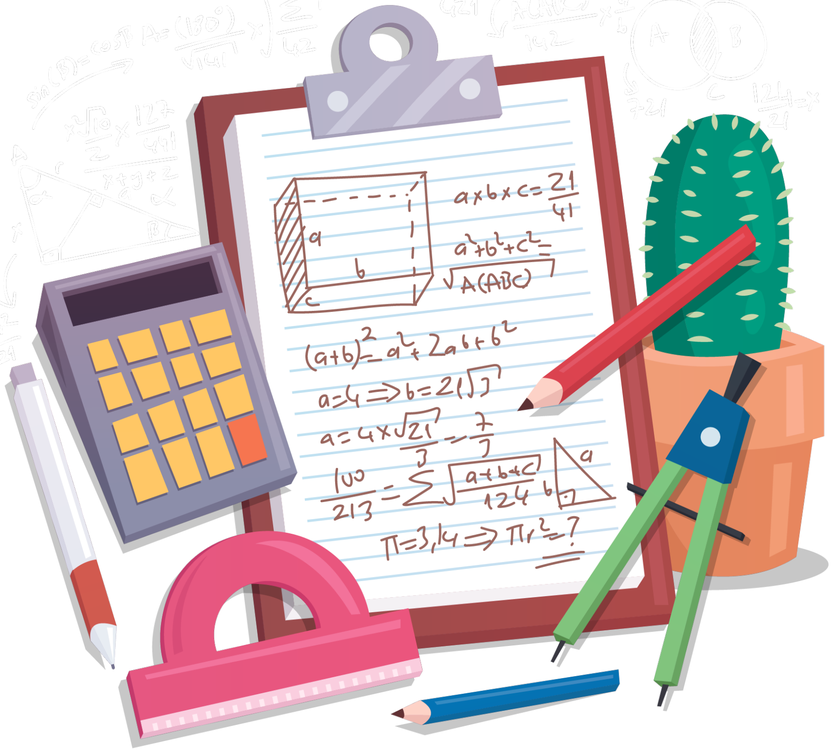
رياضيات 1-2

سلسلة رفعة الرياضيات

حلول تحقق من فهمك رياضيات 1-2



إعداد :

نورة الحربي .

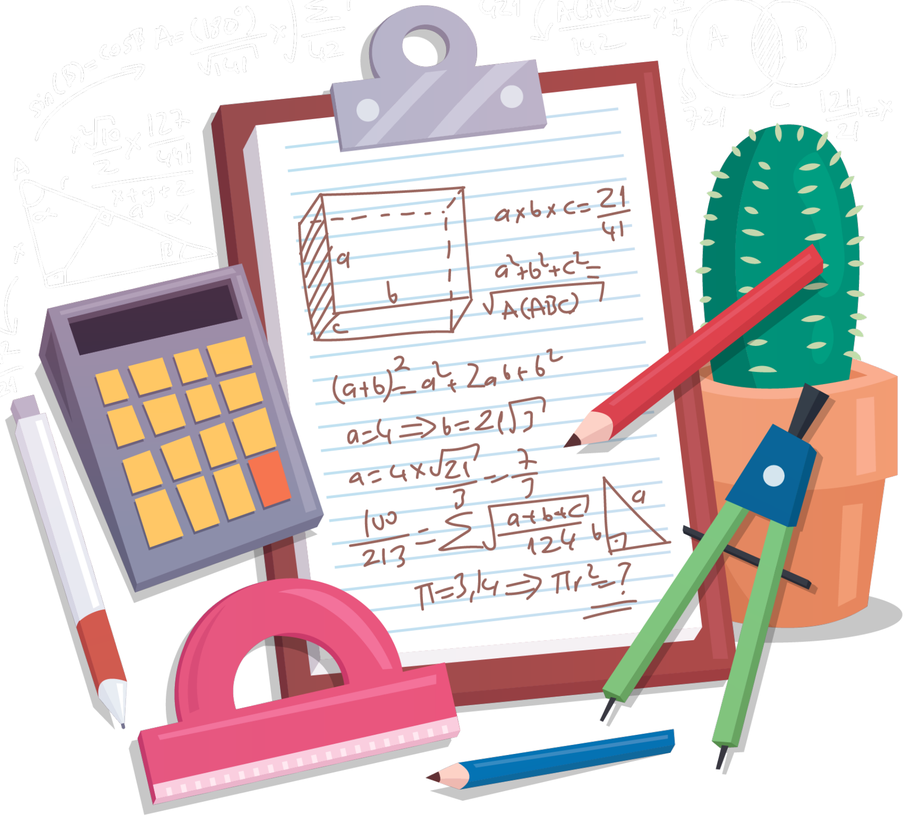
روحية السلمي .

خالد الرجب .

مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

نسخة الكترونية مجانية لاتباع



بسم الله والحمدلله والصلاة والسلام على رسول الله

اللهم علمنا ماينفعنا وانفعنا بما علمتنا وزدنا علماً

يارب العالمين

السادة / نورة الحربي و روحية السلمي وخالد الرجب

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم المرسوم بـ :

سلسلة رفعة الرياضيات (حلول تحقق من فهمك رياضيات ٣)

تحت رقم إيداع 1443/2738

تاريخ 1443/03/13

رقم الردمك 978-603-03-9308-4

شكر و عرفان

أتقدم بالشكر الجزيل لمجموعة رفعة التي تضم نخبة من المعلمين والمعلمات المبدعين والمبدعات شكراً لكم ، ولنا الفخر بأن نكون أحد أعضاء هذه المجموعة المبدعة .

جميع حسابات مجموعة رفعة

مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

تنبيه : كل الحقوق محفوظة ، نسخة الكترونية مجانية لاتباع عند إزالة شعار المجموعة أو اسم المؤلف / ة سوف يعرضك للمسائلة القانونية.

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين،

أما بعد:

نبذة تعريفية لمجموعة رِفعَة

هي مجموعة تُدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة، وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات، وابتكار الافكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام.

وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات، نقدم لكم " سلسلة رفعة الرياضيات حلول تحقق من فهمك رياضيات ٣ "

وأرجو من الله أن تجدو فيها الفائدة .

الفهرس

01 الدوال و المتباينات

التهيئة
خصائص الأعداد الحقيقية .
العلاقات و الدوال .
دوال خاصة
تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا .
حل أنظمة البيانات بيانيا .
البرمجة الخطية والحل الأمثل .
اختبار الفصل .

02 المصفوفات

التهيئة .
مقدمة في المصفوفات .
العمليات على المصفوفات .
ضرب المصفوفات .
المحددات وقاعدة كرامر .
النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة
المعادلات الخطية .
اختبار الفصل .

03 كثيرات الحدود و الدوال

التهيئة .
الأعداد المركبة .
القانون العام والمميز .
العمليات على كثيرات الحدود .
نظريتا الباقي والعوامل .
الجذور والأصفار .
اختبار الفصل .

04 العلاقات و الدوال العكسية والجذرية

التهيئة .
العمليات على الدوال .
العلاقات والدوال العكسية .
دوال ومتباينات الجذر التربيعي .
الجذر النوني .
العمليات على العبارات الجذرية .
الأسس النسبية .
حل المعادلات والمتباينات الجذرية .
اختبار الفصل .

الدوال و المتباينات

تحقق من فهمك

حدد مجموعات الاعداد التي ينتمي اليها كل من الاعداد مما يأتي :

1A) -185

R , Z , Q

1B) $-\sqrt{49}$

R , Q , Z

1C) $\sqrt{95}$

R , I

1D) $-\frac{6}{7}$

Q , R

ما الخاصية الموضحة في : $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟

خاصية التوزيع

اوجد النظير الضربي والجمعي للأعداد التالي :

العدد	النظير الجمعي	النظير الضربي
1.25	-1.25	$\frac{4}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$

تحقق من فهمك

أعمال : يتقاضي احمد 20 ريالا عن كل ساعة عمل في محل تجاري . فاذا كانت ساعات عمله في احد الأسابيع هي , 3 , 4 4 , 3 , 2.5 ، فما المبلغ الذي حصل عليه أحمد في ذلك الأسبوع ؟

اليوم	ساعات العمل
الأحد	4
الإثنين	3
الثلاثاء	2,5
الأربعاء	3
الخميس	4

الحل :

يمكن إيجاد المبلغ الذي حصل عليه كمال في ذلك الأسبوع :

$$20(4) + 20(3) + 20(2.5) + 20(3) + 20(4)$$

$$= 80 + 60 + 50 + 60 + 80$$

$$= 330 \text{ ريالاً}$$

بسط العبارة : $3(4x - 2y) - 2(3x + y)$

$$3(4x - 2y) - 2(3x + y)$$

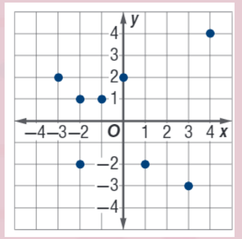
$$= 3(4x) - 3(2y) - 2(3x) - 2(y)$$

$$= 12x - 6y - 6x - 2y$$

$$= 6x - 8y$$

تحقق من فهمك

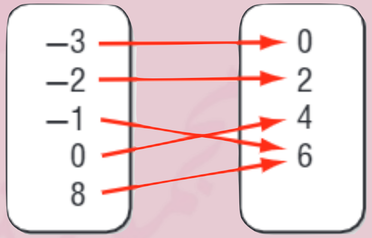
حدد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداها ، وبين ما إذا كانت دالة أم لا ، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا:



المجال = $\{-2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 0,\ -3,\ 1\}$

المدى = $\{-3,-2,1,2\}$

ليست دالة



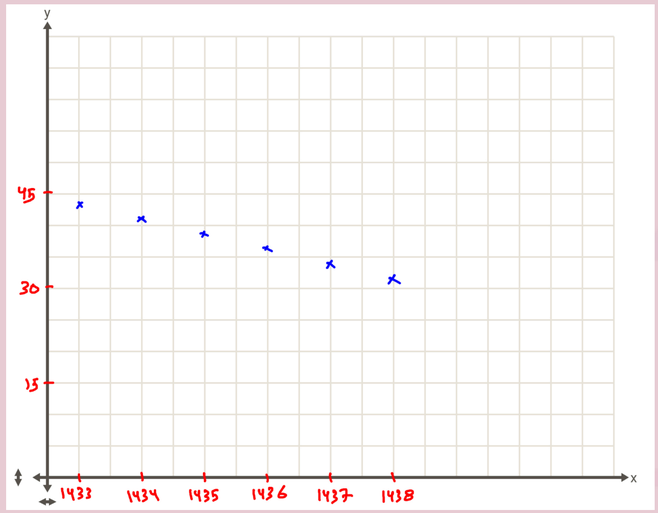
المجال = $\{-3,-2,-1,0,8\}$

المدى = $\{0,\ 2,\ 4,6\}$

العلاقة تمثل دالة وليست متباينة

عمال : اذا كان عدد العاملين في احدى المؤسسات في الأعوام 1433 هـ الى1438 هـ على الترتيب هو : 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 . مثل هذه البيانات بيانيا ، وهل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة ام متصلة . وهل تمثل دالة ؟

علاقة منفصلة ، تمثل دالة



مثل المعادلة $y = x^2 + 1$ بيانيا ، ثم حدد مجالها ومداها ، وحدد ما اذا كانت تمثل دالة ام لا ، واذا كانت كذلك ، فهل هي متباينة ام لا، ثم حدد ما اذا كانت منفصلة ام متصلة .

