مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

سلسلة عروض رفعة الرياضيات

رياضيات ١-٢

أ/عبدالعزيز الشريف

أ/عبدالعزيز الشريف

سلسلة عروض رفعة الرياضيات (رياضيات ١-٢)

رقم الإيداع ١٠٠١٣/١٤٤٣

تاريخ ١٤٤٣/١٠/١٤

رقم الردمك ٩٧٨-٦٠٣-٠٤-١٤٥٨-١

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله و الصلاة والسلام على نبينا محمد و على آله وصحبه أجمعين.

أما بعد:

مجموعة رفعة هي مجموعة تدار من قبل معلمي و معلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة، وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين و المعلمات، و ابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام، و الإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام. وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات، تقدم مجموعة رفعة بين أيديكم هذا العمل ضمن "سلسلة عروض رفعة" رياضيات١-٢ هو عبارة عن عروض جذابة وشاملة لجميع دروس منهج رياضيات١-٢ للصف الأول الثانوي.

والله ولي التوفيق

حسابات مجموعة رفعة

حسابات المعد

الفهرس

رياضيات ١-٢

الفصل الثالث

المثلثات المتطابقة

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

الفصل الثالث

المثلثات المتطابقة

التهيئة للفصل الثالث

لماذا؟

المثلثات المتطابقة

لياقة: تستعمل المثلثات لتقوية إنشاءات ومعدات كثيرة، من بينها أجهزة اللياقة البدنية مثل هياكل الدراجات.

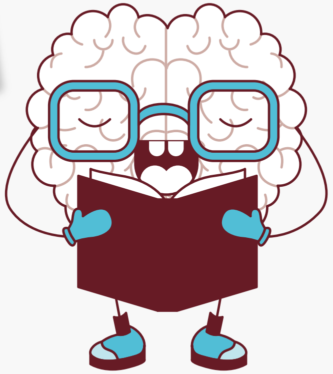
المثلثات المتطابقة

فيما سبق

درست القطع المستقيمة والزوايا والعلاقات بين قياساتها.

و الآن

- أطبق العلاقات الخاصة بالزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمثلثات.
- أحدد العناصر المتناظرة في مثلثات متطابقة، وأبرهن على تطابق المثلثات.
- أتعرف خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

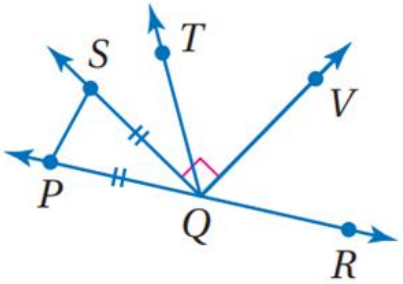


تشخيص الاستعداد

التهيئة

اختبار سريع

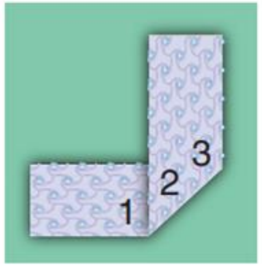
صنّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنِّف $\triangle SQP$ بحسب أضلاعه.



1) $\angle VQS$ 2) $\angle TQV$

3) $\angle PQV$

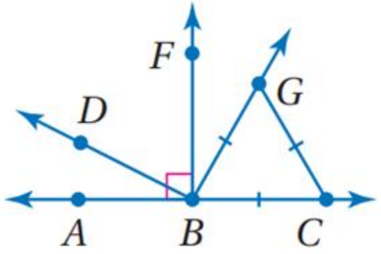
4) **تصاميم ورقية :** اطْو قطعة مستطيلة من الورق كما في الشكل المجاور، بحيث تتشكل زاوية قائمة من جهة الطي، ثم صنِّف كلًّا من الزوايا المرقمة إلى قائمة أو منفرجة أو حادّة.



مراجعة سريعة

مثال 1

صنِّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنِّف $\triangle GBC$ بحسب أضلاعه.

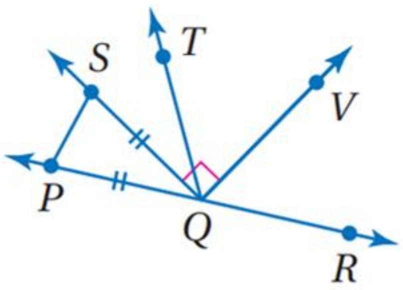


a) $\angle ABG$ تقع النقطة G خارج الزاوية القائمة $\angle ABF$؛ لذا تكون $\angle ABG$ زاوية منفرجة.

b) $\angle DBA$ تقع النقطة D داخل الزاوية القائمة $\angle FBA$؛ لذا تكون $\angle DBA$ زاوية حادة.

بما أن أطوال أضلاع المثلث جميعها متطابقة إذن هو متطابق الأضلاع.

الحل

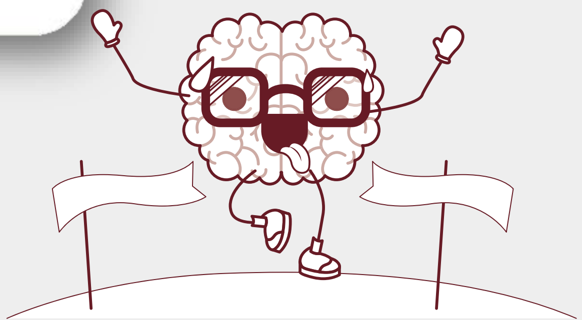


صنّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنِّف ΔSQP بحسب أضلاعه.

1) $\angle VQS$　　2) $\angle TQV$

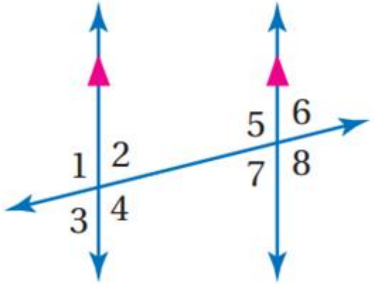
3) $\angle PQV$

4) **تصاميم ورقية:** اطْوِ قطعة مستطيلة من الورق كما في الشكل المجاور، بحيث تتشكل زاوية قائمة من جهة الطي، ثم صنِّف كلًّا من الزوايا المرقمة إلى قائمة أو منفرجة أو حادّة.



اختبار سريع

جبْر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغيِّر المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين. ووضِّح إجابتك:



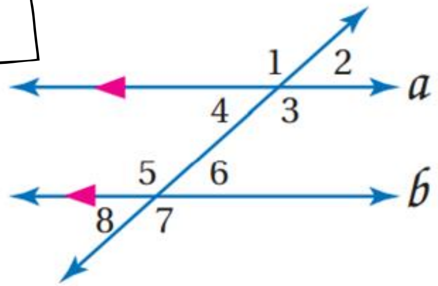
5) أوجد قيمة x إذا علمت أنّ: $m\angle 3 = (x - 12)°$، وأنّ $m\angle 6 = 72°$

6) أوجد قيمة y . إذا علمت أنّ $m\angle 4 = (2y + 32)°$، وأنّ $m\angle 5 = (3y - 3)°$.

مراجعة سريعة

مثال 2

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 4 = 42°$، فأوجد $m\angle 7$.

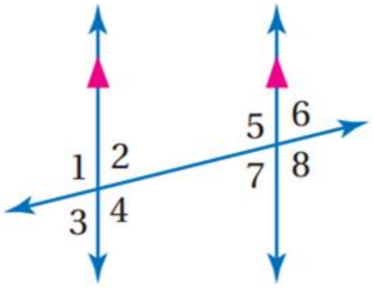


$\angle 7$ و $\angle 1$ زاويتان متبادلتان خارجيًّا؛ لذا فهما زاويتان متطابقتان. $\angle 1$ و $\angle 4$ تشكِّلان زاوية مستقيمة؛ لذا فهما زاويتان متكاملتان. ينتج مما سبق أن $\angle 7$ و $\angle 4$ متكاملتان؛

إذن: $m\angle 7 = 180° - 42°$، أي $138°$

الحل

جبْر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغيِّر المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين. ووضِّح إجابتك:



5) أوجد قيمة x إذا علمت أنّ: $m\angle 3=(x-12)^\circ$، وأنّ $m\angle 6=72^\circ$

6) أوجد قيمة y . إذا علمت أنّ $m\angle 4=(2y+32)^\circ$،
وأنّ $m\angle 5=(3y-3)^\circ$.

مراجعة سريعة

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(5, 2), K(11, -7)$.

صيغة المسافة بين نقطتين $JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

عوّض $= \sqrt{(11 - 5)^2 + [(-7) - 2]^2}$

اطرح $= \sqrt{6^2 + (-9)^2}$

بسّط $= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$

اختبار سريع

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

7) $X(-2, 5), Y(1, 11)$

8) $R(8, 0), S(-9, 6)$

9) **خرائط:** قسّمت منى خريطة المملكة برسم خطوط رأسية وأفقية، بحيث تمثل الوحدة عليها 35 كيلومترًا. إذا كان موقع المدينة التي تسكنها منى على الخريطة عند النقطة $(0, 0)$، وكانت مدينة نجران تقريبًا عند النقطة $(5, 2.2)$، فاحسب المسافة بين المدينتين إلى أقرب كيلومتر تقريبًا.

الحل

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

7) $X(-2, 5), Y(1, 11)$

8) $R(8, 0), S(-9, 6)$

9) **خرائط:** قسَّمت منى خريطة المملكة برسم خطوط رأسية وأفقية، بحيث تمثل الوحدة عليها 35 كيلومترًا. إذا كان موقع المدينة التي تسكنها منى على الخريطة عند النقطة $(0, 0)$، وكانت مدينة نجران تقريبًا عند النقطة $(5, 2.2)$، فاحسب المسافة بين المدينتين إلى أقرب كيلومتر تقريبًا.

3-1

تصنيف المثلثات

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

تصنيف المثلثات

رابط الدرس الرقمي

المفردات

المثلث الحاد الزوايا
acute triangle

المثلث المنفرج الزاوية
obtuse triangle

المثلث القائم الزاوية
right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع
equilateral triangle

المثلث المتطابق الضلعين
isosceles triangle

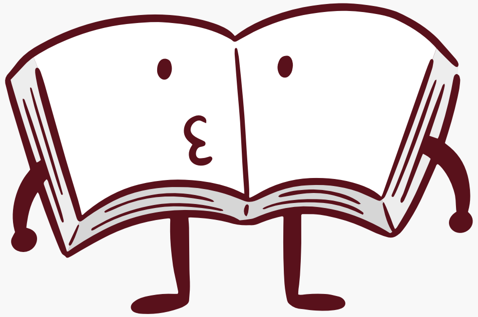
المثلث المختلف الأضلاع
scalene triangle

فيما سبق

درست قياس الزوايا وتصنيفها.

و الآن

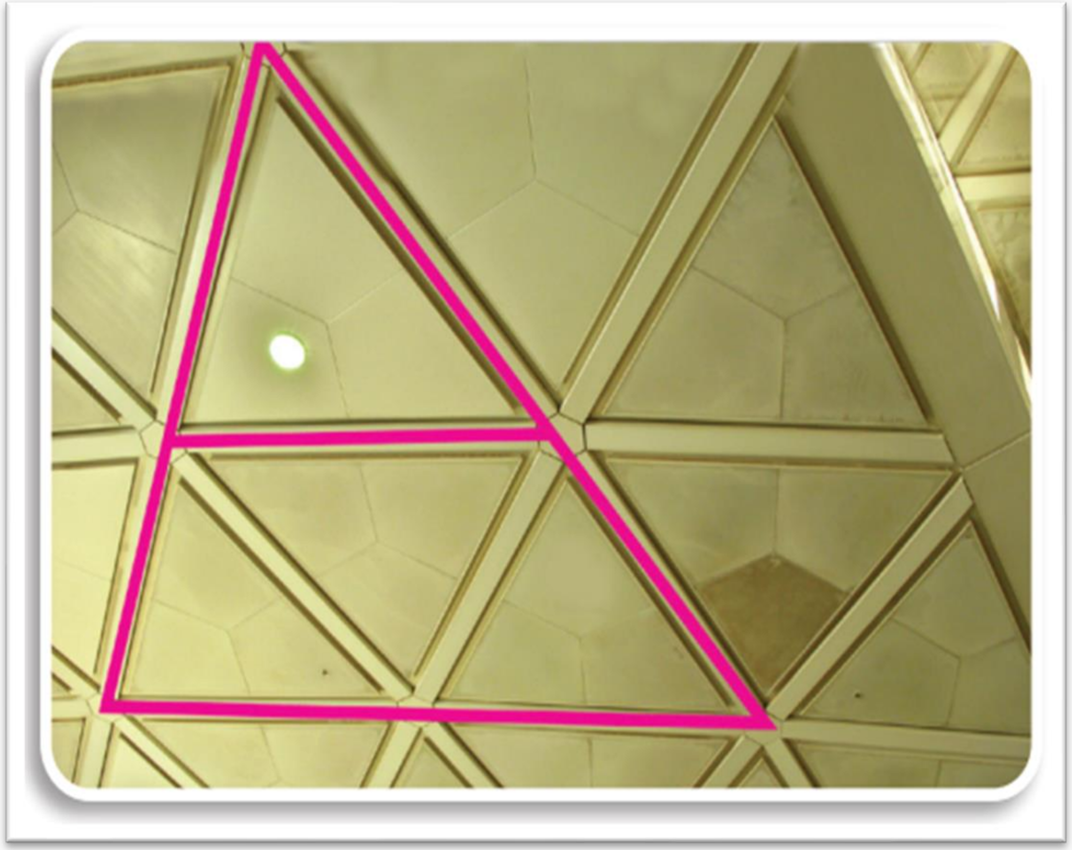
- أستعمل تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها أو زواياها في إيجاد قيم مجهولة.



