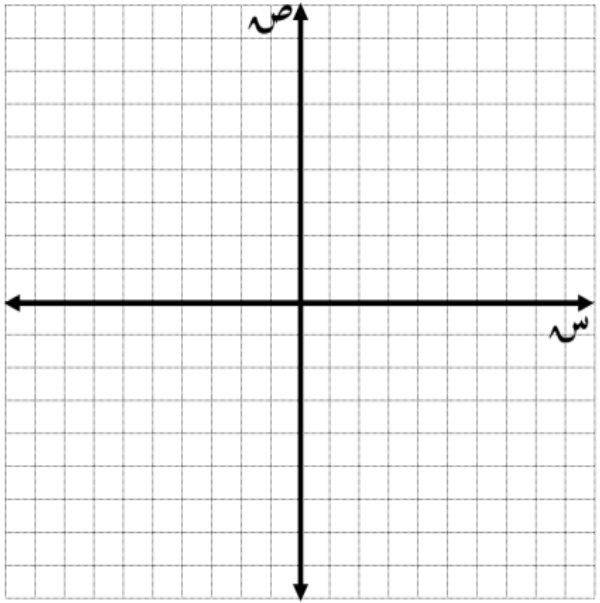
اليوم :

التاريخ :

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

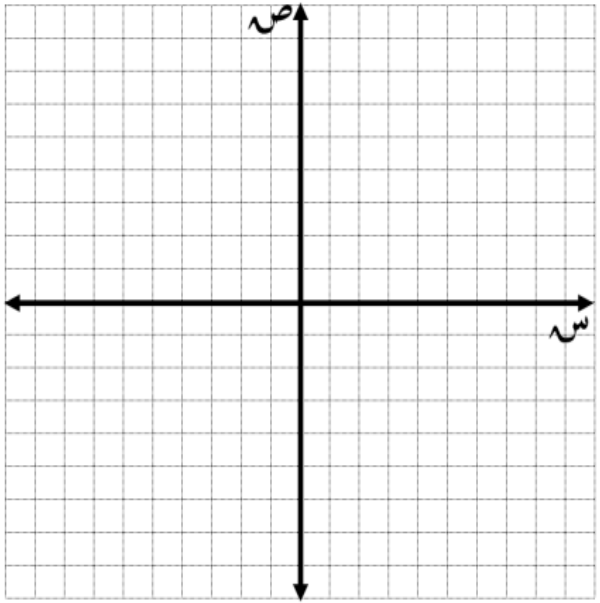
١

ص = س + ٣



استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

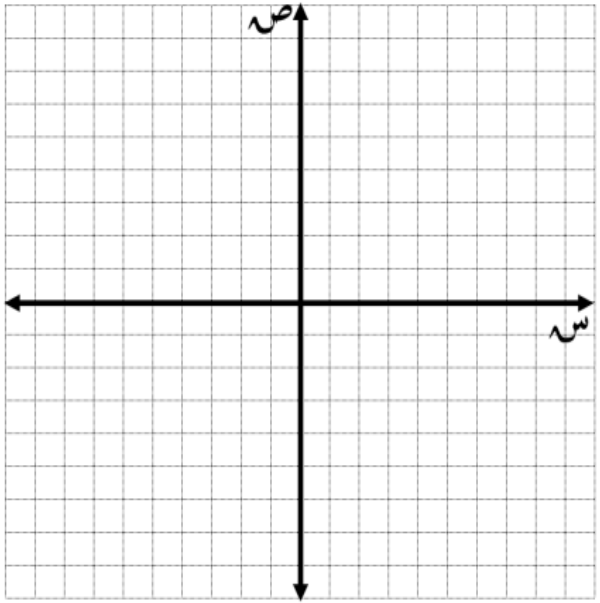
$$ص = ٢س + ٢$$



استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

$$ص = -٢س - ٣$$

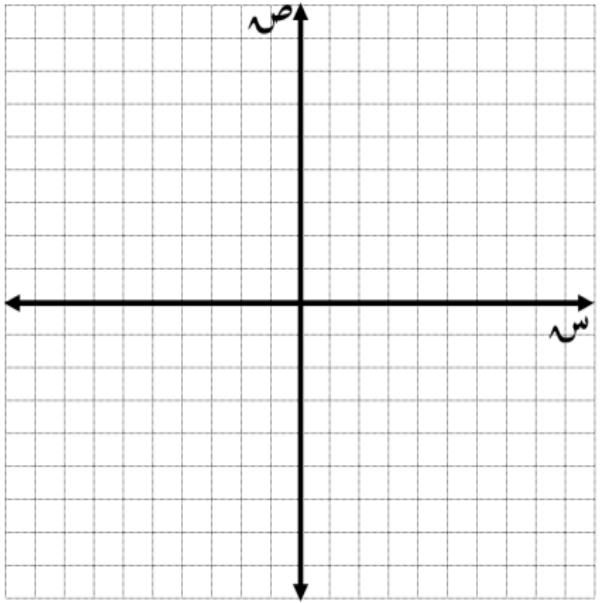
٣



استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

٤

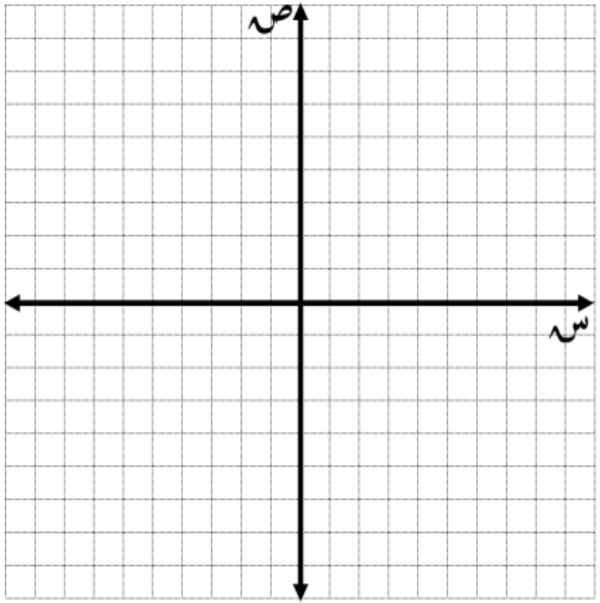
ص = ٠,٥ س − ١



استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

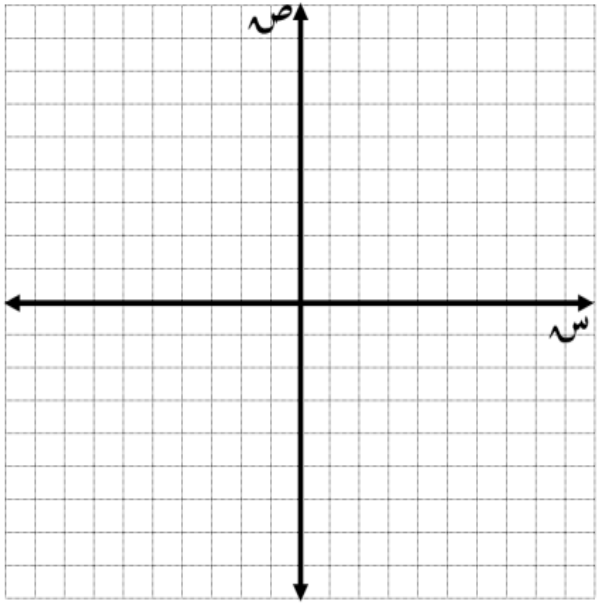
٥

٤ س − ٣ص = ١٢



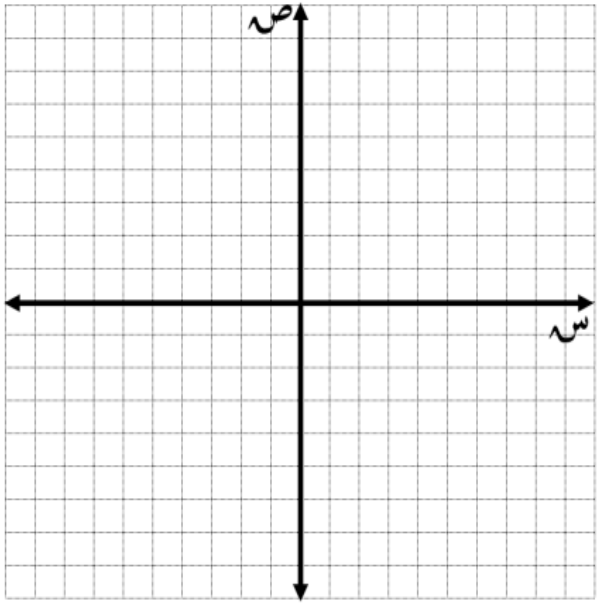
استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

٣ص = ٦ + ٩س



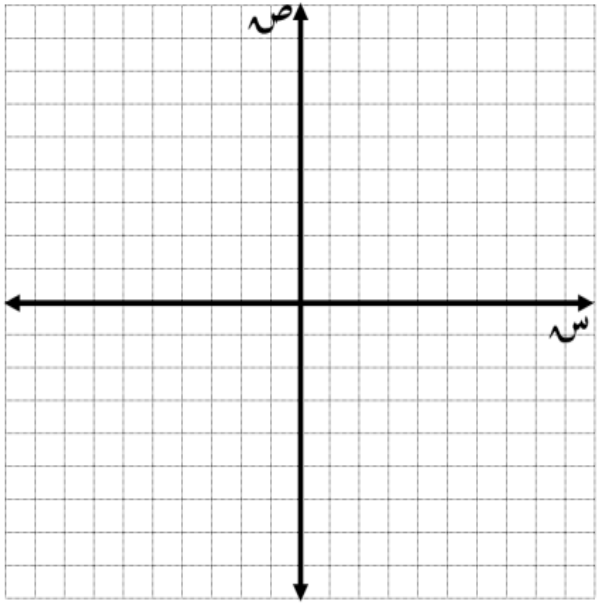
استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

ص − س = ١



استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

٣ص = ٦س



٩

توفير: مع محسن ١٠٠ ريال، ويخطط لتوفير ١٠ ريالات أسبوعيًّا، مثّل بيانيًّا معادلة تبيّن المبلغ الكلي (م) الذي سيوفره محسن في (س) أسبوعًا.

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١٠

$أ^{٢} + ١٢أ + ٣٦$

١١

$س^{٢} + ٥س + ٢٥$

١٢

$س^{٢} - ١٢س + ٣٢$

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١٣

$س^{٢} + ٢٠س + ١٠٠$

١٤

$٤س^{٢} + ٢٨س + ٤٩$

١٥

$ك^{٢} - ١٦ك + ٦٤$

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١٦

$أ^{٢} - ٢٢أ + ١٢١$

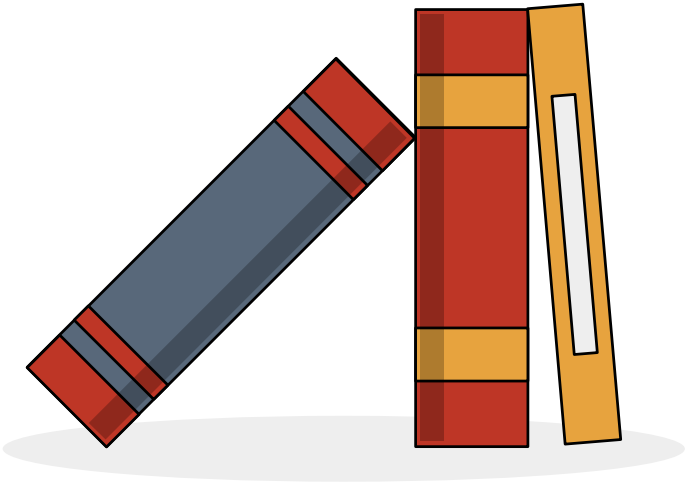
١٧

$٥ت^{٢} - ١٢ت + ٢٥$

١٨

$س^{٢} + ٢س + ١$

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية بيانيًا

الان

١- أحلل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.

٢- أمثل الدوال التربيعية بيانيًا

المفردات

الدالة غير الخطية
الدالة التربيعية
الصورة القياسية للدالة التربيعية
القطع المكافئ
محور التماثل
الرأس
القيمة الصغرى
القيمة العظمى
متماثل

رابط الدرس الرقمي

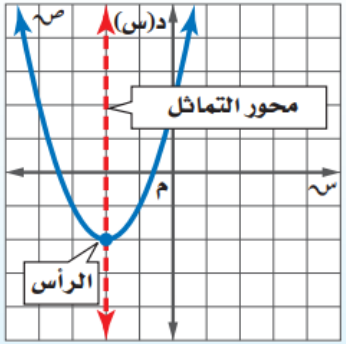
www.ien.edu.sa

لماذا

تُعد نافورة الملك فهد في جدة أعلى نافورة من نوعها في العالم، إذ يصل ارتفاعها إلى ٣١٢ مترًا، وتقدم عرضًا رائعًا لحركة المياه والضوء، ويمكن تمثيل حركة المياه بمعادلات تربيعية. كما يمكنك استعمال التمثيلات البيانية لهذه المعادلات لتوضيح مسار المياه.

مفهوم أساسي الدوال التربيعية

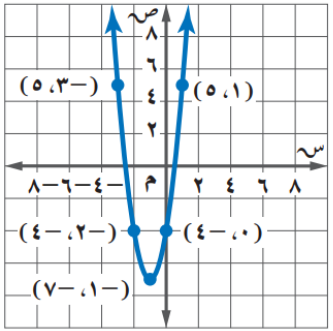
الدالة المولدة (الأم):	د(س) = س^{٢}
الصورة القياسية:	د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ
شكل التمثيل:	قطع مكافئ
محور التماثل:	س = $-\frac{ب}{٢أ}$
المقطع الصادي:	جـ



مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = ٣س^{٢} + ٦س − ٤ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

س	ص
١	٥
٠	−٤
−١	−٧
−٢	−٤
−٣	٥



مثّل الأزواج المرتبة بيانيًّا، ثُم صِل بينها بمنحنى.

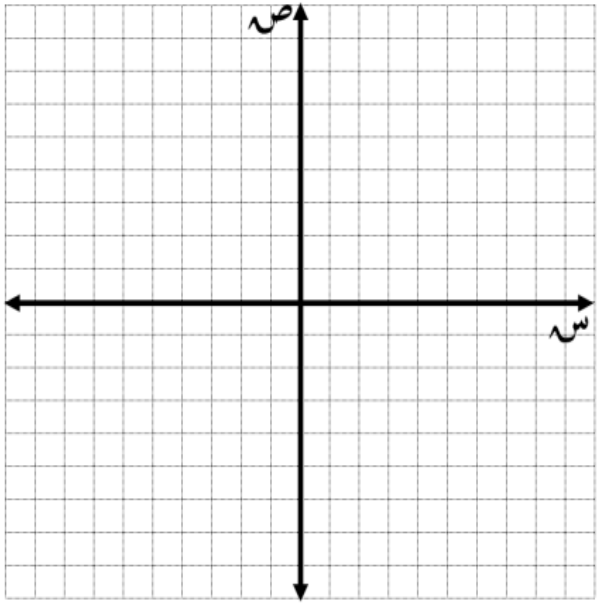
يمتد التمثيل البياني للقطع المكافئ إلى ما لا نهاية من كلا طرفيه، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها هو { ص| ص ≤ −٧ }؛ لأن −٧ هي القيمة الصغرى.

تحقق

استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

١

$$ص = س^{٢} + ٣$$

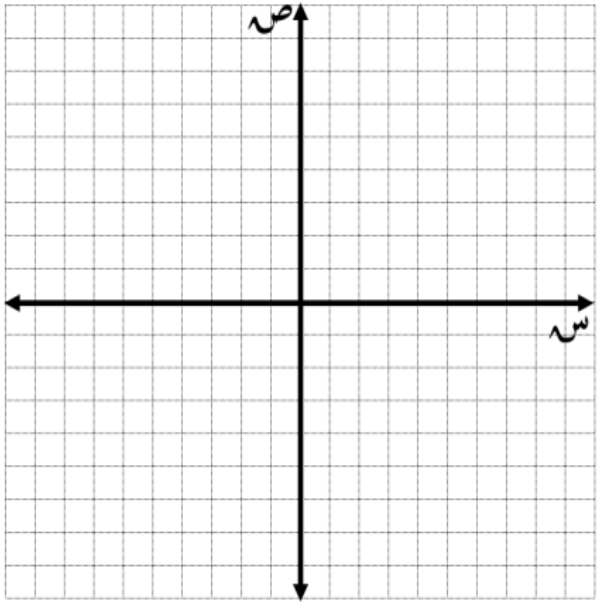


تأكد

استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

١

$ص = ٢س^{٢} + ٤س - ٦$

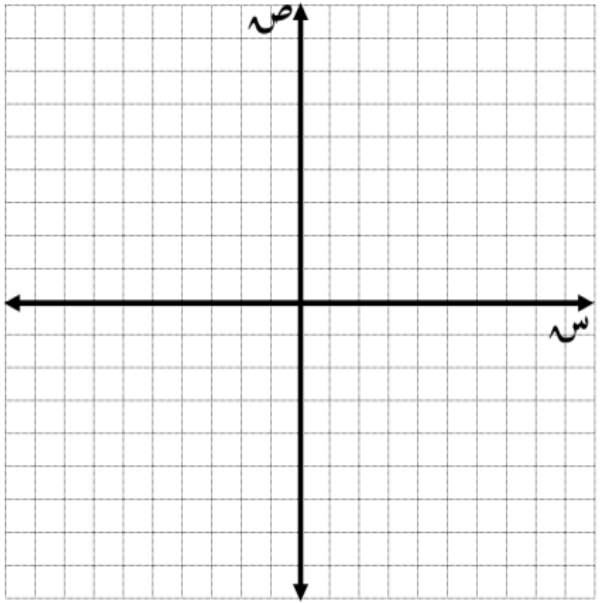


تأكد

استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

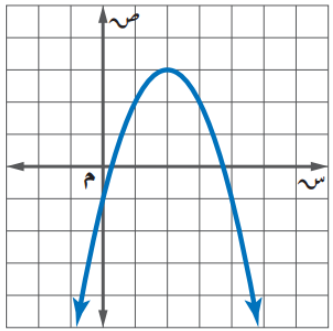
٢

$ص = س^{٢} + ٢س - ١$



مثال ٢

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للتمثيل البياني الآتي:



الخطوة ١: أوجد الرأس.

بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل فالرأس يمثّل النقطة العظمى له وهي (٢، ٣).

الخطوة ٢: أوجد محور التماثل.

بما أن محور التماثل هو المستقيم الذي يمر بالرأس، ويقسم القطع إلى نصفين متطابقين؛ لذا تكون معادلة محور التماثل هي س= ٢.

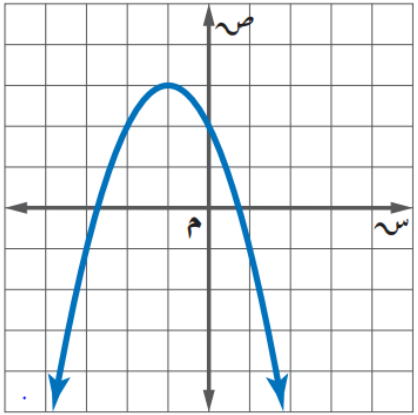
الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

بما أن المقطع الصادي هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع محور الصادات، وهي النقطة (٠، −١)؛ لذا يكون المقطع الصادي هو −١.

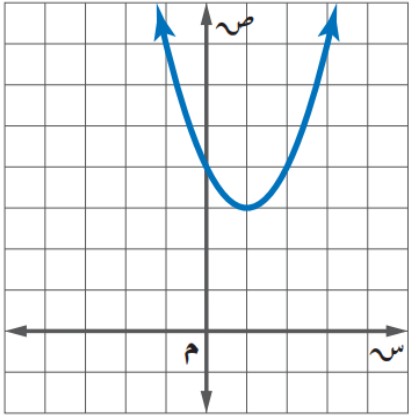
تحقق

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

٢أ



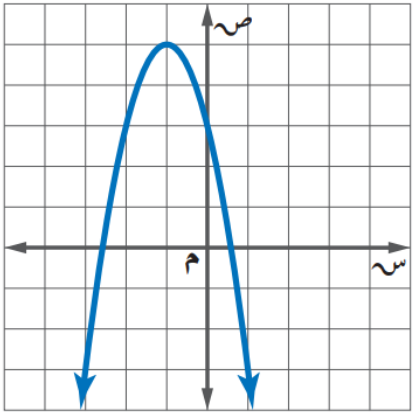
٢ب



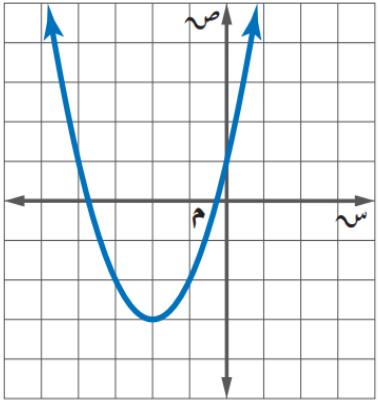
تأكد

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

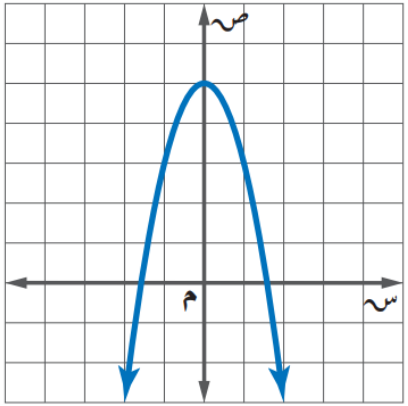
٤



٥



٦



مثال ٣

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدالة: ص = ٢ س^{٢} + ٤ س − ٣

س = − $\frac{ب}{٢أ}$ صيغة معادلة محور التماثل

س = − $\frac{٤}{٢ \times ٢}$ = −١ أ = ٢، ب = ٤، بسّط

معادلة محور التماثل هي س= −١ .

ولإيجاد إحداثي الرأس، خذ القيمة الناتجة من معادلة محور التماثل، واعتبرها إحداثيًّا سينيًّا لرأس القطع المكافئ، ثم عوّضها في معادلة القطع المكافئ لإيجاد الإحداثي الصادي.

ص = ٢س^{٢} + ٤س −٣ المعادلة الأصلية

= ٢(−١)^{٢} + ٤(−١) − ٣ = −٥ س = −١، بسّط

الرأس هو (−١، −٥)، وبما أن المقطع الصادي هو عند النقطة (٠، جـ) فالمقطع الصادي هو −٣.

إرشادات للدراسة

المقطع الصادي

المقطع الصادي هو الحد الثابت (جـ) للدالة التربيعية في الصورة القياسية

تحقق

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

٣أ

$ص = -٣س^{٢} + ٦س - ٥$

٣ب

$ص = ٢س^{٢} + ٢س + ٢$

تأكد

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

٧

$ص = -س^{٢} + ٢س + ١$

٨

$ص = س^{٢} - ٤س + ٥$

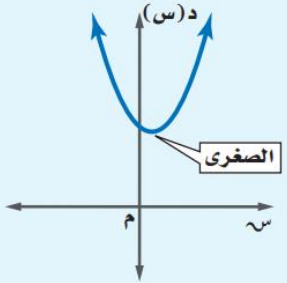
مفهوم أساسي القيم العظمى والقيم الصغرى

التعبير اللفظي: يكون التمثيل البياني للدالة: د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، حيث أ ≠ ٠ :

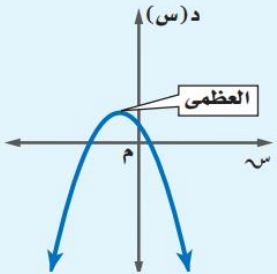
- مفتوحًا إلى أعلى وله قيمة صغرى عندما أ > ٠
- مفتوحًا إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما أ < ٠
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على أو تساوي القيمة الصغرى إذا كانت أ > ٠، أو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى إذا كانت أ < ٠.

مثال:

أ موجبة



أ سالبة



مثال ٤

لتكن د(س) = −٢ س^{٢} − ٤س + ٦.

أ) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

في الدالة د(س) = −٢س^{٢} − ٤س + ٦، أ = −٢، ب = −٤، جـ = ٦.

بما أن أ عدد سالب فالتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى أسفل، ويكون للدالة قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي الصادي للرأس.

الإحداثي السيني للرأس = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٤}{٢(-٢)}$ = −١.

د (س) = −٢س^{٢} − ٤س + ٦ — الدالة الأصلية

د (−١) = −٢(−١)^{٢} − ٤(−١) + ٦ — س = −١

د (−١) = ٨ — بسّط

إذن، القيمة العظمى تساوي ٨

جـ) حدد مجال الدالة ومداها.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى، أي {ص|ص ≤ ٨}.

تنبيه !

القيم الصغرى والقيم العظمى

لا تنسَ إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس (س، ص)، حيث إن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثِّل الإحداثي الصادي له.

تحقق ٤

ليكن د (س) = ٢س^{٢} – ٤س – ١ .

٤أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

٤ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

٤جـ) حدد مجال الدالة ومداها.

تأكد

١٠

ليكن ص = −س^{٢} − ٢س + ٢

أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

جـ) حدد مجال الدالة ومداها.

مفهوم أساسي تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.

الخطوة ٢: أوجد الرأس وحدّد إذا كان يمثّل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

الخطوة ٤: استعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.

الخطوة ٥: صِل بين النقاط بمنحنى.

مثال ٥

مثّل الدالة د (س) = س^{٢} + ٤س + ٣ بيانيًّا.

الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ — صيغة معادلة محور التماثل

س = $\frac{-٤}{٢ \times ١}$ — أ = ١ ، ب = ٤

س = −٢ — بسّط

الخطوة ٢: أوجد الرأس، وحدّد فيما إذا كان يمثّل نقطة صغرى أم عظمى.

ص = س^{٢} + ٤س + ٣ — المعادلة الأصلية

= (−٢)^{٢} + ٤(−٢) + ٣ — س = −٢

= −١ — بسّط

يقع الرأس عند النقطة (−٢، −١)، وبما أن أ موجبة، فالتمثيل يكون مفتوحًا إلى أعلى؛ لذا يمثّل الرأس قيمة صغرى.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

ص = س^{٢} + ٤س + ٣ — المعادلة الأصلية

= (٠)^{٢} + ٤(٠) + ٣ — س = ٠

= ٣ — بسّط

المقطع الصادي يساوى ٣.

إرشادات للدراسة

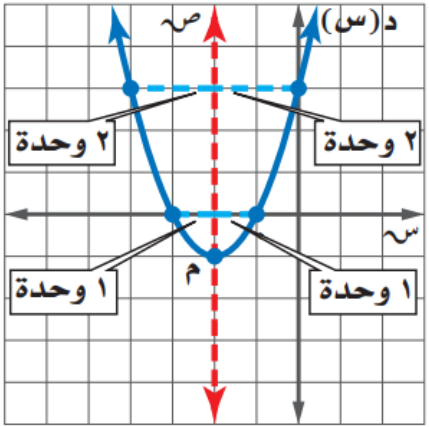
التماثل والنقاط

النقاط الواقعة على الطرفين المتقابلين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يمينًا ويسارًا، كما تبعد بعدًا متساويًا من الرأس.

مثال ٥

الخطوة ٤ : يقسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متطابقين، لذا فإنه لكل نقطة على أحد الجزأين توجد نقطة تناظرها في الجزء الآخر، وتبعد المسافة نفسها عن المستقيم الذي يمثّل محور التماثل، وللنقطتين الإحداثي الصادي نفسه

الخطوة ٥ : صِل بين النقاط بمنحنى.