أكون جدولا لبعض القيم التي تحقق المعادلة ، ثم امثل المعادلة بيانيا .

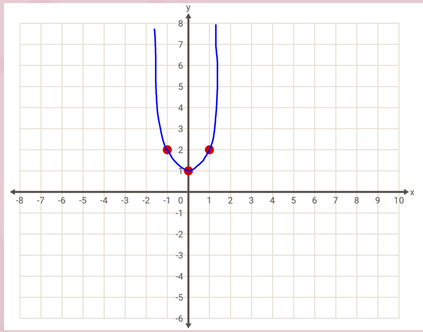
x	y
-1	2
0	1
1	2

تمثل دالة و ليست متباينة

المجال : مجموعة الاعداد الحقيقية (تكون على محور x)

المدى = $\{ y \mid y \geq 1 \}$ (القيم على محور y)

متصلة



لتكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$. أوجد قيمة كل ممايأتي :

g(2.8) (4A

$g(2.8) = 0.5(2.8)^2 - 5(2.8) + 3.5$

$= -6.58$

g(4a) (4B

$g(4a) = 0,5(4a)^2 - 5(4a) + 3.5$

$= 8a^2 - 20a + 3.5$

مثل الدالة $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \quad x<0 \\ x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$ بيانيا . ثم حدد كلا من مجالها ومداها .

الخطوة 1 : امثل f(x) = x + 2 بيانيا عندما $x < -1$

X	Y	(x , y)
-1	1	(-1 ,1)
0	2	(0 , 2)

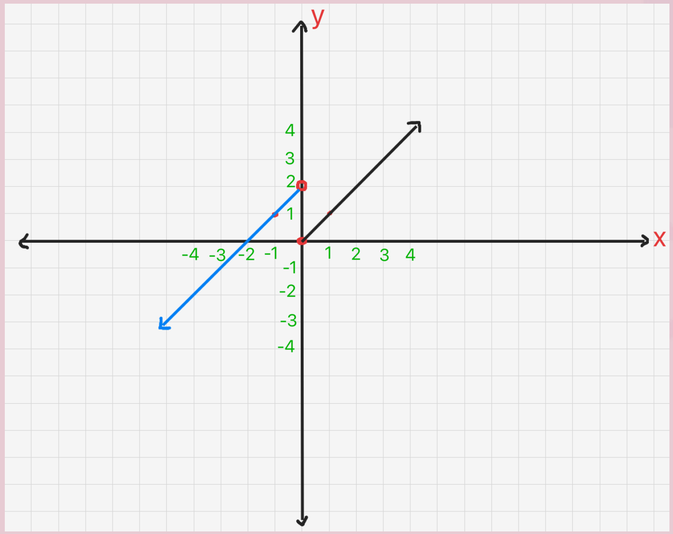
ثم امثل النقطتين على المستوى الاحداثي ووصل بينهم بنصف مستقيم وبما ان العدد (0) لا يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة (2 , 0)

الخطوة 2: امثل f(x) = x بيانيا عندما $x \geq 0$

أكون جدول لإيجاد قيم x , y

X	Y	(x , y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1 , 1)

امثل النقطتين على المستوى الاحداثي ووصل بينهم بنصف مستقيم وبما ان (0) يحقق المتباينة ، لذا نبدأ بدائرة مظللة عند النقطة (0 ,0)



المجال = R

المدى = R

اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانياً في الشكل المجاور :

اكتب الدالة التي تمثل كل جزء في التمثيل البياني .

الخطوة 1: الجزء الأيمن نختار نقطتين تقع هذا الجزء وهما (4 , 3) ,(0, 7)
ثم نوجد الميل لهما

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{3 - 7} = -1$$

ونكتب معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل ونقطة
وهو الذي يمثله الدالة للجزء الأيمن :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -1(x - 7)$$

$$y = -x + 7$$

الخطوة 2: نوجد معادلة الجزء الأوسط نختار نقطتين تقع
على هذا الجزء ولتكن (1 , -1) , (3,-3) ثم نوجد الميل لهما

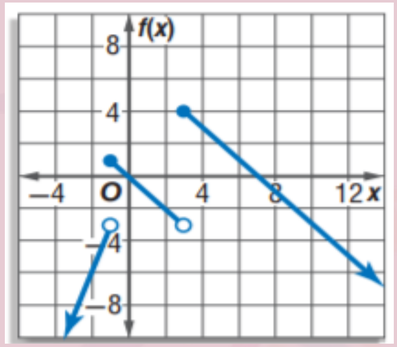
$$m = \frac{1 + 3}{-1 - 3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -1(x - (-1))$$

$$y = -x - 1 + 1$$

$$y = -x$$



الخطوة3 : نوجد معادلة الجزء الايسر

نختار نقطتين تقع على هذا الجزء (-3, -1) ,(-6, -2) نوجد الميل لهما .

$$m = \frac{-6 + 3}{-2 + 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

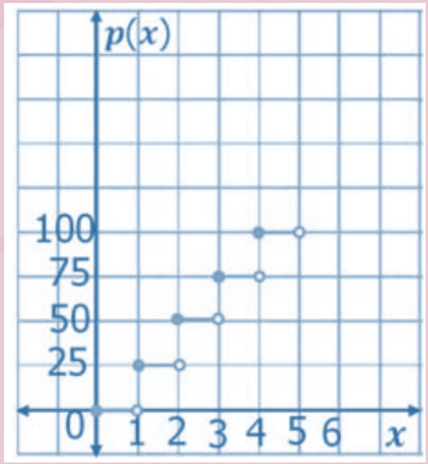
$$y + 3 = 3(x + 1)$$

$$y = 3x$$

$$F(x) = \begin{cases} -x + 7 & , \quad x \geq 3 \\ -x & , \quad -1 \leq x < 3 \\ 3x & , \quad x < -1 \end{cases}$$

3) إعادة تدوير الورق : تدفع شركة لاعادة تدوير الورق 25 ريالا عن كل صندوق من الورق يتم احضاره للشركة ولاتدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل . اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثلها بيانيا .

الفترةx	P(x)
0	0
1	25
2	50
3	75
4	100



4A) مثل الدالة $f(x) = |x - 2|$ بيانيا ، ثم حدد كلا من مجالها ومداها .

خطوات الحل

- نأخذ بما داخل القيمة المطلقة ونساويه بالصفر

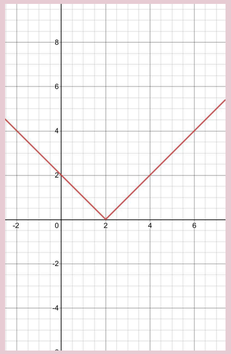
$X - 2 = 0$

$X = 2$

- نكون جدول للقيم X ,Y

X	Y
0	2
1	1
2	0
3	1
4	2

- التمثيل البياني للقيم، صل بين النقاط



المجال = مجموعة الاعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

4B) مثل الدالة $f(x) = -|x| + 1$ بيانيا ، ثم حدد كلا من مجالها ومداها.

خطوات الحل

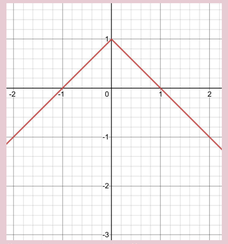
- نأخذ بما داخل القيمة المطلقة ونساويه بالصفر

$X = 0$

- نكون جدول للقيم X ,Y

X	Y
-2	-1
-1	0
0	1
1	0
2	-1

- التمثيل البياني للقيم،
- صل بين النقاط



المجال = مجموعة الاعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \leq 1\}$

1A) مثل المتباينة $3x + \frac{1}{2}y < 2$ بيانيا .

خطوات الحل

❖ نضع المتباينة في صورة المعادلة

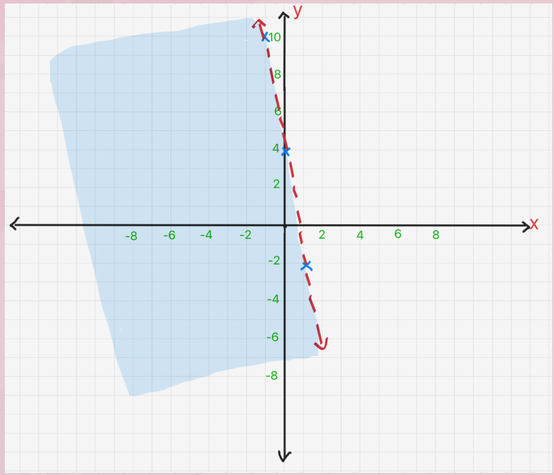
$$3x + \frac{1}{2}y = 2$$

$$6x + y = 4$$

$$y = 4 - 6x$$

❖ نرسم $y = 4 - 6x$ على المستوى الاحداثي .

x	Y
-1	10
0	4
1	-2



التحقق : نختار نقط تقع في منطقة الحل مثلا (0, 0)

$$3x + \frac{1}{2}y < 2$$

$$2 > (0)\frac{1}{2} + (0)3$$

$2 > 0$ ✓

1B) مثل المتباينة $-x + 2y > 4$ بيانيا.