تصنيف المثلثات

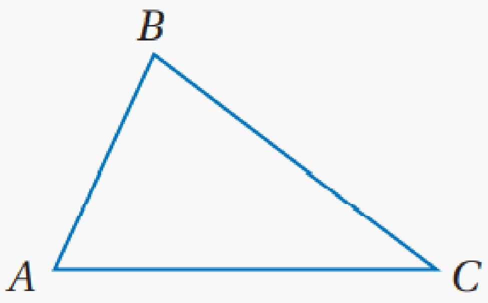
يعدُّ المثلث عنصرًا زخرفيًّا مميزًا في العمارة التقليدية في المملكة العربية السعودية، كما يلاحظ ذلك في صالات المسافرين بمطار الملك خالد الدولي بمدينة الرياض.

لماذا؟



تصنيف المثلثات

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها : يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$ ، وتُسمى عناصره باستعمال الأحرف C , B , A كما يلي:



- أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{CA}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$
- الرؤوس هي: C , B , A
- الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$, $\angle C$ أو $\angle BCA$, $\angle B$ أو $\angle ABC$

وتُصنّف المثلثات بطريقتين: وفقًا لزواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وتُستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.

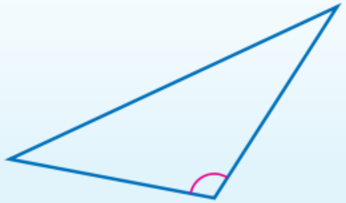
تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

مفهوم أساسي

مثلث حاد الزوايا

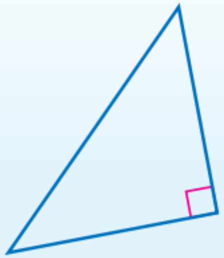
3 زوايا حادة

مثلث منفرج الزاوية



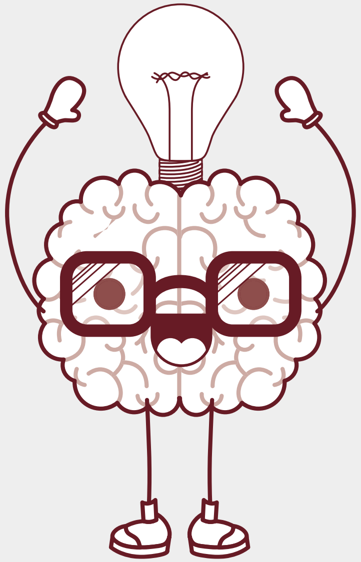
إحدى الزوايا منفرجة

مثلث قائم الزاوية



إحدى الزوايا قائمة

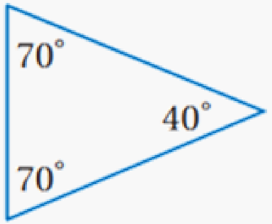
يمكن تصنيف أي مثلث وفقًا لزواياه إلى أحد التصنيفات السابقة، بمعرفة قياسات زواياه.



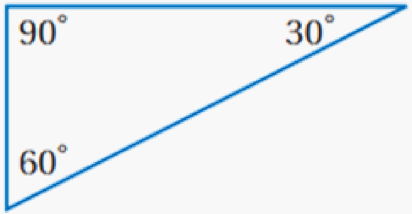
تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

مثال ١

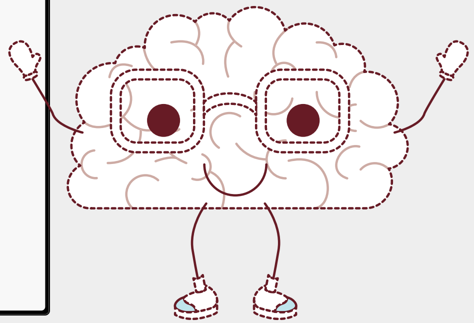
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه:

a) 

زوايا المثلث الثلاث حادّة؛ لذا فالمثلث حادُّ الزوايا.

b) 

قياس إحدى زوايا هذا المثلث 90°، وبما أن إحدى زواياه قائمة، فإنه مثلث قائم الزاوية.

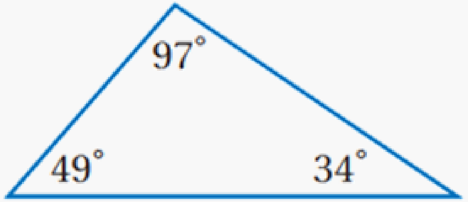


تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

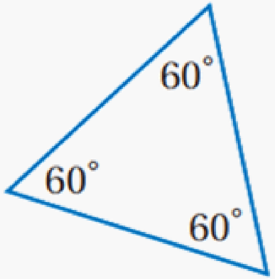
تحقق من فهمك

صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه:

(1A



(1B



مراجعة المفردات

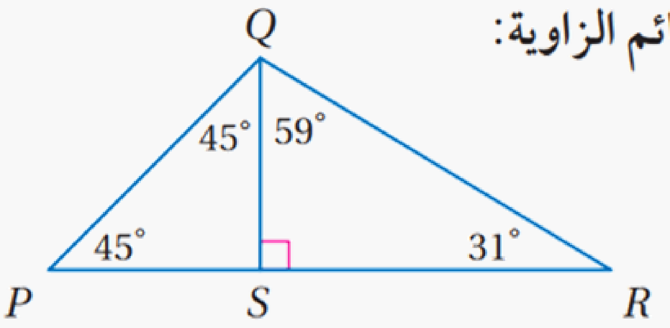
الزاوية الحادة:
زاوية يقل قياسها عن °90

الزاوية القائمة:
زاوية قياسها °90

الزاوية المنفرجة:
زاوية قياسها أكبر من °90

تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لزواياها

مثال ٢



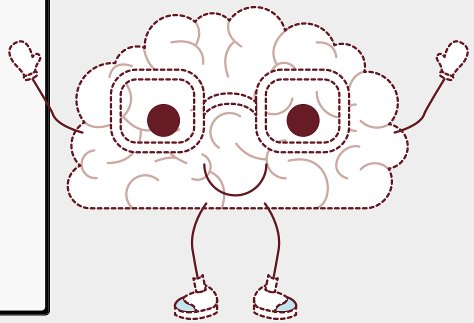
صنِّف $\triangle PQR$ إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

تقع النقطة S داخل $\angle PQR$ ، وحسب مسلّمة جمع قياسات الزوايا

يكون: $m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$

بالتعويض: $m\angle PQR = 45° + 59° = 104°$

وبما أن إحدى زوايا $\triangle PQR$ منفرجة، فإنه منفرج الزاوية.



تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لزواياها

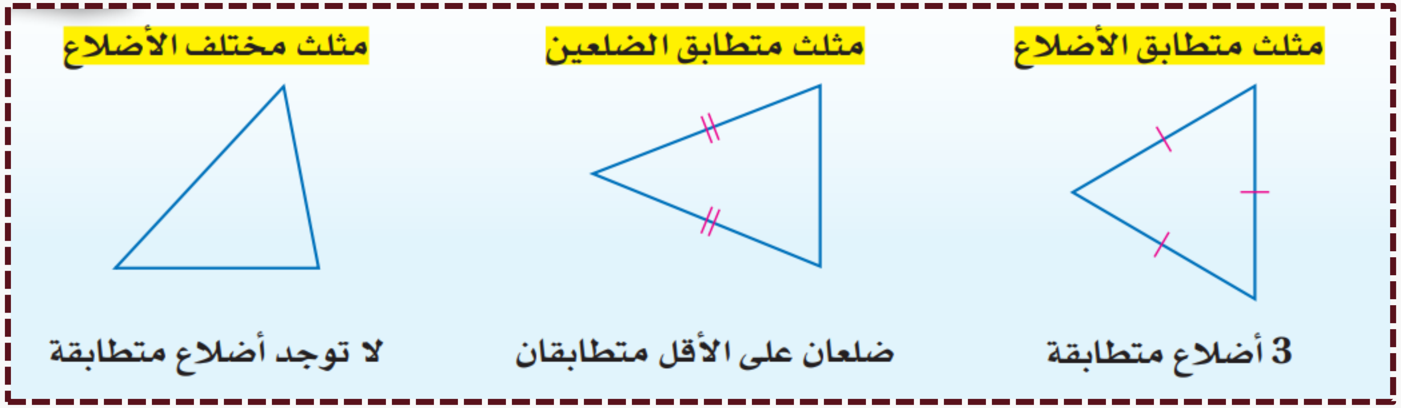
تحقق من فهمك

2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف $\triangle PQS$ إلى: حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

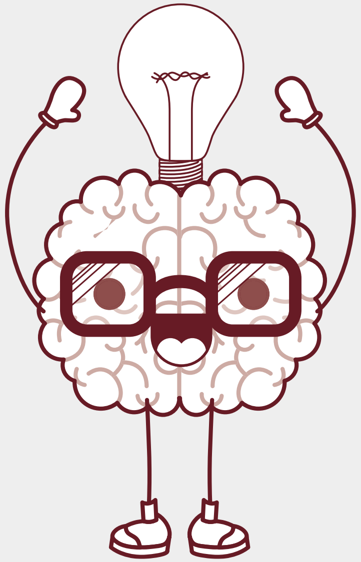
تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

مفهوم أساسي

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها: يمكن كذلك تصنيف المثلثات بحسب عدد الأضلاع المتطابقة فيها. وللدلالة على تطابق ضلعين في مثلث، يوضع عدد متساوٍ من الشرطات الصغيرة على الضلعين المتطابقين.



إن المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.



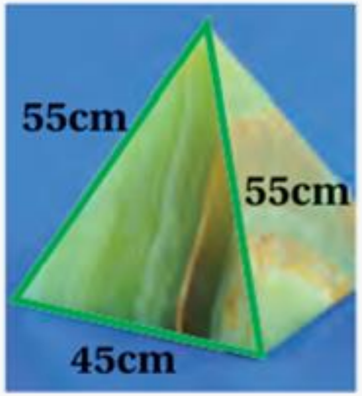
تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

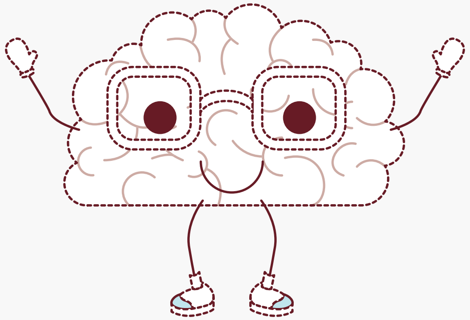
مثال ٣

فن العمارة: صنِّف المثلث في الشكل المجاور وفقًا لأضلاعه.

في المثلث ضلعان قياس كلٍّ منهما 55 cm؛ أيْ أنّه في المثلث ضلعين متطابقين.

فيكون المثلث متطابق الضلعين.





الربط مع الحياة

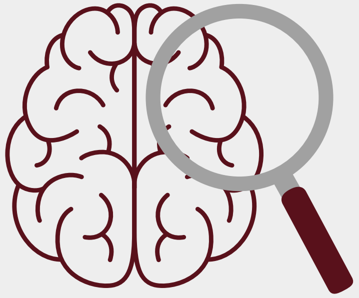
في العديد من السيارات، تُشغَّل أضواء الخطر بالضغط على زرّ صغير قرب المقوَد. يكون شكل هذا الزر عادة مثلثًا أحمر أو برتقاليًا صغيرًا كما في الشكل أعلاه.

عندما يشغَّل هذا الزر تضيء أضواء إشارات الانعطاف بطريقة تحذيرية، وبنمط خاص يسهِّل رؤية السيارة من قبل السائقين الآخرين.

تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لزواياها

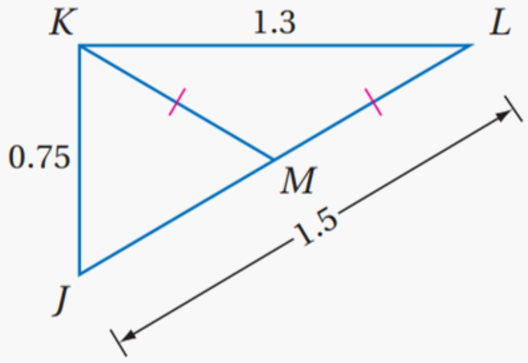
تحقق من فهمك

3) **قيادة السيارة والسلامة:** صنِّف شكل زرِّ ضوءِ الخطر في الهامش يمين الصفحة وفقًا لأضلاعه.



تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لأضلاعها

مثال ٤



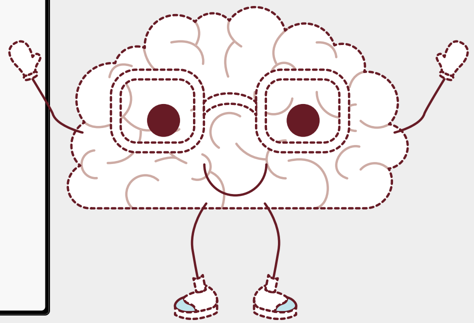
إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{JL}$، فصنِّف $\triangle JKM$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

من تعريف نقطة المنتصف $JM = ML$.

$JM + ML = JL$	مسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة
$ML + ML = 1.5$	عوّض
$2ML = 1.5$	بسّط
$ML = 0.75$	اقسم الطرفين على 2
$JM = ML = 0.75$	

وبما أن $\overline{KM} \cong \overline{ML}$، فإنّ $KM = ML = 0.75$

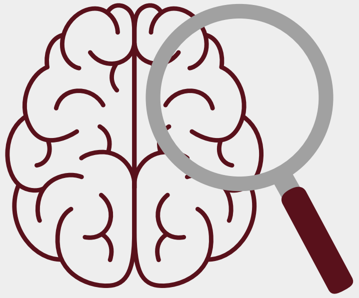
وهكذا تكون قياسات أضلاع المثلث الثلاثة متساوية، أي أن الأضلاع الثلاثة متطابقة؛ لذا فإن المثلث متطابق الأضلاع.



تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لأضلاعها

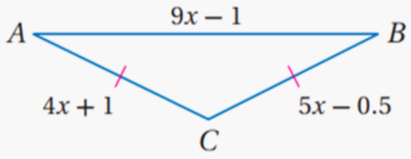
تحقق من فهمك

4) صنِّف $\triangle KML$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.



إيجاد قيم مجهولة

مثال ٥



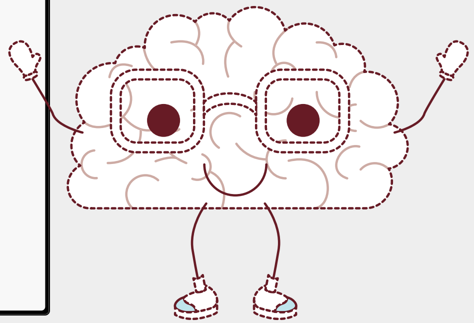
جبر: أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين ABC في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أوجد قيمة x.

$AC = CB$	مُعطى
$4x + 1 = 5x - 0.5$	عوِّض
$1 = x - 0.5$	اطرح $4x$ من الطرفين
$1.5 = x$	اجمع 0.5 إلى الطرفين

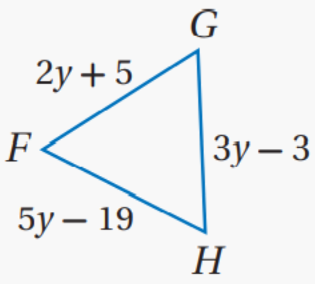
الخطوة 2: عوّض لإيجاد طول كل ضلع من أضلاع المثلث:

$AC = 4x + 1$	مُعطى
$= 4(1.5) + 1 = 7$	$x = 1.5$
$CB = AC$	مُعطى
$= 7$	$AC = 7$
$AB = 9x - 1$	مُعطى
$= 9(1.5) - 1$	$x = 1.5$
$= 12.5$	بسِّط



إيجاد قيم مجهولة

5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع FGH.



تحقق من فهمك

إرشادات للدراسة

تحقّق

للتحقق من الإجابة في المثال 5، اختبر ما إذا كانت $CB = AC$ عندما نعوّض بـ 1.5 مكان x في العبارة $5x - 0.5$ التي تمثل CB.

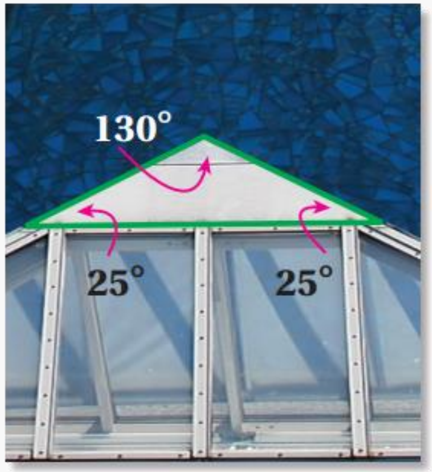
$$CB = 5x - 0.5$$
$$= 5(1.5) - 0.5$$
$$= 7 \checkmark$$

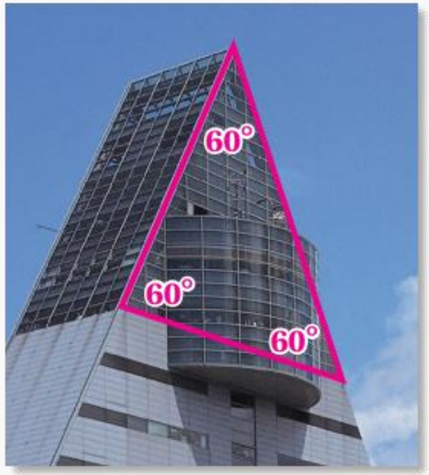
تصنيف المثلثات

تأكد

فنّ العمارة: صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

1) 

2) 

3) 

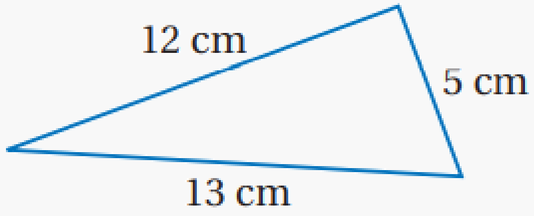
تصنيف المثلثات

تأكد

صنِّف كلّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه.

7)

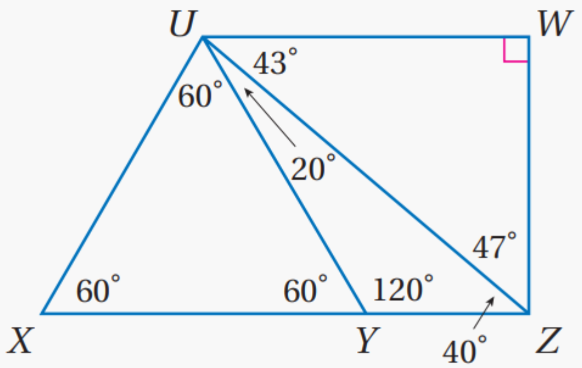
8)



تصنيف المثلثات

تدرب وحل

صنِّف كلّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

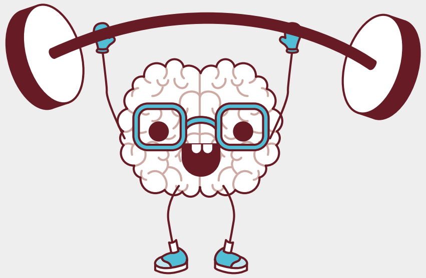


21) $\triangle UYZ$

تصنيف المثلثات

مهارات التفكير العليا

47) **تحدٍّ:** إذا كان طولا ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع $5x + 5$ وحدات ، $7x - 5$ وحدات، فما محيطه؟ فسِّر إجابتك.



3-2

زوايا المثلثات

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

رابط الدرس الرقمي

زوايا المثلثات

فيما سبق

درست تصنيف المثلثات وفقًا لقياسات أضلاعها وزواياها.

والآن

- أطبق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

المفردات

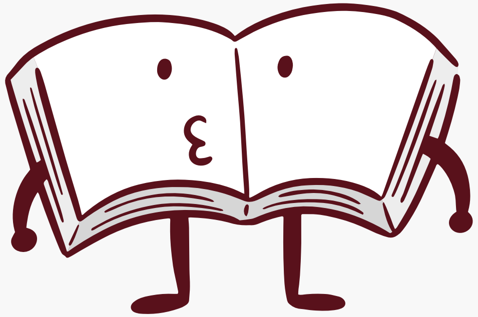
المستقيم المساعد
auxiliary line

الزاوية الخارجية
exterior angle

الزاويتان الداخليتان البعيدتان
remote interior angles

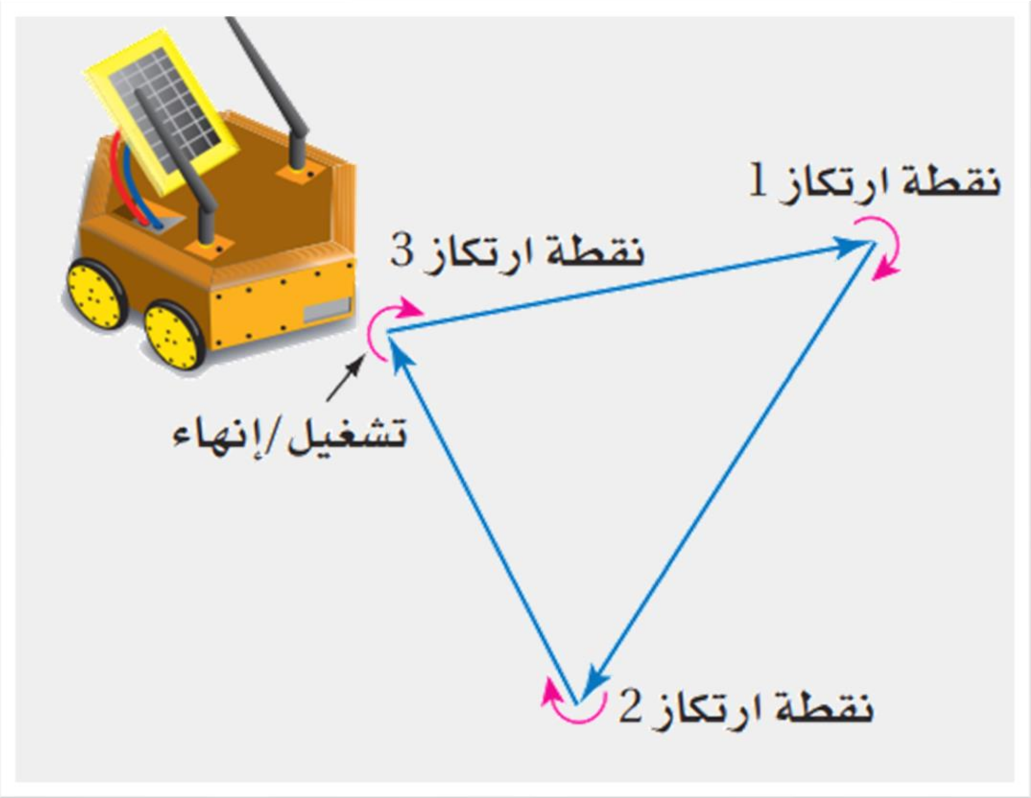
البرهان التسلسليّ
flow proof

النتيجة
corollary



زوايا المثلثات

لماذا؟



يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمِّم الطلاب روبوتًا آليًّا يؤدّي مهامّ مختلفة. وقد تمَّت برمجة هذا الروبوت الآلي في أحد الاختبارات ليتحرك في مسار على شكل مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي ينعطف فيها الروبوت الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتًا دائمًا.

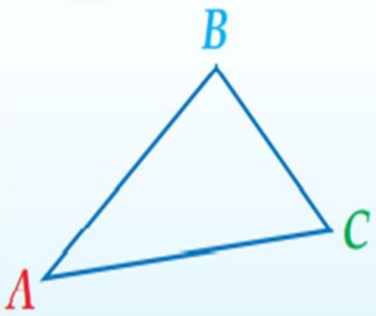
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

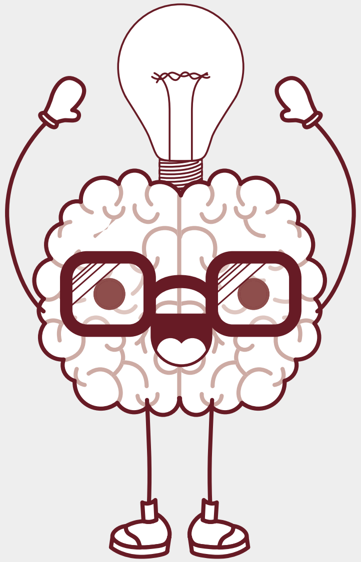
نظرية
3.1

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: تُعبِّر نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأيّ مثلث.

التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°

مثال: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

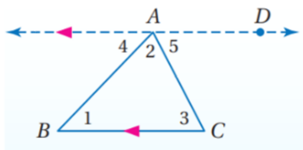




نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

برهان

يتطلب برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث استعمال مستقيم مساعِد، و**المستقيم المساعد** هو مستقيم إضافي (أو قطعة مستقيمة إضافية) يتم رسمه للمساعدة على تحليل العلاقات الهندسية، وكما تُبرر العبارات والاستنتاجات المُستعملة في البرهان، فإن خصائص المستقيم المساعِد يجب تبريرها.

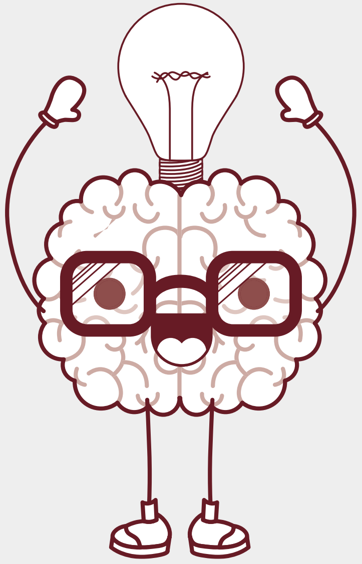


المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

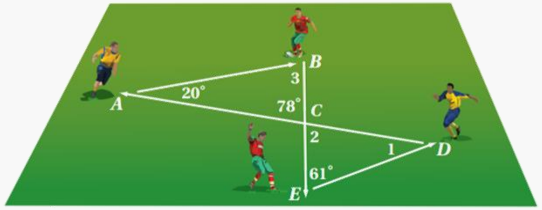
البرهان: من النقطة A ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ موازيًا لـ $\overline{BC}$.

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$	1) مُعطى
2) $\angle BAD$, $\angle 4$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle BAD$, $\angle 4$ متكاملتان.	3) الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180°$	4) تعريف الزاويتين المتكاملتين
5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	5) مسلّمة جمع قياسات الزوايا
6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180°$	6) بالتعويض
7) $\angle 4 \cong \angle 1$, $\angle 5 \cong \angle 3$	7) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
8) $m\angle 4 = m\angle 1$, $m\angle 5 = m\angle 3$	8) تعريف تطابُق الزوايا
9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	9) بالتعويض



استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث

مثال ١



كرة قدم: يبيِّن الشكل مسار الكرة في تدريب على تمريراتٍ نفَّذها أربعة لاعبين. أوجد قياسات الزوايا المرقمة.

افهم: **المعطيات:** في الشكل أعلاه، قياس الزاويتين A, C في المثلث ABC $20°, 78°$، قياس الزاوية E في المثلث CED يساوي $61°$

المطلوب: إيجاد قياسات الزوايا المرقمة.