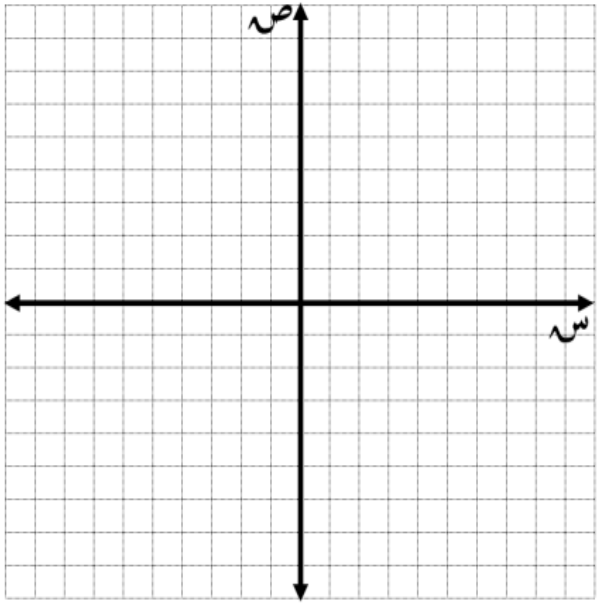


تحقق

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

$د(س) = -٢س^{٢} + ٢س - ١$

٥ أ

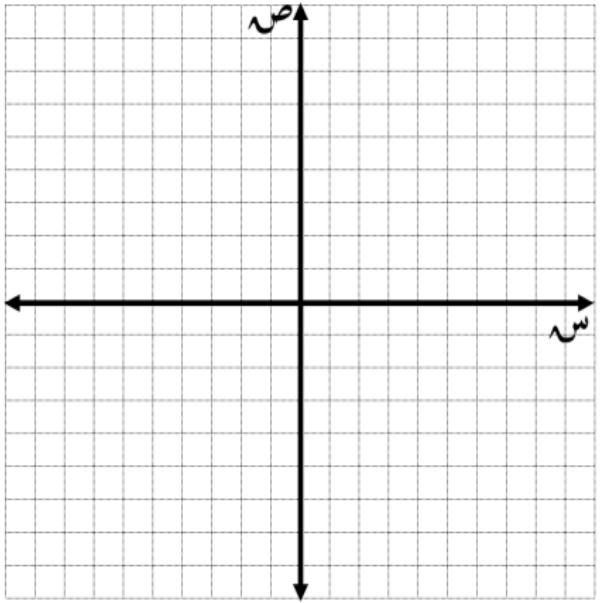


تحقق

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

د(س) = ٣ س^{٢} − ٦ س + ٢

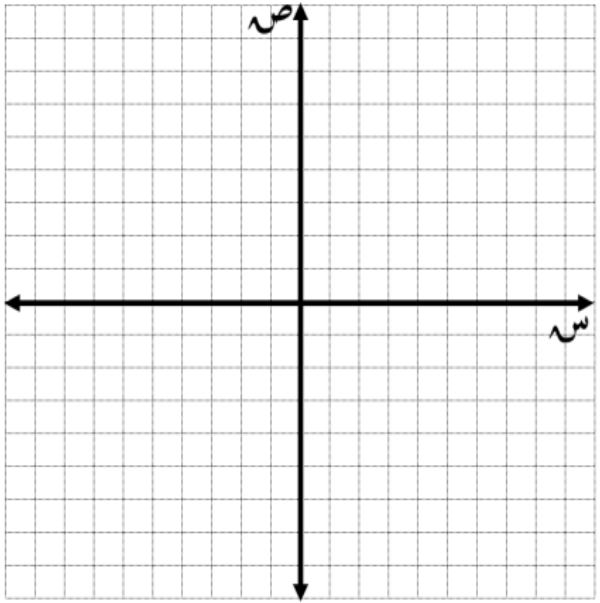
ب



تأكد

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

$د(س) = -٣س^{٢} + ٦س + ٣$



١٣

مثال ٦

فيزياء: عرضت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية فيلمًا لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد (س) ثانية بالدالة ف(س) = −١٣س^{٢} + ١٣٠س + ٣١٢.

أ) مثّل الدالة بيانيًّا.

س = −$\frac{ب}{٢أ}$ معادلة محور التماثل

س = −$\frac{١٣٠}{٢(-١٣)}$ = ٥ أ = −١٣ ، ب = ١٣٠

بما أن معادلة محور التماثل س = ٥؛ لذا فالإحداثي السيني للرأس هو ٥.

ص = −١٣س^{٢} + ١٣٠س + ٣١٢ المعادلة الأصلية

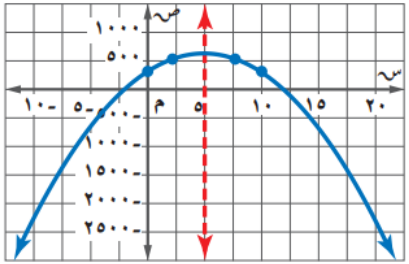
= −١٣ (٥)^{٢} + ١٣٠ (٥) + ٣١٢ س = ٥

= −٣٢٥ + ٦٥٠ + ٣١٢ = ٦٣٧ بسّط

الرأس هو (٥، ٦٣٧).

ولتجد نقطة أخرى، اختر س = ٠ وعوّض ذلك في الدالة الأصلية، فتكون النقطة الجديدة هي (٠، ٣١٢)، وتكون النقطة المقابلة لها على الطرف الآخر لمحور التماثل هي (١٠، ٣١٢).

كرّر هذه العملية واختر س = ٢ لتحصل على النقطة (٢، ٥٢٠)، وتكون النقطة المقابلة لها (٨، ٥٢٠)، ثم صل بين هذه النقاط بمنحنى.



مثال ٦

فيزياء: عرضت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية فيلمًا لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد (س) ثانية بالدالة ف(س) = −١٣س^{٢} + ١٣٠س + ٣١٢.

ب) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الصاروخ؟

أُطلق الصاروخ عندما كان الزمن صفرًا، أو عند المقطع الصادي للدالة، أيْ من على ارتفاع ٣١٢ قدمًا عن الأرض.

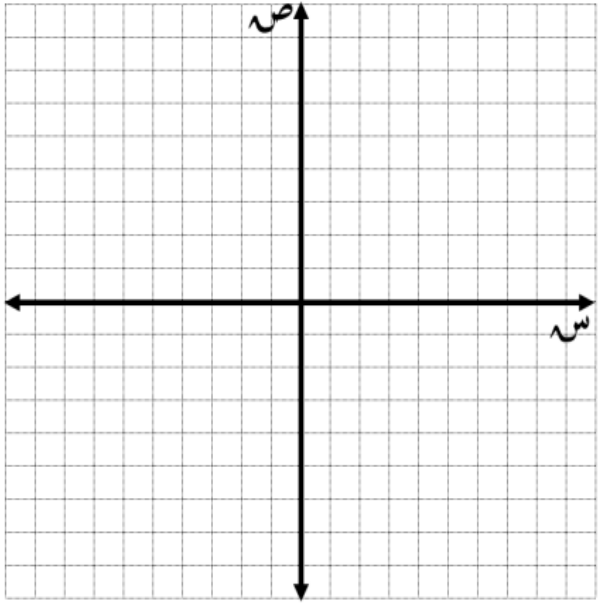
جـ) ما أقصى ارتفاع يصله الصاروخ؟

القيمة العظمى للارتفاع تقع عند الرأس؛ لذا يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له ٦٣٧ قدمًا بعد خمس ثوانٍ من بدء الانطلاق.

تحقق ٦

رمي الرمح: يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (ص) بالأقدام بعد (س) ثانية، بالمعادلة ص = −١٦س^{٢} + ٦٤س + ٦.

أ) مثّل مسار هذا الرمح بيانيًّا.



تحقق ٦

رمي الرمح: يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (ص) بالأقدام بعد (س) ثانية، بالمعادلة ص = −١٦س^{٢} + ٦٤س + ٦.

ب) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الرمح؟

جـ) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟

مسألة مفتوحة: اكتب دالة تربيعية معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي س = $-\frac{٣}{٨}$ ، ملخصًا خطوات عملك.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

اكتشف الخطأ: تحاول عبير ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

منى

$$ص = -س^{٢} - ٤س + ٦$$

$$س = -\frac{ب}{٢أ}$$

$$س = -\frac{٤}{٢(-١)}$$

$$س = ٢$$

عبير

$$ص = -س^{٢} - ٤س + ٦$$

$$س = -\frac{ب}{٢أ}$$

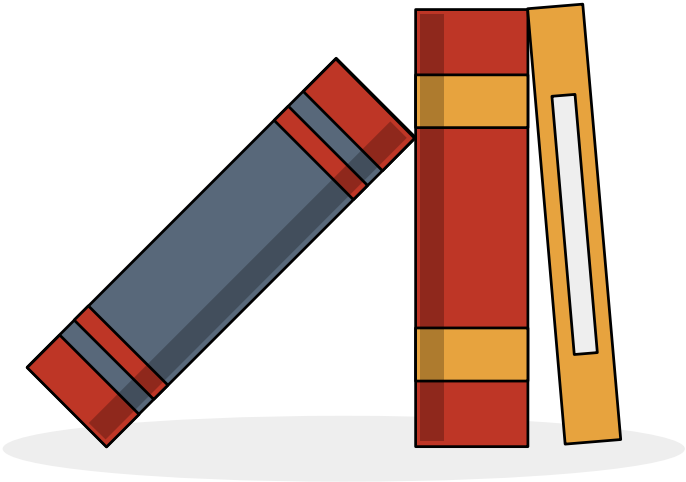
$$س = -\frac{-٤}{٢(-١)}$$

$$س = -٢$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

الواجب

حل المعادلات التربيعية بيانيًا



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل الى العوامل

الان

١-أحل المعادلات التربيعية بيانيًا
٢-أقدر حلول المعادلات التربيعية من تمثيلها البياني

المفردات

الجذر المكرر

رابط الدرس الرقمي

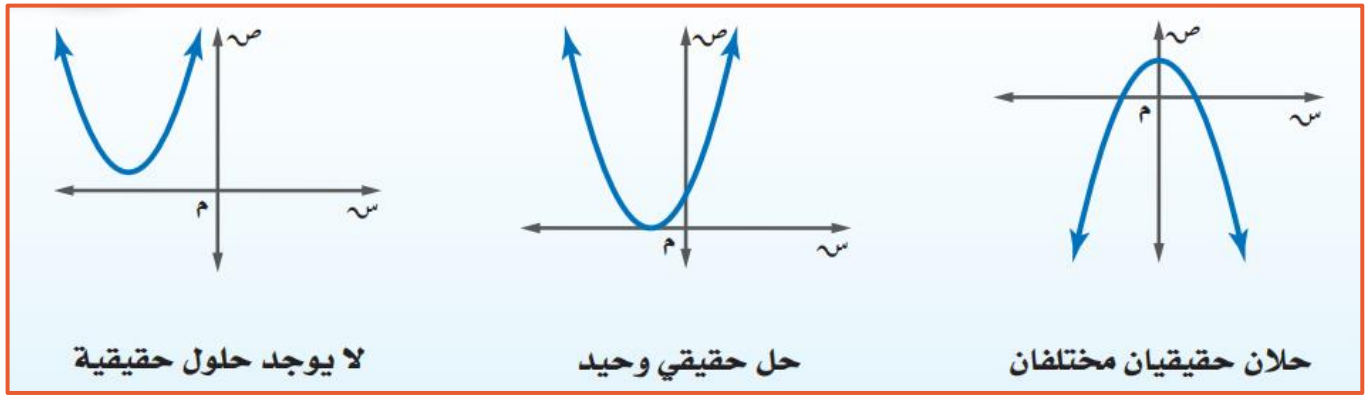
www.ien.edu.sa

لماذا

يعبّر عن المسار المنحني لكرة قدم رُكلت داخل ملعب بالدالة ص = −س^{٢} + ١٨س؛ حيث (س) المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة بالأمتار، (ص) ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض بالأمتار.

ويمكن استعمال المقاطع السينية للتمثيل البياني لهذه الدالة لتحديد المسافة الأفقية التي ستقطعها الكرة حتى تلمس الأرض.

مفهوم أساسي حلول المعادلات التربيعية



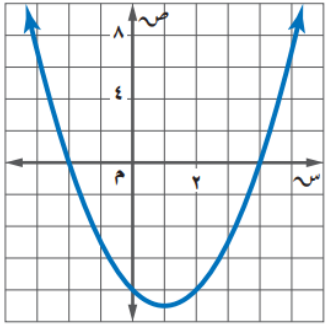
مثال ١

حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠ بيانيًّا.

مثِّل الدالة د (س) = س^{٢} − ٢س − ٨ المرتبطة بالمعادلة بيانيًّا.

تظهر المقاطع السينية للتمثيل البياني عند −٢، ٤؛ لذا فالحلول هي −٢، ٤

تحقق: تحقّق من صحة كل حل بالتعويض في المعادلة الأصلية.



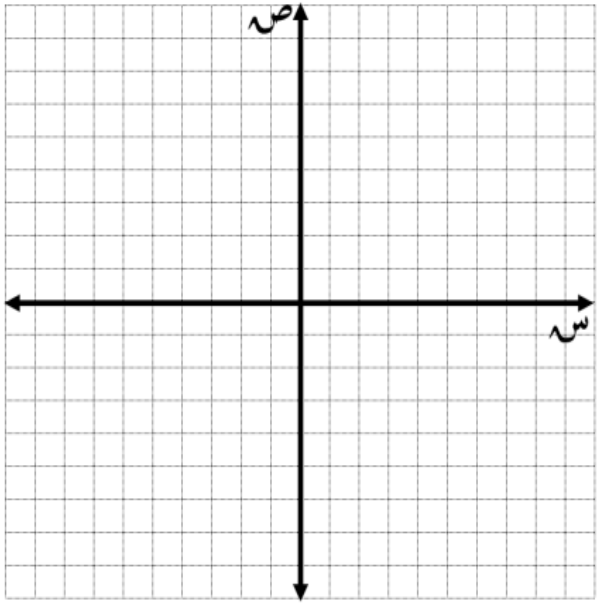
س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠	المعادلة الأصلية	س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠
(−٢)^{٢} − ٢(−٢) − ٨ ≟ ٠	س = −٢ أو س = ٤	(٤)^{٢} − ٢(٤) − ٨ ≟ ٠
٠ = ٠ ✓	بسّط.	٠ = ٠ ✓

تحقق

حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا:

$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

١ب



مثال ٢

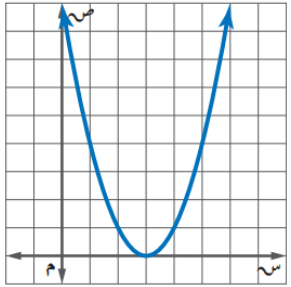
حل المعادلة $س^{٢} - ٦س = -٩$ بيانيًّا.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$س^{٢} - ٦س = -٩$ المعادلة الأصلية

$س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$ أضف ٩ إلى كلا الطرفين.

الخطوة ٢: مثّل الدالة المرتبطة $د(س) = س^{٢} - ٦س + ٩$



الخطوة ٣: حَدِّد المقطع السيني للتمثيل البياني، ولاحظ أن رأس القطع المكافئ هو المقطع السيني الوحيد للدالة؛ لذا فإن للمعادلة حلًّا وحيدًا هو ٣

تحقق: حل المعادلة بالتحليل إلى العوامل

$س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$ المعادلة الأصلية

$(س - ٣)(س - ٣) = ٠$ حلّل إلى العوامل

$س - ٣ = ٠$ أو $س - ٣ = ٠$ خاصية الضرب الصفري

$س = ٣$ $س = ٣$ أضف ٣ إلى كلا الطرفين

الحل الوحيد هو ٣

تنبيه!

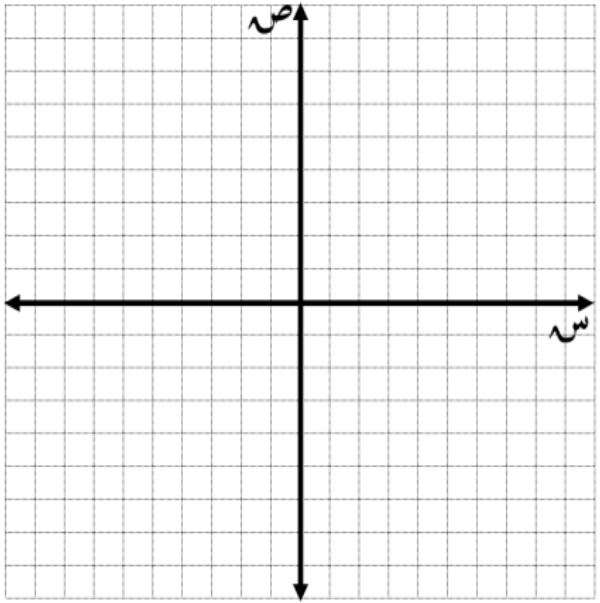
الحلول الدقيقة

قد تظهر الحلول التي نتوصل إليها من التمثيل البياني على أنها دقيقة، إلا أنه لا يمكنك التأكد من ذلك ما لم تتحقق منها في المعادلة الأصلية.

تحقق

حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا:

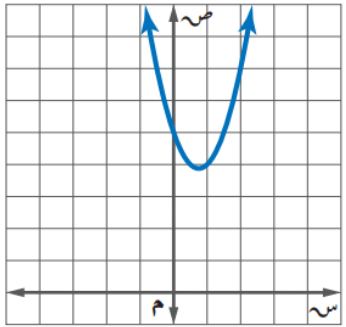
$س^{٢} + ٢٥ = ١٠س$



٢أ

مثال ٣

حل المعادلة ٢س^{٢} − ٣س + ٥ = ٠ بيانيًّا.



الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة مكتوبة بالصورة القياسية.

الخطوة ٢: مثّل الدالة المرتبطة د(س) = ٢س^{٢} − ٣س + ٥.

الخطوة ٣: حدِّد المقطع السيني للتمثيل البياني للدالة. لاحظ أن التمثيل البياني ليس له مقطع سيني؛ لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية، وبالتالي فإن مجموعة الحل هي ∅.

تحقق: حُلّ المعادلة بالتحليل إلى العوامل.

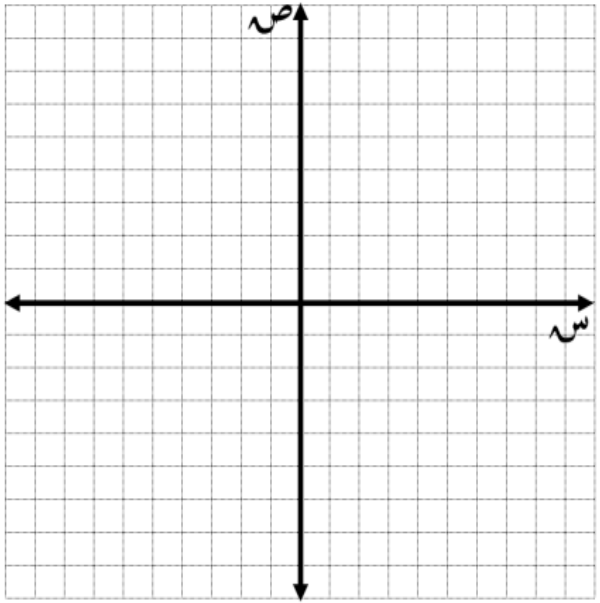
لا يوجد عوامل للعدد ١٠ مجموعها −٣، لذا فالعبارة غير قابلة للتحليل إلى العوامل، أيْ أنه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية.

تحقق

حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا:

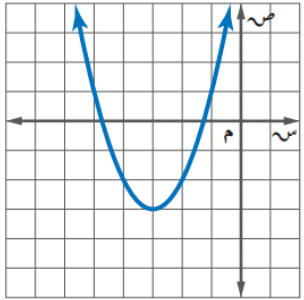
$-س^{٢} - ٣س = ٥$

٣أ



مثال ٤

حُلَّ المعادلة س^{٢} + ٦س + ٦ = ٠ بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدِّرها إلى أقرب جزء من عشرة.



مثل الدالة المرتبطة د (س) = س^{٢} + ٦س + ٦ بيانيًّا.

يقع المقطعان السينيان بين −٥، −٤، وبين −٢، −١

أنشئ جدولاً بتدريج طوله ٠,١ لقيم س التي تقع بين −٥، −٤، وبين −٢، −١. وابحث عن التغير في إشارات قيم الدالة، وتُعد قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر هي التقريب الأفضل لصفر الدالة.

س	−٤,٩	−٤,٨	−٤,٧	−٤,٦	−٤,٥	−٤,٤	−٤,٣	−٤,٢	−٤,١
ص	٠,٦١	٠,٢٤	−٠,١١	−٠,٤٤	−٠,٧٥	−١,٠٤	−١,٣١	−١,٥٦	−١,٧٩

س	−١,٩	−١,٨	−١,٧	−١,٦	−١,٥	−١,٤	−١,٣	−١,٢	−١,١
ص	−١,٧٩	−١,٥٦	−١,٣١	−١,٠٤	−٠,٧٥	−٠,٤٤	−٠,١١	٠,٢٤	٠,٦١

بما أن قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر عند تغير الإشارة في كلا الجدولين هي −٠,١١؛ لذا فإن الجذرين التقريبيين هما: −٤,٧، −١,٣.

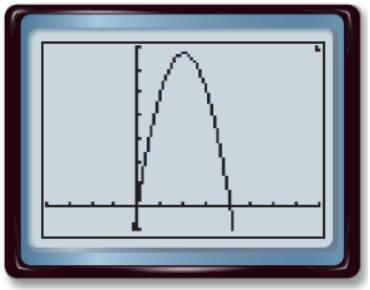
إرشادات للدراسة

مواقع الأصفار

بما أن الدوال التربيعية دوال متصلة؛ لذا يجب أن يوجد صفر بين قيمتي س اللتين يقابلهما قيمتان متعاكستان في الإشارة من ص.

مثال ٥

ركل سعد الكرة بقدمه من ارتفاع قدم واحدة من الأرض إلى أعلى بسرعة ٦٥ قدمًا/ ثانية، وتمثل الدالة ع = −١٦ن^{٢}+ ٦٥ ن + ١ ارتفاع الكرة (ع) بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟



لإيجاد جذور المعادلة −١٦ن^{٢}+ ٦٥ن + ١ = ٠، استعمل الحاسبة البيانية في تمثيل الدالة المرتبطة د (ن) = −١٦ن^{٢}+ ٦٥ن + ١.

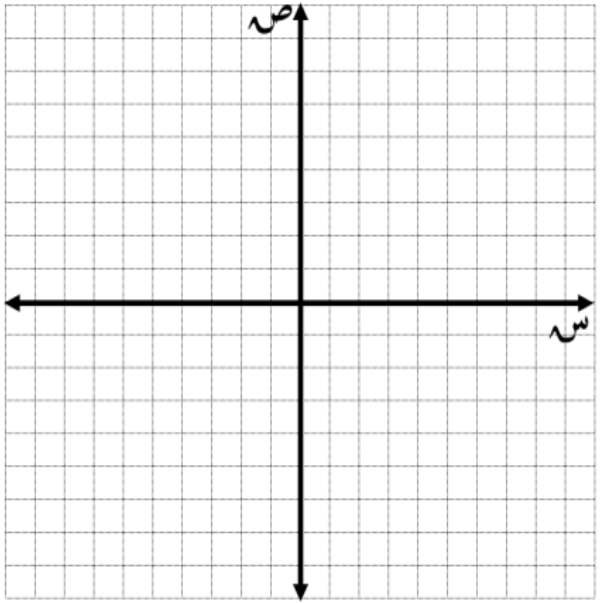
بما أن المقطع السيني الموجب للتمثيل هو ٤ تقريبًا؛ لذا فإن الكرة بقيت ٤ ثوانٍ تقريبًا في الهواء.

تأكد

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

$٢س^{٢} - ٨س = ٠$

٢

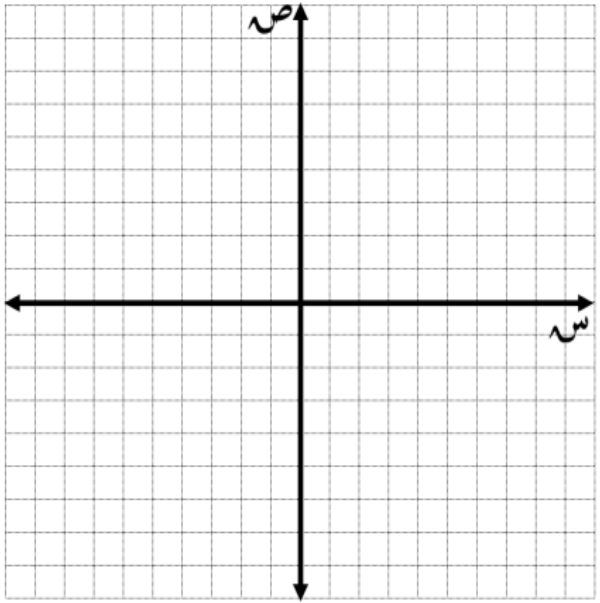


تأكد

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

$$س^{٢} + ٤س = -٤$$

٣



تدرب

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثم حدِّد أصفار كل منها:

$ص = س^{٢} - ٨س + ١٦$

١٥

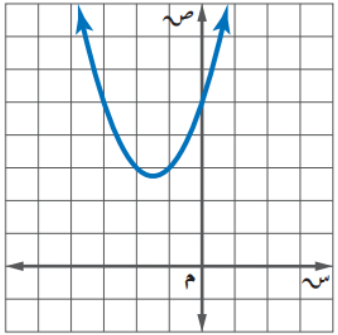
$ص = س^{٢} + ٣س + ٤$

١٦

$ص = س^{٢} + ١٢س + ٣٢$

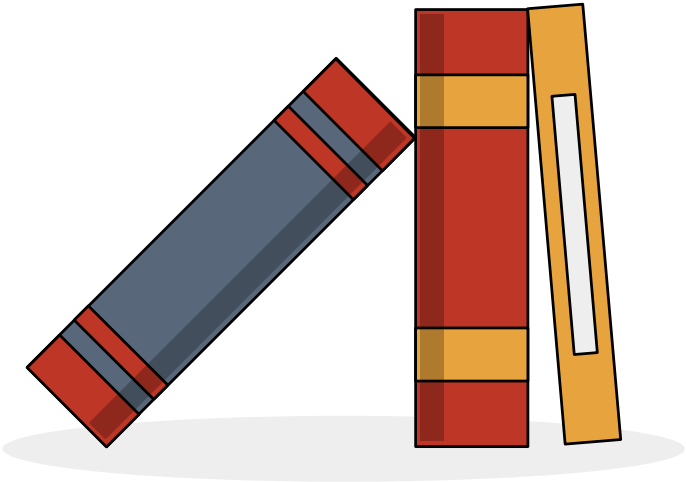
١٧

اكتشف الخطأ: يقوم معاذ وأحمد بإيجاد عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثَّلة بالشكل المجاور، فيقول معاذ إنه ليس لهذه الدالة أصفار حقيقية؛ لأنه لا يوجد لتمثيلها البياني مقاطع سينية. بينما يقول أحمد: إن لها صفرًا حقيقيًّا واحدًا؛ لأن للتمثيل البياني للدالة مقطعًا صاديًّا. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.



الواجب

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي

الان

١-أكتب العبارة التربيعية على صورة مربع كامل

٢-أحل معادلات تربيعية بإكمال المربع

المفردات

إكمال المربع

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا

يسدِّد لاعبو كرة السلة بعض كراتهم نحو المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة: $ع = -٩س^{٢} + ١٨س + ٥$، حيث تمثل (ع) ارتفاع الكرة بعد (س) ثانية. ويمكن إيجاد الزمن عند أي ارتفاع معطى للكرة ؛ فمثلًا لإيجاد الزمن عندما تكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار، نحتاج إلى حل المعادلة: $٤ = -٩س^{٢} + ١٨س + ٥$ باستعمال طرق مختلفة منها طريقة إكمال المربع.

مفهوم أساسي إكمال المربع

التعبير اللفظي: لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $س^{٢} + ب س$، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: أوجد نصف ب (معامل س)

الخطوة ٢: ربّع الناتج في الخطوة١.

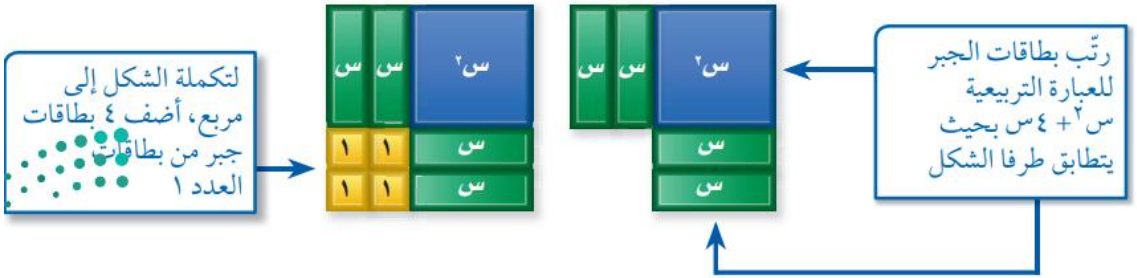
الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $س^{٢} + ب س$، ثم اكتب العبارة على صورة مربع كامل.

الرموز: $س^{٢} + ب س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = \left(س + \frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

مثال ١

أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود: $س^٢ + ٤س + جـ$ مربعًا كاملًا.

الطريقة ١: استعمال بطاقات الجبر.



إذن جـ = ٤

الطريقة ٢: استعمال خوارزمية إكمال المربع.

الخطوة ١: أوجد $\frac{١}{٢}$ العدد ٤. $\frac{٤}{٢} = ٢$

الخطوة ٢: ربّع الناتج من الخطوة ١. $٢^٢ = ٤$

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة٢ إلى $س^٢ + ٤س$. $س^٢ + ٤س + ٤$

إذن، جـ = ٤، لاحظ أن $س^٢ + ٤س + ٤ = (س + ٢)^٢$.

إرشادات للدراسة

الخوارزمية

الخوارزمية هي سلسلة خطوات لإجراء عملية أو لحل مسألة.

تحقق ١

أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود $ر^{٢} - ٨ ر + جـ$ مربعًا كاملًا.

تأكد

أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملًا:

١ $س^{٢} - ١٨س + جـ$

٢ $س^{٢} + ٢٢س + جـ$

٣ $س^{٢} + ٩س + جـ$

مثال ٢

حُلَّ المعادلة: $س^{٢} - ٦س + ١٢ = ١٩$ بإكمال المربع.