خطوات الحل

❖ نضع المتباينة في صورة المعادلة

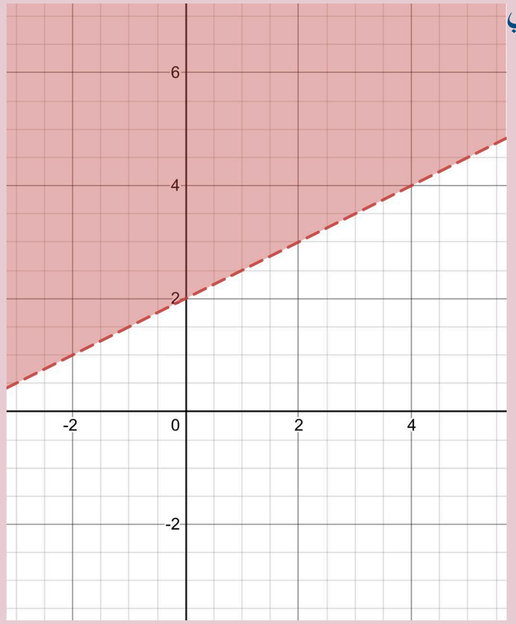
$$-x + 2y = 4$$

$$2y = 4 + x$$

$$y = 2 + \frac{1}{2}x$$

❖ نرسم $y = 2 + \frac{1}{2}x$ على المستوى الاحداثي

x	Y
-1	1.5
0	2
1	2.5



التحقق : نختار نقط تقع في منطقة الحل مثلا (0, 0)

$$-x + 2y > 4$$

$$-(0) + 2(0) > 4$$

$0 > 4$ ×

مع صالح 60 ريالا يستطيع انفاقها في مدينة الألعاب . فاذا كان ثمن تذكرة الألعاب الالكترونية 5 ريالات ، وثمن تذكرة كل لعبة عادية 5 ريالات . فاكتب متباينة تصف هذا الموقف ، ثم مثلها بيانيا .

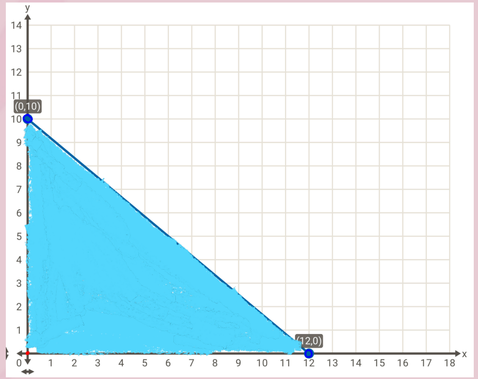
$5x + 6y \leq 60$

1. نضع المتباينة في صورة المعادلة $5x + 6y = 60$

نرسم على المستوى الاحداثي

2 . نرسم $y = -\frac{5}{6}x + 10$ على المستوى الاحداثي

x	y
0	10
12	0



التحقق : نختار نقاط ليست على المستقيم مثلا (0 , 0) وعوض في المتباينة

$5x + 6y \leq 60$

$5(0) + 6(0) \leq 60$

$0 \leq 60$ ✓

أي تحقق المتباينة اذن نصف المستوى (المظلل) الذي يحتوي النقطة $(0,0)$ يمثل حل المتباينة .

مثل المتباينات الاتية بيانيا :

(3A) $y \leq 2|x| + 3$

الحل :

➢ نضع المتباينة في صورة معادلة

$y = 2|x| + 3$

➢ نرسم $y = 2|x| + 3$ المستوى الاحداثي .

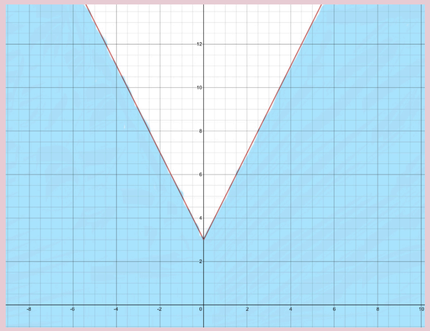
نأخذ بما داخل القيمة المطلقة ونساويه بالصفر

X = 0

➢ نكون جدول

x	y
-2	7
-1	5
0	3
1	5
2	7

➢ نمثلها بيانيا .



➢ التحقق : نختار نقط ليست على المستقيم مثلا (0 , 0)

ونعوض في المتباينة $y \leq 2|x| + 3$ فنحصل

على $0 \leq 3$ أي ان النقطة (0 , 0) تحقق المتباينة .

اذن المستوى (المظلل) الذي يحتوي النقطة (0 , 0)

يمثل حل المتباينة .

3B) مثل المتباينة $y \geq 3|x+1|$ بيانيا .

الحل :

➢ نضع المتباينة في صورة معادلة $y = 3|x+1|$

➢ نرسم $y = 3|x+1|$ المستوى الاحداثي .

نأخذ بما داخل القيمة المطلقة ونساويه بالصفر

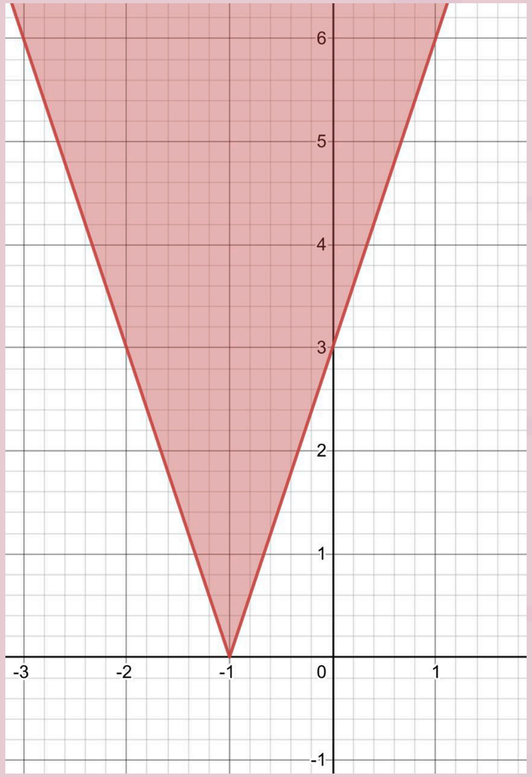
$X + 1 = 0$

$X = -1$

➢ نكون جدول

x	y
-3	6
-2	3
- 1	0
0	3
1	6

➢ نمثلها بيانيا .



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

حل النظام الاتي بيانيا :

$$y \leq -2x + 5 \quad (1A$$
$$Y > -\frac{1}{4}x - 6$$

خطوات حل أنظمة المتباينات الخطية

1. مثل كل متباينة في النظام بيانيا ، وظلل منطقة الحل .
2. حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام .

المتباينة $y \leq -2x + 5$ بيانيا .

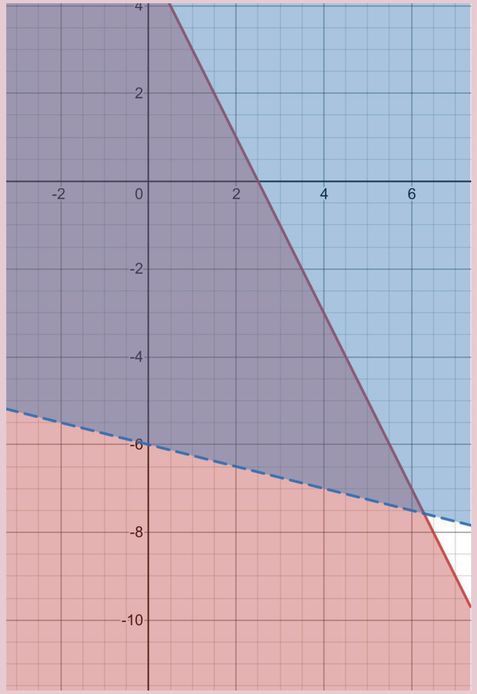
احولها الى معادلة $y = -2x + 5$ و نكون جدول

X	Y
0	5
2,5	0

المتباينه $y > -\frac{1}{4}x - 6$

احول المتباينة الى معادلة واكون الجدول

X	Y
0	- 6
- 4	-5



حل النظام الاتي بيانيا :

$$y \geq |x|$$
$$y < \frac{4}{3}x + 5$$

خطوات حل أنظمة المتباينات الخطية

1. مثل كل متباينة في النظام بيانيا ، وظلل منطقة الحل .
2. حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام .

المتباينة $y \geq |x|$ بيانيا .

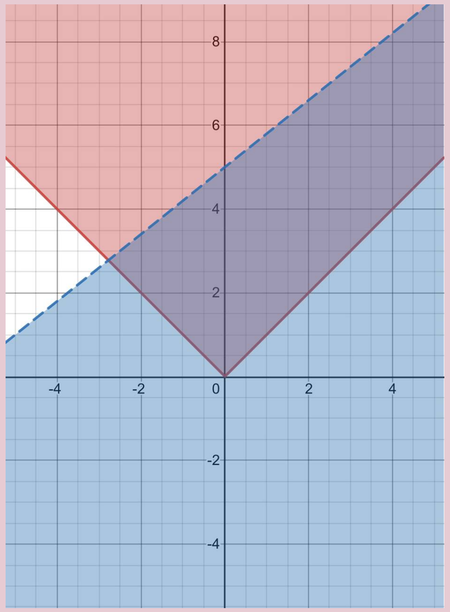
احولها الى معادلة $y = |x|$ و نكون جدول

x	y
- 2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

المتباينه $y < \frac{4}{3}x + 5$

احول المتباينة الى معادلة واكون الجدول

X	Y
0	5
3,75	0



حل النظام الاتي بيانيا :

$$y \geq -4x + 8$$
$$y < -4x + 4$$

خطوات حل أنظمة المتباينات الخطية

1. مثل كل متباينة في النظام بيانيا ، وظلل منطقة الحل .
2. حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام .

المتباينة $y \geq -4x + 8$ بيانيا .

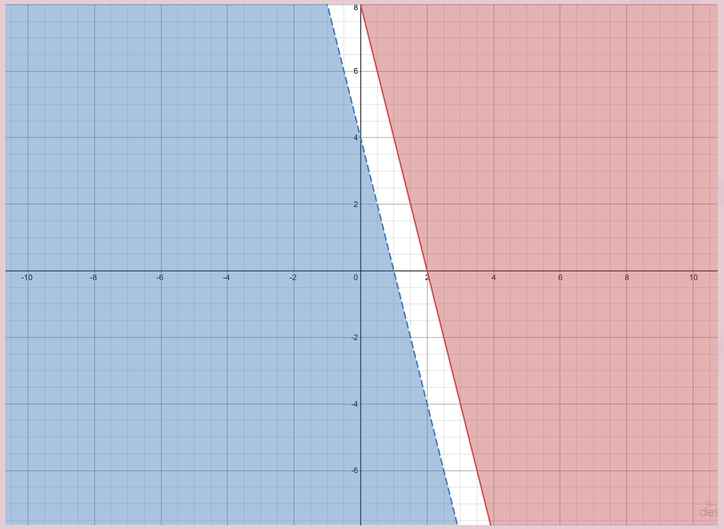
احولها الى معادلة $y = -4x + 8$ و نكون جدول

X	Y
0	8
2	0

المتباينه $y < -4x + 4$

احول المتباينة الى معادلة واكون الجدول

X	Y
1	0
0	4



مجموعة الحل

حل النظام الاتي بيانيا :

$$y \geq |x|$$

$$y < 2x - 24$$

خطوات حل أنظمة المتباينات الخطية

1. مثل كل متباينة في النظام بيانيا ، وظلل منطقة الحل .
2. حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام .

المتباينة $y \geq |x|$ بيانيا .

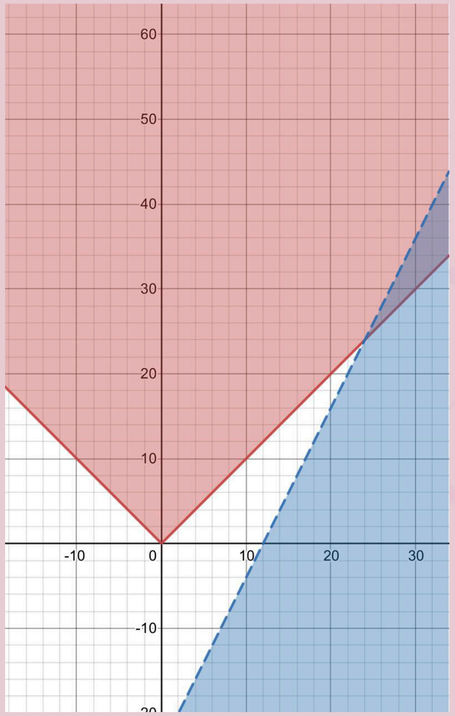
احولها الى معادلة $y = |x|$ و نكون جدول

x	y
- 20	20
-10	10
0	0
10	10
20	20

المتباينه $y < 2x - 24$

احول المتباينة الى معادلة واكون الجدول

X	Y
0	-24
12	0



تحقق من فهمك

سفر: خرج مشاري وبدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة برا فتناوبا قيادة السيارة . فاذا كانت فترات قيادة مشاري للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن 4 ساعات ، ولا تزيد على 8 ساعات ، وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحو متواصل في اليوم لاتقل عن ساعتين ولاتزيد على 5 ساعات ، وكان اجمالي زمن قيادة كليهما يوميا لاتزيد على 10 ساعات ، فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ، ثم مثله بيانيا .

$$x + y \leq 10 \quad , \quad 2 \leq y \leq 5 \quad , \quad 4 \leq x \leq 8$$

في هذه الحالة نمثل كل متباينة على حد باستخدام الخطوات السابقة

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي :

$$y \geq -3x - 6 \quad (4A$$

$$2y \geq x - 16$$

$$11y + 7x \leq 12$$

خطوات حل أنظمة المتباينات الخطية

1. مثل كل متباينة في النظام بيانيا ، وظلل منطقة الحل .

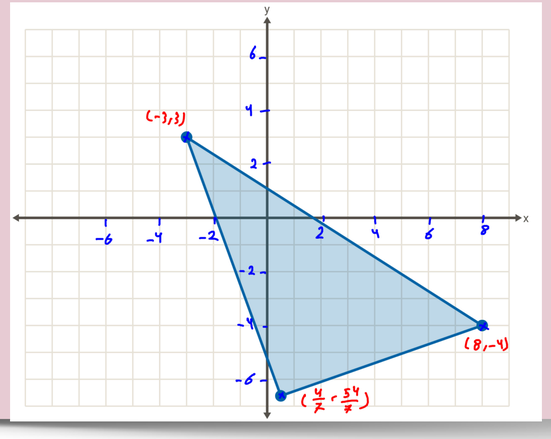
2. حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام .

وتحديد نقاط الرؤوس الناتجة من تقاطع مناطق الحل.

Y= - 3x - 6		
X	0	- 2
Y	-6	0

11y +7x = 12		
X	-3	8
Y	3	- 4

2y = x - 16		
X	4	6
Y	-6	-5



أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي :

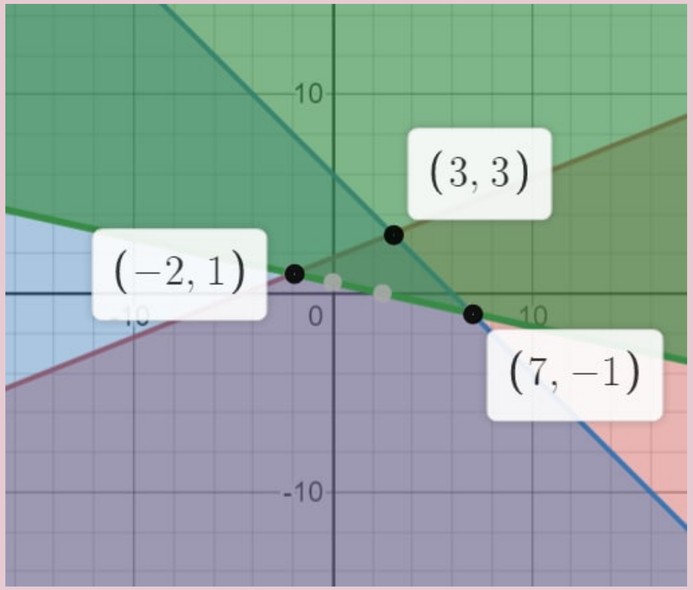
(4B

$$5y \leq 2x + 9$$
$$y \leq -x + 6$$
$$9y \geq -2x + 5$$

خطوات حل أنظمة المتباينات الخطية

1. مثل كل متباينة في النظام بيانيا ، وظلل منطقة الحل .
2. حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام .

وتحديد نقاط الرؤوس الناتجة من تقاطع مناطق الحل.



9y = -2x + 5		
X	-2	2.5
Y	1	0

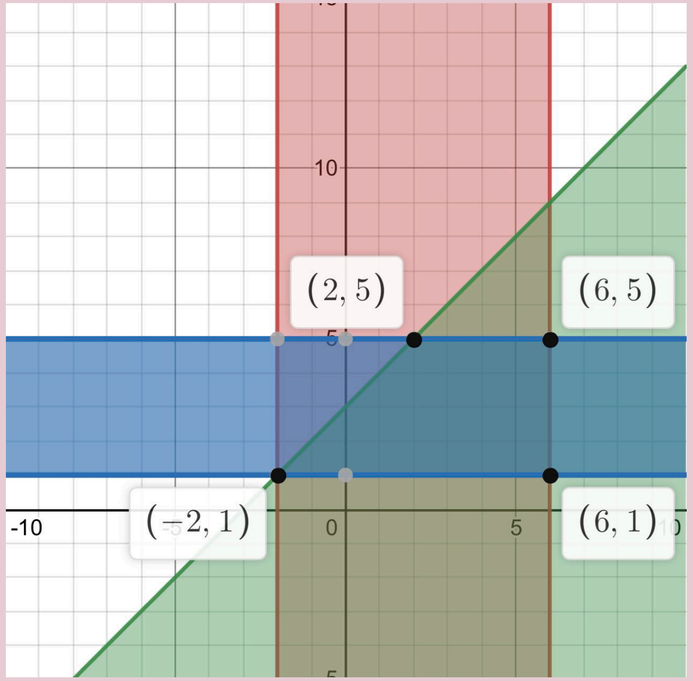
Y= - x + 6		
X	0	6
Y	6	0

5y = 2x +9		
X	0.5	-4.5
Y	2	0

مثل نظام المتباينات الاتي بيانيا ، ثم حدد احداثيات رؤوس منطقة الحل ، واوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة :

$$-2 \le x \le 6$$
$$1 \le y \le 5$$
$$y \le x + 3$$
$$F(x , y) = -5x + 2y$$

1 مثل المتباينات بيانياً ، و حدد إحداثيات الرؤوس



2 جد قيمة الدالة عند كل رأس

القيمة	F(x ,y)	-5x +2y	(x, y)
العظمى	12	-5(-2)+2(1)	(-2 ,1)
	0	-5(2) +2(5)	(2 , 5)
	-20	-5(6) +2(5)	(6 ,5)
الصغرى	-28	-5(6) +2(1)	(6 ,1)

القيمة العظمى للدالة تساوي 12 وتكون عند النقطة $(-2,1)$ ،
والقيمة الصغرى للدالة تساوي 28- وتكون عند النقطة $(6,1)$

مثل نظام المتباينات الاتي بيانيا ، ثم حدد احداثيات رؤوس منطقة الحل ، واوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة :

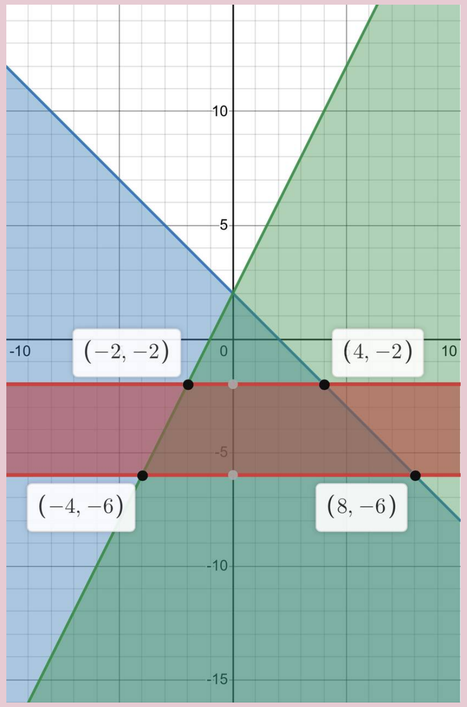
$-6 \leq y \leq -2$

$y \leq -x + 2$

$y \leq 2x + 2$

$F(x , y) = 6x + 4y$

1 مثل المتباينات بيانياً ، و حدد إحداثيات الرؤوس



2 جد قيمة الدالة عند كل رأس

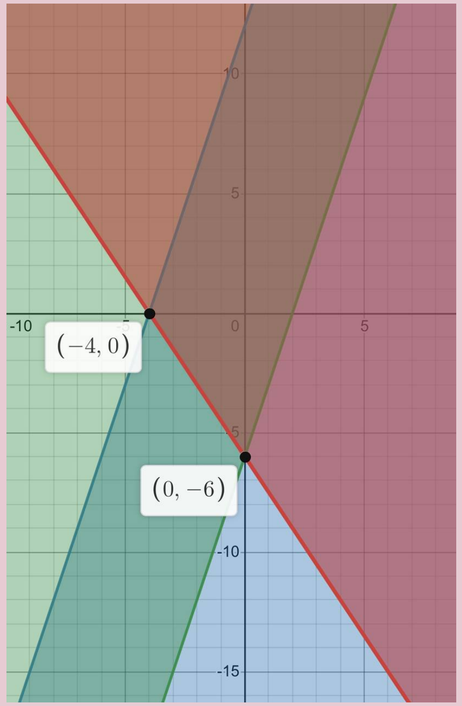
القيمة	F(x ,y)	6x + 4y	(x, y)
الصغرى	-48	6(-4) + 4-6)	(-4 ,-6)
	-20	6(-2) + 4(-2)	(-2 , -2)
	16	6(4) + 4(-2)	(4 ,-2)
العظمى	24	6(8) + 4(-6)	(8 ,-6)