خطط: أوجد $m\angle 3$ باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملًا قياسَيْ الزاويتين الأُخريين في $\triangle ABC$. ثم استعمل نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس لإيجاد $m\angle 2$، وعندها يمكنك إيجاد $m\angle 1$ في $\triangle CDE$

حُلّ:

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle 3 + 20° + 78° = 180°$	عوِّض
$m\angle 3 + 98° = 180°$	بسِّط
$m\angle 3 = 82°$	اطرح 98 من الطرفين

$\angle 2, \angle ACB$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن $m\angle 2 = 78°$.

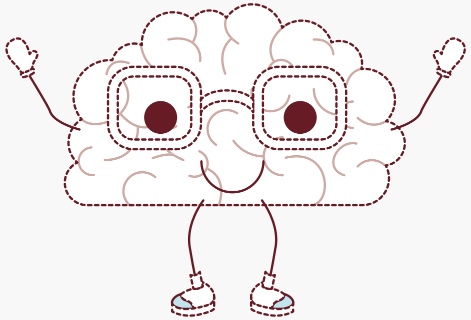
استعمل $m\angle 2$ و $m\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle 1 + 78° + 61° = 180°$	عوِّض
$m\angle 1 + 139° = 180°$	بسِّط
$m\angle 1 = 41°$	اطرح 139 من الطرفين

تحقَّق: يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٍّ من $\triangle ABC, \triangle CDE$ مساويًا لِـ $180°$

✓ $\triangle ABC: \; m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82° + 20° + 78° = 180°$

✓ $\triangle CDE: \; m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41° + 78° + 61° = 180°$



الربط مع الحياة

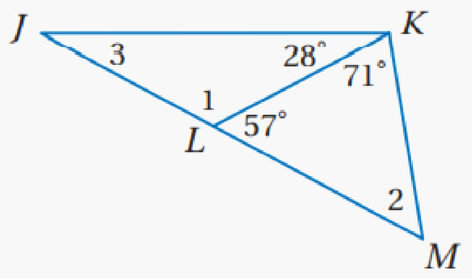
يدمج تمرين "مرِّر وتحرَّك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير، حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على شكل مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك، على اللاعب أن يتحرك فورًا بعد تمريره الكرة.

استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث

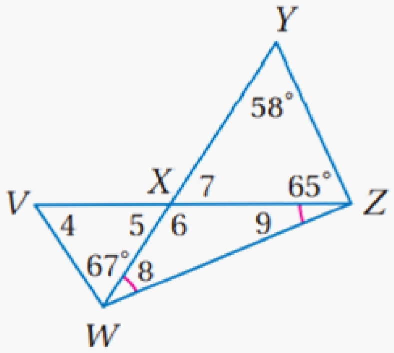
تحقق من فهمك

أوجد قياسات الزوايا المرقَّمة فيما يأتي:

(1A



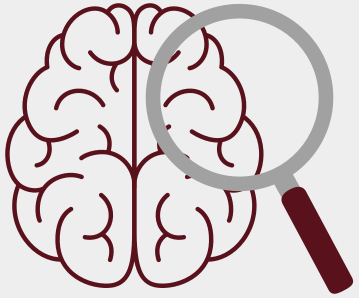
(1B



إرشادات للدراسة

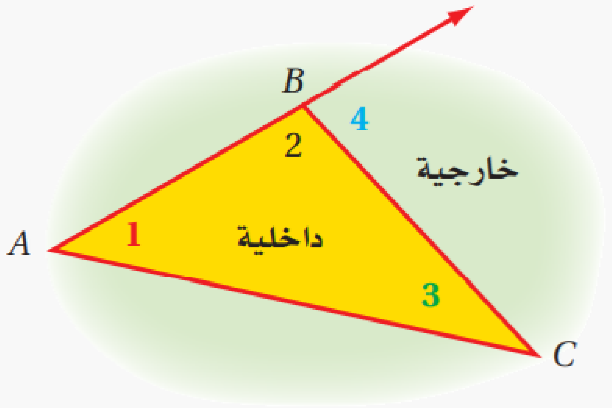
تجزئة المسألة

تُجزأ المسائل المركبة إلى مسائل يمكن التعامل مع كلٍّ منها بسهولة؛ مما يساعد على حلّها. فمثلًا في المثال 1: عليك أن تجد $m\angle 2$ أولًا قبل أن تحاول إيجاد $m\angle 1$



زوايا المثلثات

نظرية الزاوية الخارجية للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث، يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** كلٌّ منها تتشكل من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان بعيدتان** غير مجاورتين لها.



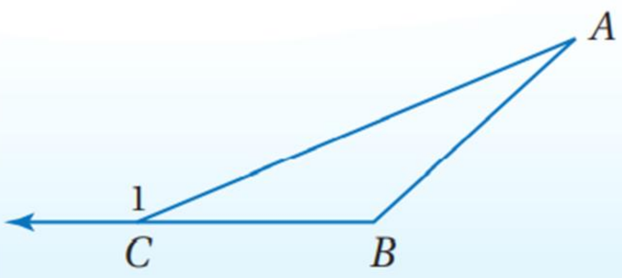
$\angle 4$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$،
وزاويتاها الداخليتان البعيدتان
هما $\angle 3$, $\angle 1$.

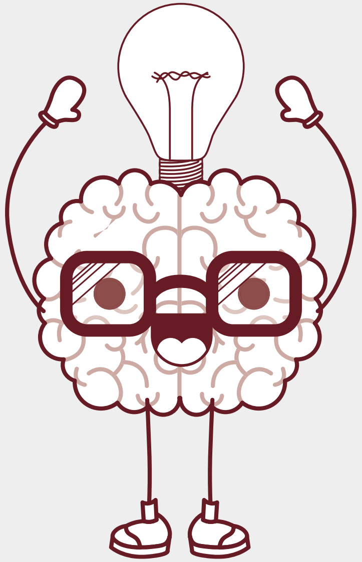
نظرية الزاوية الخارجية

نظرية
3.2

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسَيْ الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$





DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

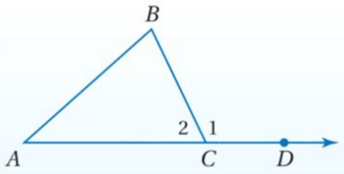
نظرية الزاوية الخارجية

برهان

في **البرهان التسلسلي** تُستعمل عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيِّن التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويُكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرِّر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسليِّ كما يأتي.

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



برهان تسلسلي:

$\boxed{\triangle ABC}$
معطى

$\downarrow$

$\boxed{m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180}$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$\boxed{\angle 1, \angle 2 \text{ زاويتان متجاورتان على مستقيم}}$
تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم

$\downarrow$

$\boxed{\angle 1, \angle 2 \text{ متكاملتان}}$
الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان

$\downarrow$

$\boxed{m\angle 1 + m\angle 2 = 180}$
تعريف الزاويتين المتكاملتين

$\downarrow$

$\boxed{m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2}$
بالتعويض

$\downarrow$

$\boxed{m\angle A + m\angle B = m\angle 1}$
بالطرح

قراءة الرياضيات

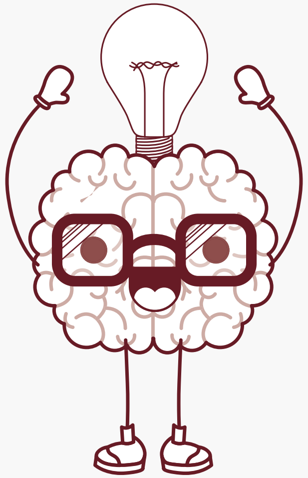
البرهان بالمخطط التسلسلي

يُسمَّى البرهان التسلسلي أحيانًا البرهان بالمخطط التسلسلي.

إرشادات للدراسة

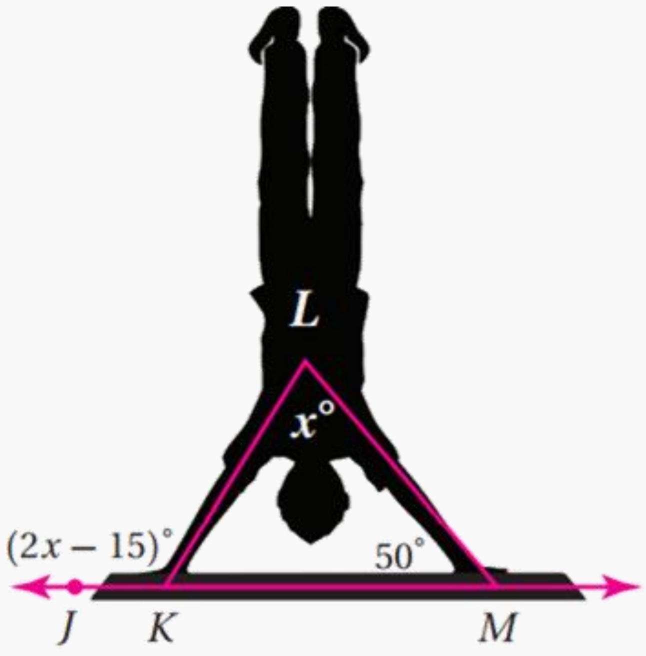
البرهان التسلسلي

يمكن أن يكتب البرهان التسلسليَ بصورة رأسيّة أو أفقيّة.



استعمل نظرية الزاوية الخارجية

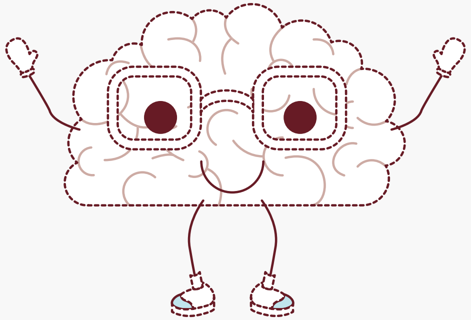
مثال ٢



اللياقة البدنية: أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة.

$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$	نظرية الزاوية الخارجية
$x + 50 = 2x - 15$	عوّض
$50 = x - 15$	اطرح x من الطرفين
$65 = x$	اجمع 15 إلى الطرفين

لذا فإن $m\angle JKL = (2(65) - 15)° = 115°$.



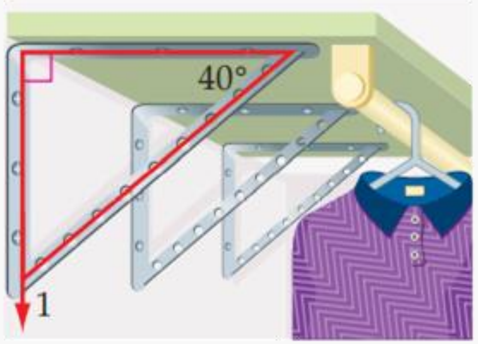
الربط مع الحياة

المدرب المتخصص

يعلّم مدرِّبو اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها، ومن المهم أن يحمل هؤلاء المدربون شهادات تخصص في مجال عملهم.

استعمل نظرية الزاوية الخارجية

تحقق من فهمك



2) **تنظيم خزانة الملابس:** تثبِّت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟

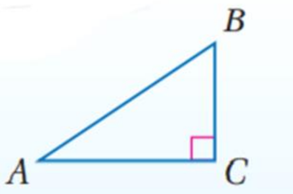
مجموع زوايا المثلث

نظرية

النتيجة هي نظرية يكون برهانها مبنيًّا على نظريةٍ أخرى، ويمكن استعمال النتيجة كأي نظرية أخرى لتبرير خطوات برهانٍ آخر، أو حلّ أسئلة ذات علاقة، وفيما يلي نتائج مباشرة لنظرية مجموع زوايا المثلث:

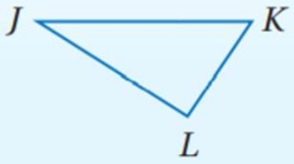
3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.

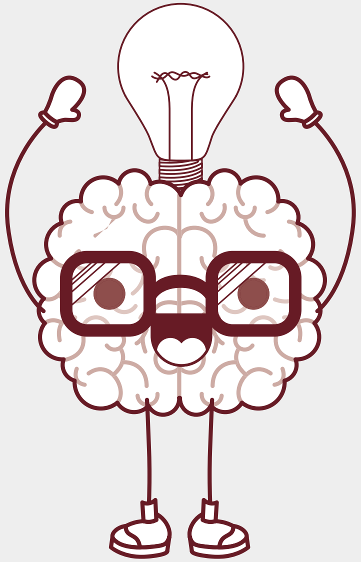
مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle A, \angle B$ زاويتان متتامتان.



3.2 توجد زاوية قائمة واحدة، أو زاوية منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة، فإن $\angle J, \angle K$ زاويتان حادتان.

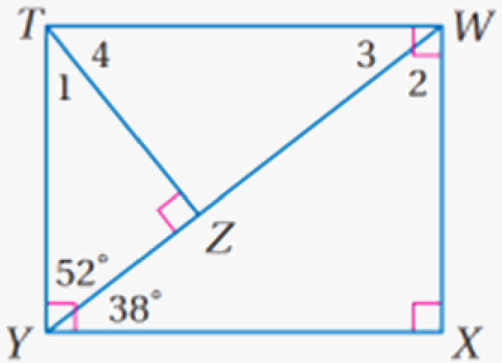




إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

مثال ٣

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور.



$$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90^\circ$$ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

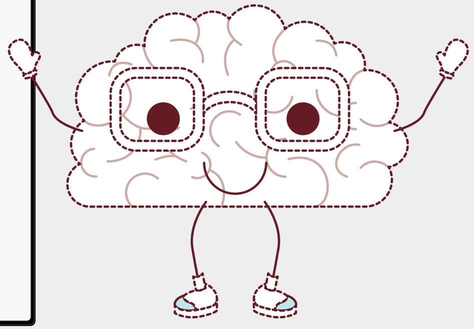
$$m\angle 1 + 52^\circ = 90^\circ$$ عوّض

$$m\angle 1 = 38^\circ$$ اطرح 52 من الطرفين

إرشادات للدراسة

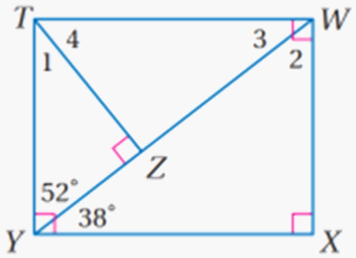
التحقق من المعقولية

عندما تجد قياسات زوايا مثلث، تأكد دائمًا أن مجموع هذه القياسات يساوي 180°.



إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

تحقق من فهمك



3A) $\angle 2$

3B) $\angle 3$

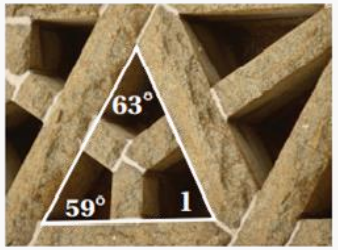
3C) $\angle 4$

زوايا المثلثات

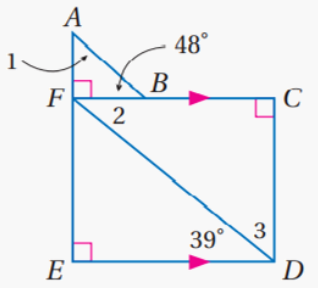
تأكد

أوجد قياس كلٍ من الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(1



(2



زوايا المثلثات

تأكد

كراسي الشاطئ: تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

3) $m\angle 2$

4) $m\angle 4$

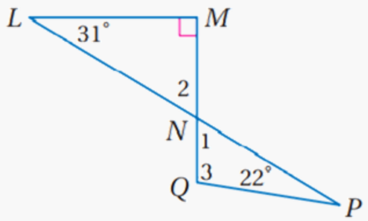
زوايا المثلثات

تدرب وحل

أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(10

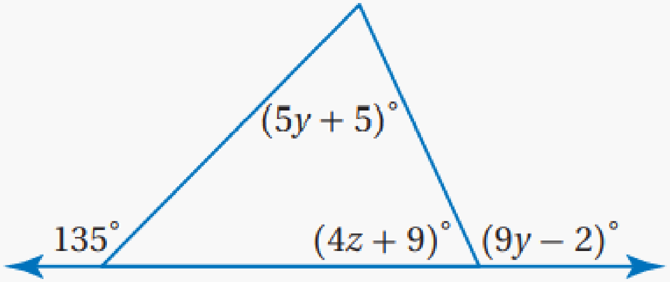
(11

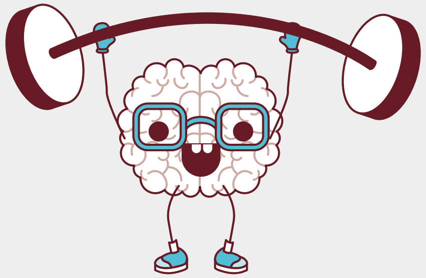


زوايا المثلثات

مهارات التفكير العليا

35) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من y, z في الشكل المجاور.





3-3

المثلثات المتطابقة

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

رابط الدرس الرقمي

المثلثات المتطابقة

فيما سبق

درست الزوايا المتطابقة واستعمالاتها.

والآن

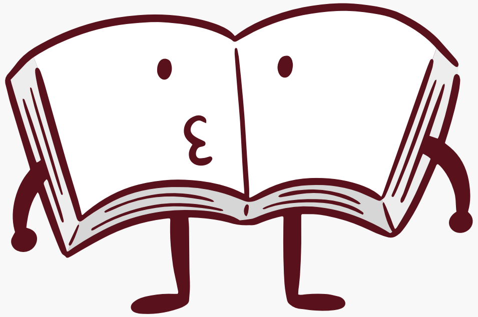
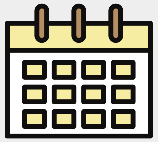
- أسمّي العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أُثبت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

المفردات

التطابق Congruent

المضلعات المتطابقة Congruent Polygons

العناصر المتناظرة Corresponding Parts

المثلثات المتطابقة

لماذا؟

تقوم عدّة مصانع بصنع مسجّلات سيارات بواجهات متحركة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علمًا بأن شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق شكل المكان الذي تثبت فيه وأبعاده تمامًا؛ وذلك لتثبيتها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.

المثلثات المتطابقة

التطابق والعناصر المتناظرة: إذا كان لشكلين هندسيين الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنّهما **متطابقان**.

متطابقة	غير متطابقة
	
الأشكال 1, 2, 3 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها، على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.	الشكلان 4, 5 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.

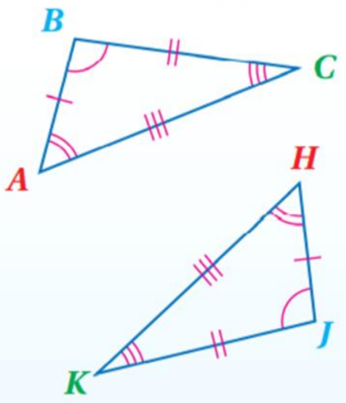
في أيٍّ **مضلعين متطابقين** تتطابق **العناصر المتناظرة**، والعناصر المتناظرة تتضمن الزوايا والأضلاع.

مفهوم أساسي

تعريف المضلعات المتناظرة

التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

نموذج:



مثال:

الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle H$ $\quad$ $\angle B \cong \angle J$ $\quad$ $\angle C \cong \angle K$

الأضلاع المتناظرة

$\overline{AB} \cong \overline{HJ}$ $\quad$ $\overline{BC} \cong \overline{JK}$ $\quad$ $\overline{CA} \cong \overline{KH}$

عبارة التطابق

$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

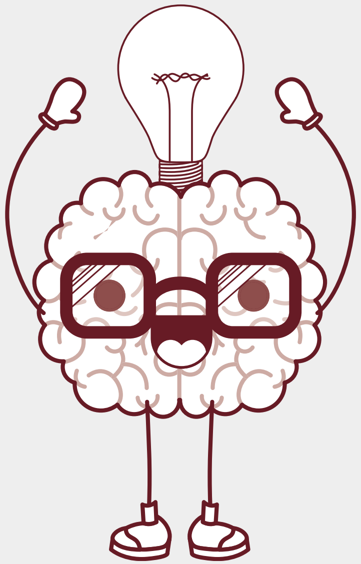
هناك عباراتُ تطابقٍ أخرى للمثلثين أعلاه، وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.

عبارة صحيحة

$\triangle BCA \cong \triangle JKH$

عبارة غير صحيحة

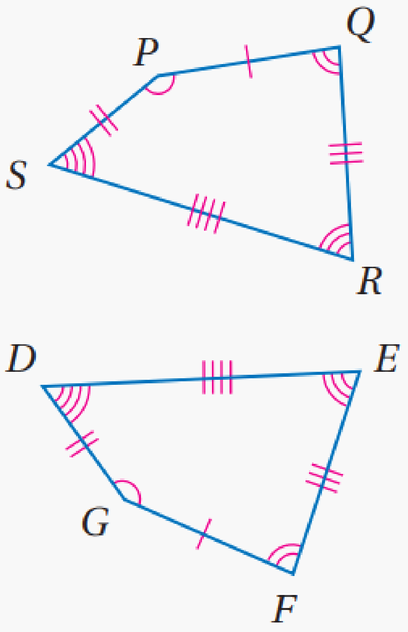
$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$



تعريف العناصر المتناظرة المتطابقة

مثال ١

بيّن أنّ المضلَّعين المجاورين متطابقان، بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.



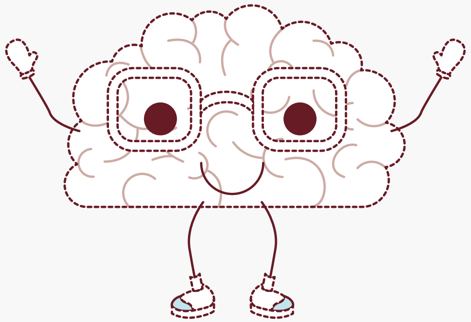
الزوايا: $\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F,$

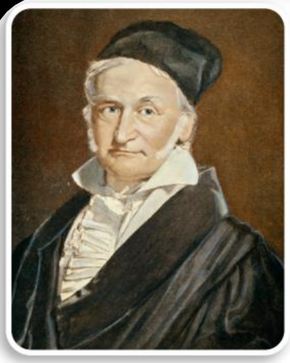
$\angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$

الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE},$

$\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$

وبما أنّ جميع العناصر المتناظرة للمضلعين متطابقة، فإنّ المضلع $PQRS \cong$ المضلع $GFED$.





تاريخ الرياضيات

جوهان كارل فردريك جاوس (1777م – 1855م)

قدّم جاوس رمز التطابق ليبيّن أن طرفي المعادلة متساويان حتّى ولو كانا مختلفين شكلًا. وقد حقق إنجازات عديدة في الرياضيات والفيزياء تتضمن برهانًا للنظرية الأساسية في الجبر.

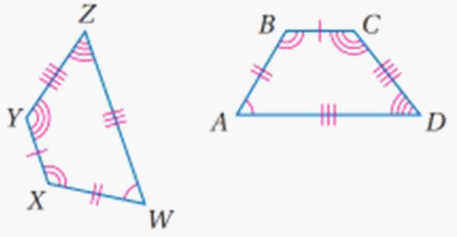
DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

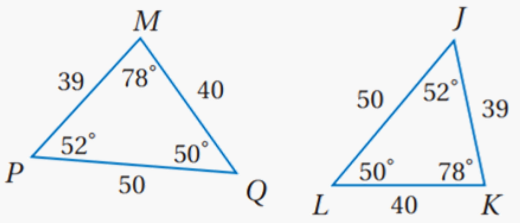
تعريف العناصر المتناظرة المتطابقة

تحقق من فهمك

(1A



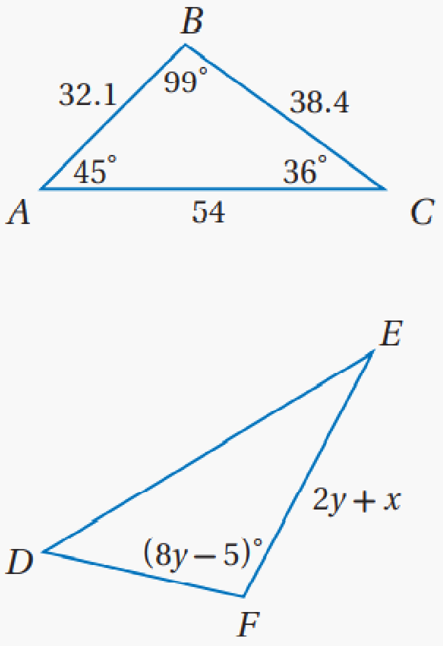
(1B



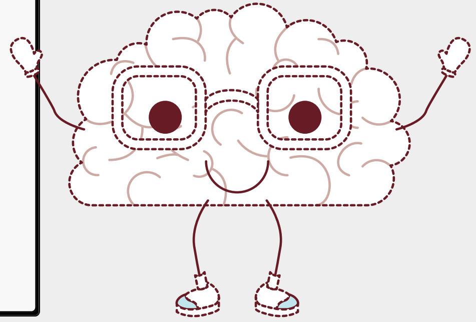
تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

مثال ٢

في الشكل المجاور إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y



$\angle F \cong \angle B$	العناصر المتناظرة متطابقة
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	عوّض
$8y = 104$	اجمع 5 إلى الطرفين
$y = 13$	اقسم الطرفين على 8
$\overline{FE} \cong \overline{BC}$	العناصر المتناظرة متطابقة
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	عوّض
$2(13) + x = 38.4$	عوّض
$26 + x = 38.4$	بسّط
$x = 12.4$	اطرح 26 من الطرفين

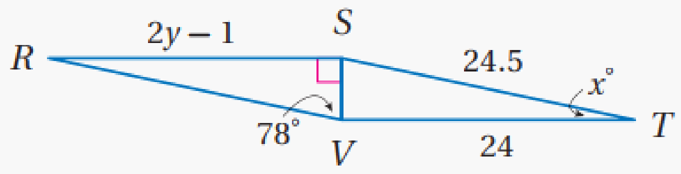


DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

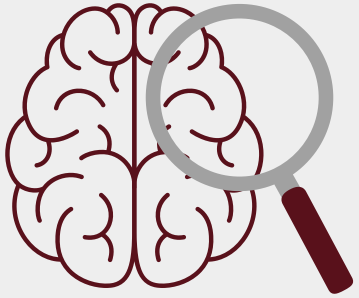
A_Shark_s

تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

2) في الشكل المجاور إذا كان $\triangle TVS \cong \triangle RSV$،
فأوجد قيمة كلٍّ من x, y .