$س^{٢} - ٦س + ١٢ = ١٩$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} - ٦س = ٧$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين
$س^{٢} - ٦س + ٩ = ٧ + ٩$	بما أن $(\frac{-٦}{٢})^{٢} = ٩$؛ لذا أضف ٩ إلى كلا الطرفين
$(س - ٣)^{٢} = ١٦$	حلّل $س^{٢} - ٦س + ٩$
$س - ٣ = \pm ٤$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$س = ٣ \pm ٤$	أضف ٣ إلى كل طرف
$س = ٣ + ٤$ أو $س = ٣ - ٤$	افصل الحلين
$= ٧$ $\quad = -١$	بسّط

إذن الحلان هما ٧، -١

تحقق ٢

حل المعادلة: $س^{٢} - ١٢س + ٣ = ٨$ بإكمال المربع.

مثال ٣

حل المعادلة: $-٢س^{٢} + ٨س - ١٨ = ٠$ بإكمال المربع.

$-٢س^{٢} + ٨س - ١٨ = ٠$

$\frac{-٢س^{٢} + ٨س - ١٨}{-٢} = \frac{٠}{-٢}$ اقسم كلا الطرفين على -٢

$س^{٢} - ٤س + ٩ = ٠$ بسّط

$س^{٢} - ٤س = -٩$ اطرح ٩ من كلا الطرفين

$س^{٢} - ٤س + ٤ = -٩ + ٤$ بما أن $(\frac{-٤}{٢})^{٢} = ٤$؛ لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين

$(س - ٢)^{٢} = -٥$ حلّل $س^{٢} - ٤س + ٤$

لا توجد أعداد حقيقية مربعاتها سالبة؛ لذا فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تنبيه !

المعامل الرئيس

تذكر أن المعامل الرئيس يجب أن يساوي ١ قبل إجراء عملية إكمال المربع.

تحقق ٣

حُلّ المعادلة: $٣س^{٢} - ٩س - ٣ = ٢١$ بإكمال المربع.

مثال ٤

زيّ رياضي: أراد أحد الفرق الرياضية شراء زيّ خاص بلاعبي كرة القدم، إذا أمكن تمثيل تكلفة الزي الرياضي بالمعادلة: ك = ٢,٠س^{٢} + ٤,٨س + ٣٥٠، حيث (ك) ثمن (س) قطعة من هذا الزي، فما عدد القطع التي يمكن شراؤها بمبلغ ٨٦٠ ريالًا؟

المبلغ الكلي ٨٦٠ ريالًا؛ لذا اجعل المعادلة تساوي ٨٦٠، ثم أكمل المربع.

٢,٠س^{٢} + ٤,٨س + ٣٥٠ = ٨٦٠	المعادلة الأصلية
$\frac{٢,٠س^{٢} + ٤,٨س + ٣٥٠}{٢,٠} = \frac{٨٦٠}{٢,٠}$	اقسم كل طرف على ٢,٠
س^{٢} + ٢٤س + ١٧٥٠ = ٤٣٠٠	بسّط
س^{٢} + ٢٤س + ١٧٥٠ − ١٧٥٠ = ٤٣٠٠ − ١٧٥٠	اطرح ١٧٥٠ من كلا الطرفين
س^{٢} + ٢٤س = ٢٥٥٠	بسّط
س^{٢} + ٢٤س + ١٤٤ = ٢٥٥٠ + ١٤٤	بما أن $(\frac{٢٤}{٢})^{٢}$ = ١٤٤؛ لذا أضف ١٤٤ إلى كلا الطرفين
س^{٢} + ٢٤س + ١٤٤ = ٢٦٩٤	بسّط
(س + ١٢)^{٢} = ٢٦٩٤	حلّل س^{٢} + ٢٤س + ١٤٤ إلى العوامل
س + ١٢ = ± $\sqrt{٢٦٩٤}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
س = −١٢ ± $\sqrt{٢٦٩٤}$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين

استعمل الحاسبة لتقريب قيمتي س.

س = −١٢ + $\sqrt{٢٦٩٤}$	أو	س = −١٢ − $\sqrt{٢٦٩٤}$	افصل الحلين
≈ ٣٩,٩		≈ −٦٣,٩	أوجد القيم التقريبية

بما أنه لا يمكن أن نشتري عددًا سالبًا من القطع فالحل السالب غير معقول، إذن يمكن شراء ٣٩ قطعة من هذا الزي.

تحقق ٤

إذا أمكن زيادة المبلغ إلى ٩٨٠ ريالًا، فما عدد قطع الزي التي يمكن شراؤها؟

تأكد

حُلَّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

$س^{٢} + ٤س = ٦$

٥

$س^{٢} - ٨س = -٩$

٦

تأكد ٩

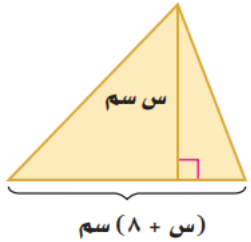
إنشاءات: يبني إسماعيل صالة مستطيلة الشكل خلف منزل عائلته، مساحتها ١٤٤ مترًا مربعًا، وطولها يزيد على عرضها بمقدار ١٠ أمتار، فما بُعدا الصالة؟

تدرب

أوجد قيمة س في كل شكل مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا: (م: المساحة)

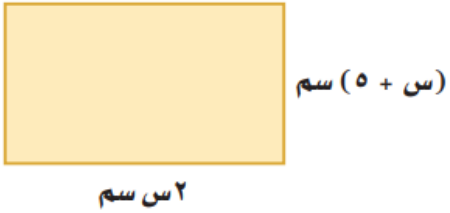
٢٣

م = ٤٥ سم^{٢}



٢٤

م = ١١٠ سم^{٢}



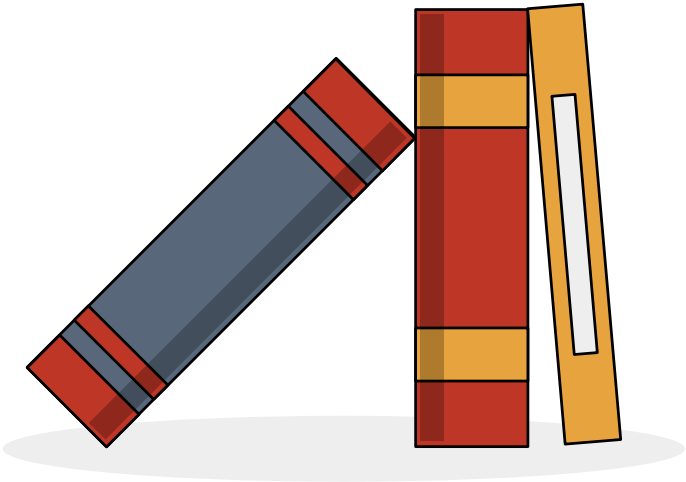
حدّد العبارة التي تختلف عن العبارات الثلاث الأخرى. وفسّر إجابتك.

$ن^٢ - ن + \frac{١}{٤}$	$ن^٢ + ن + \frac{١}{٤}$	$ن^٢ - \frac{٢}{٣}ن + \frac{١}{٩}$	$ن^٢ + \frac{١}{٣}ن + \frac{١}{٩}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

الواجب

حل المعادلات التربيعية
باستعمال القانون العام



اليوم :

التاريخ :

مجموعة رفعة الرياضيات
تكوين - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية
بإكمال المربع

الان

١-أحل معادلات تربيعية
باستعمال القانون العام
٢-أستعمل المميز لتحديد عدد
حلول معادلة تربيعية

المفردات

القانون العام
المميز

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا

يمكن تمثيل ضغط الدم الانقباضي الطبيعي (ص) بالمللتر زئبق للأنثى البالغة بالدالة: ص = ٠,٠١ س^{٢} + ٠,٠٥ س + ١٠٧، حيث (س) العمر بالسنوات، وتستعمل هذه الدالة لتقدير عمر الأنثى إذا عُلِم ضغط الدم الانقباضي لها، إلا أنه من الصعب حل المعادلة المرافقة لها بالتحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

مفهوم أساسي القانون العام

حلَّ المعادلة التربيعية: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠ يُعبّر عنه بالقانون العام:

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

مثال ١

حل المعادلة: $٣س^{٢} + ٥س = ١٢$ باستعمال القانون العام.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$٣س^{٢} + ٥س = ١٢$ — المعادلة الأصلية

$٣س^{٢} + ٥س - ١٢ = ٠$ — اطرح ١٢ من كلا الطرفين

الخطوة ٢: طبّق القانون العام.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$ القانون العام

$$= \frac{-(٥) \pm \sqrt{(٥)^{٢} - ٤(٣)(-١٢)}}{٢(٣)}$$ أ = ٣، ب = ٥، جـ = −١٢

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ + ١٤٤}}{٦}$$ اضرب

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{١٦٩}}{٦} = \frac{-٥ \pm ١٣}{٦}$$ اجمع ثم أوجد الجذر التربيعي

$$س = \frac{-٥ - ١٣}{٦} \text{ أو } س = \frac{-٥ + ١٣}{٦}$$ افصل الحلين

$$س = -٣ \qquad = \frac{٤}{٣}$$ بسّط

الحلان هما −٣ وَ $\frac{٤}{٣}$.

تحقق ١أ

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

$$٢س^{٢} + ٩س = ١٨$$

تحقق

١ب

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

$$٤س^{٢} - ٢٤س + ٣٥ = ٠$$

مثال ٢

حُلِّ المعادلة $١٠س^{٢} - ٥س = ٢٥$ باستعمال القانون العام، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$١٠س^{٢} - ٥س = ٢٥$ — المعادلة الأصلية

$١٠س^{٢} - ٥س - ٢٥ = ٠$ — اطرح ٢٥ من كلا الطرفين

الخطوة ٢: طبّق القانون العام.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$ — القانون العام

$$= \frac{-(-٥) \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤(١٠)(-٢٥)}}{٢(١٠)}$$ — أ = ١٠، ب = −٥، جـ = −٢٥

$$= \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ + ١٠٠٠}}{٢٠} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$$ — اضرب ثم اجمع

$$= \frac{٥ - \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠} \text{ أو } س = \frac{٥ + \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$$ — افصل الحلين

$$\approx -١,٤ \qquad \approx ١,٩$$ — بسط

الحلان هما −١,٤ وَ ١,٩ تقريبًا.

إرشادات للاختبار

الإجابات الدقيقة

العدد $\sqrt{١٠٢٥}$ في المثال ٢ غير نسبي؛ لذا فالآلة الحاسبة تعطي فقط قيمة تقريبية له، أما الإجابة الدقيقة في المثال ٢ فهي: $\frac{٥ \pm \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ أما العددان −١,٤، ١,٩ فقيمتان تقريبيتان.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

تحقق ٢

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

$$٣ س^{٢} - ٢ س - ٩ = ٠$$

مثال ٣

حل المعادلة: $س^٢ - ٤س = ١٢$.

الطريقة ١: التمثيل البياني

أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$س^٢ - ٤س = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س^٢ - ٤س - ١٢ = ٠$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين

مثّل الدالة المرتبطة $د(س) = س^٢ - ٤س - ١٢$ بيانيًّا، وحدّد المقطعين السينيين على التمثيل.

الحلان هما -٢ ، ٦.

الطريقة ٢: التحليل إلى عوامل

$س^٢ - ٤س = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س^٢ - ٤س - ١٢ = ٠$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين
$(س - ٦)(س + ٢) = ٠$	حلّل
$س - ٦ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$س = ٦$ ، $س = -٢$	إيجاد قيم س

مثال ٣

حل المعادلة: $س^٢ - ٤س = ١٢$.

الطريقة ٣: إكمال المربع

المعادلة مكتوبة بالصورة المناسبة لإكمال المربع؛ لأن المعامل الرئيس يساوي ١، والحدين اللذين يحتويان $س^٢$، س تم فصلهما.

$س^٢ - ٤س = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س^٢ - ٤س + ٤ = ١٢ + ٤$	بما أن $\left(\frac{-٤}{٢}\right)^٢ = ٤$، لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين
$(س - ٢)^٢ = ١٦$	حلّل $س^٢ - ٤س + ٤$.
$س - ٢ = \pm ٤$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$س = ٢ \pm ٤$	أضف ٢ لكلا الطرفين
$س = ٢ + ٤$ أو $س = ٢ - ٤$	افصل الحلين
$= ٦$ $\quad = -٢$	بسّط

تنبيه !

الحلول

لا يُعدّ نوع الطريقة المستعملة لحل المعادلة التربيعية مهمًّا، إذ إن جميع الطرق تُعطي الحل نفسه أو الحلول نفسها.

مثال ٣

حل المعادلة: $س^{٢} - ٤س = ١٢$.

الطريقة ٤: القانون العام

من الطريقة الأولى، الصورة القياسية للمعادلة هي: $س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$ القانون العام

$$= \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤(١)(-١٢)}}{٢(١)}$$ أ = ١، ب = −٤، جـ = −١٢

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ + ٤٨}}{٢}$$ اضرب

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{٦٤}}{٢} = \frac{٤ \pm ٨}{٢}$$ اجمع وبسّط

$$س = \frac{٤ - ٨}{٢} \text{ أو } س = \frac{٤ + ٨}{٢}$$ افصل الحلين

$$= -٢ \qquad = ٦$$ بسّط

تنبيه !

الحلول

لا يُعدّ نوع الطريقة المستعملة لحل المعادلة التربيعية مهمًّا، إذ إن جميع الطرق تُعطي الحل نفسه أو الحلول نفسها.

تحقق

٣أ

حُلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$٢س^{٢} - ١٧س + ٨ = ٠$$

تحقق

٣ب

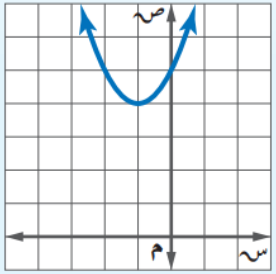
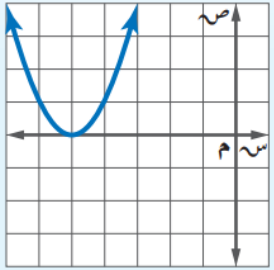
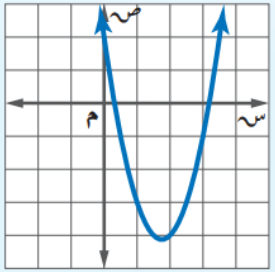
حُلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$٤س^{٢} - ٤س - ١١ = ٠$$

مفهوم أساسي حل المعادلات التربيعية

الطريقة	متى يُفضل استعمالها؟
التحليل إلى عوامل	تستعمل إذا كان الحد الثابت صفرًا، أو إذا كان من السهل تحديد العوامل فليست جميع المعادلات قابلة للتحليل.
التمثيل البياني	تستعمل عندما يكون الحل التقريبي مقبولًا.
استعمال خاصية الجذر التربيعي	تستعمل إذا كانت المعادلة مكتوبة على الصورة $س^{٢} = ن$ أو $س^{٢} = (س - هـ)$
إكمال المربع	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$، إلا أنه من الأسهل استعمالها إذا كان ب عددًا زوجيًّا وَ أ = ١.
القانون العام	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$.

مفهوم أساسي استعمال المميز

المعادلة	س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠	س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠	٢س^{٢} − ٧س + ٢ = ٠
المميز	ب^{٢} − ٤أجـ = −١٦ سالب	ب^{٢} − ٤أجـ = ٠ صفر	ب^{٢} − ٤أجـ = ٣٣ موجب
تمثيل الدالة المرتبطة	 عدد المقاطع السينية = ٠	 عدد المقاطع السينية = ١	 عدد المقاطع السينية = ٢
عدد الحلول الحقيقية	٠	١	٢

مثال ٤

أوجد قيمة المميز للمعادلة: $٤س^{٢} - ٥س = -٣$، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية: $٤س^{٢} - ٥س = -٣ \longrightarrow ٤س^{٢} - ٥س + ٣ = ٠$

الخطوة ٢: أوجد المميز.

$$ب^{٢} - ٤أجـ = (-٥)^{٢} - ٤(٤)(٣)$$

$$= -٢٣$$

بما أن المميز سالب فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

إرشادات للدراسة

المميز: تذكر أنه إذا كان الطرف الأيمن في الصورة القياسية لثلاثي حدود من الدرجة الثانية مربعًا كاملاً فهناك حل واحد، ويكون المميز صفرًا.

تحقق

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدِّد عدد حلولها الحقيقية:

٤ أ

$٢س^{٢} + ١١س + ١٥ = ٠$

٤ب

$٩س^{٢} - ٣٠س + ٢٥ = ٠$

تأكد ١

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

$$س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$$

تأكد

٦

حُلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$٩س^{٢} = ٢٥$$

تأكد

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدِّد عدد حلولها الحقيقية:

٧

$س^{٢} - ٩س + ٢١ = ٠$

٨

$٩س^{٢} + ٢٤س = -١٦$

منصّة القفز: يقفز خالد من فوق منصة القفز، حيث تمثل المعادلة ل = −١٦ن^{٢} + ٤,٢ن + ٦، ارتفاع خالد (ل) بعد (ن) من الثواني، استعمل المميز لتحديد ما إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع ٢٠ قدمًا. فسّر إجابتك.

تبرير: بيّن فيما إذا كان عدد الحلول الحقيقية لكل مما يأتي حلان، أو حل واحد، أو لا يوجد حل :

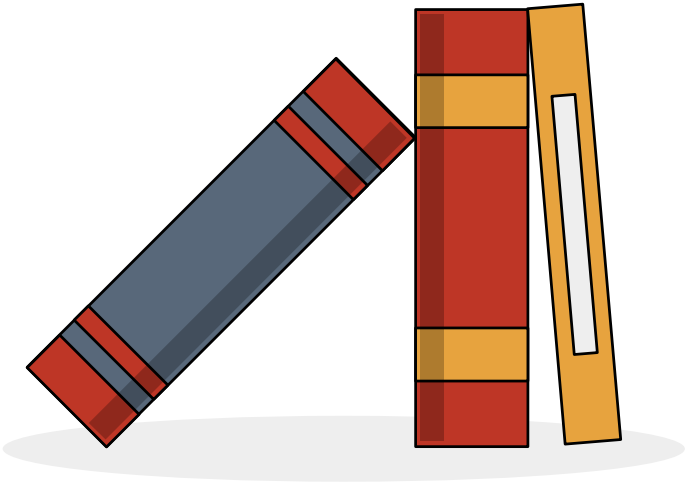
٣٣) التمثيل البياني لدالة تربيعية لا تحتوي على مقطع سيني.

٣٤) التمثيل البياني لدالة تربيعية تمس محور السينات.

٣٥) التمثيل البياني لدالة تربيعية تقطع محور السينات مرتين.

الواجب

أختبار الفصل ٨



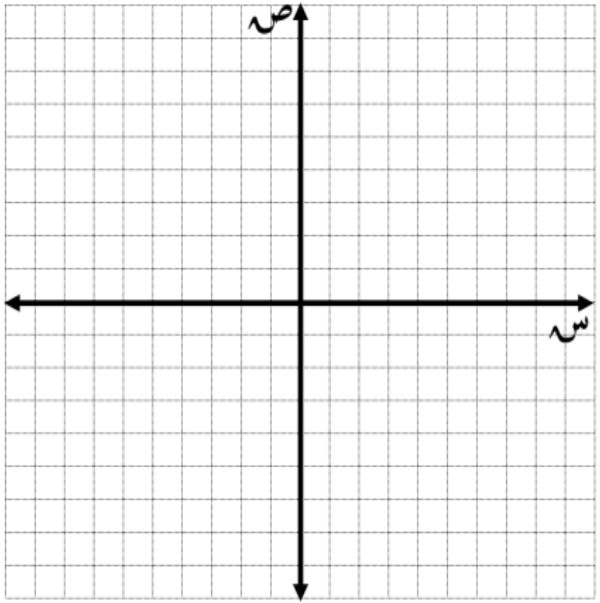
اليوم :

التاريخ :

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدِّد مجالهما ومداهما:

١

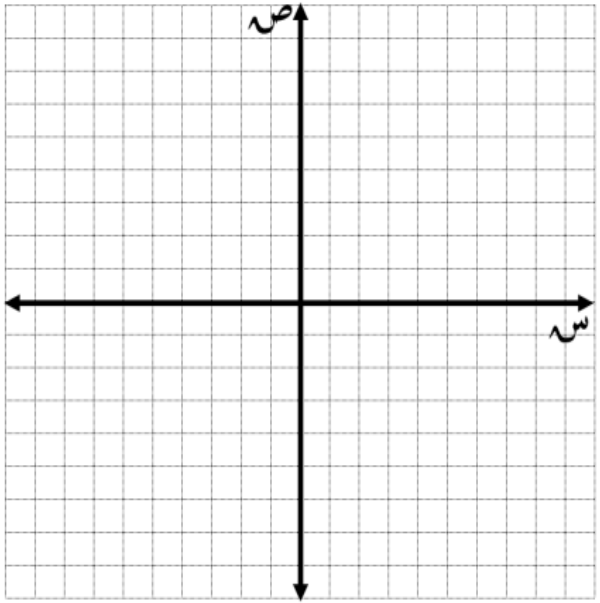
$ص = س^{٢} + ٢س + ٥$



استعمل جدول القيم لتمثيل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدِّد مجالهما ومداهما:

$ص = ٢س^{٢} - ٣س + ١$

٢



لتكن الدالة ص = س^{٢} − ٧س + ٦ .

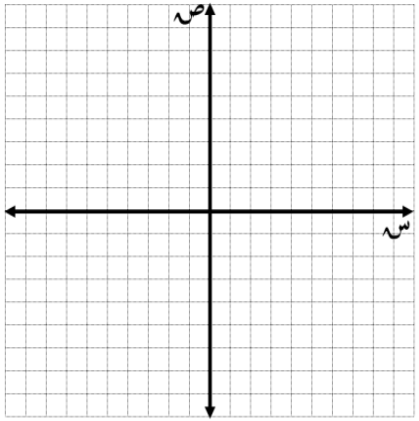
٣) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

٤) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

٥) حدد مجال الدالة ومداها.

حُلّ كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

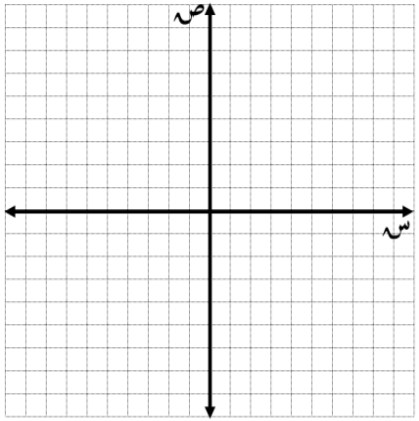
$$س^{٢} + ٧س + ١٠ = ٠$$



٦

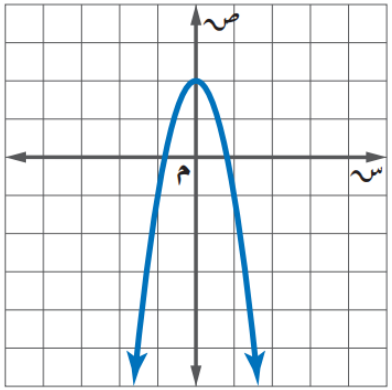
٧

$$س^{٢} - ٥ = -٣س$$



٨

اختيار من متعدد: أيّ المعادلات الآتية تعبّر عن الدالة الممثلة بيانيًّا أدناه؟



أ) ص = −٣س^{٢}

ب) ص = ٣س^{٢} + ١

جـ) ص = س^{٢} + ٢

د) ص = −٣س^{٢} + ٢

حُلَّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال إكمال المربع:

٩

$$س^{٢} - س - ٦ = ٠$$

١٠

$$٢س^{٢} - ٣٦ = -٦س$$

حُلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام، مقرّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

١١

$$س^{٢} - س - ٣٠ = ٠$$

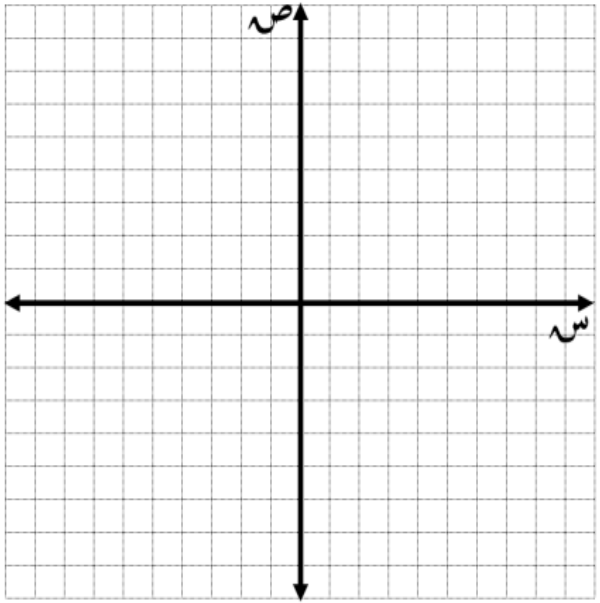
١٢

$$٢س^{٢} + س - ١٥ = ٠$$

١٣

كرة سلة: سدَّد نواف كرة السلة نحو المرمى، وفق المعادلة $ع = -١٦ن^{٢} + ٦٠ن + ٣٠$، حيث تمثّل (ع) ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية، كم تبقى الكرة في الهواء؟

مثِّل الدالة: ص = ٣س^{٢} بيانيًّا، وأوجد المقطع الصادي، وحدد مجالها ومداها.



١٤

١٥

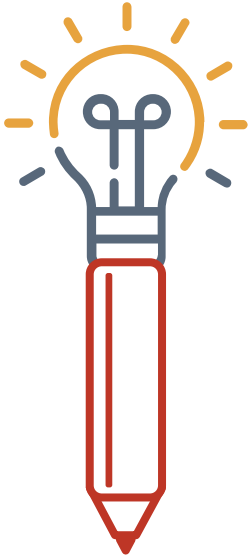
اختيار من متعدد: أي مما يلي يُعّد تحليلًا تامًّا للعبارة $٤ س^{٢} - ٨س - ١٢$ إلى عواملها؟

أ) $٤ (س-٣) (س+١)$

ب) $(٤س+١٢) (س-١)$

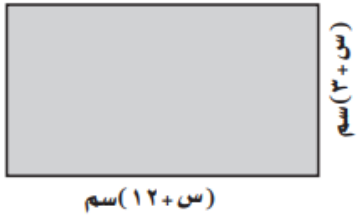
جـ) $٤ (س+٣) (س-١)$

د) $(س-٣) (٤س+٤)$



١٦

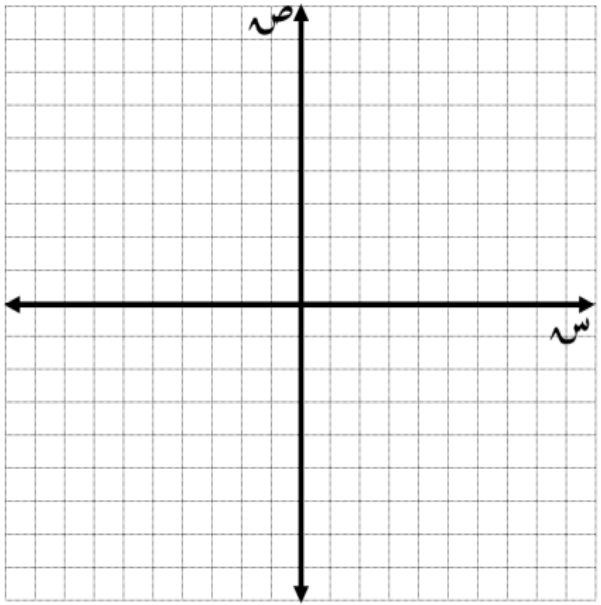
أوجد مساحة المستطيل أدناه.



١٧

مثّل مجموعة الأزواج المرتبة الآتية بيانيًّا:

{(−٢، ٤)، (−١، ١)، (٠،٠)، (١،١)، (٢ ،٤)}، وحدّد فيما إذا كانت تمثّل دالة خطية أم تربيعية.

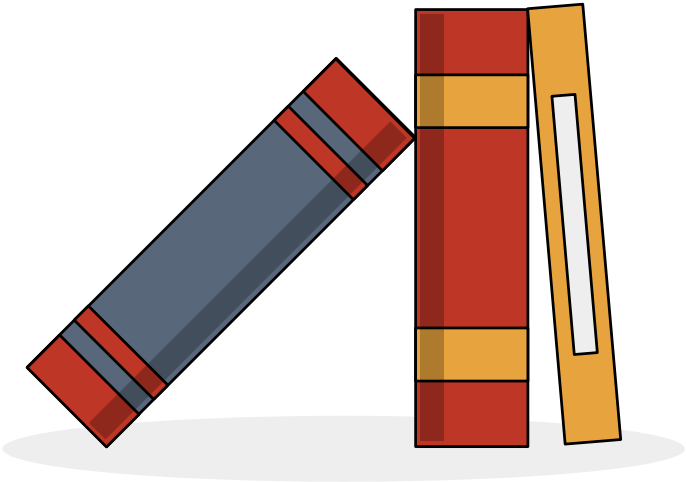


١٨

ابحث عن النمط في الجدول الآتي لتحديد أفضل نموذج دالة لوصف البيانات: خطية أم تربيعية. فسّر إجابتك.