القيمة العظمى للدالة 12تساوي 24 وتكون عند النقطة $(8, -6)$ ،
والقيمة الصغرى للدالة تساوي 48- وتكون عند النقطة $(-4, -6)$

مثل نظام المتباينات الاتي بيانيا ، ثم حدد احداثيات رؤوس منطقة الحل ، واوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة :

$$2y + 3x \geq -12$$
$$y \leq 3x + 12$$
$$Y \geq 3x - 6$$
$$F(x , y) = 9x - 6y$$

1 مثل المتباينات بيانياً ، و حدد إحداثيات الرؤوس



2 جد قيمة الدالة عند كل رأس

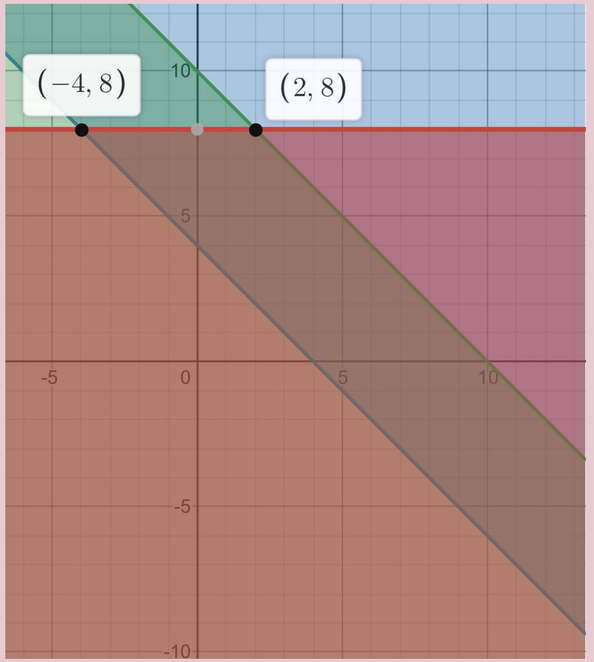
(x , y)	9x - 6y	F(x ,y)
(-4 , 0)	9(-4) – 6(0)	-36
(0 , -6)	9(0) -6(-6)	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة $(0, -6)$ ، ولا توجد قيمة صغرى للدالة ، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي $(0,8)$ وتعطى القيمة 48- للدالة وهي أقل من 36-

مثل نظام المتباينات الاتي بيانيا ، ثم حدد احداثيات رؤوس منطقة الحل ، واوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة :

$$y \leq 8$$
$$y \geq -x + 4$$
$$y \leq -x + 10$$
$$F(x , y) = -6x + 8y$$

1 مثل المتباينات بيانياً ، و حدد إحداثيات الرؤوس



2 جد قيمة الدالة عند كل رأس

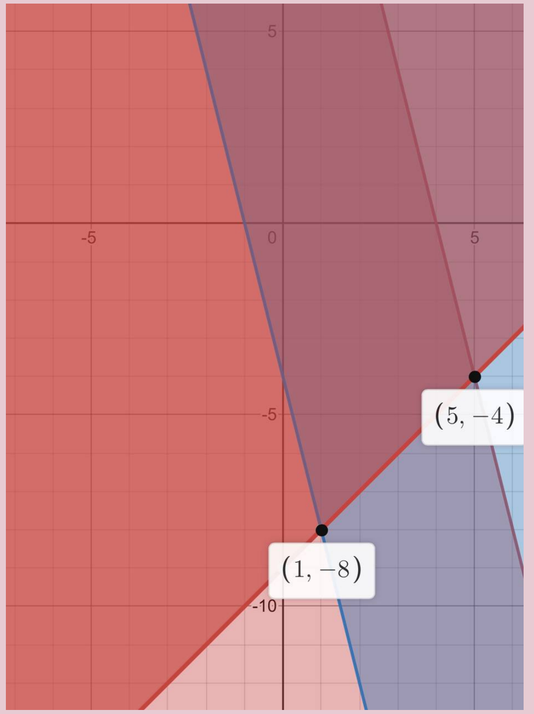
(x , y)	9x - 6y	F(x ,y)
(-4 , 8)	-6(-4) + 8(8)	88
(2 , 8)	-6(2) + 8(8)	52

القيمة العظمى للدالة تساوي 88 وتكون عند النقطة $(-4,8)$ ، ولا توجد قيمة صغرى للدالة ، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل مثل $(4,4)$ وتعطى القيمة 8 للدالة وهي أقل من 52

مثل نظام المتباينات الاتي بيانيا ، ثم حدد احداثيات رؤوس منطقة الحل ، واوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة :

$$y \geq x - 9$$
$$y \leq -4x + 16$$
$$y \geq -4x - 4$$
$$F(x , y) = 10x + 7y$$

1 مثل المتباينات بيانياً ، و حدد إحداثيات الرؤوس



2 جد قيمة الدالة عند كل رأس

(x , y)	9x - 6y	F(x ,y)
(1 , - 8)	10(1) + 7(-8)	-46
(5 , -4)	10 (5) + 7(-4)	22

القيمة العظمى للدالة تساوي 46- وتكون عند النقطة $(1, -8)$ ، ولا توجد قيمة عظمى للدالة ، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي $(2,2)$ وتعطى القيمة 48- للدالة وهي أكبر من 22

مجوهرات : تصوغ أسماء من 10 الى 25 عقدا ، ومن 15 الى 40 سوارا شهريا . فاذا كانت اجرة صياغة العقد 50 ريالا . واجرة صياغة السوار 30 ريالا ، وصاغت في احد الأشهر 30 قطعة من العقود والاساور على الأقل ، فكم قطعة من كلا النوعين عليها صياغتها لتحصل على اكبر اجر ؟

نفرض ان عدد العقود هو x وعدد الاساور هو y

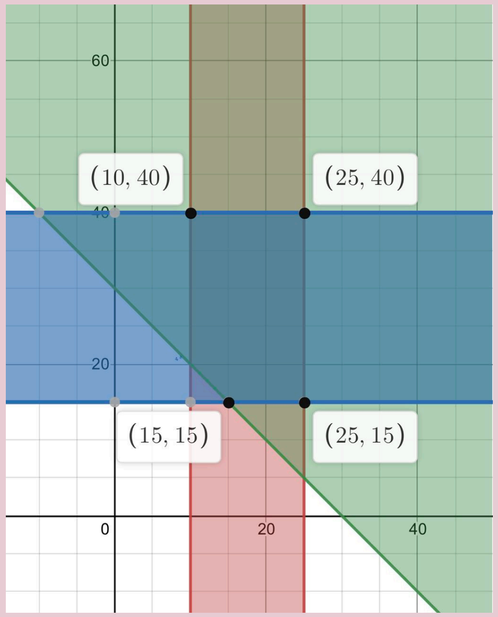
الشروط :

$10 \leq x \leq 25$

$15 \leq y \leq 40$

$x + y \geq 30$

الهدف : الحصول على اكبر اجر .



القيمة	F(x ,y)	50x + 30y	(x ,y)
	1700	(40)30+ (10)50	(10 ,40)
العظمى	2450	(40)30 + (25)50	(25,40)
	1700	(15)30+ (25)50	(25,15)
	1200	(15) 30+(15)50	(15,15)
الصغرى	1100	(20)30+ (10)50	(10 ,20)

يجب على فهد صياغة 25 عقدا ، 40 اسوارا ليحصل على اكبر اجر .

المصفوفات

استعمل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كل مما يأتي :

1A) ما رتبة B ؟

بما ان B فيها 3 صفوف وعمودان فان رتبتها 3×2

1B) ما قيمة b_{32} ؟

بما ان العنصر b_{32} موجود في الصف 3 والعمود 2 ، فان قيمته هي -1 .

2) بيتزا : يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من البيتزا بثلاثة احجام في احد المطاعم .

	كبيرة	وسط	صغيرة
ثمار البحر	35	24	13
الخضار	34	23	12
الدجاج	36	25	14
اللحم	37	27	15

A) نظم هذه البيانات في مصفوفة A

$$A = \begin{matrix} \\ \text{صغيرة} \\ \text{وسط} \\ \text{كبيرة} \end{matrix} \begin{bmatrix} 12 & 23 & 34 \\ 13 & 24 & 35 \\ 14 & 25 & 36 \\ 15 & 27 & 37 \end{bmatrix}$$

B) حدد رتبة المصفوفة .

هناك 4 صفوف و 3 أعمدة ، لذا فان رتبتها من النوع 4×3

C) ما قيمة العنصر a_{21} ؟

قيمة العنصر a_{21} الموجودة في الصف 2 ، والعمود الأول ، وهي 13

محافظات : يبين الجدول المجاور عدد المحافظات من الفئتين أ و ب في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة .

عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق مختلفة في المملكة		
المنطقة	محافظة فئة أ	محافظة فئة ب
الرياض	12	8
مكة المكرمة	9	7
المدينة المنورة	4	4
القصيم	5	7

نظم البيانات في مصفوفة .

$$\begin{matrix} \text{مكة المكرمة} \\ \text{الرياض} \\ \text{المدينة المنورة} \\ \text{القصيم} \end{matrix} \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 9 & 7 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

اجمع عناصر كل عمود وفسر النتائج .

العمود الأول = 20

العمود الثاني = 26

يمثلان عدد المحافظات في كل من الفئتين أ و ب .

هل إيجاد معدل عناصر كل صف او عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معني ؟

معدل عناصر كل صف او كل عمود ليس له معنى .

اجمع عناصر كل صف ، وفسر النتائج .

جمع عناصر الصف الأول والثاني والثالث والرابع = 12 , 8 , 16 , 30

وتمثل عدد المحافظات من الفئتين أ و ب في كل من مكة و الرياض و المدينة و القصيم على الترتيب .