تحقق من فهمك



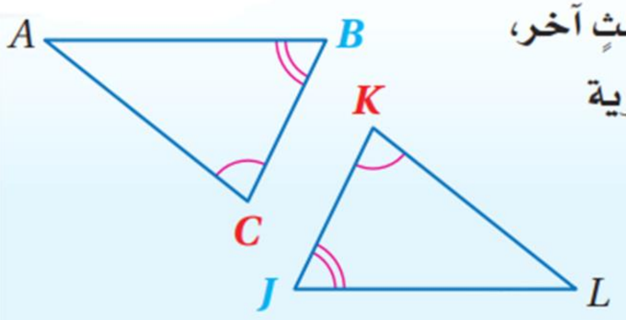
نظرية الزاوية الثالثة

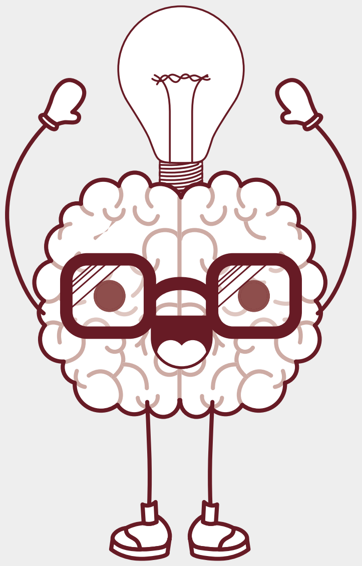
نظرية 3.3

إثبات تطابق المثلثات إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2–3 تقود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

التعبير اللفظي: إذا تطابقت زاويتان في مثلثٍ مع زاويتين في مثلثٍ آخر، فإنّ الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

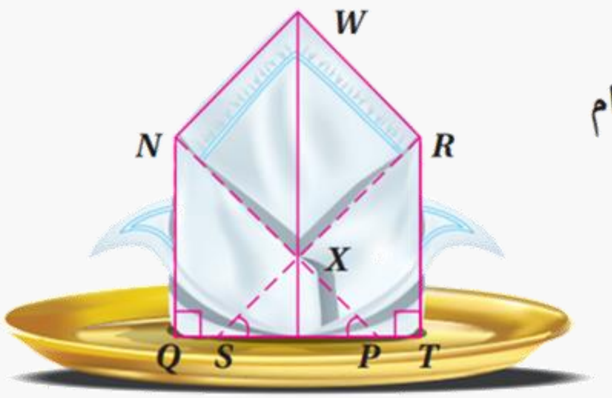
مثال: إذا كانت: $\angle J \cong \angle B, \angle K \cong \angle C$ ،
فإنّ: $\angle L \cong \angle A$.





استعمال نظرية الزاوية الثالثة

مثال ٣

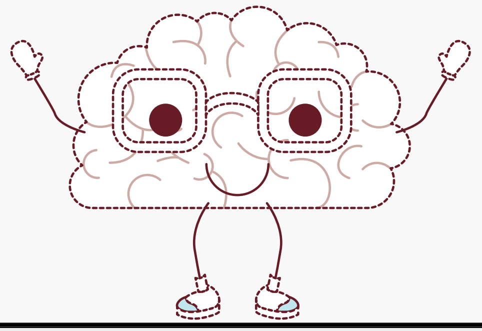


تنظيم الحفلات: قرّر منظّمو حفلة مدرسيّة أن يطووا مناديل الطعام على صورة جيب مثلثي حتى يتمكنوا من وضع هدية بسيطة فيه.
إذا كانت: $m\angle NPQ = 40°$ ، $\angle NPQ \cong \angle RST$ ، فأوجد $m\angle SRT$.

بما أنّ $\angle NPQ \cong \angle RST$ ، ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة ($\angle NQP \cong \angle RTS$) ، فإنّ $\angle QNP \cong \angle SRT$ بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ إذن $m\angle QNP = m\angle SRT$.

$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90°$	الزاويتان الحادّتان في المثلث القائم الزاوية متتامّتان
$m\angle QNP + 40° = 90°$	عوّض
$m\angle QNP = 50°$	اطرح $40°$ من الطرفين

وبالتعويض فإن: $m\angle SRT = m\angle QNP = 50°$.

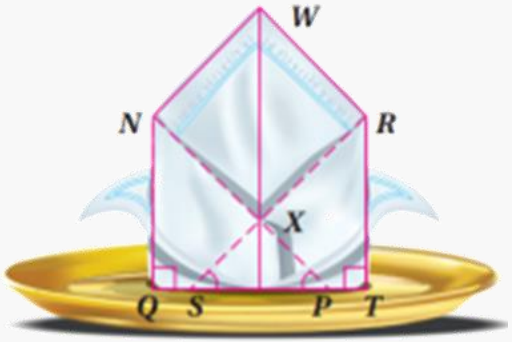


الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يُضفي لمسةً من الجمال والأناقة على أي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.

استعمال نظرية الزاوية الثالثة

تحقق من فهمك



3) في الشكل أعلاه، إذا كانت $\angle WRX \cong \angle WNX$، وكان $\overline{WX}$ منصِّفًا لـ $\angle NXR$، وكان $m\angle NXW = 49°$ ، $m\angle WNX = 88°$ ، فأوجد $m\angle NWR$. وفسِّر إجابتك.

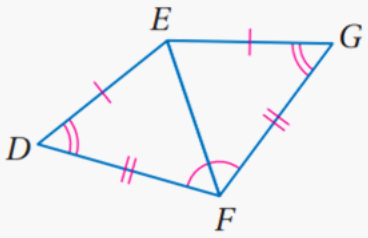
إثبات تطابق مثلثين

مثال ٤

اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$, $\angle D \cong \angle G$
$\angle DFE \cong \angle GFE$

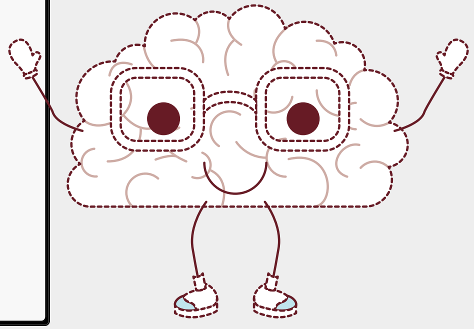
المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$



العبارات	المبررات
1) $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$	1) معطيات
2) $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	2) خاصية الانعكاس للتطابق
3) $\angle D \cong \angle G, \angle DFE \cong \angle GFE$	3) معطيات
4) $\angle DEF \cong \angle GEF$	4) نظرية الزاوية الثالثة
5) $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	5) تعريف المضلعات المتطابقة

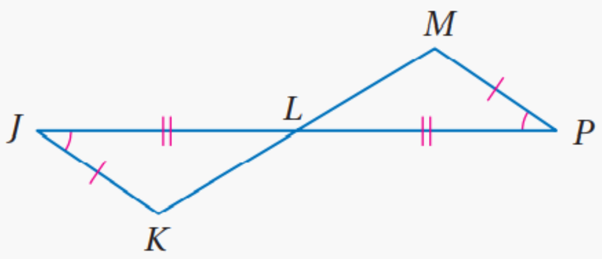
إرشادات للدراسة

خاصيّة الانعكاس
عندما يشترك مثلثان في ضلع، استعمل خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ لتثبت أن الضلع المشترك يطابق نفسه.



إثبات تطابق مثلثين

تحقق من فهمك

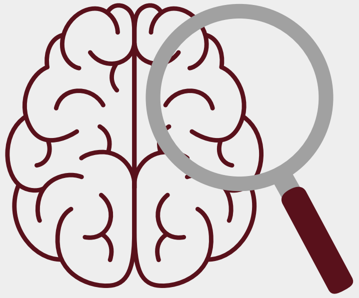


4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$

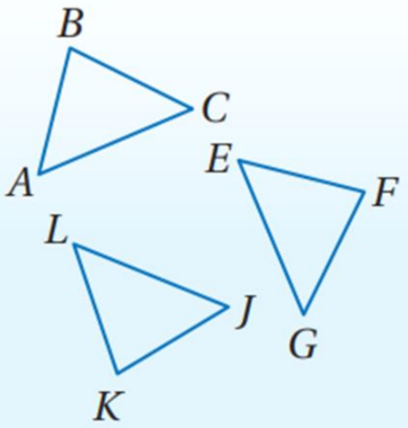
$\overline{JL} \cong \overline{PL}$ ، L تنصف $\overline{KM}$

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$



خصائص تطابق المثلثات

نظرية
3.4



خاصيّة الانعكاس للتطابق

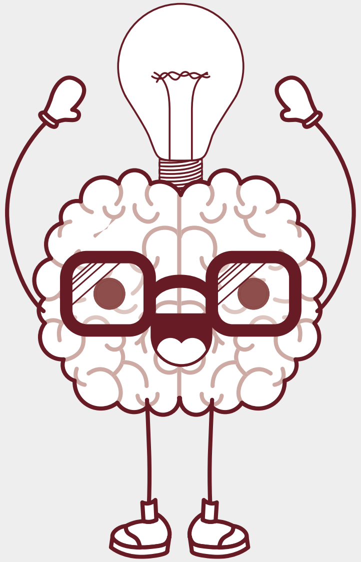
$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كان $\triangle EFG \cong \triangle ABC$ ، فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

خاصيّة التعدّي للتطابق

إذا كان $\triangle EFG \cong \triangle JKL$ ، $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ ، فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

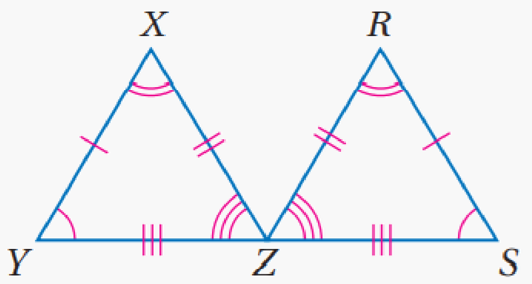


المثلثات المتطابقة

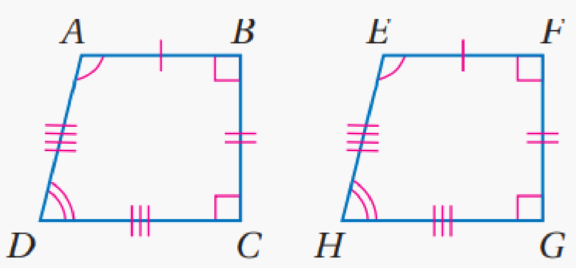
تأكد

في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بيّن أنّ المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق:

(1



(2

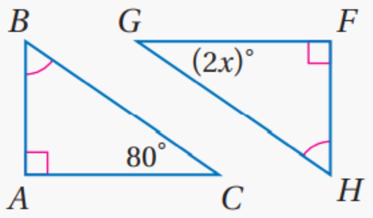


المثلثات المتطابقة

تأكد

أوجد قيمة x ، وفسِّر إجابتك.

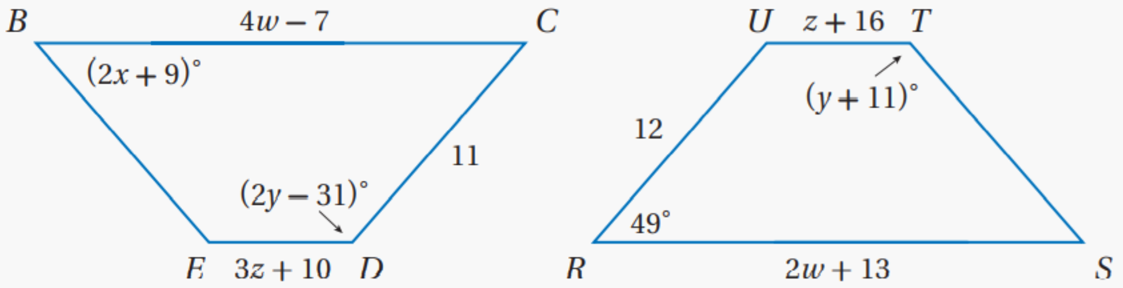
5)



المثلثات المتطابقة

تدرب وحل

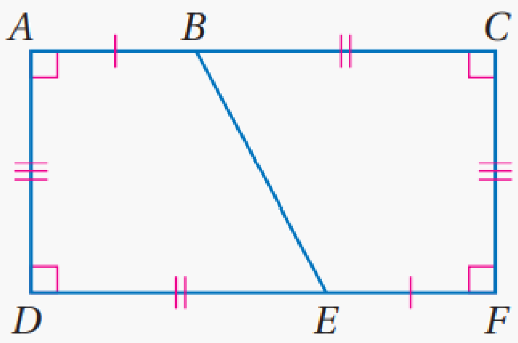
إذا كان المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

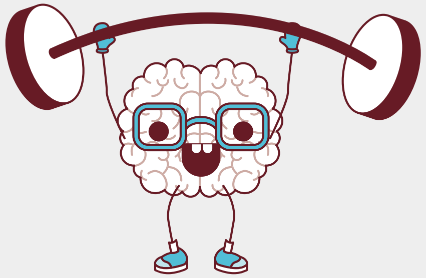


المثلثات المتطابقة

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن المضلع $ABED \cong$ المضلع $FEBC$.





3-4

إثبات تطابق المثلثات

SSS , SAS

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

إثبات تطابق المثلثات SSS,SAS

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

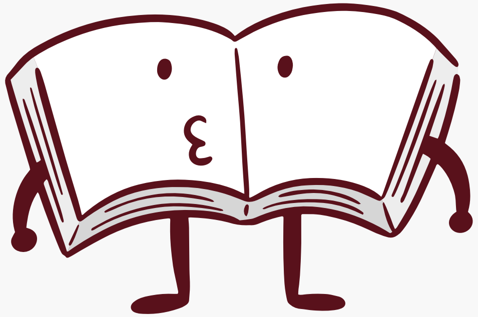
درست إثبات تطابق المثلثات باستعمال تعريف التطابق.

المفردات

الزاوية المحصورة
Included Angle

والآن

- أستعمل المسلمة SSS لاختبار تطابق المثلثات.
- أستعمل المسلمة SAS لاختبار تطابق المثلثات.



إثبات تطابق المثلثات SSS,SAS

لماذا؟

تُعدّ السبورة المزدوجة التي على شكل الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات، لا لأنها تُطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنّها تكون ثابتةً تمامًا عند وضع الذراعين الجانبيَّين في موقعيهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه، ويتم تثبيتهما على أبعاد متساوية من القمة على الجانبين، فإن السبورة المفتوحة تشكّل مثلثين متطابقين هما $\triangle ABC, \triangle XYZ$.