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	١	٣	٥	٧	٩

التهيئة للفصل ٩



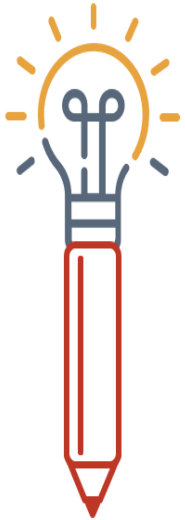
اليوم :

التاريخ :

أوجد الجذر التربيعي لكل ممّا يأتي، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر: (مهارة سابقة)

١ $\sqrt{٨٢}$

٢ $\sqrt{٢٦}$

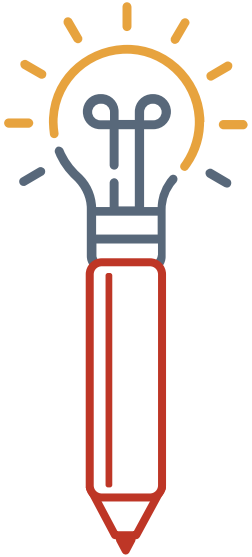


٣ $\sqrt{١٥}$

٤ $\sqrt{٩٩}$

٥

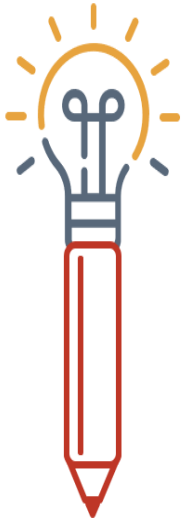
صندوق الرمل: إذا صنع إسحاق صندوقًا رمليًّا قاعدته مربعة الشكل مساحتها ١٠٠ قدم مربعة. فما طول ضلع قاعدة الصندوق؟



بسّط كل عبارة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

٦ (٢١س + ١٥ص) − (٩س − ٤ص)

٧ ١٣س − ٥ص + ٢ص



٨ (١٠أ − ٥ب) + (٦أ + ٥ب)

٩ ٦م + ٥ن + ٤ − ٣م − ٢ن + ٦

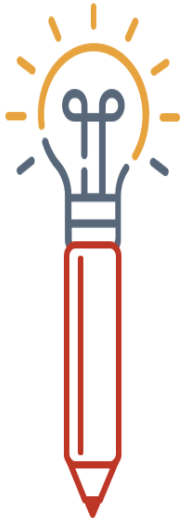
حُلّ كل معادلة فيما يأتي: (الدرسان ٨ - ٣ ، ٨ - ٤)

١٠

$٢س^{٢} - ٤س = ٠$

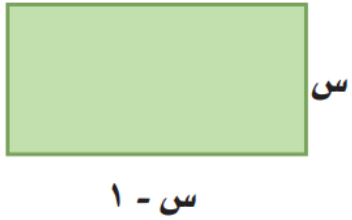
١١

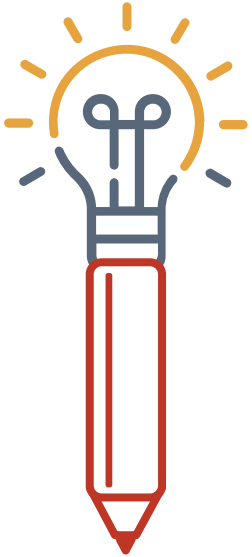
$٢س^{٢} + ٧س - ٥ = -١$



١٢

هندسة : إذا كانت مساحة المستطيل المجاور ٩٠ سم^{٢}، فما قيمة س؟

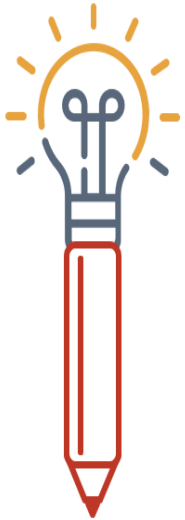




استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان الآتيتان تشكّلان تناسبًا، واكتب "نعم" أو "لا": (مهارة سابقة)

١٣

$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$

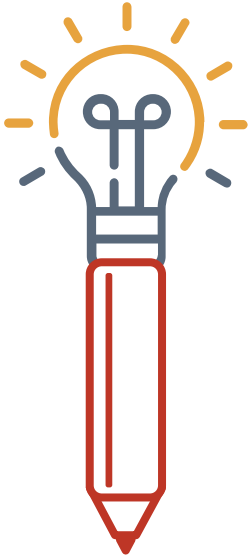


١٤

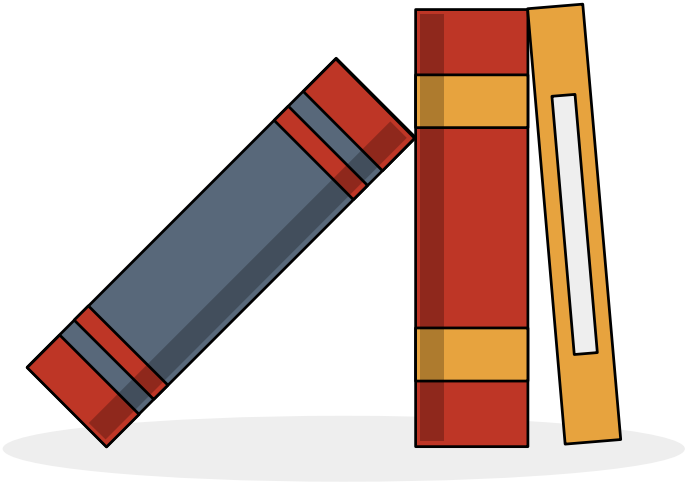
$\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١٥}{٢٠}$

١٥

خرائط: إذا مَثّلت مسافة ١٠ كلم سنتمترًا واحدًا على الخريطة، فما المسافة بين مدينتين على الخريطة إن كانت المسافة بينهما ٥٠ كلم؟



تبسيط العبارات الجذرية



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست إيجاد الجذور التربيعية

الان

١-أستعمل خاصية ضرب الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية

٢-أستعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية

المفردات

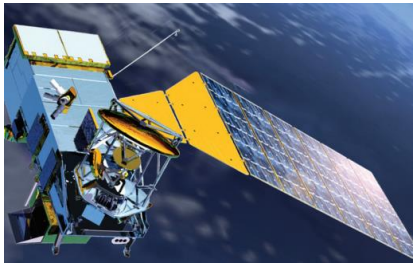
العبارة الجذرية

إنطاق المقام

المرافق

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا



تؤدي الأقمار الاصطناعية العديد من المهام، منها: دراسة الكون والتنبؤ بالطقس، والاتصالات بأنواعها، وتيسير الملاحة البحرية والجوية... إلى غير ذلك، حيث تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، يمكن حسابها بالعلاقة:

$$ع = \sqrt{\frac{٤ \times ١٠^{١٤}}{نق}}$$

حيث تمثل (ع) السرعة المدارية للقمر الاصطناعي بوحدة المتر/ ثانية، (نق) نصف قطر المدار ويساوي بعد القمر عن مركز الأرض.

ويُذكر أن المملكة العربية السعودية أطلقت منظومة أقمار اصطناعية تجارية صغيرة يصل عددها إلى ٢٤ قمرًا.

مفهوم أساسي

خاصية ضرب الجذور التربيعية: تتضمن **العبارة الجذرية** جذرًا، كالجذر التربيعي مثلاً، وتكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط التالية في العبارة التي تحت الجذر:

- لا يكون أيٌّ من عوامله مربعًا كاملاً عدا ١ .
- لا يتضمن كسورًا.
- لا يظهر أي جذر في مقام الكسر.

مفهوم أساسي خاصية ضرب الجذور التربيعية

التعبير اللفظي: الجذر التربيعي للمقدار آ ب لأي عددين حقيقيين غير سالبين آ ، ب، الجذر التربيعي للمقدار أ يساوي الجذر التربيعي للمقدار أ مضروبًا في الجذر التربيعي للمقدار ب.

الرموز: $\sqrt{\text{أ ب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}$ ، إذا كانت أ ≥ ٠ ، ب ≥ ٠

أمثلة: $\sqrt{٤ \times ٩} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٩} = ٢ \times ٣ = ٦$

مثال ١

بسّط العبارة : $\sqrt{٨٠}$.

$\sqrt{٨٠} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٥}$ حلّل ٨٠ إلى عوامله الأولية

$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٥}$ خاصية ضرب الجذور

$= ٢ \times ٢ \times \sqrt{٥} = ٤\sqrt{٥}$ بسّط

تحقق

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١أ

$\sqrt{٥٤}$

١ب

$\sqrt{١٨٠}$

تأكد

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١ $\sqrt{٢٤}$

٢ $٣\sqrt{١٦}$

٣ $٢\sqrt{٢٥}$

مثال ٢

بسّط العبارة: $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٤}$

$\sqrt{٢} \times \sqrt{١٤} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٧}$ خاصية ضرب الجذور

$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٧} = ٢\sqrt{٧}$ خاصية ضرب الجذور

تحقق

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٢أ

$\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠}$

٢ب

$\sqrt{٦} \times \sqrt{٨}$

تأكد

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٤ $\sqrt{١٠} \times \sqrt{١٤}$

٥ $\sqrt{٣} \times \sqrt{١٨}$

٦ $٣\sqrt{١٠} \times ٤\sqrt{١٠}$

مثال ٣

بسّط العبارة: $\sqrt{٩٠ س^{٣} ص^{٤} ك^{٥}}$.

$\sqrt{٩٠ س^{٣} ص^{٤} ك^{٥}} = \sqrt{٢ \times ٣^{٢} \times ٥ \times س^{٣} \times ص^{٤} \times ك^{٥}}$ حلّل إلى العوامل الأولية

$= \sqrt{٢} \times \sqrt{٣^{٢}} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{س^{٢}} \times \sqrt{س} \times \sqrt{ص^{٤}} \times \sqrt{ك^{٤}} \times \sqrt{ك}$ خاصية ضرب الجذور

$= \sqrt{٢} \times ٣ \times \sqrt{٥} \times |س| \times \sqrt{س} \times ص^{٢} \times ك^{٢} \times \sqrt{ك}$ بسّط

$= ٣ ص^{٢} ك^{٢} |س| \sqrt{١٠ س ك}$ بسّط

تحقق

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٣أ

$\sqrt{٣٢ر^{٢}ك^{٤}ت^{٥}}$

٣ب

$\sqrt{٥٦س ص^{١٠}ك^{٥}}$

تأكد

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٧ $\sqrt{٦٠ س^{٤} ص^{٧}}$

٨ $\sqrt{٨٨ م^{٣} ب^{٢} ر^{٥}}$

مفهوم أساسي خاصية قسمة الجذور التربيعية

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين أ، ب، حيث أ ≥ صفر، ب > ٠، الجذر التربيعي للمقدار $\frac{أ}{ب}$ يساوي الجذر التربيعي للبسط أ مقسومًا على الجذر التربيعي للمقام ب

الرموز:

$$\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$$

قراءة الرياضيات

الكسور تحت الجذر

تُقرأ العبارة $\sqrt{\frac{أ}{ب}}$: الجذر التربيعي لِـ أ على ب، أو الجذر التربيعي للمقدار "أ على ب".

مثال ٤

أكتبِ العبارة $\sqrt{\frac{٣٥}{١٥}}$ في أبسط صورة.

أ) $\frac{٥\sqrt{٢١}}{١٥}$ ب) $\frac{\sqrt{٢١}}{٣}$ جـ) $\sqrt{\frac{٥٢٥}{١٥}}$ د) $\frac{\sqrt{٣٥}}{١٥}$

اقرأ الفقرة:

يجب تبسيط العبارة الجذرية.

حل الفقرة:

$\sqrt{\frac{٣٥}{١٥}} = \sqrt{\frac{٧}{٣}}$ بسّط الكسر

$= \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٣}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ اضرب في $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

$= \frac{\sqrt{٢١}}{٣}$ خاصية ضرب الجذور

إذن البديل الصحيح هو ب

تحقق

٤

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$\frac{\sqrt{٦ص}}{\sqrt{١٢}}$$

اختيار من متعدد: بسّط العبارة $\sqrt{\frac{٤٥}{١٠}}$

أ) $\frac{٥\sqrt{٢}}{١٠}$

ب) $\frac{\sqrt{٤٥}}{١٠}$

جـ) $\frac{\sqrt{٥٠}}{١٠}$

د) $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

مفهوم أساسي

كلٌّ من ثنائيتي الحد أ $\sqrt{\text{ب}}$ + جـ $\sqrt{\text{د}}$ ، أ $\sqrt{\text{ب}}$ − جـ $\sqrt{\text{د}}$ تُسمى **مرافقة** للأخرى حيث أ ، ب، جـ، د أعدادٌ نسبية، فعلى سبيل المثال ٢ + $\sqrt{٧}$ وَ ٢ − $\sqrt{٧}$ مترافقتان. حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد نسبي، ويمكن إيجاده باستعمال الفرق بين مربعين.

مثال ٥

بسّط العبارة : $\frac{٣}{٥ + \sqrt{٢}}$.

$$\frac{٣}{٥ + \sqrt{٢}} = \frac{٣}{٥ + \sqrt{٢}} \times \frac{٥ - \sqrt{٢}}{٥ - \sqrt{٢}}$$

مرافق $٥ + \sqrt{٢}$ هو $٥ - \sqrt{٢}$

$$= \frac{٣(٥ - \sqrt{٢})}{٥^{٢} - (\sqrt{٢})^{٢}}$$

$(أ-ب)(أ+ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

$$= \frac{١٥ - ٣\sqrt{٢}}{٢٥ - ٢} = \frac{١٥ - ٣\sqrt{٢}}{٢٣}$$

$(\sqrt{٢})^{٢} = ٢$

تحقق

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٥أ

$$\frac{٣}{٢\sqrt{٢}+٢}$$

٥ب

$$\frac{٧}{٧\sqrt{٧}-٣}$$

تأكد

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١١

$$\frac{٣}{٣ + \sqrt{٥}}$$

١٢

$$\frac{٥}{٢ - \sqrt{٦}}$$

تدريب على اختبار

أيّ العبارات الآتية تكافئ $\sqrt{١٦٠ س^{٢} ص^{٥}}$؟

أ) $١٦ |س| ص^{٢} \sqrt{١٠ ص}$

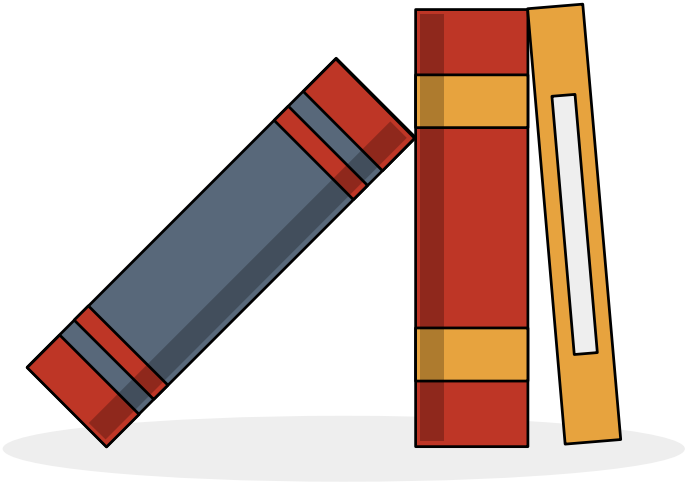
ب) $|س| ص^{٢} \sqrt{١٦٠ ص}$

جـ) $٤ |س| ص^{٢} \sqrt{١٠ ص}$

د) $١٠ |س| ص^{٢} \sqrt{٤ ص}$

الواجب

العمليات على العبارات الجذرية



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست تبسيط العبارات الجذرية

الان

١-أجمع العبارات الجذرية وأطرحها

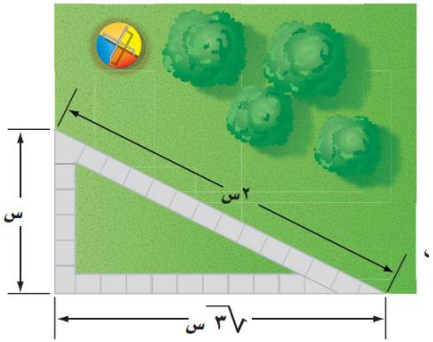
٢-أضرب العبارات الجذرية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا

يتدرّب خالد على الجري في الحديقة، في مسار على صورة مثلث كما في الشكل المجاور؛ استعدادًا للمشاركة في مسابقات الجري، منهيًا ثلاث دورات يوميًّا. ما المسافة التي يقطعها في دورة الجري الواحدة؟ وما المسافة التي يقطعها يوميًّا؟



مفهوم أساسي

جمع العبارات الجذرية وطرحها: يجب أن تكون العبارات الجذرية عند جمعها أو طرحها متشابهة مثلها مثل وحيدات الحد.

وحيدات الحدِّ	العبارات الجذرية
$٤أ + ٢أ = (٤ + ٢)أ$	$٤\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} = (٤ + ٢)\sqrt{٥}$
$= ٦أ$	$= ٦\sqrt{٥}$
$٩ب - ٢ب = (٩ - ٢)ب$	$٩\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} = (٩ - ٢)\sqrt{٣}$
$= ٧ب$	$= ٧\sqrt{٣}$

لاحظ أن ما تحت الجذر لا يتغير عند جمع العبارات الجذرية أو طرحها، ويحدث الشيء نفسه عند جمع وحيدات الحد، إذ تبقى المتغيرات كما هي.

مثال ١

جمع عبارات ماتحت جذورها متشابه وطرحها

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $٥\sqrt{٢} + ٧\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢}$

$٥\sqrt{٢} + ٧\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} = (٥ + ٧ - ٦)\sqrt{٢}$ خاصية التوزيع

$= ٦\sqrt{٢}$ بسّط

ب) $١٠\sqrt{٧} + ٥\sqrt{١١} + ٤\sqrt{٧} - ٦\sqrt{١١}$

$١٠\sqrt{٧} + ٥\sqrt{١١} + ٤\sqrt{٧} - ٦\sqrt{١١} = (١٠ + ٤)\sqrt{٧} + (٥ - ٦)\sqrt{١١}$ خاصية التوزيع

$= ١٤\sqrt{٧} - \sqrt{١١}$ بسّط

تحقق

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١أ

$٣\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢}$

١ب

$٦\sqrt{١١} + ٢\sqrt{١١} - ٩\sqrt{١١}$

١ج

$١٥\sqrt{٣} - ١٤\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٥} - ١١\sqrt{٣}$

١د

$٤\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٧} - ٦\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٧}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

تأكد

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١

$٣\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٥}$

٢

$٦\sqrt{٧} - \sqrt{٧}$

مثال ٢

جمع عبارات ماتحت جذورها غير متشابه وطرحها

بسّط: $٢\sqrt{١٨} + ٢\sqrt{٣٢} + \sqrt{٧٢}$.

$٢\sqrt{١٨} + ٢\sqrt{٣٢} + \sqrt{٧٢} = ٢(\sqrt{٣^٢} \times \sqrt{٢}) + ٢(\sqrt{٤^٢} \times \sqrt{٢}) + (\sqrt{٦^٢} \times \sqrt{٢})$ خاصية الضرب

$= ٢(٣\sqrt{٢}) + ٢(٤\sqrt{٢}) + (٦\sqrt{٢})$ بسّط

$= ٦\sqrt{٢} + ٨\sqrt{٢} + ٦\sqrt{٢}$ اضرب

$= ٢٠\sqrt{٢}$ بسّط

إرشادات للدراسة

بسّط:
يجب تبسيط كل حد جذري أولًا، ثم إجراء العمليات الحسابية المطلوبة.

تحقق

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ٢

$٤\sqrt{٥٤} + ٢\sqrt{٢٤}$

ب١

$٣\sqrt{٤٥} + \sqrt{٢٠} - \sqrt{٢٤٥}$

تأكد

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٣

$$٤\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢٠}$$

٤

$$\sqrt{١٢} - \sqrt{٣}$$

مثال ٣

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $٣\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٦}$

$٣\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٦} = (٣ \times ٢)(\sqrt{٢} \times \sqrt{٦})$ خاصية التجميع

$= ٦(\sqrt{١٢})$ اضرب

$= ٦(٢\sqrt{٣})$ بسّط

$= ١٢\sqrt{٣}$ اضرب

ب) $٣\sqrt{٥}(٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٣})$

$٣\sqrt{٥}(٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٣}) = (٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥}) + (٣\sqrt{٥} \times ٥\sqrt{٣})$ خاصية التوزيع

$= [(٣ \times ٢)(\sqrt{٥} \times \sqrt{٥})] + [(٣ \times ٥)(\sqrt{٥} \times \sqrt{٣})]$ خاصية التجميع

$= [٦(\sqrt{٢٥})] + [١٥(\sqrt{١٥})]$ اضرب

$= [٦(٥)] + [١٥(\sqrt{١٥})]$ بسّط

$= ٣٠ + ١٥\sqrt{١٥}$ اضرب

تنبيه !

ضرب العبارات الجذرية

الخطأ الشائع عند ضرب العبارات الجذرية هو جمع ما تحت جذورها لا ضربه؛ لذا تحقق من ضرب ما تحت الجذور.

تحقق

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٣أ

$٢\sqrt{٦} \times ٧\sqrt{٣}$

٣ب

$٩\sqrt{٥} \times ١١\sqrt{١٥}$

٣ج

$٣\sqrt{٢}(٤\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٢})$

٣د

$٥\sqrt{٣}(٣\sqrt{٢} - \sqrt{٣})$

تأكد

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٧

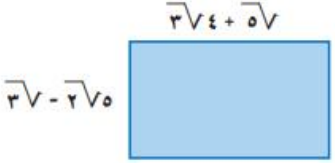
$٩\sqrt{٢}\,(٤\sqrt{٦})$

٨

$\sqrt{٣}\,(\sqrt{٣}+\sqrt{٧})$

مثال ٤

هندسة: أوجد مساحة المستطيل المجاور بأبسط صورة.



$$\text{م} = (٥\sqrt{٢} - \sqrt{٣})(٤\sqrt{٣} + \sqrt{٥})$$ م = ل × ض

$$= \underbrace{(٥\sqrt{٢})(\sqrt{٥})}_{\text{الحدّان الأولان}} + \underbrace{(٥\sqrt{٢})(٤\sqrt{٣})}_{\text{الحدّان في الطرفين}} + \underbrace{(-\sqrt{٣})(\sqrt{٥})}_{\text{الحدّان الأوسطان}} + \underbrace{(-\sqrt{٣})(٤\sqrt{٣})}_{\text{الحدّان الأخيران}}$$

$$= ٥\sqrt{١٠} + ٢٠\sqrt{٦} - \sqrt{١٥} - ٤\sqrt{٩}$$ اضرب

$$= ٥\sqrt{١٠} + ٢٠\sqrt{٦} - \sqrt{١٥} - ١٢$$ بسّط

قراءة الرياضيات

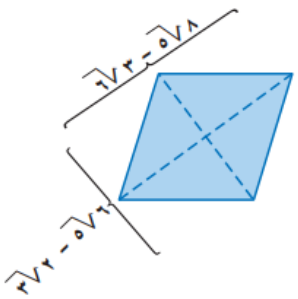
طريقة التوزيع بالترتيب: اضرب ثنائيتي حد عن طريق إيجاد مجموع حاصل ضرب الحدين الأولين والحدين في الطرفين والحدين الأوسطين والحدين الأخيرين.

تحقق ٤

هندسة: يمكن إيجاد مساحة معين باستعمال المعادلة

م = $\frac{١}{٢}$ ق١ × ق٢، حيث ق١، ق٢ طولا قطري المعين.

ما مساحة المعين في الشكل المجاور؟



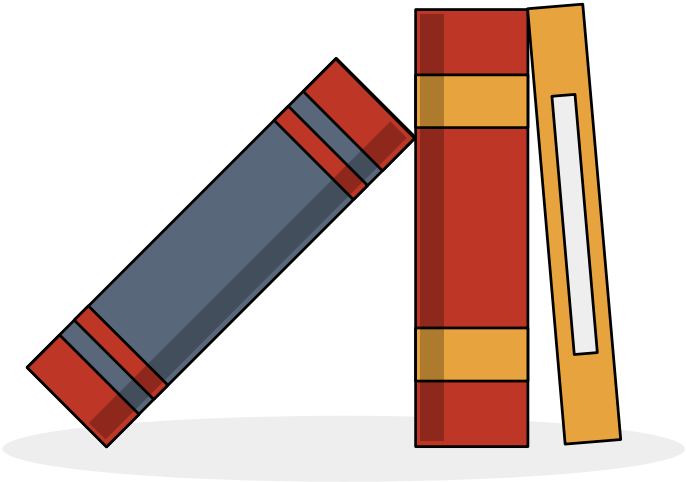
مفهوم أساسي

العمليات على العبارات الجذرية

العملية	الرموز	مثال
الجمع ، ب ≥ ٠	أ $\sqrt{\text{ب}}$ + جـ $\sqrt{\text{ب}}$ = (أ + جـ) $\sqrt{\text{ب}}$ ما تحت الجذرين متشابه	٤ $\sqrt{٣}$ + ٦ $\sqrt{٣}$ = (٤ + ٦) $\sqrt{٣}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$
الطرح ، ب ≥ ٠	أ $\sqrt{\text{ب}}$ − جـ $\sqrt{\text{ب}}$ = (أ − جـ) $\sqrt{\text{ب}}$ ما تحت الجذرين متشابه	١٢ $\sqrt{٥}$ − ٨ $\sqrt{٥}$ = (١٢ − ٨) $\sqrt{٥}$ = ٤ $\sqrt{٥}$
الضرب ، ب ≥ ٠ ، جـ ≥ ٠	(أ $\sqrt{\text{ب}}$)(د $\sqrt{\text{جـ}}$) = أ د $\sqrt{\text{ب جـ}}$ ليس من الضروري تشابه ما تحت الجذرين.	٣ $\sqrt{٢}$ (٥ $\sqrt{٧}$) = (٣ × ٥) ($\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٧}$) = ١٥ $\sqrt{١٤}$

الواجب

المعادلات الجذرية



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست جمع عبارات جذرية
وطرحها وضربها

الان

١-أحل معادلات جذرية
٢-أحل معادلات جذرية تتضمن
حلولاً دخيلة

المفردات

المعادلات الجذرية
الحلول الدخيلة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا

طول غاطس القارب الشراعي هو طول الخط الذي يصنعه مع حافة الماء عندما يكون حاملًا أقصى حمولته.

ويمكن تقدير أقصى سرعة للقارب بالكيلومتر/ ساعة باستعمال المعادلة: $ع = ٥,٤ \sqrt{ل}$، حيث (ل) تمثّل طول غاطس القارب بالأمتار.

مفهوم أساسي خاصية تربيع طرفي المساواة

التعبير اللفظي: إذا ربّعت طرفي معادلة صحيحة، فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة.

الرموز: إذا كانت أ = ب، فإن: $أ^{٢} = ب^{٢}$.

مثال: إذا كانت $\sqrt{س} = ٤$، فإن $(\sqrt{س})^{٢} = ٤^{٢}$

مثال ١

إبحار: يبحر إدريس وموسى في قارب شراعي، سرعته ١٦,٦٥ كلم/ ساعة. أوجد طول الغاطس إلى أقرب عُشر من المتر. بالرجوع إلى فقرة لماذا، حل السؤال التالي:

افهم: تعلم سرعة القارب في رحلته والتي لها علاقة بطول غاطس القارب.

خطّط: يسير القارب بسرعة ١٦,٦٥ كم/ ساعة ومعادلة السرعة هي: $ع = ٤,٥\sqrt{ل}$.

حل:

$ع = ٤,٥\sqrt{ل}$	معادلة سرعة القارب
$١٦,٦٥ = ٤,٥\sqrt{ل}$	عوّض ع = ١٦,٦٥
$\frac{١٦,٦٥}{٤,٥} = \frac{٤,٥\sqrt{ل}}{٤,٥}$	اقسم على ٤,٥
$٣,٧ = \sqrt{ل}$	بسّط
$(٣,٧)^{٢} = (\sqrt{ل})^{٢}$	ربّع طرفي المعادلة
$ل = ١٣,٦٩$	بسّط

طول الغاطس يساوي ١٣,٧ مترًا تقريبًا.

تحقق: تحقق بتعويض الحل في المعادلة الأصلية.

تحقق: تحقق بتعويض الحل في المعادلة الأصلية.

$ع = ٤,٥\sqrt{ل}$	معادلة سرعة القارب
$١٦,٦٥ \stackrel{؟}{=} ٤,٥\sqrt{١٣,٧}$	عوّض ع = ١٦,٦٥، ل = ١٣,٧
$١٦,٦٥ \approx ١٦,٦٥٦٠٧٩٩$ ✓	اضرب

تحقق ١

قيادة: تمثّل المعادلة ع = $\sqrt{٣,٢١ \text{ نق}}$ السرعة القصوى بالكيلومتر/ ساعة التي يمكن أن تسير بها سيارة بأمان على طريق منحنٍ غير محدد الجانبين، حيث (نق) نصف قطر المنحنى بالأمتار. فإذا صُمّم الطريق لسرعة قصوى مقدارها ١٠٥ كلم/ ساعة، فما طول نصف قطر المنحنى؟

تأكد

١

ما طول نصف قطر كرة سلة إذا كانت معادلة مساحة سطحها هي م = ٤ ط نق^{٢}؟

مثال ٢

حل المعادلة: $\sqrt{\text{أ} + ٥} + ٧ = ١٢$.