اوجد الناتج في كل مما يأتي اذا كان ذلك ممكنا :

(1A $\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -9 & -5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4 & 12\\ 8 & -7\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -9 & -5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4 & 12\\ 8 & -7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3-(-4) & 4-(12)\\ -9-(8) & -5-(-7)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3+4 & 4-12\\ -9-8 & -5+7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -8\\ -17 & 2\end{bmatrix}$$

(1B $\begin{bmatrix}-9 & 8 & 3\\ -2 & 4 & -7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4 & -3 & 6\\ -9 & -5 & 18\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-9 & 8 & 3\\ -2 & 4 & -7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4 & -3 & 6\\ -9 & -5 & 18\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-13 & 5 & 9\\ -11 & -1 & 11\end{bmatrix}$$

2) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix}8 & 0 & 3 & -2\\ -1 & -4 & -2 & 9\end{bmatrix}$ فأوجد $-4\underline{T}$

$$-4T = -4\begin{bmatrix}8 & 0 & 3 & -2\\ -1 & -4 & -2 & 9\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-32 & 0 & -12 & 8\\ 4 & 16 & 8 & -36\end{bmatrix}$$

3) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix}-5 & 3\\ 6 & -8\\ 2 & 9\end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix}12 & 5\\ 5 & -4\\ 4 & -7\end{bmatrix}$ فأوجد $-6\underline{B}+7\underline{A}$

$$= \begin{bmatrix}-72 & -30\\ -30 & 24\\ -24 & 42\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-35 & 21\\ 42 & -56\\ 14 & 63\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-107 & -9\\ 12 & -32\\ -10 & 105\end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك

هل يمكن إيجاد $\underline{A} \cdot \underline{B}$ في كل مما يأتي ، وان كانت كذلك ، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة .

1A) $\underline{A}_{4\times6} \bullet \underline{B}_{6\times2}$

بما ان عدد اعمدة المصفوفة $\underline{A}$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{B}$ ، فان مصفوفة حاصل الضرب $\underline{A} \bullet \underline{B}$ معرفه ، ورتبتها 4×2 .

1B) $\underline{A}_{3\times2} \bullet \underline{B}_{3\times2}$

بما ان عدد اعمدة المصفوفة $\underline{A}$ لا يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{B}$ ، فان مصفوفة حاصل الضرب $\underline{A} \bullet \underline{B}$ غير معرفه.

2) اذا كانت $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $\underline{u}\ \underline{v}$.

هناك خطوات عدة لإجراء عملية الضرب اولا الرتبة بس بما انها مربعه فانة يمكن اجراء عملية الضرب (هو ضرب صف في عمود)

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & -50 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$$

مبيعات : ارجع الى فقرة « لماذا؟ » بداية الدرس ، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد سعر بيع الأقلام في كل شهر .

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

$$= [353 \quad 527 \quad 422 \quad 589]$$

اذن $AB \neq BA$ ، بصفة عامة .

a) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $AB = BA$ ؟

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 19 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

اذن $AB \neq BA$ ، بصفة عامة .

5) اذا كانت $R = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

، فحدد ما اذا كانت المعادلة $(S + T)R = SR + TR$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا .

$$(S + T)R = \left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -6 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 38 \\ 1 & 45 \end{bmatrix}$$

$$SR + TR = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 1 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 38 \\ 1 & 45 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان $(S + T)R = SR + TR$

اوجد قيمة كل محددة فيما يأتي :

(1A $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$ = (-6)8 - (-7)10

= -48 + 70

= 22

(1B $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$ = (-4)7 - (5)9

= -28 - 45

= -73

اوجد قيمة $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ **باستعمال قاعدة الأقطار .**

الخطوة 1: اعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة .

$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 9 \\ -2 & -1 \\ -4 & 6 \end{matrix}$

الخطوة 2 : جد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها .

$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 9 \\ -2 & -1 \\ -4 & 6 \end{matrix}$

= -4(-1)(4) + 6(5)(-5) + 2(-2)(9)

= -170

$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 9 \\ -2 & -1 \\ -4 & 6 \end{matrix}$

=9(5)(-4) + 4(-2)(6) +(-1)(-5) (2)

=-218

قيمة المحددة = - 218 - (-170) = - 48

اوجد قيمة $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ باستعمال محددة المصفوفة 2×2

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & -8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -8(27) - (-4)(24) + 4(15) = -216 + 96 + 60$$

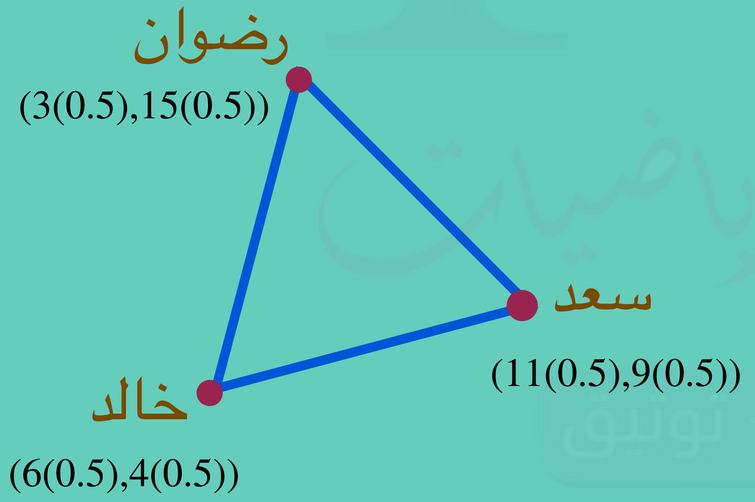
$$= -60$$

خرائط : يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها ، فاذا كانت احداثيات هذه النقاط هي : (9 , 11) , (4 , 6) , (3,15) ، بحيث تمثل كل وحدة على الخريطة 0.5 km . فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها .

يحل باستعمال قاعدة الأقطار :

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5.5 & 4.5 & 1 \\ 1.5 & 7.5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8.75 \ Km^2$$



حل النظام الاتي باستعمال كرامر:

(4A $7x + 3y = 37$
$-5x - 7y = -41$

أولا : محددة المعاملات

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 7(-7) - (-5)$$

$$(3) = -34 \neq 0$$

ثانيا : إيجاد قيمة x , y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{c}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 7 & 37 \\ -5 & -41 \end{vmatrix}}{-34}$$

$$= 3$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{c}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 37 & 3 \\ -41 & -7 \end{vmatrix}}{-34}$$

$$= 4$$

حل النظام هو : $(4,3)$

حل النظام الاتي باستعمال كرامر:

(4B $8x - 5y = 70$
$9x + 7y = 3$

أولا : محددة المعاملات

$$C = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 8(7) - (-5)(9)$$

$$= 101 \neq 0$$

ثانيا : إيجاد قيمة x , y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{c}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 8 & 70 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{101}$$

$$= -6$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{c}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 70 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{101}$$

$$= 5$$

حل النظام هو : (-6 , 5)

حدد ما إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيراً ضربياً للأخرى أم لا فيما يأتي :

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$

$$\underline{XY} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{YX} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نعم ، لكل منهما نظير ضربي للأخرى .

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي ، إن وجد :

(2A $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - 1(7) = -19 \neq 0$

2) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

3) $y^{-1} = \frac{1}{-19} \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{-3}{19} \end{bmatrix}$

(2B $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - (4)(1)) = 10 \neq 0$

2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

3) $y^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود
و
دوالها

تحقق من فهمك

(1A $\sqrt{-18}$

$\sqrt{-18} = \sqrt{-1 \cdot 9 \cdot 2}$

$= \sqrt{-1}\sqrt{9}\sqrt{2}$

$= i3\sqrt{2}$

$= 3i\sqrt{2}$

(1B $\sqrt{-125}$

$\sqrt{-125} = \sqrt{-1 \cdot 5 \cdot 5^2}$

$= i5\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}\, i$

(2A $3i.4i$

$3i \cdot 4i = 12i^2$

$= -12$

(2B $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$

$\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12} = i\sqrt{20} \cdot i\sqrt{12}$

$= i^2\sqrt{240}$

$= -4\sqrt{15}$

(2C i^{31}

$i^{31} = i^{30} \cdot i = (i^2)^{15} \cdot i = (-1)^{15} \cdot i$

$= -i$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

(3A $4x^2 + 100 = 0$

$4x^2 + 100 = 0$

$4x^2 = -100$

$x^2 = -25$

$X = \pm\sqrt{-25}$

$x = \pm 5i$

(3B $x^2 + 4 = 0$

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

$X = \pm\sqrt{-4}$

$X = \pm 2i$

4) اوجد قيمتي x . y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة .

$5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$

الجزان الحقيقيان

$5x + 1 = 2x - 2$

$3x = -3$

$X = -1$

الجزان التخيليان

$3 + 2y = y - 6$

$Y = -9$

(5A $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$

(1 - 7i) + (-2 + 5i)

= -1 - 2i

(5B $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

(-1+ 2i) + (4 + 6i) = (-1 +2i) – (4 + 6i)

= 5 + 4i

6) كهرباء : اوجد فرق الجهد لتيار متناوب شدته 4i – 2 أمبير ، ومعاوقتة 2i - 3 أوم.

شدة التيار × المقاومة = فرق الجهد

= (3 - 2j) • $(2 - 4j)$

$=6 - 12j - 4j + 8j^2$

$=6 - 12j - 4j - 8$

$= -2 - 16j$

فرق الجهد = -2- 16j فولت

(7A $\frac{-2i}{3+5i}$

$$\frac{-2i}{3+5i} = \frac{-2i}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i} = \frac{-6i+10i^2}{9+25}$$

$$= \frac{-6i-10}{34} = \frac{-10}{34} - \frac{6i}{34} = -\frac{5}{17} - \frac{3i}{17}$$

(7B $\frac{2+i}{1-i}$

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+i+i^2}{2} = \frac{2+2i+i-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$$

(1A $x^2 + 6x = 16$

وضع المعادلة على الصورة

$x^2 + 6x - 16 = 0$

a = 1 b = 6 , c = 16

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$x = \frac{-6 + 10}{2}$$

X = 2

$$X = \frac{-6 - 10}{2}$$

= −8

(1B $2x^2 + 25x + 33 = 0$

$2x^2 + 25x + 33 = 0$

a = 2 , b = 25 , c = 33

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4(2)(33)}}{2(2)} =$$

$$\frac{-25 \pm \sqrt{625 - 264}}{4} =$$

$$= \frac{-25 \pm \sqrt{361}}{4}$$

$$= \frac{-25 \pm 19}{4}$$

$$x = \frac{-25 + 19}{4} = -\frac{3}{2}$$ و $$x = \frac{-25 - 19}{4} = -11$$

حل المعادلة التالية باستعمال القانون العام :

(2A $x^2 - 16x + 64 = 0$

a = 1 , b = -16 , c = 64

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(1)(64)}}{2(1)}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{2}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{0}}{2}$$