التطابق بثلاث أضلاع SSS

مسلمة 3.1

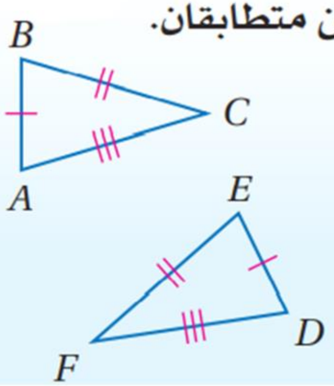
مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع SSS : في هذا الدرس ستكتشف أنه ليس من الضروري أن تبين تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق الزوايا المتناظرة في مثلثين لتثبت أنهما متطابقان.

تبيّن السبورة المزدوجة أنّه إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متساوية، فإن المثلثين متطابقان. وهذا ما تنصّ عليه المسلمة الآتية:

إذا تطابقت أضلاع مثلثٍ مع الأضلاع المناظرة لها في مثلثٍ آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

مثال إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

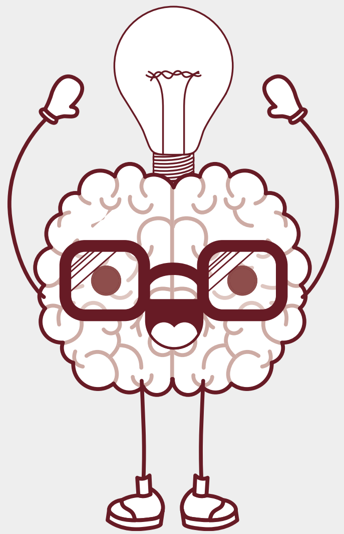
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



قراءة الرياضيات

اختصارات رياضية

S اختصار لـ **side** أو ضلع، و *A* اختصار لـ **Angle** أو زاوية.



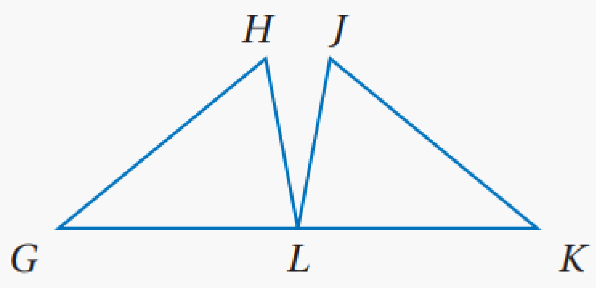
استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين

مثال ١

اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{JL}$, $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ ، L نقطة منتصف $\overline{GK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle GHL \cong \triangle KJL$



البرهان:

$\overline{GH} \cong \overline{KJ}$
معطى

$\overline{HL} \cong \overline{JL}$
معطى

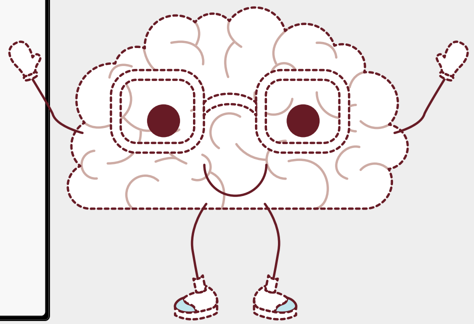
L هي نقطة منتصف $\overline{GK}$
معطى

$\overline{GL} \cong \overline{KL}$
تعريف نقطة المنتصف

$\triangle GHL \cong \triangle KJL$
SSS

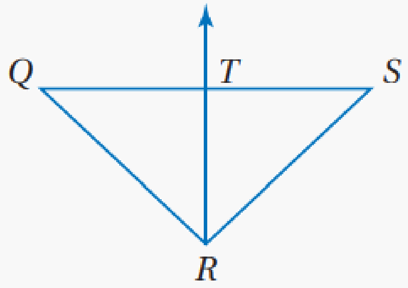
إرشادات للدراسة

منصف قطعة مستقيمة عبارة عن قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند منتصفها.



استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين

تحقق من فهمك



1) اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: $\triangle QRS$ متطابق الضلعين، فيه، $\overline{SR} \cong \overline{QR}$.

$\overline{RT}$ تنصّف $\overline{QS}$ عند النقطة T.

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle SRT \cong \triangle QRT$

على اختبار معياري

مثال ٢

إجابة مطولة : إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 1), B(0, 3), C(2, 5)$.
ورؤوس المثلث EFG هي: $E(1, -1), F(2, -5), G(4, -4)$.

a) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

b) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

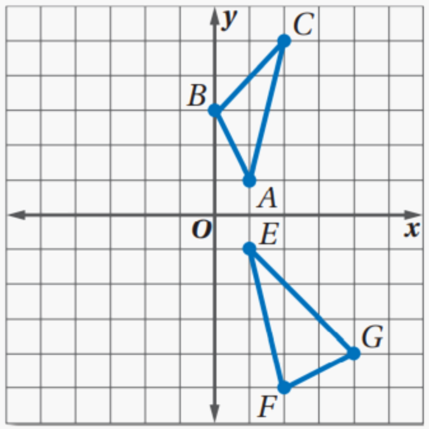
c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

اقرأ سؤال الاختبار:

في هذه المسألة يُطلب إليك عمل ثلاثة أشياء؛ إذ يتعين عليك في الجزء a أن ترسم كلًّا من $\triangle ABC, \triangle EFG$ في مستوى إحداثيٍّ واحد. وفي الجزء b أن تضع تخمينًا يبين ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ أم لا، اعتمادًا على الرسم. وأخيرًا عليكَ في الجزء c أن تثبت صحّة تخمينك.

حل سؤال الاختبار:

a)



b) يتضح من الرسم أن المثلثين مختلفان في الشكل؛ لذا يمكن أن نخمِّن أنهما ليسا متطابقين.

c) استعمل صيغة المسافة لبيان أن أطوال بعض الأضلاع المتناظرة غير متساوية.

$$EF = \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

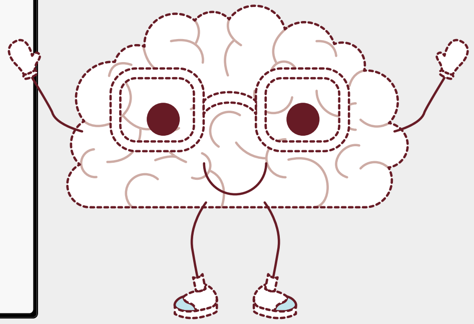
$$FG = \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$EG = \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

وبما أن $AB = FG, AC = EF$، في حين أن $BC \neq EG$ ، فإن شروط مسلمة التطابق SSS غير متحققة؛ إذن $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$.



على اختبار معياري

(2 إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(2, 5), K(1, 1), L(5, 2)$. ورؤوس المثلث NPQ هي $N(-3, 0), P(-7, 1), Q(-4, 4)$.

(A مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

(B استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

(C اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء **B**.

تحقق من فهمك

قراءة الرياضيات

الرموز

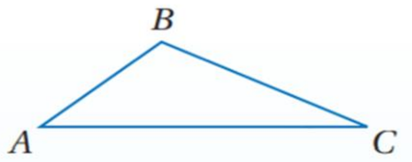
تقرأ العبارة

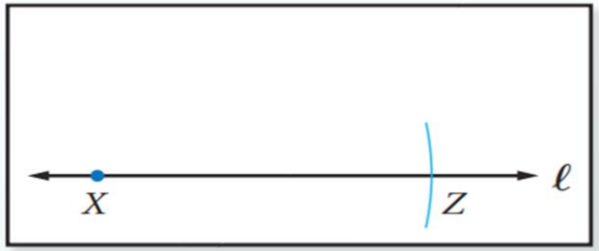
$\triangle ABC \ncong \triangle EFG$

المثلث ABC لا يطابق المثلث EFG.

إنشاء مثلث يطابق مثلثا مرسومًا باستعمال المسلمة (SSS)

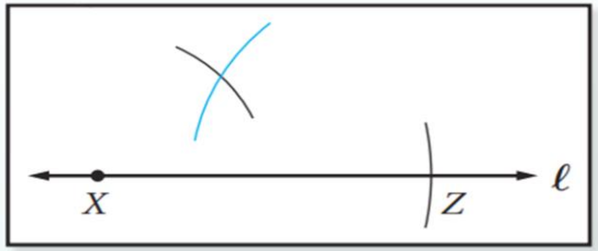
ارسم مثلثًا وسمّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلمة SSS لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



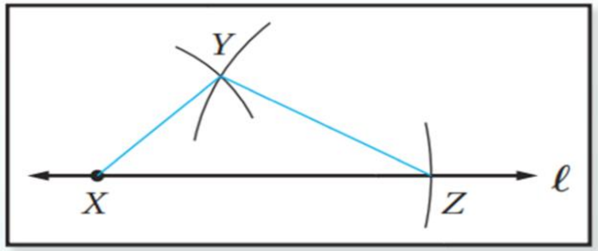


الخطوة 1 عيّن النقطة X على المستقيم ℓ. ثم أنشئ $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على ℓ كما يأتي:

- ركز رأس الفرجار في النقطة A ، وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة C.
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ركِّز رأس الفرجار في X، وارسم قوسًا يقطع المستقيم ℓ وسمِّ نقطة التقاطع Z.



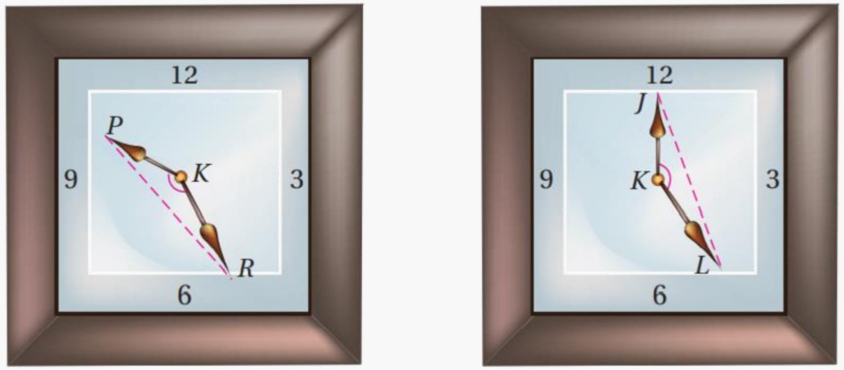
الخطوة 2 أنشئ قوسًا طول نصف قطره AB، ومركزه X ، وقوسًا آخر طول نصف قطره BC، ومركزه Z (مستعملًا الفرجار كما في الخطوة 1).



الخطوة 3 سمِّ نقطة تقاطع القوسين Y . وارسم $\overline{XY}, \overline{ZY}$ لتشكل $\triangle XYZ$.

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما SAS

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما SAS: تُسمّى الزاوية المتكونة من ضلعين متجاورين لمضلع **زاوية محصورة**. تأمّل الزاوية المحصورة والمتكونة من عقربَي الساعة في كلا الوضعين الموضَّحين أدناه، ولاحظ أنه كلما شكّل العقربان زاويةً لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفَي العقربين $\overline{PR}$, $\overline{JL}$ متساويتين.



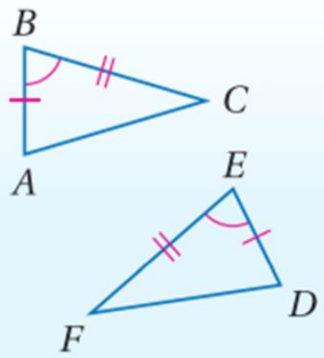
$\triangle PKR \cong \triangle JKL$

أيُّ مثلثين يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزاويتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)

مسلمة 3.2

التعبير اللفظي: إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

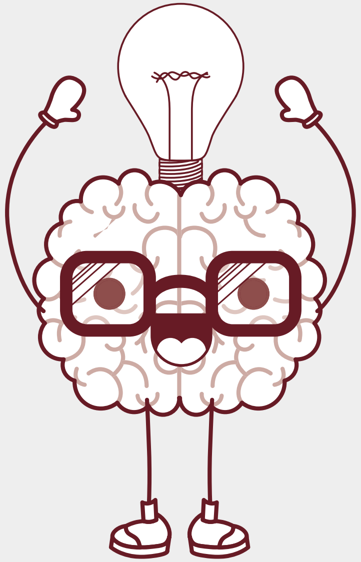


مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,

$\angle B \cong \angle E$,

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,

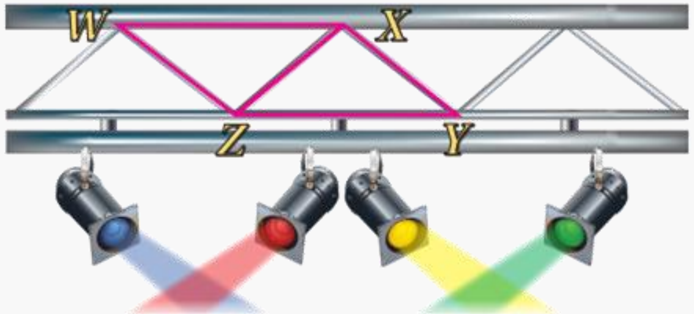
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



استعمال المسلمة SAS لإثبات تطابق مثلثين

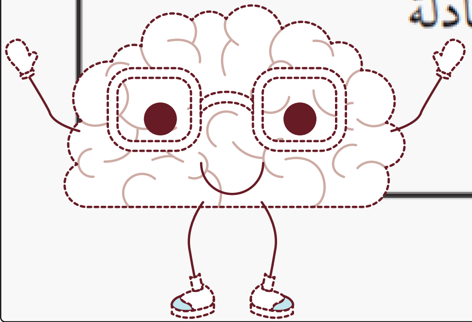
مثال ٣

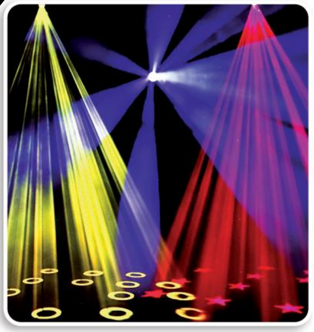
إضاءة: تبدو دعامات السقّالة حاملة المصابيح الظاهرة في الصورة وكأنّها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ ، فاكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$	1) معطى
2) $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	2) معطى
3) $\angle WXZ \cong \angle XZY$	3) نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4) $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	5) SAS





الربط مع الحياة

فنيو الإضاءة: في صناعة الصور المتحركة، يقوم فنيُّو الإضاءة بتحديد مواقع المصابيح التي يتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.