$\sqrt{\text{أ} + ٥} + ٧ = ١٢$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{\text{أ} + ٥} = ٥$	اطرح ٧ من الطرفين
$\left(\sqrt{\text{أ} + ٥}\right)^{٢} = ٥^{٢}$	ربّع الطرفين ، وبسّط
$\text{أ} + ٥ = ٢٥$	بسّط
$\text{أ} = ٢٠$	اطرح ٥ من الطرفين

تنبيه !

تربيع الطرفين

تذكّر أنه عند تربيع طرفي المعادلة، يجب تربيع كل طرف منها وإن كان يتكون من أكثر من حد واحد.

تحقق

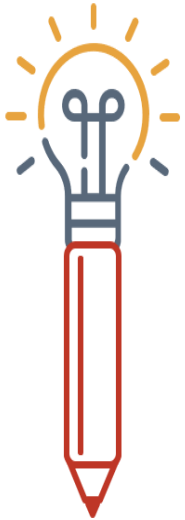
حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٢أ

$\sqrt{جـ - ٣} - ٢ = ٤$

٢ب

$٤ + \sqrt{هـ + ١} = ١٤$

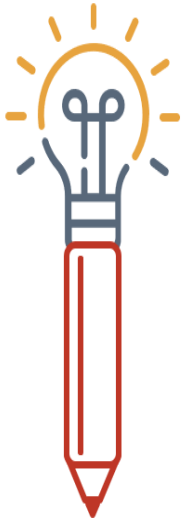


تأكد

حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٢

$\sqrt{١٠هـ} + ١ = ٢١$



٣

$\sqrt{٧ر + ٢} + ٣ = ٧$

مثال ٣

حل المعادلة: $\sqrt{ك + ١} = ك - ١$. وتحقق من صحة الحل.

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{ك + ١})^{٢} = (ك - ١)^{٢}$	ربّع الطرفين
$ك + ١ = ك^{٢} - ٢ك + ١$	بسّط
$٠ = ك^{٢} - ٣ك$	اطرح ك ، ١ من الطرفين
$٠ = ك(ك - ٣)$	حلّل
$ك = ٠$ أو $ك - ٣ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$ك = ٠$ أو $ك = ٣$	حل

تحقق:

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{٠ + ١} \stackrel{؟}{=} ٠ - ١$	عوّض ك = ٠
$\sqrt{١} \stackrel{؟}{=} -١$	بسّط
$١ = -١$ ✗	خطأ

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{٣ + ١} \stackrel{؟}{=} ٣ - ١$	عوّض ك = ٣
$\sqrt{٤} \stackrel{؟}{=} ٢$	بسّط
$٢ = ٢$ ✓	صحيح

تحقق

٣أ

حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$\sqrt{\text{ت} + ٥} = \text{ت} + ٣$$

تحقق

٣ب

حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$س - ٣ = \sqrt{س - ١}$$

تأكد

٥ حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$\sqrt{٣س - ٥} = س - ٥$

تدريب على اختبار

٢٦) ما حل المعادلة:

$\sqrt{س + ٣} - ١ = س - ٤$ ؟

أ) ١، ٦

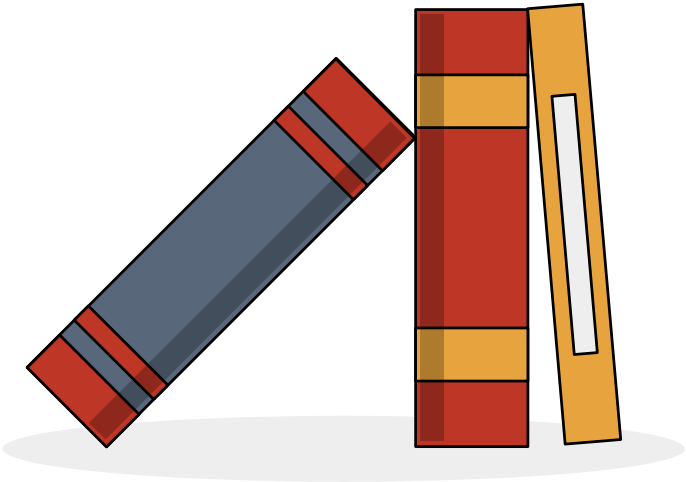
ب) ١

جـ) −١، −٦

د) ٦

الواجب

نظرية فيثاغورس



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية
باستعمال خاصية الجذر
التربيعي

الان

١-أحل مسائل باستعمال نظرية
فيثاغورس
٢- أحدد اذا كان المثلث المعطى
قائم الزاوية أم لا

المفردات

الوتر
الساق
المعكوس
ثلاثية فيثاغورس

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا

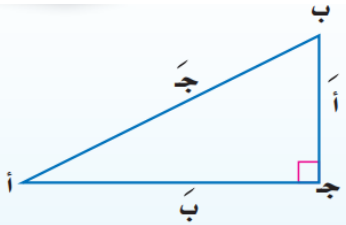
تُقاس أجهزة التلفاز بطول قطر شاشاتها، حيث يمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد قياس القطر إذا كان ارتفاع الشاشة وعرضها معلومين.

نظرية فيثاغورس: يُسمّى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم **وترًا**، وهو أطول الأضلاع في المثلث ويسمّى كلٌّ من الضلعين الآخرين **ساقًا**.

مفهوم أساسي نظرية فيثاغورس

التعبير اللفظي: إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي ضلعيه (ساقيه).

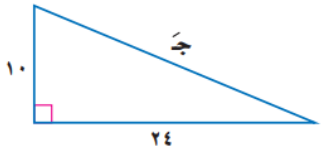
الرموز: $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$



مثال ١

أوجد طول الضلع المجهول في كل مما يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

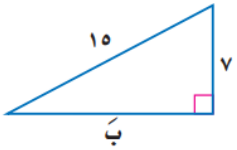
أ)



$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$	نظرية فيثاغورس
$جـ^٢ = ١٠^٢ + ٢٤^٢$	أ = ١٠، ب = ٢٤
$جـ^٢ = ١٠٠ + ٥٧٦$	ربّع
$جـ^٢ = ٦٧٦$	بسّط
$جـ = \pm\sqrt{٦٧٦}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$جـ = \pm ٢٦$	$(\pm ٢٦)^٢ = ٦٧٦$

بما أن طول الضلع لا يكون سالبًا؛ لذا فإن طول الضلع المجهول هو ٢٦ وحدة.

ب)



$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$	نظرية فيثاغورس
$١٥^٢ = ٧^٢ + ب^٢$	جـ = ١٥، أ = ٧
$٢٢٥ = ٤٩ + ب^٢$	ربّع
$ب^٢ = ١٧٦$	اطرح ٤٩ من كلا الطرفين
$ب = \pm\sqrt{١٧٦}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$ب \approx \pm ١٣,٢٧$	استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt{١٧٦}$

فيكون الطول المجهول هو ١٣,٢٧ وحدة تقريبًا.

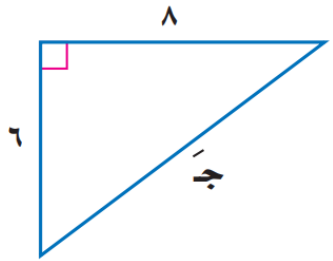
إرشادات للدراسة

في المثلث أ ب جـ يُرمز للضلع المقابل للزاوية أ بالرمز أ، والمقابل للزاوية ب بالرمز ب، والمقابل للزاوية جـ بالرمز جـ.

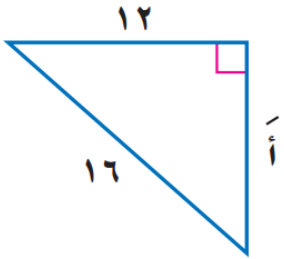
تحقق

أوجد طول الضلع المجهول في كل مما يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

١أ



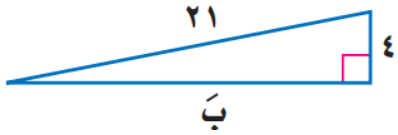
١ب



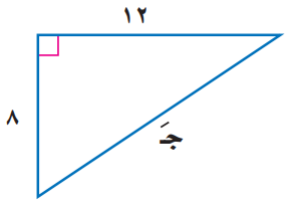
تأكد

أوجد طول الضلع المجهول في كل مما يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

١



٣



مثال ٢

إبحار: يكون شراع الزورق النهري على صورة مثلثٍ قائم الزاوية كما في الشكل المجاور، أوجد ارتفاع هذا الشراع.

$٦^{٢} = ع^{٢} + ٣^{٢}$	نظرية فيثاغورس
$٣٦ = ع^{٢} + ٩$	ربّع
$٢٧ = ع^{٢}$	اطرح ٩ من كلا الطرفين
$ع \approx \pm ٥,٢$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$ع \approx ٥,٢$	استعمل القيمة الموجبة

ارتفاع الشراع ٥,٢ أمتار تقريبًا.

تحقق ٢

لنفرض أن طول أطول ضلع في الشراع ٩ م، وطول أقصر ضلع فيه ٤ م. فأوجد ارتفاع الشراع.

٤) **كرة قدم:** يوضح الشكل المجاور ملعب كرة قدم مستطيل الشكل.

أ) إذا كان طول قطر الملعب ١٢٥م، وعرضه ٧٥م، فكم طوله؟

ب) في لحظة معينة، كما في الشكل، مرَّر حارس المرمى الكرة إلى الظهير الأيمن الذي يبعد عنه مسافة ٣٠ م، فركلها مباشرة إلى لاعب الوسط الهجومي الذي يقف على مسافة ٧٢ م منه. فكم يبعد لاعب الوسط الهجومي عن حارس مرماه؟

مفهوم أساسي معكوس نظرية فيثاغورس

إذا كانت الأطوال أَ، بَ، جَـ لأضلاع مثلث تحقق المعادلة جَـ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢}، فإن المثلث قائم الزاوية.
وإذا كانت جَـ^{٢} ≠ أَ^{٢} + بَ^{٢}، لا يكون المثلث قائم الزاوية .

ثلاثية فيثاغورس: مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تحقق المعادلة جَـ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢}، حيث جَـ أكبر هذه الأعداد. ومن الأمثلة على ذلك "٣، ٤، ٥"، "٥، ١٢، ١٣". وتحقق مضاعفات ثلاثيات فيثاغورس أيضًا معكوس نظرية فيثاغورس؛ لذا فإن "٦، ٨، ١٠" أيضًا من ثلاثيات فيثاغورس.

مثال ٣

حدّد إذا كانت الأطوال "٩، ١٢، ١٦" يمكن أن تشكِّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا.

بما أن طول الضلع الأكبر ١٦، فإن جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢.

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$	نظرية فيثاغورس
$١٦^{٢} \stackrel{؟}{=} ٩^{٢} + ١٢^{٢}$	عوّض جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢
$٢٥٦ \stackrel{؟}{=} ٨١ + ١٤٤$	ربّع
$٢٥٦ \neq ٢٢٥$	اجمع

بما أن $جـ^{٢} \neq أ^{٢} + ب^{٢}$، فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكّل مثلثًا قائم الزاوية.

تحقق

حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

٣أ

٣٠، ٤٠، ٥٠

٣ب

٦، ١٢، ١٨

تأكد

حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

٥

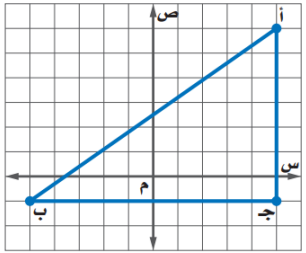
٨، ١٢، ١٦

٦

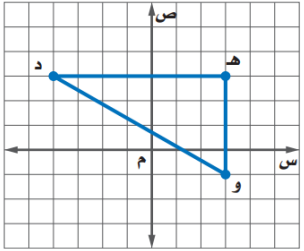
٧، ٢٤، ٢٥

أوجد طول الوتر في المثلثين الآتيين وقرِّب الحل إلى أقرب جزء من مئة:

٢٢



٢٣



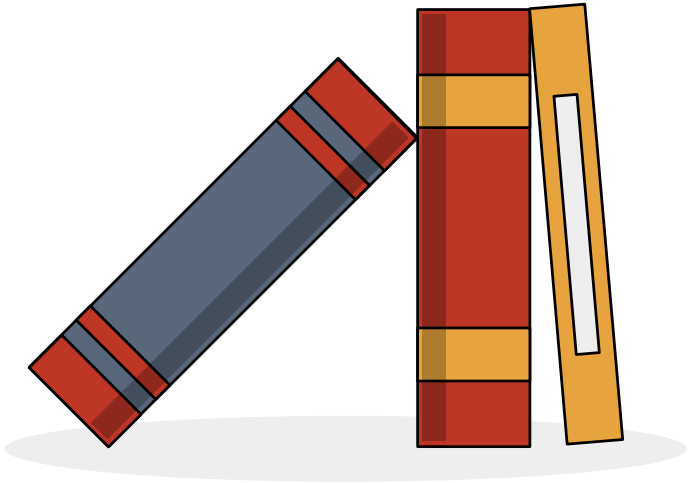
الكعبة المشرفة: باب الكعبة المشرفة مصنوع من الذهب الخالص على هيئة مستطيل أبعاده التقريبية ٢,٣م، ١,٧م. فكم طول قطره؟

اكتشف الخطأ: يحاول حسام وحازم تحديد إن كانت الأعداد "٣٦، ٧٧، ٨٥" تشكّل ثلاثية فيثاغورس. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

حسام	حازم
$٣٦^٢ + ٧٧^٢ \stackrel{؟}{=} ٨٥^٢$	$٣٦^٢ + ٨٥^٢ \stackrel{؟}{=} ٧٧^٢$
$١٢٩٦ + ٥٩٢٩ \stackrel{؟}{=} ٧٢٢٥$	$١٢٩٦ + ٧٧٢٥ \stackrel{؟}{=} ٥٩٢٩$
$٧٢٢٥ = ٧٢٢٥$	$٩٠٢١ \neq ٥٩٢٩$
نعم	لا

الواجب

المسافة بين نقطتين



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس

الان

١-أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي

٢-أجد نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى الإحداثي

المفردات

قانون المسافة بين نقطتين

نقطة المنتصف

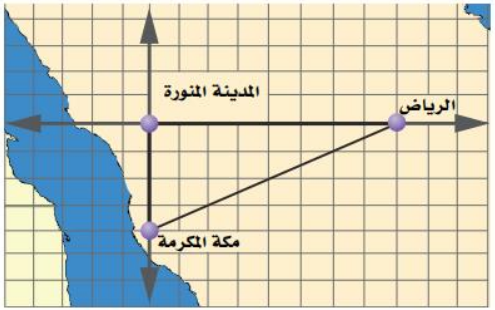
قانون نقطة المنتصف

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا

تستعمل طائرة الإنقاذ المروحية نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) لحساب المسافة المباشرة بين موقعين. وتستطيع التحليق لمسافة ٩٠٠ كيلومتر قبل إعادة تزويدها بالوقود. إذا كانت مهمة الطائرة نقل شخص من مكة المكرمة إلى الرياض، و إذا افترضت أن المدينة المنورة هي نقطة الأصل، ومكة المكرمة عند النقطة (٠، −٤٠٠)، والرياض عند النقطة (٨٠٠، ٠). فهل يمكن للطائرة إكمال المهمة دون التزود بالوقود في أثناء الطريق؟

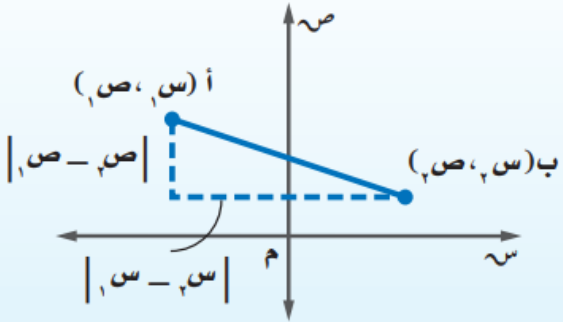


مفهوم أساسي المسافة بين نقطتين

التعبير اللفظي: المسافة ف بين نقطتين إحداثياتها (س$_{١}$، ص$_{١}$)، (س$_{٢}$، ص$_{٢}$) يُعبر عنها بالقانون :

$$ف = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

النموذج:



مثال ١

أوجد المسافة بين النقطتين (٥، ٣) ، (١، −٢).

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-٢ - ٣)^٢}$ $(س_١، ص_١) = (٥، ٣)$ ، $(س_٢، ص_٢) = (١، -٢)$

$= \sqrt{(-٤)^٢ + (-٥)^٢}$ بسّط

$= \sqrt{١٦ + ٢٥}$ ربّع

$= \sqrt{٤١} = ٦,٤$ تقريبًا بسّط

تحقق

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

أ١

(٤، ٢)، (−٣، −١)

ب١

(−٧، −٢) ، (−٥، −٨)

تأكد

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١

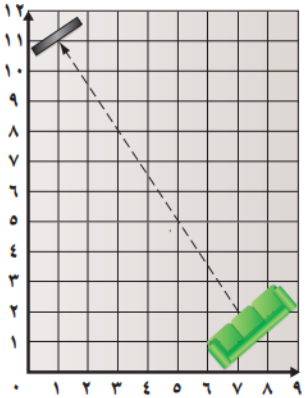
(٦، −٢)، (١٢، ٨)

٢

(٤، ٨)، (−٣، −٦)

مثال ٢

ترفيه: يمتلك صالح مسرحًا منزليًّا. ويوضع التلفاز والمقاعد عادة في ركنين متقابلين من الغرفة؛ حيث يوصي صانعو التلفاز المشاهدين بالجلوس بعيدًا عنه مسافة لا تقل عن ١٣ قدمًا من أجل السلامة. فإذا كان طول كل مربع في المستوى المجاور ١ قدم، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع التلفاز بداخلها؟



مقدمة شاشة التلفاز عند النقطة (١، ١١)، وأول مقعد عند النقطة (٧، ٢).

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(٧ - ١)^٢ + (٢ - ١١)^٢}$ عوّض $(س_١، ص_١) = (١، ١١)$ ، $(س_٢، ص_٢) = (٧، ٢)$

$= \sqrt{٦^٢ + (-٩)^٢}$ بسّط

$= \sqrt{١١٧} = ١٠,٨$ أقدام تقريبًا.

لا، اتساع الغرفة ليس كافيًا لهذا الجهاز.

تحقق ٢

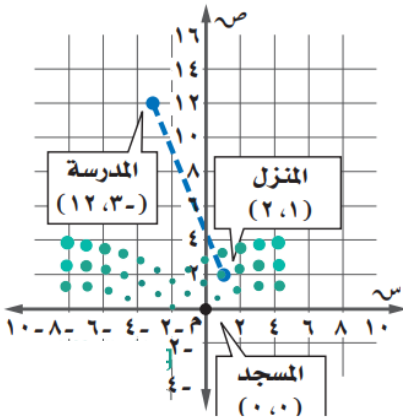
يوصي صانعو مكبرات الصوت (الميكروفونات) بوضعها على مسافة لا تقل عن ٨ أقدام من مكان الجلوس. فإذا وضع ميكروفون في النقطة (٠، ٩)، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع الجهاز؟ فسّر ذلك.

تأكد ٤

مسافات: في المستوى الإحداثي المجاور، يقع منزل عمر عند النقطة (١ ، ٢)، والمدرسة عند النقطة (−٣ ، ١٢). فإذا كان المسجد يقع عند النقطة (٠ ، ٠)، وطول ضلع كل مربع في المستوى الإحداثي كيلومتر واحد، فأوجد:

أ) المسافة بين منزل عمر والمدرسة.

ب) المسافة بين منزل عمر والمسجد.



مثال ٣

أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٤، ٧)، (أ، ٣) تساوي ٥ وحدات.

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$	قانون المسافة بين نقطتين
$٥ = \sqrt{(أ - ٤)^٢ + (٣ - ٧)^٢}$	$(س_١، ص_١) = (٤، ٧)$ ، $(س_٢، ص_٢) = (أ، ٣)$، $ف = ٥$
$٥ = \sqrt{(أ - ٤)^٢ + (-٤)^٢}$	بسّط
$٥ = \sqrt{أ^٢ - ٨أ + ٣٢}$	ربّع وبسّط
$٢٥ = أ^٢ - ٨أ + ٣٢$	ربّع كلا الطرفين
$٠ = أ^٢ - ٨أ + ٧$	اطرح ٢٥ من كلا الطرفين
$٠ = (أ - ١)(أ - ٧)$	حلّل
$أ - ١ = ٠$ أو $أ - ٧ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$أ = ١$ أو $أ = ٧$	حل كل معادلة

إرشادات للدراسة

قيمتان ممكنتان

عند إيجاد الإحداثي المجهول، يكون أمامك خياران؛ لأن النقطة يمكن أن تكون لها البعد نفسه، ومن اتجاهين مختلفين.

تحقق ٣

أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٢، أ)، (−٦، ٢) تساوي ١٠ وحدات.

تأكد

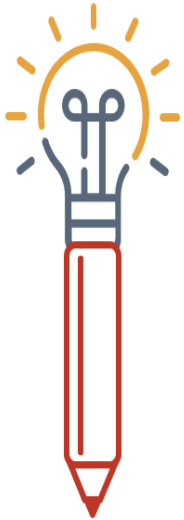
أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما.

٥

(−٥، أ)، (٣، ١)؛ ف = $\sqrt{٨٩}$

٦

(٦، أ)، (٥، ٠)؛ ف = $\sqrt{١٧}$



مفهوم أساسي قانون نقطة المنتصف

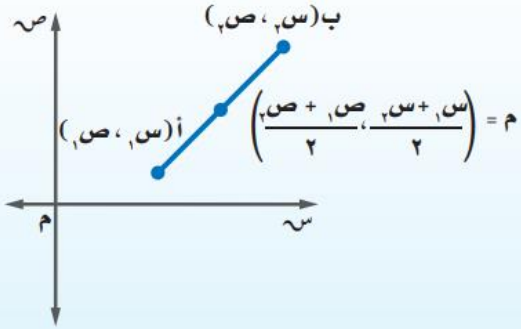
التعبير اللفظي: يستعمل القانون:

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

لإيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتاها النقطتان:

$(س_١ ، ص_١)$ وَ $(س_٢ ، ص_٢)$.

النموذج:



مثال ٤

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين: (−١، −٢)، (٣، −٤) .

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$ قانون نقطة المنتصف

$$= \left(\frac{-١ + ٣}{٢}، \frac{-٢ + (-٤)}{٢}\right)$$ (س١، ص١) = (−١، −٢) ، (س٢، ص٢) = (٣، −٤)

$$= \left(\frac{٢}{٢}، \frac{-٦}{٢}\right)$$ بسّط

$$= (١، -٣)$$ بسّط

تنبيه !

قانون نقطة المنتصف

انتبه إلى أنك تجمع ولا تطرح عند استعمال قانون نقطة المنتصف.

تحقق

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٤أ

(١٢، ٣)، (−٨، ٣)

٤ب

(٠، ٠)، (٥، ١٢)

تأكد

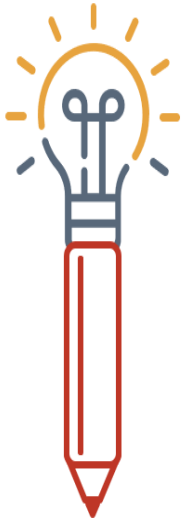
أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٩

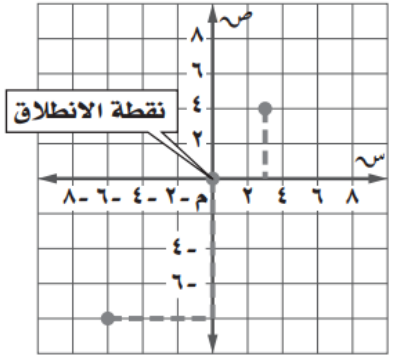
(٥، −١٠)، (٥، ٨)

١٠

(٢، −٢)، (٦، ٢)

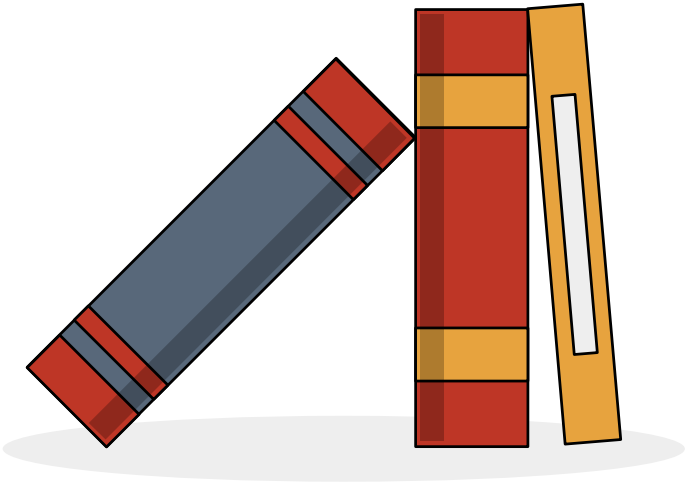


إجابة قصيرة: انطلق قاربان من الموقع نفسه وفي الوقت نفسه كما في التمثيل أدناه، فاتجه أحدهما شرقًا ثم شمالًا. أما الآخر فاتجه جنوبًا ثم غربًا. ما المسافة بينهما؟



الواجب

المثلثات المتشابهة



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست حل التناسبات

الان

١- أحدد ما إذا كان مثلثان متشابهان أم لا

٢-أجد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين

المفردات

المثلثات المتشابهة

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا

لقياس ارتفاع سارية علم المدرسة يحتاج فهد إلى قياس طول ظله وطول ظل السارية، ثم استعمال المثلثات المتشابهة والقياسات غير المباشرة.

المثلثات المتشابهة: تسمى المثلثات التي لها الشكل نفسه **المثلثات المتشابهة**، إلا أنه ليس من الضروري أن تكون لها أطوال الأضلاع نفسها. والرمز ~ يُستعمل ليشير إلى مثلثين متشابهين. وتُكتب رؤوس المثلثات المتشابهة عادة بالترتيب للدلالة على الأجزاء المتناظرة.

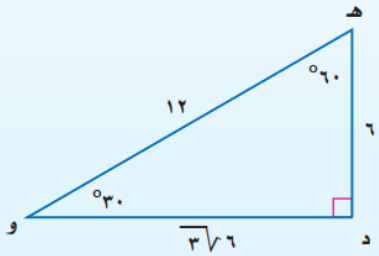
مجموعة رفعة الرياضيات
Salha ASIRI

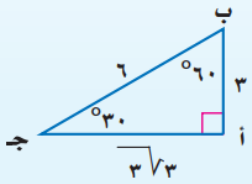
مفهوم أساسي المثلثات المتشابهة

التعبير اللفظي: إذا تشابه مثلثان، فإن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

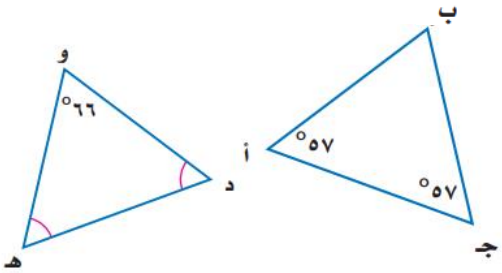
مثال: إذا كان △ أ ب جـ ~ △ د هـ و، فإن ق ∠ أ = ق ∠ د، ق ∠ جـ = ق ∠ و، ق ∠ ب = ق ∠ هـ.

$$\frac{\text{أب}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{د و}} = \frac{١}{٢}.$$





مثال ١



حدد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرِّر إجابتك:

قياس ∠ ب = ١٨٠ − (٥٧ + ٥٧) = ٦٦°.

في △ د هـ و، يتساوى ق ∠ د، مع ق ∠ هـ

ولتكن س = ق ∠ د = ق ∠ هـ

س + س + ٦٦ = ١٨٠ مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠

٢س = ١١٤ اطرح ٦٦ من كلا الطرفين

س = ٥٧ اقسم كلا الطرفين على ٢

ولذا فإن ق ∠ د = ٥٧°، ق ∠ هـ = ٥٧°. وبما أن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، فإن △ هـ و د ~ △ أ ب جـ.

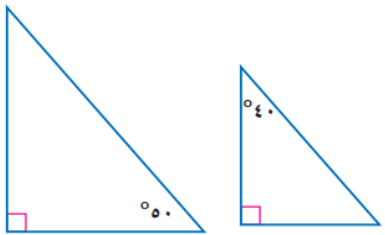
تحقق ١

حدّد ما إذا كان △ أ ب جـ الذي فيه ق ∠ أ = ٦٨°، ق ∠ ب = ق ∠ جـ يشابه △ د هـ فـ حيث ق ∠ هـ = ق ∠ فـ = ٥٤°، وبرّر إجابتك.