= 8

(2B $x^2 + 34x + 289 = 0$

a = 1 , b = 34 , c = 289

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-34 \pm \sqrt{(34)^2 - 4(1)(289)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-34 \pm \sqrt{1156 - 1156}}{2}$$

$$= \frac{-34 \pm \sqrt{0}}{2}$$

= -17

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

حل المعادلة التالية باستعمال القانون العام :

(3A $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$3x^2 + 5x + 1 = 0$

a = 3 , b = 5 , c = 1

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$X = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{و} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}$$

(3B $x^2 - 8x + 9 = 0$

$x^2 - 8x + 9 = 0$

a = 1 , b = -8 , c = 9

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{2}$$

$$= 4 + \sqrt{7}$$

$$, x = 4 - \sqrt{7}$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

حل المعادلة التالية باستعمال القانون العام :

(4A $3x^2 + 5x + 4 = 0$

$3x^2 + 5x + 4 = 0$

a = 3 , b = 5 , c = 4

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm i\sqrt{23}}{6}$$

(4B $x^2 - 4x = -13$

$x^2 - 4x + 13 = 0$

a = 1 , b = - 4 , c = 13

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm i6}{2}$$

$$= 2 \pm 3i$$

اوجد قيمة المميز لكل من المعادلتين التربيعيتين الاتيتين ، وحدد عدد جذور كل منهما وانواعها :

(5A) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

$-5x^2 + 8x - 1 = 0$

a = - 5 , b = 8 , c = -1

D = $b^2 - 4\,ac$

= $(-5)^2 - 4\,(-5)(1)$

= 64 - 20 = 44

المميز موجب ، لذا يوجد جذران حقيقيان غير نسبيين .

(5B) $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

$15\,x^2 - 7x - 4 = 0$

a = 15 , b = -7 , c = - 4

D = $b^2 - 4\,ac$

= $(-7)^2 - 4\,(15)(-4)$

= 49 + 240 = 289

المميز موجب ، لذا يوجد جذران حقيقيان نسبيان .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بسط كل عبارة فيما يأتي مفترضا ان أيا من المتغيرات لا يساوي صفرا :

(1A $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

$(-7x^5y^{-6})(2x^{-3}y^3) = (\frac{2y^3}{x^3})(\frac{-7x^5}{y^6})$

$= \frac{-14x^2}{y^3}$

(1B $\frac{15C^5d^3}{-3c^2d^7}$

$\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7} = \frac{5c^3}{-d^4}$

$= -\frac{5c^3}{d^4}$

(1C $(\frac{a}{4})^{-3}$

$(\frac{a}{4})^{-3} = (\frac{4}{a})^{3} = \frac{4^3}{a^3}$

$= \frac{64}{a^3}$

(1D $(-2x^3y^2)^5$

$(-2x^3y^2)^5 = (-2)^5(x^3)^5(y^2)^5 = -32x^{15}y^{10}$

حدد ما اذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود ام لا ، وان كانت كذلك فاذكر درجتها .

(2A $\frac{x}{y} + 3x^2$

ليست كثيرة حدود ، لان $\frac{x}{y}$ ليست وحيدة حد .

(2B $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$

كثيرة حدود ، من الدرجة 7 .

اوجد ناتج كل مما ياتي ، واكتبه في ابسط صورة .

(3A $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$

$(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$

$= (-x^2 - x^2) + (-3x - 2x) + (4 - 5)$

$= -2x^2 - 5x - 1$

(3B $(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

$(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

$= 3x^2 - x + 1 - 6$

$= 3x^2 - x - 5$

اوجد ناتج مايلي ، واكتبه في ابسط صورة .

(4A $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

$\frac{4}{3}x^2\left(6x^2 + 9x - 9\right)$

$= 8x^4 + 12x^3 - 16x^2$

(4B $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

$-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

$= 6a^3 + 22a^2 - 40a$

اوجد ناتج مايلي ، واكتبه في ابسط صورة .

(5A $(x^2 + 4x + 16)$ **(x - 4)**

(x - 4)$(x^2 + 4x + 16)$

= x $(x^2 + 4x + 16) - 4(x^2 + 4x + 16)$

$= x^3 + 4x^2 + 16x - 4x^2 - 16x - 64$

$= x^3 - 64$

(5B $(2x^2 - 4x + 5)$ **(3x - 1)**

(3x - 1)$(2x^2 - 4x + 5)$

=3x ($2x^2\ 4x + 5$**) - 1(** $2x^2 - 4x + 5$**)**

$= 6x^3 - 12x^2 + 15x - 2x^2 + 4x - 5$

$= 6x^3 - 14x^2 + 19x - 5$

بسط العبارة :

(1A $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

$$\frac{20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf}{4cdf} = \frac{20c^4d^2f}{4cdf} - \frac{16cdf^2}{4cdf} + \frac{4cdf}{4cdf}$$

$$= 5\,c^3d - 4f + 1$$

(1B **$(18x^2y + 27\,x^3y^2z)\,(3xy)^{-1}$**

$$\frac{18x^2y + 27x^3y^2z}{3xy} = \frac{18x^2y}{3xy} + \frac{27x^3y^2z}{3xy}$$

$$= 6x + 9yzx^2$$

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج :

(2A **$(x^2 + 7x - 30) \div (X - 3)$**

X + 10

X - 3 | $x^2 + 7x - 30$

(-) $x^2 - 3x$

10 x - 30

(-) 10 x - 30

0

(2B **$(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$**

X - 12

x - 1 | $x^2 - 13x + 12$

(-) $x^2 - x$

-12x + 12

(-) -12x + 12

0

تحقق من فهمك

أي مما يأتي يكافئ العبارة : $(1-r)^{-1}(r^2+5r+7)$ ؟

(A $-r-6+\frac{13}{1-r}$

(B $r+6$

(C $r-6+\frac{13}{1-r}$

(D $r+6-\frac{13}{1-r}$

$$\begin{array}{r|l} & -r-6 \\ \hline -r+1 & r^2+5r+7 \\ & (-)\ r^2-r \\ \hline & (-)\ \begin{array}{l}6r+7\\ 6r-6\end{array} \\ \hline & 13 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $-r-6+\frac{13}{1-r}$

الاجابة A

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج :

(4A $(2x^3+3x^2-4x+15)\div(x+3)$

-3	2	3	-4	15
		6	9	-15
	2	-3	5	0

ناتج القسمة هو $2x^2-3x+15$ والباقي 0 .

(4B $(3x^3-8x^2+11x-14)\div(x-2)$

2	3	-8	11	-14
		6	-4	14
	3	-2	7	0

ناتج القسمة هو $3x^2-2x+7$ والباقي 0 .

(4C $(4a^4+2a^2-4a+12)\div(a+2)$

اذا لم يوجد احد الحدود في كثيرة الحدود للمقسوم نضع بدله صفرا

-2	4	0	2	-2	12
		-8	16	-36	80
	4	-8	18	-40	29

ناتج القسمة هو :

$4a^3-8a^2+18a-40+\frac{92}{a+2}$

(4D $(6b^4-8b^3+12b-14)\div(b-2)$

2	6	-8	0	12	12
		12	8	16	56
	6	4	8	28	42

ناتج القسمة هو :

$6b^3+4b^2+8b+28+\frac{42}{b-2}$

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج :

(5A $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2X + 1)$

$-\frac{1}{2}$ | 4 | 0 | -2 | $\frac{1}{2}$ | 2

	-2	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
4	-2	-1	1	$\frac{3}{2}$

ناتج القسمة هو : $4x^3 - 2x^2 - x + 1 + \frac{3}{2x+1}$

(5B $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

$\frac{1}{4}$ | 2 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | -4 | 0 | 1

	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{4}$
2	0	0	-4	-1	$\frac{3}{4}$

ناتج القسمة هو $2y^2 - 4y - 1 + \frac{3}{4y-1}$

(5C $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$

$\frac{4}{5}$ | 3 | $\frac{8}{5}$ | $-\frac{21}{5}$ | $\frac{6}{5}$

	$\frac{12}{5}$	$\frac{16}{5}$	$-\frac{4}{5}$
3	4	-1	$\frac{2}{5}$

ناتج القسمة هو : $3b^2 + 4b - 1 + \frac{2}{5b-4}$

(5D $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$

$\frac{4}{3}$ | 2 | $\frac{-17}{3}$ | 2 | $\frac{8}{3}$

	$\frac{8}{3}$	-4	$\frac{-8}{3}$
2	-3	-2	0

ناتج القسمة هو : $2c^2 - 3c - 2$

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيا يأتي ، واذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد ، فاذكر السبب :

(1A $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$

ليست كثيرة حدود لان احد الحدود يحتوي متغيرا في المقام .

(1B $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$

الدرجة 6 ، العامل الرئيس 5 .

(1C $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

الدرجة 6 ، العامل الرئيس 1- .

2) تنفس : اوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 4 ثوان .

$$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$$

$$v(4) = -0.037(4)^3 + 0.152(4)^2 + 0.173(4)$$

$$= 0.756L$$

3A) اذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$ ، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$

$$g(5a - 2) = \left[((5a-2)^2 - 5(5a-2)) + 5\right]$$

$$= 25a^2 - 20a + 4 - 25a + 10 + 8$$

$$= 25a^2 - 45a + 22$$

$$3g(2a) = 3\left[(2a)^2 - 5(2a) + 8\right]$$

$$= 3\left[4a^2 - 10a + 8\right]$$

$$= 12a^2 - 30a + 24$$

$$g(5a - 2) + 3g(2a) = 37a^2 - 75a + 46$$

3B) اذا كانت $2x^2 + 5x + 3$, h(x)= فأوجد h(-4d+3) – 0.5h(d)

$$0.5h(d) = 0.5\left[2d^2 + 5d + 3\right]$$

$$= d^2 + 2.5d + 1.5$$

$$h(-4d + 3) = 2(-4d + 3)^2 + 5(-4d + 3) + 3$$

$$= 2(16d^2 - 24d + 9) - 20d + 15 + 3$$

$$= 32d^2 - 68d + 36$$

$$h(-4d + 3) - 0.5h(d)$$

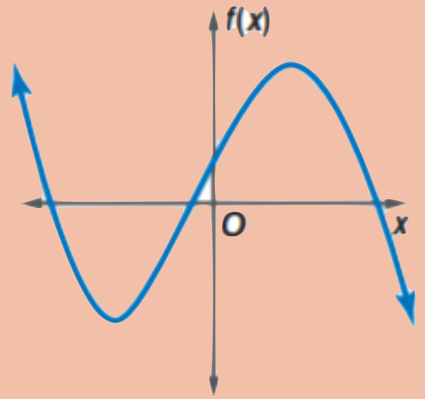
$$= 32d^2 - 68d + 36 - d^2 - 2.5d - 1.5$$

$$= 31d^2 - 70.5d + 34.5$$

اجب عن الأسئلة الاتية لكل من التمثيلين البيانيين ادناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما اذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية .
- اذكر عدد الاصفار الحقيقية للدالة .