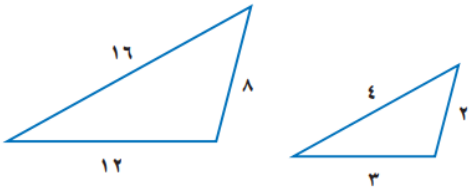
تأكد

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

١



٢



مثال ٢

قراءة الرياضيات

قياس الزاوية

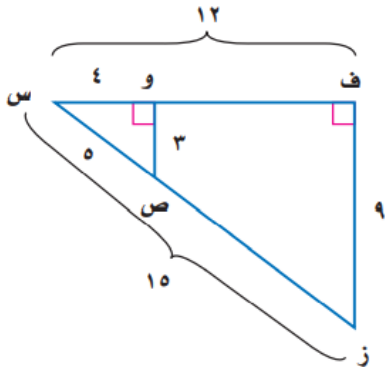
ق ∠ أ يُقرأ: قياس الزاوية أ.

إرشادات للدراسة

المثلثات المتداخلة

في المثلثين المتداخلين يمكنك رسم كل منهما على حدة، مع التأكد من كون العناصر المتناظرة في الموقع نفسه، وضع إشارات لتوضيح الزوايا والأضلاع المتناظرة.

حدّد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:



إذا كان △ ف س ز، △ و س ص متشابهين، فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

$$\frac{\text{ف س}}{\text{و س}} = \frac{١٢}{٤} = ٣ \text{ ، } \frac{\text{س ز}}{\text{س ص}} = \frac{١٥}{٥} = ٣ \text{ ، } \frac{\text{ف ز}}{\text{و ص}} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

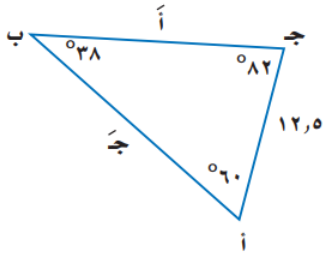
بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن △ ف س ز ~ △ و س ص.

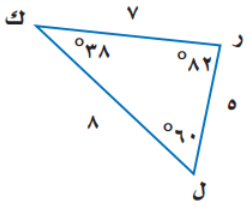
تحقق ٢

حدّد ما إذا كان △ أ ب جـ والذي فيه أب = ٦، ب جـ = ١٦، أ جـ = ٢٠ يشابه △ ع ك ل، حيث ع ك = ٣، ك ل = ٨، ع ل = ٩. وفسّر إجابتك.

مثال ٣

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:





$\frac{\text{أب}}{\text{ل ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ل ر}}$ الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة

$\frac{\text{جَـ}}{٨} = \frac{١٢,٥}{٥}$ أب = جَـ، أجـ = ١٢,٥، ل ك = ٨، ل ر = ٥

٥جَـ = ١٠٠ اضرب تبادليًّا

جَـ = ٢٠ اقسم على ٥

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ر}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ل ر}}$ الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة

$\frac{\text{أَ}}{٧} = \frac{١٢,٥}{٥}$ ب جـ = أَ، أجـ = ١٢,٥، ك ر = ٧، ل ر = ٥

٥أَ = ٨٧,٥ اضرب تبادليًّا

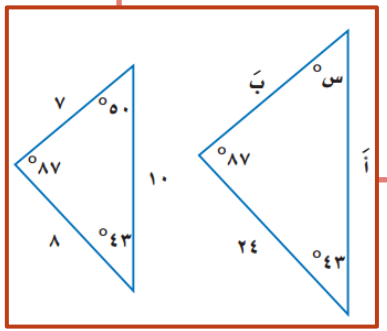
أَ = ١٧,٥ اقسم على ٥

قياسات العناصر المجهولة ٢٠ ، ١٧,٥ .

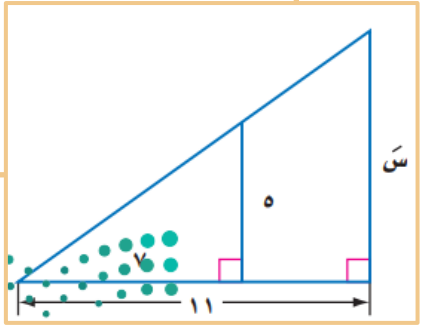
تحقق

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:

٣أ



٣ب



تأكد

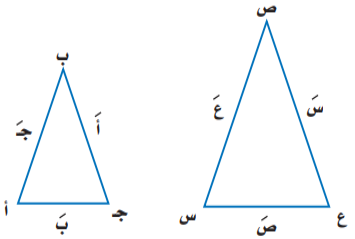
إذا كان △ أ ب جـ ~ △ س ص ع، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:

٣

أَ = ٤، بَ = ٦، جَـ = ٨، سَ = ٦

٤

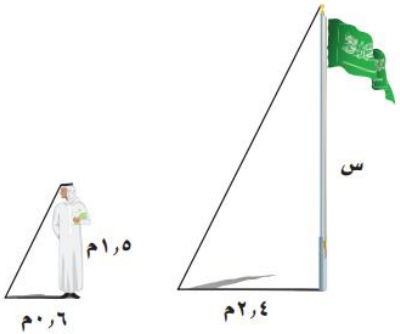
سَ = ٩، صَ = ١٥، عَ = ٢١، جَـ = ٧



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

مثال ٤

ظل: أراد سلطان قياس ارتفاع سارية العلم، فوقف بجانبها. إذا علمت أن طول سلطان متر و٥٠ سنتمترًا، وطول ظله ٦٠ سنتمترًا، وطول ظل السارية في تلك اللحظة متران و٤٠ سنتمترًا، فما ارتفاع السارية؟



افهم: أوجد ارتفاع سارية العلم.

خطّط: ارسم شكلاً للموقف.

حل: أشعة الشمس تشكّل مثلثات متشابهة. اكتب تناسبًا يقارن بين ارتفاعات الأجسام وأطوال ظلالها.

لتكن س= ارتفاع سارية العلم

$$\frac{\text{س}}{١,٥} = \frac{٢,٤}{٠,٦}$$

ارتفاع السارية ← س، طول سلطان ← ١,٥، طول ظل السارية ← ٢,٤، طول ظل سلطان ← ٠,٦

$$٠,٦\,\text{س} = ٣,٦$$

س= ٦ فيكون ارتفاع سارية العلم يساوي ٦ أمتار.

تحقق: $\frac{٦}{١,٥} \stackrel{؟}{=} \frac{٢,٤}{٠,٦}$ عوّض عن س بـ ٦.

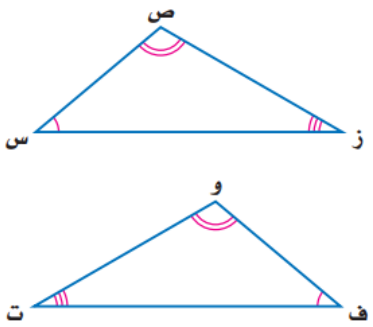
$٣,٦ = ٣,٦$ ✓

تحقق ٤

خرائط: استعمل على خريطة المملكة مقياس رسم فيه كل ١ سم تمثِّل ٢٥٠ كلم، إذا كانت المسافة بين جدة والمدينة المنورة على الخريطة ١,٦٨ سم تقريبًا. فكم المسافة الحقيقية بينهما؟

خرائط: يظهر مقياس رسم لخريطة المملكة أن ٢,٥ سم على الخريطة تمثّل ١٠٠ كيلومتر في الواقع. فإذا كانت المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة على الخريطة ٨سم، فما البعد الحقيقي بينهما؟

اكتشف الخطأ: قارنت رهف ونوال بين المثلثين المتشابهين المجاورين. فأيّهما كانت مقارنتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.



رهف

ق ∠ س = ق ∠ ت

ق ∠ ص = ق ∠ و

ق ∠ ز = ق ∠ ف

△ س ص ز ~ △ ت و ف

نوال

ق ∠ س = ق ∠ و

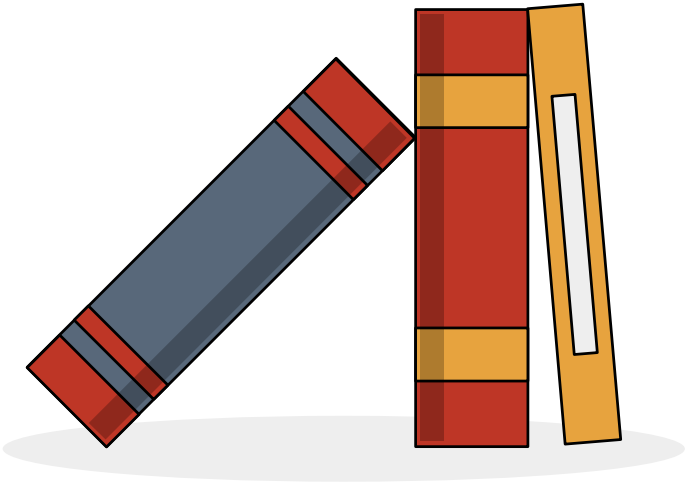
ق ∠ ص = ق ∠ ف

ق ∠ ز = ق ∠ ت

△ س ص ز ~ △ و ف ت

الواجب

النسب المثلثية



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس

الان

١- أجد النسب المثلثية للزوايا
٢-أستعمل النسب المثلثية لحل المثلث

المفردات

حساب المثلثات
النسب المثلثية
الجيب
جيب التمام
الظل
حل المثلث
معكوس الجيب
معكوس جيب التمام
معكوس الظل

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا

يعني معدّل انحدار طريق بنسبة ٢٥٪ أن الطريق ترتفع أو تنحدر ٢٥ قدمًا لكل ١٠٠ قدم أفقيًّا. ويمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياس زاوية ارتفاع الطريق أو انحدارها.

النسب المثلثية: **حساب المثلثات** هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. **والنسبة المثلثية** هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم. والنسب المثلثية الثلاث الأكثر شيوعًا هي **الجيب**، و**جيب التمام**، و**الظل**، وهي موضحة في الجدول أدناه:

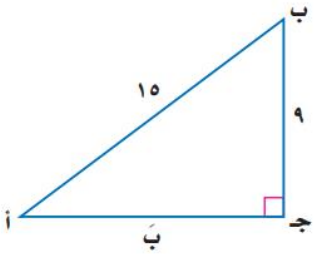
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

مفهوم أساسي النسب المثلثية

التعبير اللفظي	الرموز	النموذج
جيب الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$	جا أ = $\frac{\text{أَ}}{\text{جـَ}}$	
جيب تمام الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$	جتا أ = $\frac{\text{بَ}}{\text{جـَ}}$	
ظل الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}$	ظا أ = $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ}}$	

مثال ١

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.



الخطوة ١: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد أ جـ .

$أ^٢ + ب^٢ = جـ^٢$ نظرية فيثاغورس

$٩^٢ + ب^٢ = ١٥^٢$ أ = ٩ ، جـ = ١٥

$٨١ + ب^٢ = ٢٢٥$ ربع $ب^٢ =$

١٤٤ اطرح ٨١ من كلا الطرفين

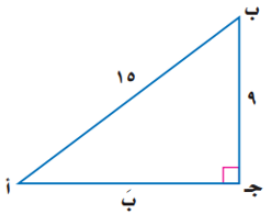
$ب = ١٢$ أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة ٢: استعمل أطوال الأضلاع لكتابة النسب المثلثية.

$جا\ أ = \frac{المقابل}{الوتر} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$ $جتا\ أ = \frac{المجاور}{الوتر} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$ $ظا\ أ = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

تحقق ١

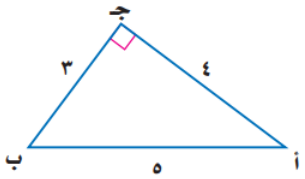
أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب.



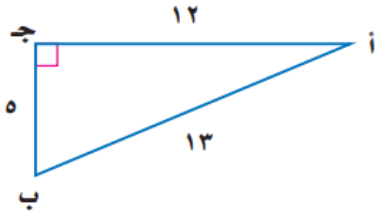
تأكد

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ في كل مما يأتي:

١



٢



مثال ٢

استعمل الحاسبة لإيجاد جتا ٤٢° إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

اضغط على المفاتيح:

on | 1 New Document

1:Add Calculator | trig | cos | 42 | enter

قرّب إلى أقرب جزء من ألف.

جتا ٤٢° ≈ ٠,٧٤٣١.

تنبيه !

وضع الآلة الحاسبة (mode)

كن متأكدًا من وضع الآلة الحاسبة (mode) للعمل بالدرجات.

تحقق

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كل مما يأتي:

٢أ

جا ٣١°.

٢ب

ظا ٧٦°

٢ج

جتا ٥٥°

تأكد

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كل مما يأتي:

٤

جا ٣٧°

٥

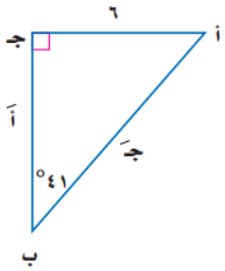
جتا ٢٣°

٦

ظا ١٤°

مثال ٣

حُلّ المثلث القائم الزاوية مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة ١: أوجد قياس ∠ أ. ١٨٠° − (٩٠° + ٤١°) = ٤٩°

قياس ∠ أ = ٤٩°.

الخطوة ٢: أوجد أَ. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الضلع المجاور للزاوية ب، فاستعمل نسبة الظل.

ظا ٤١° = $\frac{٦}{أَ}$ — تعريف الظل

أَ ظا ٤١° = ٦ — اضرب كلا الطرفين في أَ

أَ = $\frac{٦}{ظا ٤١°}$ = ٦,٩ تقريبًا — اقسم الطرفين على ظا ٤١°، استعمل الحاسبة

لذا يكون أَ = ب جـ = ٦,٩ تقريبًا.

الخطوة ٣: أوجد جـَ. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الوتر، فاستعمل نسبة الجيب.

جا ٤١° = $\frac{٦}{جـَ}$ — تعريف الجيب

جـَ جا ٤١° = ٦ — اضرب كلا الطرفين في جـَ

جـَ = $\frac{٦}{جا ٤١°}$ = ٩,١ تقريبًا — اقسم الطرفين على جا ٤١°، استعمل الحاسبة

ولذا فإن جـَ = أ ب = ٩,١ تقريبًا.

إرشادات للدراسة

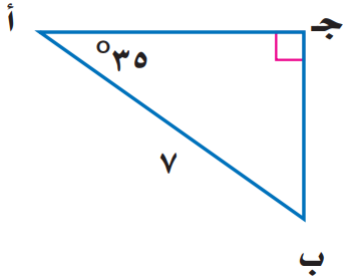
تذكّر رموز أطوال أضلاع المثلث

يُرمز إلى طول الضلع المقابل للرأس أ في المثلث أ ب جـ بالرمز أَ، وإلى طول الضلع المقابل للرأس ب بالرمز بَ، وإلى طول الضلع المقابل للرأس جـ بالرمز جـَ.

تحقق

٣أ

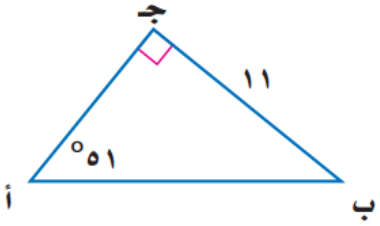
حُلّ كلّ مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرِّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:



تحقق

٣ب

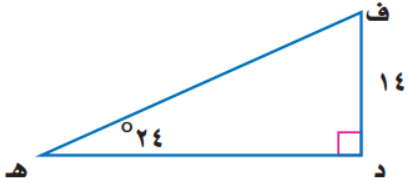
حُلّ كلّ مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرِّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:



تأكد

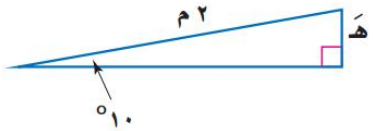
٨

حُلّ كلّ مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرِّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:



مثال ٤

تمرين: يضع المدرِّب جهاز التمرين الرياضي مائلاً بمقدار ١٠°، فإذا كان طول سطح السير على الجهاز ٢ م، فكم يجب رفع نهايته عن الأرض بالسنتمترات تقريبًا؟



جا ١٠° = $\frac{\text{هـ}}{٢}$	تعريف الجيب
٢ × جا ١٠° = هـ	اضرب كلا الطرفين في ٢
هـ ≈ ٠,٣٥	استعمل الحاسبة

فتكون قيمة هـ بالأمتار تساوي ٠,٣٥، اضرب ٠,٣٥ في ١٠٠ لتحويل الأمتار إلى سنتمترات.

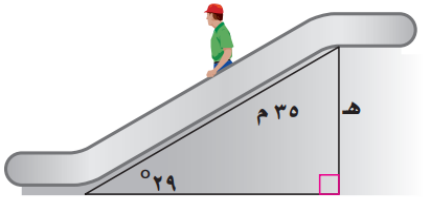
يرفع المدرب الجهاز ٣٥ سم تقريبًا.

تحقق ٤

لوح التزلج: ما طول لوح تزلج يصنع مع سطح الأرض زاوية قياسها ٢٥°، ويرتفع طرفه ٢ م؟

تزلج على الجليد: في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسي ١٠٠٠ م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض ١٨°، قدّر طول (ر).

سلّم كهربائي: يبلغ طول السلّم الكهربائي في أحد الأسواق الكبيرة ٣٥ مترًا، وقياس الزاوية التي يكوّنها مع الأرض ٢٩°، أوجد ارتفاع السلم.



مفهوم أساسي معكوس الدوال المثلثية

إذا كانت ∠ أ زاوية حادة، وكان:

التعبير اللفظي: جا أ = س فإن **معكوس جيب** س ورمزه جا$^{-1}$ س يساوي قياس ∠ أ.

الرموز: إذا كان جا أ = س، فإن جا$^{-1}$ س = ق ∠ أ.

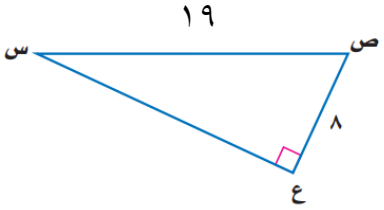
التعبير اللفظي: جتا أ يساوي س، فإن **معكوس جيب تمام** س ورمزه جتا$^{-1}$ س يساوي قياس ∠ أ.

الرموز: إذا كان جتا أ = س، فإن جتا $^{-1}$ س = ق ∠ أ.

التعبير اللفظي: ظا أ يساوي س، فإن **معكوس ظل** س ورمزه ظا$^{-1}$ س يساوي قياس ∠ أ.

الرموز: إذا كان ظا أ = س، فإن ظا$^{-1}$ س = ق ∠ أ.

مثال ٥



أوجد ق ∠ ص إلى أقرب درجة.

تعلم طول الضلع المجاور للزاوية ص وقياس الوتر.

استعمل نسبة جيب التمام.

جتا ص = $\frac{٨}{١٩}$ تعريف جيب التمام

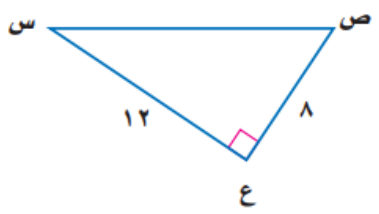
استعمل الحاسبة البيانية ودالة جتا$^{-١}$ [$\cos^{-1}$] لإيجاد قياس الزاوية.

اضغط على المفاتيح: 65.098937 enter (19 ÷ 8 COS trig لذا فإن ق ∠ ص = ٦٥°.

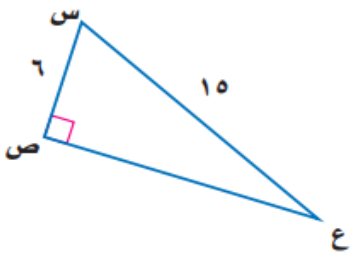
تحقق ٥

أوجد ق ∠ س مقربًا إلى أقرب درجة إذا كان س ص = ١٤، ص ع = ٥

أوجد ق ∠ س لكل مثلث فيما يأتي مقربًا إلى أقرب درجة:

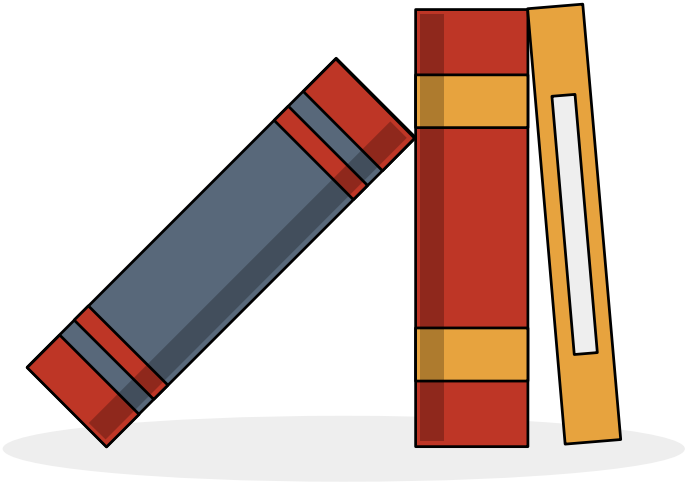


أوجد ق ∠ س لكل مثلث فيما يأتي مقربًا إلى أقرب درجة:



الواجب

أختبار الفصل ٩



اليوم :

التاريخ :

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

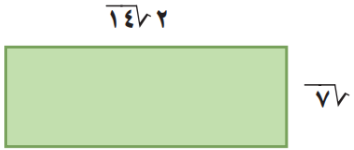
١ $٥\sqrt{٣٦}$

٢ $\frac{٣}{١ - \sqrt{٢}}$

٣ $٢\sqrt{٣} + ٧\sqrt{٣}$

٤ $٣\sqrt{٦}(٥\sqrt{٢})$

هندسة : أوجد مساحة المستطيل.



أ) ١٤√٢

ب) ٩٨√٢

جـ) ١٤

د) ٧√٢

حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٦

$$\sqrt{١٠س} = ٢٠$$

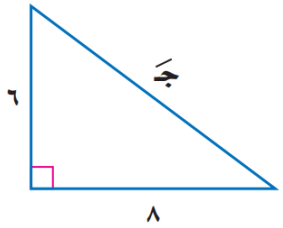
٧

$$\sqrt{٤س - ٣} = ٦ - س$$

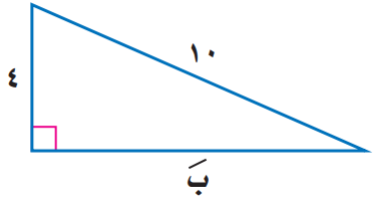
تغليف: حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتمترًا مكعبًا. وتستعمل المعادلة نق= $\sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (نق) نصف قطر الأسطوانة، (ع) ارتفاعها، (ح) حجمها. فإذا كان ارتفاع الأسطوانة ٨,٢٥ سنتمترات، فأوجد نصف قطرها.

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:

٩



١٠



أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١١

(٢ ، ٣)، (٣، ٥)

١٢

(−٣، ٤)، (−٢، −٣)

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١٣

(−١، −١)، (٣، ٢)

١٤

(−٤، −٦)، (−٧، ١)

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١٥ (٢، ٣)، (٣، ٥)

١٦ (−٣، ٤)، (−٢، −٣)

١٧ (−١، −١)، (٣، ٢)

١٨ (−٤، −٨)، (١٠، −٦)

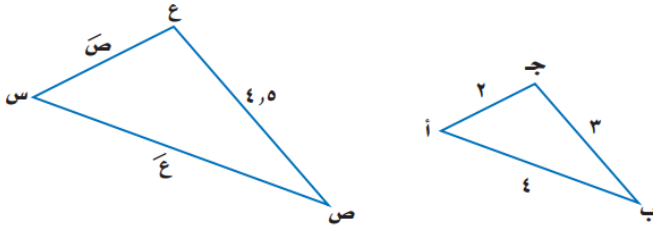
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

خدمة التوصيل: يقدم أحد مطاعم الوجبات السريعة خدمة توصيل مجانية إلى أي موقع ضمن دائرة نصف قطرها ١٠ كلم من المطعم. فقطع الشخص الذي سيوصل الوجبات ٣٢ شارعًا شمالًا، ثم ٤٥ شارعًا إلى الشرق لإيصال الطلب، علمًا بأن البعد بين كل شارعين في هذه المدينة هو $\frac{١}{٦}$ كلم.

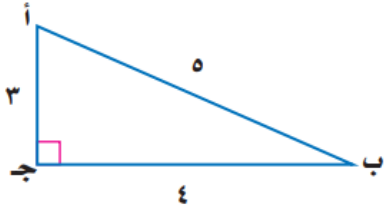
أ) هل الموقع خارج نطاق الخدمة المجانية؟ فسّر ذلك.

ب) صف موقعين للتوصيل يكون البعد بينهما ١٠ كلم تقريبًا.

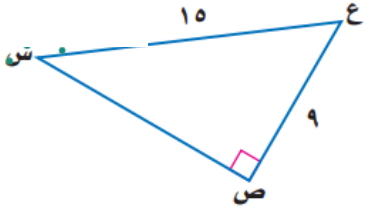
إذا كان △ أ ب جـ ~ △ س ص ع ، فأوجد أطوال الأضلاع المجهولة.



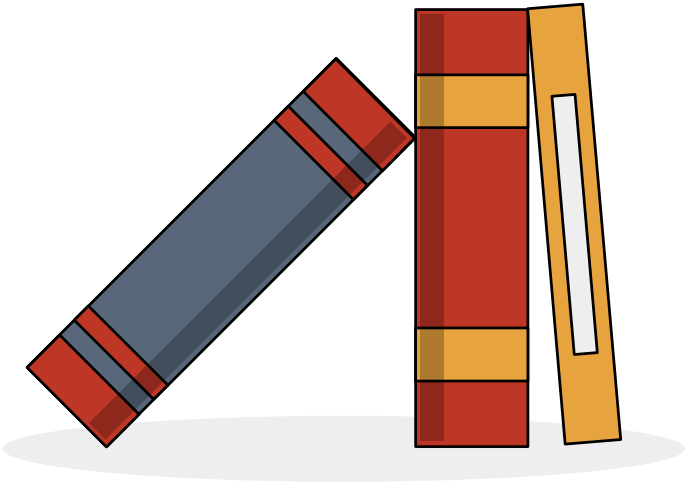
أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.



أوجد ق ∠ س مقرّبًا إلى أقرب درجة.



التهيئة للفصل ١٠



اليوم :

التاريخ :

إذا اخترت عشوائيًّا مكعبًا واحدًا من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء و٣ زرقاء ومكعبًا واحدًا أخضر، فأوجد كلاًّ من الاحتمالات الآتية: (مهارة سابقة)

١ ح (أحمر)

٢ ح (أزرق)

٣ ح (ليس أحمر)

٤ ح (أبيض)

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

٥

إذا ألقى سعد مكعب أرقام مرة واحدة، فما احتمال ظهور الرقم ٥؟

٦

أدار محمود مؤشر قرص دوّار مقسّم إلى ٨ قطاعات متساوية، بألوان مختلفة أحدها باللون الأزرق.
ما احتمال أن يستقر المؤشر على القطاع الأزرق؟

أوجد ناتج الضرب واكتبه في أبسط صورة:

٧) $\frac{٥}{٤} \times \frac{٢}{٣}$

٨) $\frac{٤}{١٩} \times \frac{٧}{٢٠}$

٩) $\frac{٤}{٣٢} \times \frac{٧}{٣٢}$

١٠) $\frac{٥}{١٢} \times \frac{٦}{١١}$

١١) $\frac{٥٦}{١٠٠} \times \frac{٢٤}{١٠٠}$

١٢) $\frac{٩}{٣٤} \times \frac{١٧}{٢٧}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

اكتب كل كسر من الكسور الآتية على صورة نسبة مئوية،
مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة: (مهارة سابقة)

١٣ $\frac{١٤}{١٧}$

١٤ $\frac{٧}{٨}$

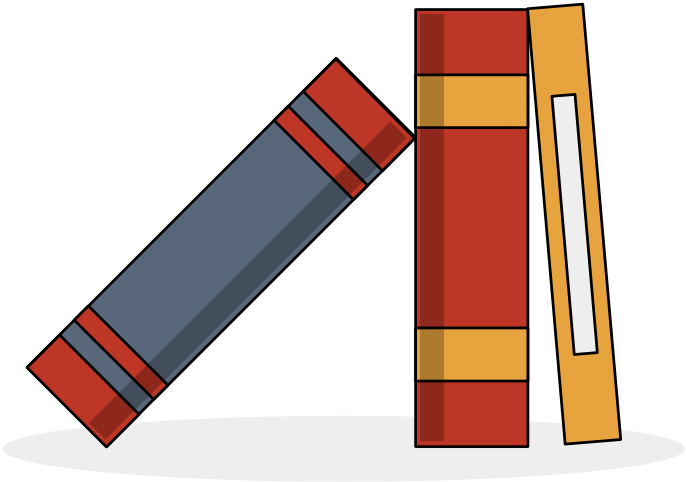
١٥ $\frac{١٠٧}{١٢٥}$

١٦ $\frac{٦٢٥}{١٠٢٤}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

تسوّق: زار ٢٠٠٠ متسوق مركزًا تجاريًّا، ٧٠٠ منهم دون سن ٢١. فما النسبة المئوية لمن هم دون سن ٢١ من بين المتسوقين؟

تصميم دراسة مسحية



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست تنظيم البيانات
باستعمال الجداول التكرارية

الان

١- أصمم دراسة مسحية
٢-أتعرف الطرق المختلفة
لاختيار العينة

المفردات

العينة
المجتمع
الدراسة المسحية
الدراسة القائمة على الملاحظة
التجربة
العينة المتحيزة
العينة العشوائية
العينة العشوائية البسيطة
العينة العشوائية الطبقية
العين العشوائية المنتظمة

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا

عند صناعة الملابس الرياضية يجب التحقق من عدة أمور لضمان الجودة؛ مثل: فحص نوع القماش، ومدى مناسبته للرياضة المعنيّة، والألوان، والأعمال الفنية المطبوعة عليه وغيرها. وستكون التكلفة عالية جدًّا إذا فُحص كل زيّ يتم إنتاجه في المصنع؛ لذا فإنه يتم فحص عدد محدود من تلك الملابس بدلًا من ذلك.

وجميع الملابس الرياضية المنتجة تشكّل المجتمع، بينما تشكّل الملابس الرياضية التي يتم فحصها عينة من هذا المجتمع.
ويتوصل الفاحصون إلى استنتاجات حول العينة ويعمّمونها على المجتمع كله.

مفهوم أساسي أساليب جمع البيانات

الأسلوب	التعريف / الاستعمال	مثال
الدراسة المسحية	• تؤخذ البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع.	لتحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالبًا عن رأيهم في فقرات الإذاعة.
الدراسة القائمة على الملاحظة	• تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة. • لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع.	تراقب شركة لصناعة الدمى بعض الأطفال وهم يلعبون، وتلاحظ نوع الدمى التي يفضلونها أكثر. ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر السنتين يفضلون الدمى التي تصدر أصواتًا على تلك التي لا تصدر أصواتًا.
التجربة	• تُسجّل البيانات بعد تغيير العينة. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثةٍ ما.	يقوم مراقب ضبط الجودة بتشغيل آلة بسرعة معينة عشر مرات، فإذا وجد أن المنتج يكون معيبًا في كل مرة فإنه يستنتج أن المنتج سيكون معيبًا في كل مرة تدور فيها الآلة بهذه السرعة.

مثال ١

تبرّع: ترغب جمعية خيرية في معرفة مدى رغبة الناس في تقديم التبرعات للجمعيات الخيرية. فوزّعت ١٠٠٠ استبانة على سكان أحد الأحياء.

أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

العينة: الأشخاص الذين تسلموا الاستبانات، وعددهم ١٠٠٠ شخص.

أمّا المجتمع: فجميع سكان ذلك الحي.

ب) صنّف أسلوب جمع البيانات الذي استعملته هذه الجمعية.

هذا هو أسلوب الدراسة المسحية، حيث تؤخذ البيانات من استجابات أفراد العينة نحو الاستبانة.

إرشادات للدراسة

إحصاء السكان

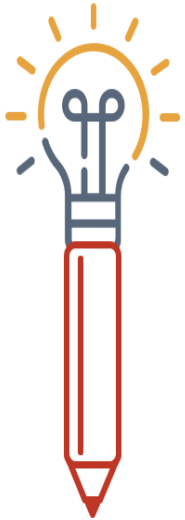
إحصاء السكان هو مسح لجميع أفراد المجتمع. لذا لا تستعمل الإحصاءات السكانية أسلوب العينة، وقد أجري آخر إحصاء في المملكة عام ٢٠١٧م.

تحقق

حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل في كلٍّ مما يلي:

١أ

بحوث: قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من الفئران تجاه السكر.



١ب

إعادة التدوير: يرغب مجلس بلدي في أن يبدأ بمشروع إعادة تدوير، فأرسل لمجموعة من السكان اختيروا عشوائيًّا ١٠٠٠ استبانة تضمنت سؤالاً حول المواد التي يرغبون في إعادة تدويرها.

حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل في كلٍّ مما يلي:

١

مجلات: يريد القائمون على إعداد مجلة المدرسة اختيار تصميم لغلافها من بين خمسة تصاميم؛ لذا فقد اختير عشرة من طلاب المدرسة عشوائيًّا للانتقاء من بين هذه التصاميم.

٢

رياضة: يريد مدير نادٍ رياضي أن يحدّد شعارًا للنادي، فسأل ١٠٠ شخص من مشجعي النادي اختيروا عشوائيًّا عن آرائهم.

مثال ٢

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

أ) **فضائيات:** سُئل كل خامس شخص يدخل إلى متجر عن القناة الفضائية التي يفضلها.

غير متحيزة؛ لأن هذه العينة تتكون من أشخاص اختيروا عشوائيًّا.

ب) **هوايات:** سئل كل خامس شخص يدخل مكتبة عن هوايته المفضلة.

متحيزة؛ لأن الهواية الأكثر تفضيلاً للأشخاص الموجودين في المكتبة هي المطالعة.

تحقق

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

٢أ

مدرسة: سُئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

٢ب

مطاعم: يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يخدمون الزبائن بأسلوب جيد فراقب أحد العاملين مدة ساعة في اليوم.

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

٣

هوايات: يقف عدد من الطلاب عند مدخل المدرسة ويسألون كل عاشر طالب يدخلها عن هوايته المفضلة.

٤

تسوق: سُئل كل خامس عشر متسوِّق في متجر ملابس عن نوع الهدية التي يودّ أن تُقدم له.

مفهوم أساسي العينات العشوائية

النوع	التعريف	مثال
العينة العشوائية البسيطة	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأي عينة أخرى من المجتمع.	سحب أرقام مئة طالب من كيس، وإخضاع هؤلاء الطلاب لدراسة مسحية.
العينة العشوائية الطبقية	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.	يختار الباحث عينات من صفوف مختلفة من الطلاب بناءً على النسبة المئوية لهذه الصفوف في المدرسة؛ ليعكس التنوع في صفوف المدرسة.
العينة العشوائية المنتظمة	العينة التي يُختار أفرادها تبعًا لفترةٍ زمنيةٍ محددةٍ، أو فئةٍ محددةٍ من العناصر.	تُفحص قطعة من خط إنتاج كل عشر دقائق، أو تُفحص قطعة من كل ٥٠ قطعة.

مثال ٣

حديقة الحيوانات: وزّعت الحيوانات في إحدى الحدائق إلى مجموعات تبعًا لموطنها، ثم اختير زوج من كل مجموعة بصورة عشوائية لفحص دمه.

أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

تتكون العينة من أزواج الحيوانات التي تم اختيارها من كل مجموعة. والمجتمع هو جميع الحيوانات الموجودة في الحديقة.

ب) صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك.

هذه العينة طبقية؛ حيث قُسّمت الحيوانات إلى فئات قبل الاختيار العشوائي.

تحقق

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسِّر إجابتك:

٣أ

مستشفى: اعتمادًا على المعلومات المبينة إلى اليمين، وفي ندوة تعريفية، يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائيًّا ليقدم نبذة عن الخدمات التي يوفرها المستشفى في قسمه.

٣ب

طعام: يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة بدءًا بوقتٍ يُحدّد عشوائيًّا.

تأكد

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسِّر إجابتك:

٥

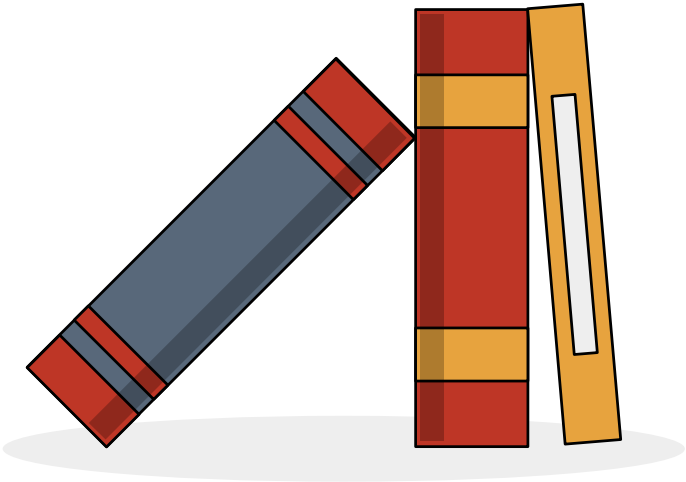
بطاقات مصوّرة: وزّع أحمد بطاقات الصور التي التقطها في مجموعات بحسب المدن التي تمثّلها هذه البطاقات، ثم اختار بطاقتين عشوائيًّا من كل مجموعة.

٦

تلفزة: تود محطة تلفزة أن تحدد أكثر برامجها مشاهدة، فأرسلت استبانةً إلى عدة أشخاص اختيروا عشوائيًّا من أنحاء المملكة كافة.

الواجب

تحليل نتائج الدراسة المسحية



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست تصميم الدراسات المسحية

الان

١- ألخص نتائج الدراسة المسحية

٢- أقوم نتائج الدراسة المسحية

المفردات

مقاييس النزعة المركزية

البيانات الكمية

البيانات النوعية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا

ترغب الشركات عادة في استعمال الدراسات المسحية للحصول على تغذية راجعة حول أدائها في مجالات عملها بدءًا من المبيعات وانتهاءً بمواقعها الإلكترونية. وقد حصلت شركة على النتائج المبينة في الشكل المجاور في استطلاع حول موقعها الإلكتروني. ماذا تعني هذه القيم؟ وما الطريقة التي جمعت بها هذه البيانات؟ وهل تمثل العينة زبائن الشركة بدقة؟

مفهوم أساسي مقاييس النزعة المركزية

النوع	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسومًا على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.	عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

مثال ١

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

أ) **تغذية:** يبيِّن الجدول المجاور السعرات الحرارية في الطبق لكل نوع من الخضراوات.

الخضراوات	السعرات	الخضراوات	السعرات
بصل أخضر	١٤	قرنبيط	١٠
فاصولياء	٣٠	خيار	١٧
فلفل	٢٠	ذرة	٦٦
باذنجان	٢٥	خس	٩
ملفوف	١٧	سبانخ	٩
جزر	١٨	كوسا	١٧

رتّب هذه القيم تصاعديًّا: ٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٨، ٣٠، ٦٦.

تلاحظ وجود قيمة أكبر كثيرًا من سائر القيم وهي ٦٦، ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات. وهناك مجموعتان فقط من الأعداد المتماثلة؛ لذا فالوسيط هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات.

{٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٨، ٣٠، ٦٦}

الوسيط ١٧ سُعرًا.

مثال ١

ب) **عمرة:** أجرت وكالة سفريات دراسة مسحية على ١٠٠٠ شخص حول الزمن الذي مضى على آخر عُمْرَة لكل منهم والنتائج يوضحها الجدول المجاور.

الاستجابة	النسبة المئوية
٣ سنوات على الأقل	٨
سنة إلى أقل من ٣ سنوات	١٥
٦ شهور إلى أقل من سنة	٤٥
أقل من ٦ شهور	٣٢

لا يمكن حساب مقياس نزعة مركزية لهذه المجموعة من البيانات؛ لأن كل نسبة مئوية في الجدول تمثل شيئًا مختلفًا.

فعلى سبيل المثال، أجاب ١٥٪ من الأشخاص بأنه قد مضى من سنة إلى أقل من ٣ سنوات على أدائهم العمرة، بينما ذكر ٣٢٪ منهم أنهم أدّوا آخر عمرة قبل أقل من ٦ شهور. فالوسيط لهذه البيانات وهو ٢٣,٥٪ ليس له أي معنى في هذه الحال.

تحقق

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

١أ

تسوُّق: سجَّل أحد محال بيع الأجهزة الإلكترونية عدد الزبائن في كل ساعة عمل في أحد الأيام كما هو موضح في الجدول المجاور.

عدد الزبائن			
٨٦	٧٩	٧١	٨٦
٨٦	٨٨	٣٢	٧٩
٧٠	٧١	٦٩	٨٢
٨٦	٨٥	٨١	٨٦

١ب

كتب: في دراسة مسحية لمصادر أبحاث عدد من طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المناطق التعليمية كانت الاستجابات على النحو الآتي: من المعلم: ٤٢٠؛ من مكتبة المدرسة: ١٣٢٠؛ من المكتبة العامة: ١٠٢٠؛ من متاجر الكتب: ١٠٢٠؛ من المكتبة المنزلية: ٧٢٠؛ من الإنترنت: ٥٤٠؛ من الأصدقاء: ٥٤٠ .

تأكد

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

١

إعادة تدوير: ترغب شركة في إعادة تدوير الأوراق الزائدة، فجمعتها في رزم ارتفاع الواحدة منها ٥٠سم، وقد أحصى خالد عدد الرزم في نهاية كل شهر من السنة فكانت: ١٥، ١٢، ١٤، ١٥، ١٨، ١٥، ١٣، ١٤، ١٣، ١٢، ١٥، ١٨.

٢

سياحة: تريد إحدى وكالات السياحة التي تعمل عبر الإنترنت أن تنظم رحلات للعائلات، فأجرت مسحًا حول المكان المفضل لها لقضاء الإجازة. وقد كانت الأماكن الخمسة الأولى هي: الشواطئ ٢٥٪؛ المتنزهات ٢٢٪؛ البر ٢١٪؛ المواقع الأثرية التاريخية ١٧٪؛ الجبال ١٥٪.

مثال ٢

كتاب الجامعة السنوي: إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية، فحدّد صحة المعلومات والاستنتاجات.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
إلكترونيًا فقط	٦٧٪
ورقيًا فقط	٢٢٪
إلكترونيًا وورقيًا	٩٪
لا تفضيل	٢٪

السؤال: هل يجب أن تعدّ الجامعة كتابها السنوي إلكترونيًّا هذا العام؟

العينة: وضعت استبانات على مقاعد الطلاب بصورة عشوائية.

الاستنتاج: يجب أن تعدّ الجامعة هذا العام الكتاب السنوي إلكترونيًّا فقط.

ذكر التقرير أن اختيار الطلاب كان عشوائيًّا، ولم يذكر عددهم، كما أن النتائج أُعطيت بنسب مئوية؛ فالنسبة ٦٧٪ قد تعني ٣٤ من ٥٠، وهذه ليست عينة كافية لتمثل جامعة كبيرة.

تحقق

٢

مدينة ألعاب: إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث طلب من كل عاشر زائر من بين ٥٠٠٠ زائرٍ لمدينة ألعاب في أحد الأيام أن يجيب عن سؤال الاستبانة الآتي:

السؤال: هل ترى أن أسعار بطاقات الدخول لمدينة الألعاب معقولة؟

الاستنتاج: أسعار التذاكر معقولة، ويجب أن تبقى كما هي.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
معقولة جدًا	٥٦
معقولة	١٨٥
معقولة نوعًا ما	١٣٢
غير معقولة	٦٩
غيرمعقولة أبدًا	٥٨

حدِّد صحة المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحيّة فيما يأتي:

٣

تلفاز: إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث تريد محطة تلفزيونية أن تغير نشاطها ، فأرسلت ١٠٠٠ استبانة بالبريد إلى أشخاص تمّ اختيارهم عشوائيًّا تقع ضمن منطقة بثها وتلقت ٧٥٠ ردًّا.

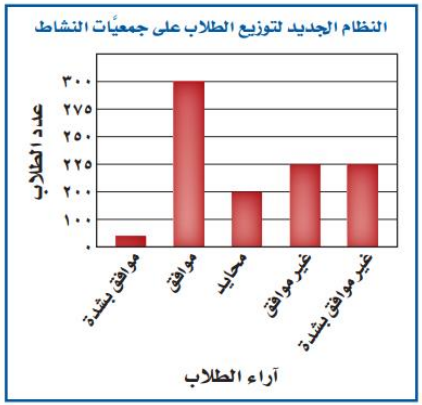
السؤال: ما نوع البرامج التلفزيونية التي تفضلها؟

الاستنتاج: يجب أن تتحول المحطة إلى محطة إخبارية.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
رياضية	٪٢٦
دينية	٪٣٢
إخبارية	٪٣٩
تعليمية	٪٣

مثال ٣

جمعيات النشاط: يفكر قائد مدرسة ثانوية كبيرة في تطبيق نظام جديد لتوزيع الطلاب على جمعيات النشاط، فوزّع استبانة على الطلاب يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.



السؤال: ما رأيك في تطبيق النظام الجديد لتوزيع الطلاب على جمعيّات النشاط؟

الاستنتاج: لن ينزعج الطلاب من تطبيق نظام توزيع الطلاب على جمعيّات النشاط.

حدّد، إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.

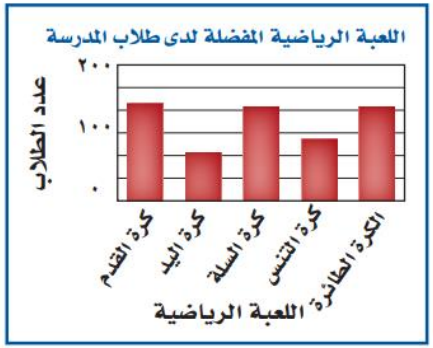
يبدو للوهلة الأولى أن معظم الطلاب موافقون على تطبيق النظام الجديد، ومع ذلك فإن أطوال فترات التدريج غير ثابتة. وإذا ألقينا نظرة فاحصة نجد أن نحوًا من ٤٥٠ طالبًا غير موافقين أو غير موافقين بشدة على هذا النظام الجديد، وأن عدد الموافقين يزيد قليلاً على ٣٠٠ طالب فقط

لذا فإن التمثيل البياني المعروض مضلّل، والاستنتاج غير صادق.

تحقق

٣

يوضح التمثيل بالأعمدة المجاور نتائج استطلاع أجراه مدرس التربية الرياضية لمعرفة اللعبة الرياضية التي يفضلها طلاب المدرسة.



السؤال: ما اللعبة الرياضية التي تفضلها؟

الاستنتاج: كرة اليد هي اللعبة الأقل شيوعًا بين الألعاب الرياضية المفضلة.

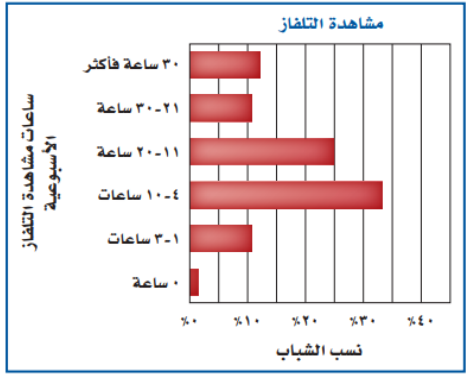
حدّد ما إذا كان التمثيل بالأعمدة يقدم صورة صادقة أم لا لنتائج الدراسة المسحية. وفسّر إجابتك.

تأكد

حدد إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.

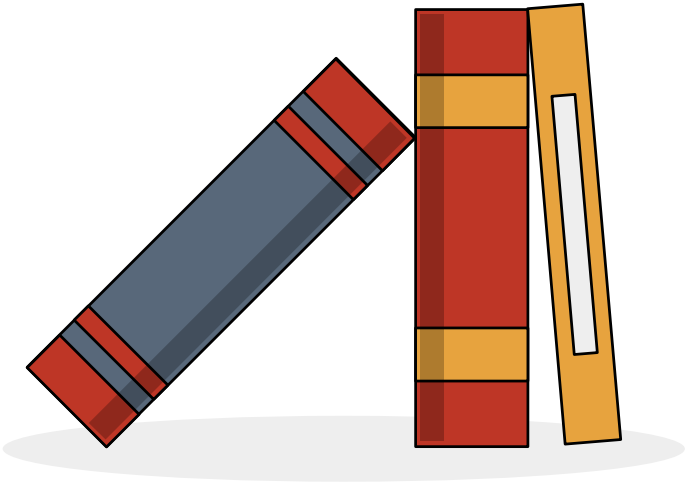
٦

تلفاز: أجرت شبكة إعلامية دراسة حول عدد الساعات التي يقضيها الشباب في مشاهدة التلفاز في الأسبوع الواحد، وعرضت النتائج بالتمثيل البياني المجاور.



الواجب

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست تنظيم نتائج الدراسة المسحية وتلخيصها

الان

١- أستعمل إحصائيات العينة لتحليل نتائج الدراسة المسحية

٢-أحلل البيانات باستعمال إحصائيات العينة

المفردات

الإحصائي الاستدلالي

الإحصائي

المعلمة

البيانات الوحيدة المتغير

مقاييس التشتت

الانحراف المتوسط

الانحراف المعياري

التباين

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا

في بداية حصة الرياضيات طلب المدرس من كل طالب في الصف سحب ٩ قطع نقدية عشوائيًّا من وعاء فيه ١٠٠٠ قطعة نقد من فئة النصف ريال، ثم إعادتها للوعاء بعد حساب متوسط تواريخ إصدار هذه العينة من قطع النقد.

مثال ١

عيّن العينة والمجتمع في كل من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع.

أ) اختيرت عينة عشوائية من إحدى الجامعات مكوّنة من ٤٠ من طالبي المنح الدراسية، ثم حُسب متوسط درجاتهم.

العينة : مجموعة الطلاب الأربعين المتقدمين بطلبات المنح الدراسية .

المجتمع : جميع الطلاب طالبي المنح الدراسية .

إحصائي العينة : متوسط درجات الطلاب الأربعين .

مَعْلَمة المجتمع : متوسط درجات جميع طالبي المنح الدراسية .

ب) اختيرت عينة عشوائية طبقية من الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الشرقية والغربية والوسطى، ثم حُسب وسيط رواتب هؤلاء الممرضين.

العينة : الممرضون الذين تم اختيارهم عشوائيًّا من جميع مستشفيات المناطق الثلاث.

المجتمع : جميع الممرضين العاملين في هذه المستشفيات في المناطق الثلاث.

إحصائي العينة : وسيط رواتب الممرضين في العينة.

مَعْلَمة المجتمع : وسيط رواتب جميع الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الثلاث.

تحقق

١

أغذية : يتم اختيار عبوة عشوائيًّا من خط إنتاج أحد الأغذية المحفوظة، ثم يُؤخذ بدءًا من تلك العبوة، العبوات التي أرقامها من مضاعفات ٥٠، وتُدَوّن كتلتها ويحسب المنوال لعينة كتل الإنتاج اليومي.

تأكد

عيّن العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيين، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع:

١

تعليم: اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة، وسُئلوا إن كانوا راغبين في دراسة الهندسة بالجامعة، ثم حُسبت النسبة المئوية للذين كانت إجاباتهم "نعم".

٢

كتب: أُجريت دراسة شملت عينة مكوّنة من ١٠٠٠ طالب في الجامعات السعودية حول المبالغ التي ينفقونها في شراء الكتب الإضافية في كل عام، ثم حُسب المتوسط الحسابي لهذه المبالغ.

مفهوم أساسي مقاييس التشتت

المقياس	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المدى	الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.	لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات.
الربيعات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.	لتحديد القيم الواقعة في الجزء الأعلى أو الجزء الأسفل من مجموع البيانات.
المدى الربيعي	مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات؛ وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.	لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات.

مفهوم أساسي الانحراف المتوسط

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي.

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي.

الخطوة ٣: اقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات.

مثال ٢

قراءة: سأل معلم طلابه عن عدد الكتب التي يقرؤونها أسبوعيًّا. وقد تلقّى الإجابات الآتية: ٢، ٢، ٣، ٤، ١٤. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ١: المتوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي ٥

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي.

$$|٢ - ٥| + |٢ - ٥| + |٣ - ٥| + |٤ - ٥| + |١٤ - ٥| = ٣ + ٣ + ٢ + ١ + ٩ = ١٨$$

الخطوة ٣: اقسم المجموع على عدد القيم: ١٨ ÷ ٥ = ٣,٦

تحقق

٢

تسويق: رصد موزِّع عدد صناديق العصير اليومية التي بيعت فكانت: ١٢، ٣٢، ٣٦، ٤١، ٢٢، ٤٧، ٥١، ٣٣، ٣٧، ٤٩. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات.

تدرب

أوجد الانحراف المتوسط مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة

١٠

مبيعات: رصد صاحب محل عدد الأكياس التي تُباع في كل ساعة من أحد أنواع الحلوى، فكانت:

١٦، ٢٤، ١٥، ١٧، ٢٢، ١٦، ١٨، ٢٤، ١٧، ١٣، ٢٥، ٢١

مفهوم أساسي التباين والانحراف المعياري

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي $\bar{س}$.

الخطوة ٢: أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لتحصل على التباين.

الخطوة ٣: أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

إرشادات للدراسة

رموز

يحسب المتوسط الحسابي للعينة وللمجتمع بالطريقة نفسها. وفي العادة يُرمز إلى متوسط العينة بالرمز $\bar{س}$ ، ولكن سوف يستعمل هذا الرمز في هذا الكتاب ليدل على متوسط المجتمع.

مثال ٣

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة للأعداد ٣، ٦، ١١، ١٢، ١٣.

الخطوة ١: لإيجاد المتوسط الحسابي اجمع قيم البيانات، ثم اقسم المجموع على عددها.

$$\bar{س} = \frac{٣ + ٦ + ١١ + ١٢ + ١٣}{٥} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$

الخطوة ٢: لإيجاد التباين أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم.

$$ع^٢ = \frac{(٣ - ٩)^٢ + (٦ - ٩)^٢ + (١١ - ٩)^٢ + (١٢ - ٩)^٢ + (١٣ - ٩)^٢}{٥}$$

$$= \frac{(-٦)^٢ + (-٣)^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢}{٥}$$

$$= \frac{٣٦ + ٩ + ٤ + ٩ + ١٦}{٥} = \frac{٧٤}{٥}$$

الخطوة ٣: الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$$ع^٢ = \frac{٧٤}{٥}$$ التباين

$$\sqrt{ع^٢} = \sqrt{\frac{٧٤}{٥}}$$ أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$ع \approx ٣,٨$$ استعمل الحاسبة

إذن المتوسط الحسابي ٩، والتباين $\frac{٧٤}{٥}$ ، والانحراف المعياري ٣,٨ تقريبًا.

تحقق

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٣أ

٦، ١٠، ١٥، ١١، ٨

٣ب

٩٢، ٨٤، ٧١، ٨٣، ١٠٠

تأكد

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٤

٣، ٤، ١٨، ٢١، ١٧

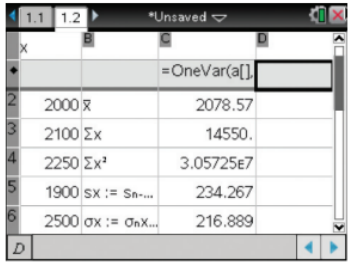
٥

١٢، ١٥، ١٨، ٢١

مثال ٤

تغذية : يسجِّل خالد عدد السعرات الحرارية التي يتناولها كل يوم. أوجد الانحراف المعياري مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات الآتية:

اليوم	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد السعرات	١٨٠٠	٢٠٠٠	٢١٠٠	٢٢٥٠	١٩٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠



استعمل الآلة الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري. واضغط على المفاتيح on ثم أدخل كل قيمة من قيم البيانات في القائمة مع الضغط على enter بعد إدخال كل قيمة. ولإظهار قيمة الانحراف المعياري على الشاشة اضغط بالترتيب

menu ، x̄ 4:Statistics ◂ 1:Stat Calculations 1:One-Variable Statistics...

فيكون الانحراف المعياري ٢١٦,٩ تقريبًا.

تحقق

٤

رصد خالد استهلاكه من السعرات خلال أسبوع آخر فكان:

١٩٥٠، ٢٠٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠، ١٩٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠

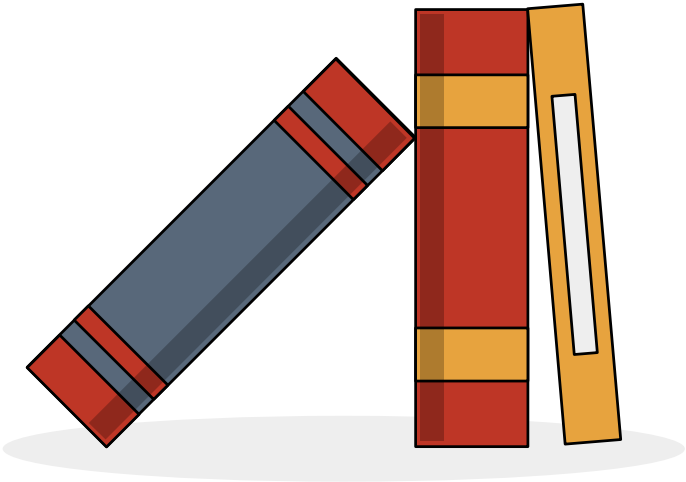
أوجد الانحراف المعياري لاستهلاكه من السعرات في هذا الأسبوع.

اكتشف الخطأ: تصف كلٌّ من سحر ورغد طريقة لزيادة دقة دراسة مسحية، فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سحر	رغد
يجب أن تشتمل الدراسة المسحية على أكبر عدد ممكن من أفراد المجتمع.	يجب اختيار عينة الدراسة المسحية عشوائيًا، ويجب أن تُؤخذ عدة عينات عشوائية.