(4A



❑ $x \longrightarrow -\infty$ عندما $f(x) \longrightarrow +\infty$

❑ $x \longrightarrow +\infty$ عندما $f(x) \longrightarrow -\infty$

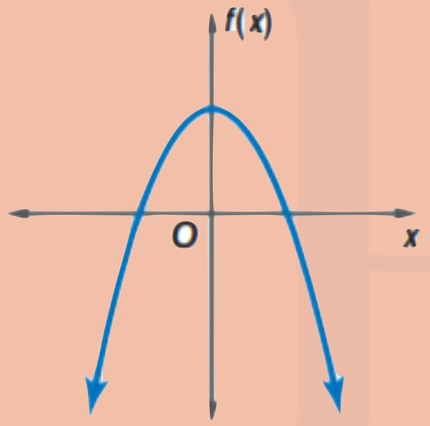
❑ فردية الدرجة ، لان سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاهين مختلفين .

❑ 3 اصفار حقيقية ، لان التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في 3 نقاط .

اجب عن الأسئلة الاتية لكل من التمثيلين البيانيين ادناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما اذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية .
- اذكر عدد الاصفار الحقيقية للدالة .

(4B



❑ $x \longrightarrow -\infty$ عندما $f(x) \longrightarrow -\infty$

❑ $x \longrightarrow \infty$ عندما $f(x) \longrightarrow -\infty$

❑ زوجية الدرجة ، لان سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه .

❑ صفران حقيقيان ، لان التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في نقطتين .

حلل كلا من كثيرتي الحدود الاتيتين تحليلا تاما ، واذا لم يكن ذلك ممكنا ، فاكتب كثيرة حدود أولية .

(1A $5y^4 - 320\,y\,z^3$

$5y^4 - 320yz^3 = 5y\left(y^3 - 64z^3\right)$

$= 5y\,((y)^3 - (4z)^3)$

$= 5y\,(y - 4z)\,(y^2 + 4yz + 16z^2)$

(1B $-54w^4 - 250\,wz^3$

$-54w^4 - 250wz^3 = -2w\left(27w^3 + 125z^3\right)$

$= -2w\,((3w)^3 + (5z)^3)$

$= -2w\,(3w + 5z)\,(9w^2 - 15wz + 25z^2)$

حلل كلا من كثيرتي الحدود الاتيتين تحليلا تاما ، واذا لم يكن ذلك ممكنا ، فاكتب كثيرة حدود أولية .

(2A **30ax - 24bx + 6cx - 5 a** $y^2 + 4b\,y^2 - c\,y^2$

$30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

$= (30\,a\,x - 24bx + 6cx) - (5ay^2 - 4by^2 + cy^2)$

$= 6x\,(5a - 4\,b + c) - y^2(5a - 4\,b + c)$

$= (6x - \mathbf{y^2})\,(\mathbf{5a - 4b + c})$

(2B $13ax + 18bz - 15by - 14az$

كثيرة حدود أولية .

حلل كلا من كثيرتي الحدود الاتيتين تحليلا تاما ، واذا لم يكن ذلك ممكنا ، فاكتب كثيرة حدود أولية .

(3A $a^6 + b^6$

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3$$

$$= (a^2 + b^2)(a^4 - a^4b^2 + b^4)$$

(3B $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

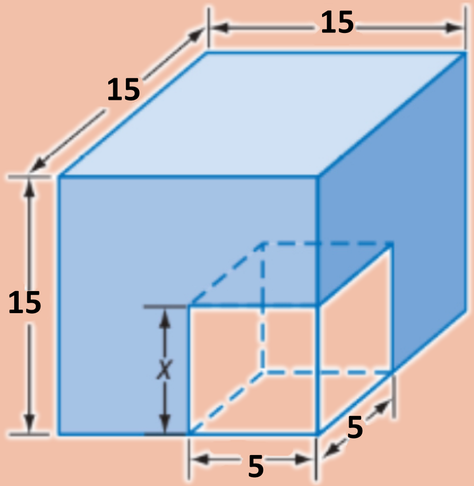
$$x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$$

$$= x^3(x^2 + 4x + 4) + y^3(x^2 + 4x + 4)$$

$$= (x^3 + y^3)(x^2 + 4x + 4)$$

$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x + 2)^2$$

4) هندسة : اذا كان طول حرف المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير ، وحجم الجزء المتبقي $3250cm^3$ ، فأوجد بعدي المكعبين .



$$(3x)^3 - x^3 = 3250$$

$$27x^3 - x^3 = 3250$$

$$26x^3 = 3250$$

$$x^3 = 125$$

$$x = 5$$

اكتب كلا من العبارتين الاتيتين في الصورة التربيعية ان امكن ذلك :

(5A $x^4 + 5x + 6$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية .

(5B $8x^4 + 12x^2 + 18$

$8x^4 + 12x^2 + 18 = 2(2x^2)^2 + 6(2x^2) + 18$

$= 2\,u^2 + 6u + 18$

حل المعادلة التالية :

$4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$ (6A

$(2x^2)^2 - 4(2x^2) + 3 = 0$

$u^2 - 4u + 3 = 0$

$(u - 1)(u - 3) = 0$

$u - 1 = 0$, $u - 3 = 0$

$u = 1$, $u = 3$

$2x^2 = 1$ و $2x^2 = 3$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

حلول المعادلة هي :

$\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

حل المعادلة التالية :

(4B $8x^4 + 10\,x^2 - 12 = 0$

$2(2x^2)^2 + 5(2x^2) - 12 = 0$

$2u^2 + 5u - 12 = 0$

$(2u - 3)(u + 4) = 0$

$2u - 3 = 0$, $u + 4 = 0$

$u = \frac{3}{2}$, $u = -4$

$2x^2 = \frac{3}{2}$, $2x^2 = -4$

$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm i\sqrt{2}$

حلول المعادلة هي :

$\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1A) اذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$ ، فأوجد F(3) .

$$F(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$$

$$F(3) = 3(3)^3 - 6(3)^2 + 3 - 11$$

$$= 81 - 54 + 3 - 11$$

$$= 19$$

1B) $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$ ، فأوجد g(-1) .

$$g(x) = 4(x)^5 + 2(x)^3 + x^2 - 1$$

$$g(-1) = 4(-1)^5 + 2(-1)^3 + (-1)^2 - 1$$

$$= -4 - 2 + 1 - 1$$

$$= -6$$

مدارس : يمكن استعمال الدالة $c(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في احدى المناطق منذ عام 1427 هـ ، حيث تمثل x عدد السنوات ، C (x) عدد الطلاب بالعشرات ، قدر عدد طلاب المنطقة عام 1442 هـ .

15	2.4	-22.3	53.8	548.2
		36	205.5	3889.5
	2.4	13.7	259.3	4437.7

عدد الطلاب المتوقع في عام 1442 هـ هو 44377 تقريبا .

3) حدد ما اذا كان x -2 عاملا من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ ام لا ، ثم اوجد عواملها الأخرى .

P(2) = $(2)^3 - 7(2)^2 + 4(2) + 12$

= 8 - 28 + 8 + 12

= 28 - 28 = 0

بما ان باقي القسمة يساوي صفرا ، اذن x – 2 عامل لكثيرة الحدود .

2	1	-7	4	12
		2	-10	-12
	1	-5	-6	0

$$x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - 5x - 6)$$

$$= (x - 2)(x - 6)(x + 1)$$

حل كل معادلة مما يأتي ن واذكر عدد جذورها ، ونوعها :

(1A $x^3 + 2x = 0$

$x^3 + 2x = 0$

$x(x^2 + 2) = 0$

$x = 0$, $x^2 + 2 = 0$

$x = \pm \sqrt{2}\, i$

للمعادلة جذر حقيقي واحد هو 0 ، وجذران تخيليان هما

$\sqrt{2}\, i$, $-\sqrt{2}\, i$

(1B $x^4 - 16 = 0$

$x^4 - 16 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$

$(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) = 0$

$x = \pm 2i$, $x = \pm 2$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان .

(1C $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

$(9x - 3)(3x^3 - x^2) = 0$

$x^2(3x - 1) + 3(3x - 1) = 0$

$(3x - 1)(x^2 + 3) = 0$

$x = \frac{1}{3}$ و $x = \pm i\sqrt{3}$

للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان .

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة ، والحقيقية السالبة ، والتخيلية للدالة .

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

عدد الاصفار الحقيقية الموجبة هي : 0 او 2

عدد الاصفار الحقيقية السالبة هي : 3 او 1

عدد الاصفار الحقيقية والتخيلية الممكنة :

عدد الاصفار الحقيقية الموجبة	عدد الاصفار الحقيقية السالبة	عدد الاصفار التخيلية	مجموع عدد الاصفار
2	3	0	5
2	1	2	
0	3	2	
0	1	4	

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ، ومعاملات حدودها اعداد صحيحه ، اذا كان العددان 2i + 1 , 1- من اصفارها .

بما ان 2i + 1 صفر للدالة ، فان 2i - 1 أيضا صفر للدالة بحسب نظرية الاصفار المركبة المترافقة .

لذا فان (x - (1 - 2i) , (x – (1 + 2i , (x + 1)

$$F(x) = (x+1)\left[x - (1 + 2i)\right]\left[x - (1 - 2i)\right]$$

$$= (x + 1)\left[(x - 1) - 2i\right]\left[(x - 1) + 2i\right]$$

$$= (x + 1)\left[(x - 1)^2 - (2i)^2\right]$$

$$= (x + 1)\left[x^2 - 2x + 1 + 4\right]$$

$$= (x + 1)\left[x^2 - 2x + 5\right]$$

$$= x^3 - 2x^2 + 5x + x^2 - 2x + 5$$

$$= x^3 - x^2 + 3x + 5$$

تطوير - إنتاج - توثيق

المراجع

ماجروهيل رياضيات ثاني ثانوي (رياضيات 3) الفصل الدراسي الأول ، وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار .

استخدام برنامج desmos .

الخاتمة

نسأل الله قبول هذا العمل ، و أن يكون هذا الإنجاز قد نال شيئًا من إعجابكم .

تم بحمد الله وتوفيقه