الواجب

التباديل و التوافيق



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست استعمال مبدأ العد الأساسي

الان

١- أستعمل التباديل
٢- أستعمل التوافيق

المفردات

فضاء العينة
التبديل
المضروب
التوافيق

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا

أخبر المدرّبُ نوافَ أنه سيكون خامس لاعب يضرب ركلة الترجيح، إذا انتهت المباراة إلى ضربات الترجيح.

واعتمد المدرب الترتيب الأبجدي أساسًا في تشكيل الفريق؛ لترتيب من يقوم بركلات الترجيح.

التباديل: تُسمى قائمة جميع الأشخاص أو الأشياء في مجموعة معينة **فضاء العينة**. وعندما تُنظّم العناصر، بحيث يكون ترتيبها مهمًّا، وتُكتب جميع التراتيب الممكنة لهذه العناصر، يُسمَّى كلٌّ من هذه التراتيب **تبديلاً**.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

مثال ١

رحلات: تخطّط وكالة سياحة وسفر لرحلة سياحية، يزور المسافرون خلالها ٥ مدن في المملكة. بكم طريقة يمكن أن ترتب الوكالة المدن الخمس في خطة الرحلة؟

عدد طرق ترتيب المدن = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

هناك ١٢٠ طريقة ممكنة لترتيب المدن الخمس.

تحقق

١

محاضرات: دخل ناصر وخمسة من أصدقائه قاعة محاضرات. فبكم طريقة مختلفة يمكنهم أن يجلسوا جميعًا على ٦ مقاعد خالية في صفٍّ واحدٍ؟

تأكد

١

جوائز: يريد أحد المراكز التجارية أن يعرض صور جوائزه الستِّ التي يوزِّعها على الزبائن على لوحة.
بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صفٍّ واحدٍ؟

مفهوم أساسي المضروب

التعبير اللفظي: **مضروب** العدد الصحيح الموجب (ن)، هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن (ن) أو تساويه.

الرموز: ن! = ن (ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣) × ... × ١، ن ≥ ١، أيضاً ٠! = ١

مفهوم أساسي قانون التباديل

التعبير اللفظي: عدد التباديل لعناصر عددها (ن) مأخوذة (ر) عنصرًا في كل مرة هو ناتج قسمة ن! على (ن – ر)!

الرموز: $_{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

مثال ٢

مكتبة: يريد أمين المكتبة أن يعرض ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة على رفٍّ. فبكم طريقة يمكنه ذلك؟

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$ قانون التباديل

$$ل^{١٠}_{٦} = \frac{١٠!}{(١٠ - ٦)!}$$ ن= ١٠، ر= ٦

$$= \frac{١٠!}{٤!}$$ بسّط

$$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}{\cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= ١٥١٢٠٠$$ بسّط

تحقق

٢

لوحات: رسم فنان ١٥ لوحة فنية. فبكم طريقة يمكنه اختيار ١٠ لوحات منها لعرضها في معرض فني.

تأكد

أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

٢

$٧^{ل ٢}$

٣

$٩^{ل ٣}$

مثال ٣

أعمال منزلية: تطلب أم إلى أبنائها الخمسة القيام ببعض الأعمال المنزلية كل أسبوع. بكم طريقة يمكن اختيار اثنين منهم لتنظيف ساحة المنزل؟

بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمًّا، فيجب أن نجد عدد توافيق ٥ أبناء، اختير اثنان منهم كل مرة.

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{\text{عدد التباديل}}{\text{عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها}}$$

أوجد عدد التباديل أولًا.

$$^{٥}ل_{٢} = \frac{٥!}{٣!} = ٢٠ \qquad ن = ٥، ر = ٢$$

وبما أننا نختار اثنين في كلِّ مرةٍ، فإن عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها هو ٢! = ٢.

إذن $^{ن}ق_{ر} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

أيْ أنّ هناك ١٠ طرق ممكنة لاختيار اثنين من الأبناء.

تحقق

٣

اختبار: تقدّم سعيد لاختبار في التاريخ، طلب فيه الإجابة عن ١٠ أسئلة من بين ١٢ سؤالًا.
بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟

مفهوم أساسي قانون التوافيق

التعبير اللفظي: عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذة (ر) عنصرًا كل مرة، يساوي ناتج قسمة ن! على (ن – ر)! ر!

الرموز: $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!ر!}$

مثال ٤

وظائف: أعلنت شركة عن ٥ وظائف شاغرة لديها، فتقدم للإعلان ٨ أشخاص. بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمس؟

$$ق^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!ر!}$$ قانون التوافيق

$$= \frac{٨!}{(٨ - ٥)!٥!}$$ ن =٨، ر= ٥

$$= \frac{٨!}{٣!٥!}$$ بسّط

$$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times \cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}{٣ \times ٢ \times ١ \times \cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= \frac{٣٣٦}{٦} = ٥٦$$ هناك ٥٦ طريقة لشغل الوظائف

تحقق

٤

اكتب: أراد أربعة طلاب أن يختاروا كتبًا يقرؤونها من بين ١٨ كتابًا مختلفًا، تتكون من ٤ روايات و٦ كتب علمية ، و٨ كتب إسلامية. بكم طريقة يمكنهم اختيار الكتب الأربعة؟

تأكد

أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

٤ $\text{ق}^{٦}$ ٤

٥ $\text{ق}^{٥}$ ٢

مثال ٥

أقفال: يتطلب فتح قفل يعمل بالأرقام رمزًا مكوّنًا من ثلاثة أرقام من بين الأرقام صفر إلى ٩ على ألّا يُستعمل العدد الواحد أكثر من مرة واحدة.

أ) ما عدد الترتيبات المختلفة الممكنة؟

بما أن ترتيب الأرقام في الرمز مهم، إذن هذه الحالة تمثّل تباديل لعشرة أرقام مأخوذة ثلاثة في كل مرة.

$$ن\,ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$ قانون التباديل

$$= \frac{١٠!}{(١٠ - ٣)!}$$ ن= ١٠، ر= ٣

$$= \frac{١٠!}{٧!}$$ بسط

$$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times \cancel{٧} \times \cancel{٦} \times \cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}{\cancel{٧} \times \cancel{٦} \times \cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= ٧٢٠$$ بسط

هناك ٧٢٠ رمزًا مختلفًا.

ب) ما احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية؟

نستعمل مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد الحالات التي تكون فيها الأرقام الثلاثة فردية. هناك ٥ أرقام فردية هي: ١، ٣، ٥، ٧، ٩، إذن عدد عناصر الحادثة يساوي $٥\,ل\,٣ = ٦٠$.

$$ح(\text{الأرقام جميعها فردية}) = \frac{٦٠}{٧٢٠}$$ عدد عناصر الحادثة / عدد عناصر الفضاء العيني

$$= \frac{١}{١٢}$$ بالتبسيط

احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية هو $\frac{١}{١٢} = ٨٪$ تقريبًا

إرشادات للدراسة

ثلاثة أرقام: يمكن اعتبار العدد ٠٢٥ رمزًا لفتح القفل، بينما لا يُعّد العدد ٢٥ رمزًا لفتحه.

تحقق

٥

شركات: يريد أعضاء مجلس إدارة شركة أن يختاروا رئيسًا ونائبًا للرئيس وأمينًا للسر وأمينًا للصندوق. وكان فهد وسطام من بين تسعة مرشحين لهذه المراكز.

أ) بكم طريقة يمكن لأعضاء مجلس الإدارة اختيار الأعضاء الذين يشغلون هذه المراكز؟

ب) إذا تم الاختيار عشوائيًّا، فما احتمال أن يُختار فهد أو سطام لمركز الرئيس أو نائب الرئيس؟

تأكد

٧

مثلجات: يعرض أحد مصانع المثلجات ٥ أنواع مختلفة بطعم الشوكولاتة، و ٤ أنواع مختلفة بطعم الفراولة و ٦ أنواع بطعم التوت.

أ) بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الزبائن ٣ أنواع مختلفة من المثلجات؟

ب) هل تتضمن عملية الاختيار التباديل أم التوافيق؟

جـ) إذا تم اختيار أنواع «المثلجات» عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون الأنواع الثلاثة التي اختارها أحد الزبائن بطعم الشوكولاتة؟

تدرب

حدّد هل يتضمن كل موقف من المواقف الآتية تباديل أم توافيق:

٢١) اختيار ٣ أنواع مختلفة من الفطائر من قائمة تحتوي على ١٢ نوعًا.

٢٢) اختيار الفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى في مسابقة ثقافية.

٢٣) اختيار ٥ كتب لقراءتها من بين ٨ كتب على رفٍّ.

٢٤) ترتيب حروف كلمة «سعودي».

اكتشف الخطأ: تريد كلٌّ من سلمى ونوف أن يكوِّنا لجنة مؤلفة من ٤ طالبات؛ للإشراف على تزيين المدرسة استعدادًا لاحتفال تكريم الأوائل. تريد كلٌّ منهما أن تحدد عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا تطوَّعت ١٠ طالبات للقيام بهذا العمل. فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سلمى

$$_{٤}ل^{١٠} = \frac{١٠!}{(١٠-٤)!}$$

$$= ٥٠٤٠$$

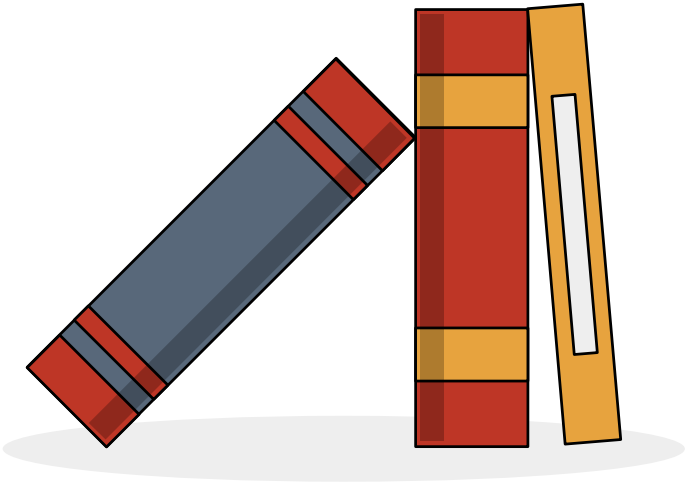
نوف

$$_{٤}ق^{١٠} = \frac{١٠!}{(١٠-٤)!\,٤!}$$

$$= ٢١٠$$

الواجب

احتمالات الحوادث المركبة



اليوم :

التاريخ :

فيما سبق

درست حساب احتمال بسيط

الان

١- أجد احتمال حادثتين مستقلتين أو حادثتين غير مستقلتين

٢- أجد احتمال حادثتين متنافيتين أو حادثتين غير متنافيتين

المفردات

الحادثة المركبة

الحادثتان المستقلتان

الحادثتان غير المستقلتين

الحادثتان المتنافيتان

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا

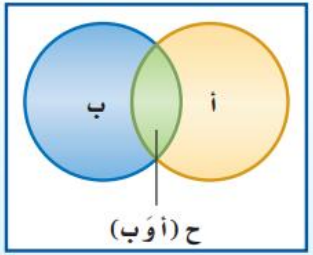
يرغب خالد في السفر من الرياض إلى جدة بالطائرة.
وتشير تقارير شركة الطيران إلى وصول الطائرات في موعدها بنسبة ٩٢٪ من الرحلات. كما تشير إلى فقدان الأمتعة في ١٪ من الحالات. ما احتمال وصول طائرة خالد في موعدها وعدم فقدان أمتعته؟

مفهوم أساسي احتمال الحوادث المستقلة

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا، يساوي حاصل ضرب احتمال الحادثة أ في احتمال الحادثة ب.

الرموز: ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب)

النموذج:



مثال ١

كرات زجاجية: يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائيًّا ثم أُعيدت وسُحِبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

الكرة الأولى: ح(سوداء) $= \frac{٦}{٢١}$ ← عدد الكرات السوداء / عدد الكرات الكلي

الكرة الثانية: ح(صفراء) $= \frac{٤}{٢١}$ ← عدد الكرات الصفراء / عدد الكرات الكلي

ح (سوداء وصفراء) = ح (سوداء)× ح (صفراء) **احتمال الحوادث المستقلة**

$= \frac{٦}{٢١} \times \frac{٤}{٢١} = \frac{٢٤}{٤٤١}$ **عوّض**

الاحتمال يساوي $\frac{٢٤}{٤٤١} = ٤,٥\% \approx$.

تحقق

كرات زجاجية: يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائيًّا ثم أُعيدت وسُحِبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

أ١

ح (زرقاء وخضراء)

ب١

ح (ليست سوداء و زرقاء)

مفهوم أساسي احتمال الحوادث الغير مستقلة

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة (أ) في احتمال وقوع الحادثة (ب) بعد وقوع الحادثة أ.

الرموز: ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)

مثال ٢

بطاقات: يوجد في صندوق ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ صفراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء. وبطاقات كل مجموعة مرقّمة بالأرقام من ١ إلى ١٠. فإذا سحب عبد الكريم ثلاث بطاقات عشوائيًّا من الصندوق واحدة تلو الأخرى من دون إرجاع. فأوجد احتمال أن تكون البطاقات المسحوبة بالترتيب المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

أ) ح (حمراء، بيضاء، حمراء)

البطاقة الأولى: ح (حمراء) $= \frac{١٠}{٤٠} = \frac{١}{٤}$ ← عدد البطاقات الحمراء / عدد البطاقات الكلي

البطاقة الثانية: ح (بيضاء) $= \frac{١٠}{٣٩}$ ← عدد البطاقات البيضاء / عدد البطاقات المتبقية

البطاقة الثالثة: ح (حمراء) $= \frac{٩}{٣٨}$ ← عدد البطاقات الحمراء المتبقية / عدد البطاقات المتبقية

ح (حمراء، بيضاء، حمراء) = ح (حمراء) × ح (بيضاء) × ح (حمراء)

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١٠}{٣٩} \times \frac{٩}{٣٨} = \frac{١٥}{٩٨٨}$ عوّض

إذن الاحتمال يساوي $\frac{١٥}{٩٨٨}$ = ١,٥٪ تقريبًا.

ب) ح (أربعة ، أربعة ، ليس تسعة)

بعد أن يسحب عبد الكريم البطاقتين اللتين تحملان الرقم ٤، إذن يبقى في الصندوق ٣٨ بطاقة. وبما أن البطاقتين المسحوبتين لا تحملان الرقم ٩، فإنه يوجد في الصندوق ٤ بطاقات تحمل الرقم ٩؛ وعليه فإن عدد البطاقات التي لا تحمل الرقم ٩ يساوي ٣٨ − ٤ = ٣٤.

ح (أربعة، أربعة، ليس تسعة) = ح (أربعة) × ح (أربعة) × ح (ليس تسعة)

$= \frac{٤}{٤٠} \times \frac{٣}{٣٩} \times \frac{٣٤}{٣٨}$

$= \frac{١٧}{٢٤٧٠}$

إذن الاحتمال يساوي $\frac{١٧}{٢٤٧٠}$ = ٠,٧٪ تقريبًا.

إرشادات حل المسألة

التمثيل

يساعد تمثيل الموقف أو المسألة في فهم السؤال المطروح، لذا استعمل أوراقًا ملونة لتمثيل المسألة.

مجموعة رفعة الرياضيات
Salha ASIRI

تحقق

كرات زجاجية: يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائيًّا ثم أُعيدت وسُحِبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

٢أ

ح (اثنان، خمسة، ليس خمسة)

٢ب

ح (حمراء، ليست حمراء، حمراء)

تأكد ١

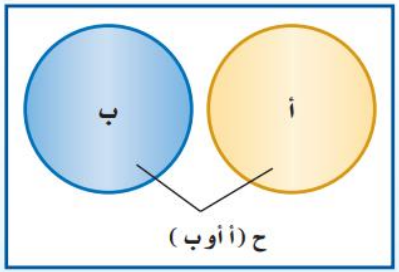
بيّن إن كانت الحوادث في الأسئلة الآتية مستقلة أم غير مستقلة، ثم أوجد احتمال كلٍّ منها :

ألعاب الأطفال: يحتوي صندوق ألعاب على ١٢ دمية و ٨ سيارات صغيرة و ٣ كرات. إذا اختارت أمينة اثنتين عشوائيًّا من هذه الألعاب لأخيها الأصغر، فما احتمال أن تكون قد اختارت سيارتين صغيرتين؟

مفهوم أساسي الحوادث المتنافية

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتمالي الحادثتين.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)



إرشادات للدراسة

«و» ، «أو»

ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «و» بالحوادث المستقلة وغير المستقلة، في حين ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «أو» بالحوادث المتنافية وغير المتنافية.

مثال ٣

أوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية عند رمي مكعب أرقام:

أ) ح (٣ أو ٥)

بما أنه لا يمكن أن يظهر الرقم ٣ والرقم ٥ في الوقت نفسه على وجه المكعب العلوي، فإن هاتين الحادثتين متنافيتان.

ح (ظهور ٣) = $\frac{١}{٦}$ ← $\frac{\text{عدد الأوجه التي تحمل ٣}}{\text{عدد أوجه المكعب جميعها}}$

ح (ظهور ٥) = $\frac{١}{٦}$ ← $\frac{\text{عدد الأوجه التي تحمل ٥}}{\text{عدد أوجه المكعب جميعها}}$

ح (٣ أو ٥) = ح (ظهور ٣) + ح (ظهور ٥) احتمال الحوادث المتنافية

= $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٦}$ عوّض

= $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$ اجمع

إذن احتمال ظهور الرقم ٣ أو ٥ عند رمي مكعب أرقام يساوي $\frac{١}{٣}$ = ٣٣٪ تقريبًا.

ب) ح (٤ على الأقل)

ظهور ٤ على الأقل يعني ظهور ٤ أو ٥ أو ٦؛ لذا يجب أن تجد احتمال ظهور ٤ أو ٥ أو ٦.

ح (٤ على الأقل) = ح (ظهور ٤) + ح (ظهور ٥) + ح (ظهور ٦) حوادث متنافية

= $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٦}$ عوّض

= $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ اجمع ثم بسّط

إذن احتمال ظهور ٤ على الأقل يساوي $\frac{١}{٢}$ = ٥٠٪ .

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

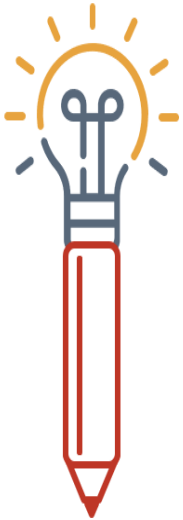
يمكن أن تجد الاحتمال في المثال ٣ أ، بقسمة عدد عناصر الحادثة على عدد النواتج الممكنة جميعها.

$\frac{١+١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

تحقق

٣أ

ح (أقل من ٣)



٣ب

ح (عدد زوجي)

تأكد

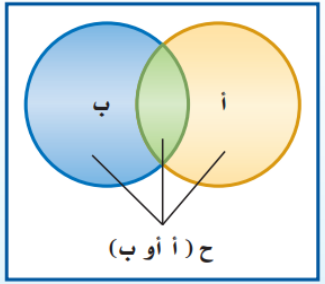
٣

كتب: اختار حسن كتابًا من الرف المجاور عشوائيًّا، وأعاده ثم اختار كتابًا آخر. فما احتمال أن يكون قد اختار كتابين من كتب الرياضيات؟

مفهوم أساسي الحوادث الغير متنافية

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتماليهما ناقص احتمال وقوع الحادثتين معًا.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح(ب) – ح (أ وَ ب)



قراءة الرياضيات

أ أو ب

يختلف استعمال أ أو ب عن الاستعمال اللغوي، فالعبارة أ أو ب تسمح بإمكانية وقوع الحادثتين أ و ب معًا أيضًا.

مثال ٤

الطلاب الرياضيون: يوجد من بين ٢٤٠ طالبًا في مدرسة ما ١٧٦ طالبًا متفوقًا علميًّا و ٤٨ طالبًا متفوقًا رياضيًّا. وهناك ٣٦ طالبًا متفوقًا علميًّا ورياضيًّا. اختير طالب عشوائيًّا فما احتمال أن يكون متفوقًا علميًّا أو رياضيًّا ؟

بما أن بعض الطلاب متفوقون علميًّا ورياضيًّا فالحادثتان غير متنافيتين.

ح (متفوق رياضيًّا)= $\frac{٤٨}{٢٤٠}$ ، ح (متفوق علميًّا) = $\frac{١٧٦}{٢٤٠}$ ، ح (متفوق رياضيًّا وعلميًّا)= $\frac{٣٦}{٢٤٠}$

ح (متفوق رياضيًّا أو علميًّا)= ح (متفوق رياضيًّا)+ ح (متفوق علميًّا)− ح (متفوق رياضيًّا وعلميًّا)

$= \frac{٤٨}{٢٤٠} + \frac{١٧٦}{٢٤٠} - \frac{٣٦}{٢٤٠}$ عوّض

$= \frac{١٨٨}{٢٤٠} = \frac{٤٧}{٦٠}$ بسط.

الاحتمال يساوي $\frac{٤٧}{٦٠}$ = ٧٨٪ تقريبًا.

تنبيه !

تقاطع الحوادث

عند إيجاد احتمالات الحوادث غير المتنافية، نحسب تقاطع الحادثتين مرتين؛ لأنه يوجد في كلتا الحادثتين. لذا يجب الانتباه إلى أنه في الحقيقة يقع في تقاطعهما مرة واحدة.

تحقق

٤

مكعب أرقام: عند رمي مكعب أرقام، ما احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟

تأكد

يحتوي صندوق على ٨ كرات حمراء و٨ سوداء و ٨ بيضاء و ٨ زرقاء، وقد رُقّمت كرات كل لون بالأرقام من ١ إلى ٨، فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا من الصندوق. حدّد هل الحادثتان في كلٍّ ممّا يأتي متنافيتان أم غير متنافيتين، ثم أوجد الاحتمال:

٤

ح (٢ أو ٨)

٥

ح (حمراء أو زرقاء)

٦

ح (زوجي أو سوداء)

حدّد إذا كانت الحوادث فيما يأتي مستقلة أم غير مستقلة، ثم احسب احتمال كلٍّ منها:

نقود: إذا أُلقيت قطعة نقود ٤ مراتٍ، فما احتمال ظهور الكتابة في المرات الأربع جميعها؟

حدّد إذا كانت الحوادث فيما يأتي مستقلة أم غير مستقلة، ثم احسب احتمال كلٍّ منها:

مكعب أرقام: رمي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور عددين مختلفين؟

٢١

اكتشف الخطأ: يريد كلٌّ من حمدٍ وجمالٍ تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء أو حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على ٨ كرات زرقاء و ٦ حمراء و ٨ صفراء و ٤ بيضاء. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ اشرح تبريرك.

حمد

ح (زرقاء أو حمراء)

= ح(زرقاء) + ح (حمراء)

$= \frac{٨}{٢٦} + \frac{٦}{٢٦}$

$= \frac{١٤}{٢٦}$ = ٥٤٪ تقريبًا

جمال

ح (زرقاء أو حمراء)

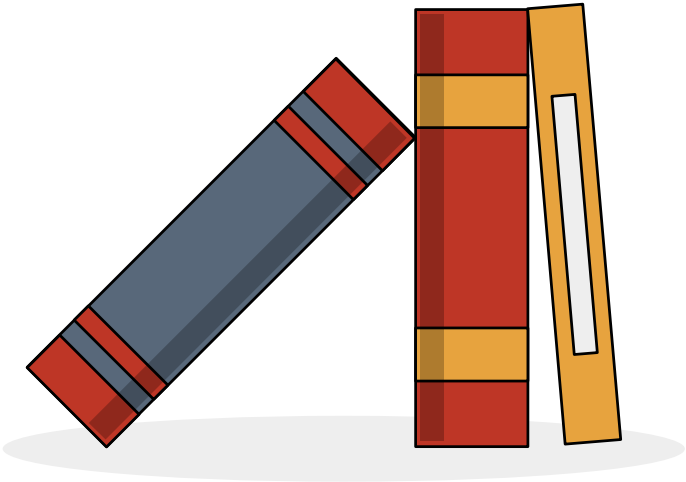
= ح (زرقاء) × ح (حمراء)

$= \frac{٨}{٢٦} \times \frac{٦}{٢٦}$

$= \frac{٤٨}{٦٧٦}$ = ٧٪ تقريبًا

الواجب

اختبار الفصل العاشر



اليوم :

التاريخ :

عيّن العينة والمجتمع الذي اختيرت منه فيما يأتي، ثم صنّف الطريقة المُستعملة لجمع البيانات:

١ **لُعب:** دعت شركة تنتج لُعبًا للأطفال ٥٠ طفلًا لاختيار لعبة جديدة ورصدت ردود أفعالهم.

٢ **أزهار:** أرسل مشتل استبانة؛ لتحديد نوع الأزهار التي يفضلها الناس بصورة أكثر. وقد أرسل هذه الاستبانة إلى من تخطَّى سن الـ ٥٠ سنة في القوائم البريدية الخاصة بزبائن المشتل.

احسب قيمة كلٍّ من المقادير الآتية:

٣ $٧ل_{٥}$

٤ $١٠ق_{٤}$

٥ $٧ق_{٢}$

٦ $٦ل_{٣}$

ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات الآتية؟ برّر إجابتك، واحسب قيمة المقياس:

٧

انتخابات: رصد مركز انتخابات، أعمار الأشخاص الذين انتخبوا في ذلك المركز فكانت: ٢١، ٢٥، ٣٢، ٤١، ٣٢، ٢٠، ٦٥، ٣٣، ٣٠، ٧٢

٨

تسوّق: رصد محل تجاري عدد القطع التي يشتريها المتسوقون في يومٍ معَّينٍ فكانت: ٣، ٤، ٥، ٣، ٤، ٥، ٥، ٣، ٢، ٣، ٢، ١٠.

ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات الآتية؟ برّر إجابتك، واحسب قيمة المقياس:

٩

صحف: أُرسلت استبانة لجميع المشتركين في إحدى الصحف؛ لمعرفة الصحيفة التي يفضل الناس قراءتها.

١٠

تسوّق: سُئل كل شخص يغادر مجمّعًا تجاريًّا عن أفضل ٣ محالّ لبيع الملابس في المجمّع.

١١

كتب: بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة من بين عشرة كتب مختلفة؟

١٢

ما الاحتمال النظري لظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقد؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
Salha ASIRI

١٣

مكعب أرقام: عند رمي مكعب أرقام مرتين، ما احتمال ظهور العدد ٢ في المرة الأولى، والعدد ٣ في المرة الثانية؟

١٤

تعليم: سأل خالد ٢٠٠ طالب في مدرسته عن عدد الأيام التي يحل فيها الطلاب واجباتهم المنزلية في الأسبوع.
وعرضت النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأيام	عدد الطلاب
١	٦
٢	١٨
٣	٣١
٤	٤٦
٥	٥٧
٦ أو أكثر	٤٢

أ) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون قد حلّ واجبات منزلية في أكثر من خمسة أيام؟

ب) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في ثلاثة أيام على الأكثر؟

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعات البيانات الآتية:

١٥ ٤، ٥، ٥، ٦، ٦، ٩، ٨، ١٠

١٦ ٢٢، ٢٥، ٢٧، ٣٠

١٧

صحف: تابع ناصر زمن مطالعة الصحيفة بالدقائق لسبعة من زملائه في أحد الأيام فكانت: ٥، ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٦٠.

أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرِّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

١٨

اختيار من متعدد: لتمثيل مدرسة متوسطة في تجمّع طلابي اختير طالبان عشوائيًّا من كلِّ صفٍّ من الصفوف: الأول والثاني والثالث المتوسط. فما أفضل وصف لهذه العينة؟

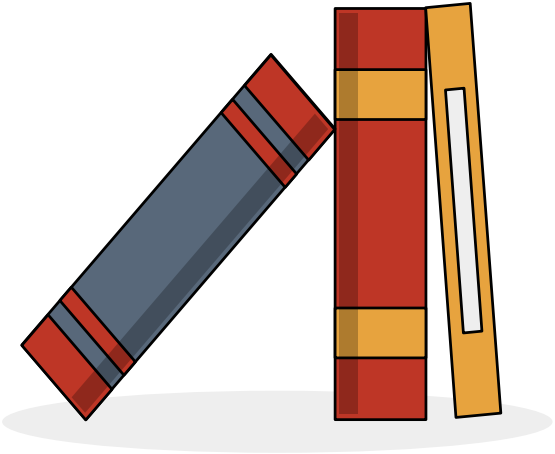
أ) بسيطة.

ب) طبقية.

ج) منتظمة.

د) لا شيء مما ذكر.

تم بحمد الله



المراجع

ماجروهل رياضيات ثالث متوسط

كتاب الصف الثالث متوسط

عين

أتقدم بجزيل الشكر لمجموعة الابداع والتميز

مجموعة رفعة

وفخورة كوني أحد أعضاء هذه المجموعة

أ.صالحه عسيري