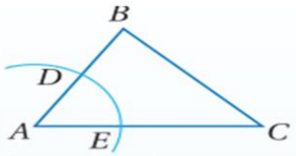
استعمال المسلمة SSS
لإثبات تطابق مثلثين

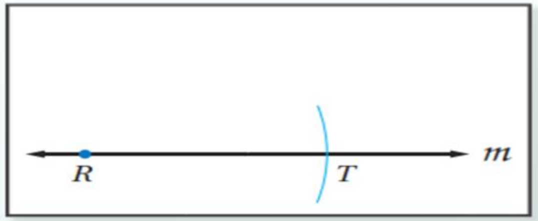
تحقق من فهمك

3) **طيران شراعي:** في الصورة المجاورة يبدو جناحا الطائرة الشراعية أنهما مثلثان متطابقان. فإذا كانت $\overline{GH} \cong \overline{FG}$ ، $\overline{JG}$ تنصّف $\angle FGH$ ، فأثبت أنّ $\triangle HGJ \cong \triangle FGJ$.

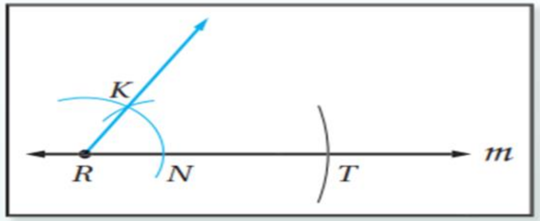
إنشاء مثلث يطابق مثلثا مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق "ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)"

ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة SAS لتنشئ $\triangle RST$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



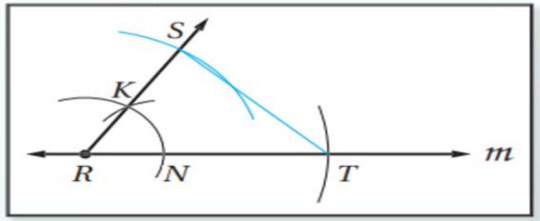


الخطوة 1 : عيِّن النقطة R على المستقيم m . ثم أنشئ $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على m .



الخطوة 2 : أنشئ $\angle A \cong \angle R$ ، باستعمال $\overline{RT}$ ضلعًا للزاوية، والنقطة R رأسًا لها كما يأتي:

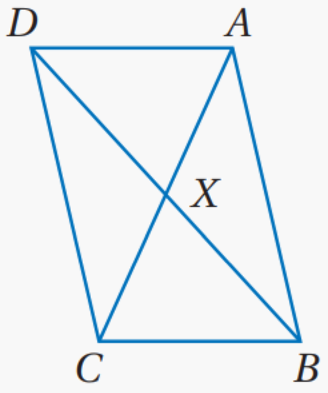
- ضع رأس الفرجار على النقطة A ، وارسم قوسًا يقطع ضلعَي $\angle A$. سمِّ نقطتَي التقاطع D, E .
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند R وارسم قوسًا يبدأ فوق المستقيم m ويقطعه، سمِّ نقطة التقاطع N .
- ضع رأس الفرجار عند E وعدِّل الفتحة حتى يصل رأس القلم إلى D.
- دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة N ، وارسم قوسًا يقطع القوس الذي رسمته سابقًا في النقطة K، ثم ارسم $\overrightarrow{RK}$.



الخطوة 3 : أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$ ، ثم ارسم $\overline{ST}$ لتشكّل $\triangle RST$.

استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين

مثال ٤



اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يأتي.

المعطيات: X منتصف $\overline{DB}$

و X منتصف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

البرهان:

X هي منتصف $\overline{DB}$ ← $\overline{DX} \cong \overline{BX}$

معطى — نظرية نقطة المنتصف

X هي منتصف $\overline{AC}$ ← $\overline{CX} \cong \overline{AX}$ ← $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

معطى — نظرية نقطة المنتصف — SAS

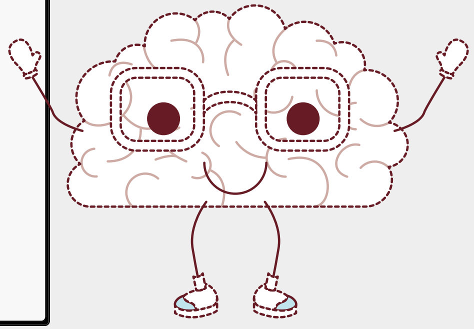
$\angle DXC \cong \angle BXA$

الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان

إرشادات للدراسة

البراهين التسلسلية

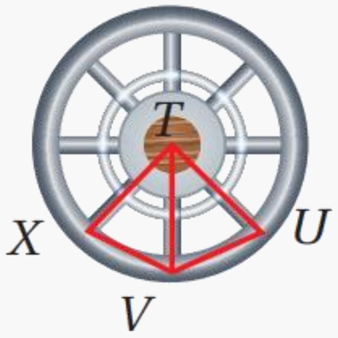
يمكن كتابة البراهين التسلسلية إما رأسيًا وإما أفقيًا.



تحقق من فهمك

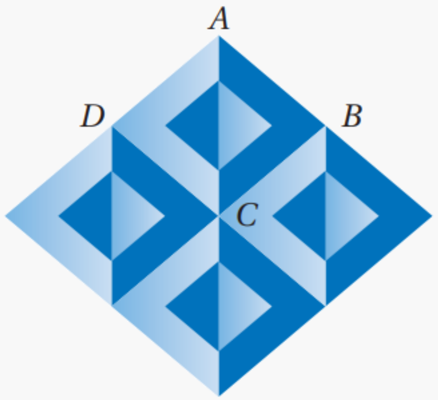
استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين

4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان:
$\overline{TX} \cong \overline{TU}$ وَ $\angle UTV \cong \angle XTV$، فبين أن $\triangle UTV \cong \triangle XTV$.



إثبات تطابق المثلثات SSS,SAS

تأكد



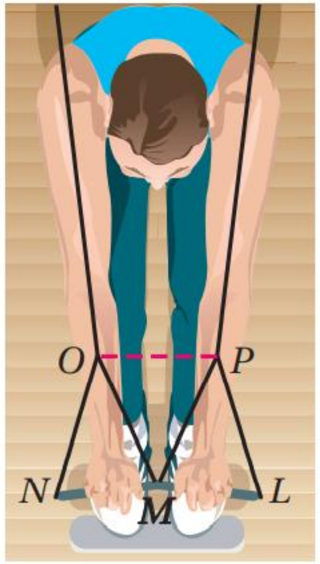
1) **الخداع البصري:** في الشكل المقابل المربع $ABCD$ يطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكّل النمط.

a) ما عدد المثلثات المختلفة القياس التي استُعملت لعمل هذا النمط؟

b) استعمل مسلمة التطابق SSS لإثبات أن $\triangle CDA \cong \triangle ABC$.

إثبات تطابق المثلثات SSS,SAS

تأكد



3) **رياضة :** في الشكل المجاور، إذا كان:
$\angle NOM \cong \angle LPM$, $\overline{NO} \cong \overline{LP}$ ، $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\triangle NMO \cong \triangle LMP$.

إثبات تطابق المثلثات SSS,SAS

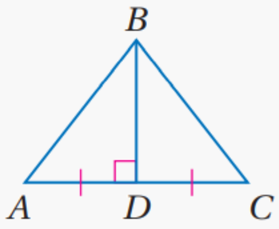
تدرب وحل

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد

10) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$,
$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

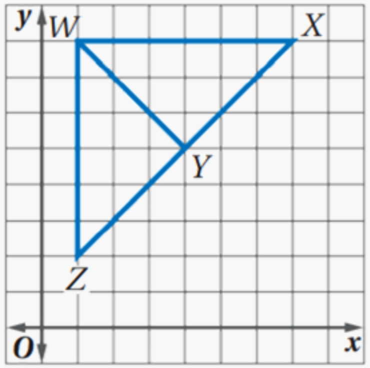
المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



إثبات تطابق المثلثات SSS,SAS

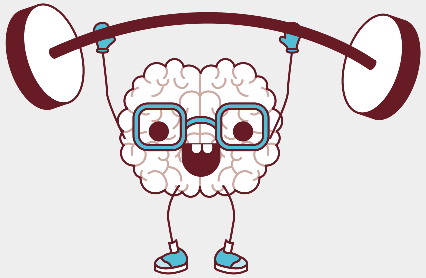
مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: في الشكل المجاور:



a) صف طريقتين يمكنك استعمالهما لإثبات أنّ $\triangle WYZ$ يطابق $\triangle WYX$. علمًا بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المنقلة. وأيّ طريقة تعتقد أنها فعّالة أكثر؟ وضح إجابتك.

b) أثبت أن $\triangle WYX \cong \triangle WYZ$ ووضّح إجابتك.



3-5

إثبات تطابق المثلثات

ASA, AAS

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

رابط الدرس الرقمي

إثبات تطابق المثلثات ASA,AAS

فيما سبق

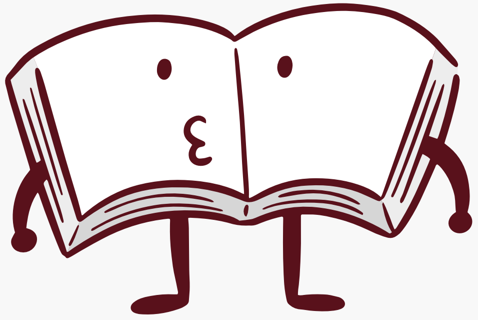
درست إثبات تطابق مثلثين باستعمال SAS , SSS .

المفردات

الضلع المحصور
Included Side

و الآن

- أستعمل المسلمة ASA لاختبار التطابق.
- أستعمل النظرية AAS لاختبار التطابق.



DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

إثبات تطابق المثلثات ASA,AAS

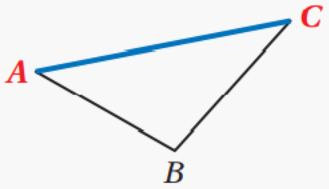
لماذا؟

تتضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجوههم نحو مؤخرة القارب، ولكلٍّ منهم مجداف. ويتطلب السباق عادة مسطّحًا من الماء طوله 1500 متر على الأقل، ويمكن استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة. مثل طول مضمار سباق الزوارق.

التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهماASA

مسلمة
3.3

مسلمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما ASA: الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لمضلع يُسمى **الضلع المحصور**، ففي $\triangle ABC$ المجاور، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A$, $\angle C$.



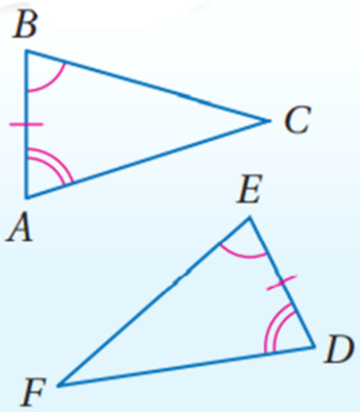
إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

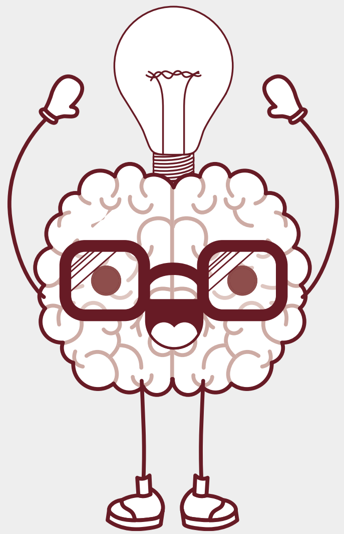
مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$,

$\angle B \cong \angle E$,

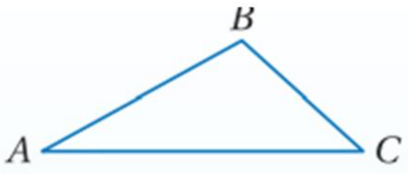
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



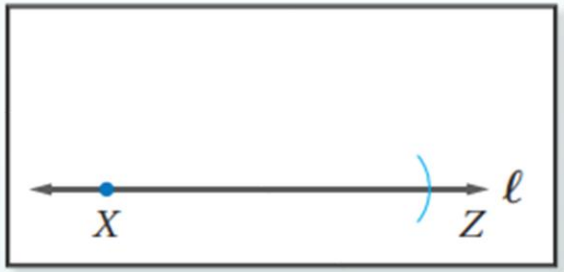


إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

ارسم مثلثا وسمِّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلمة ASA لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

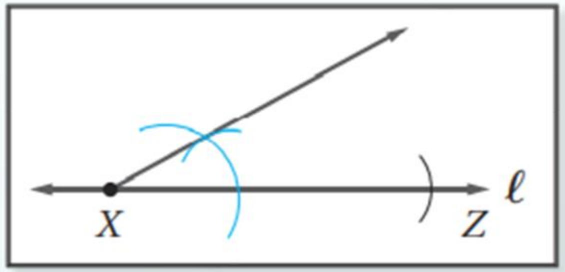


الخطوة 1:



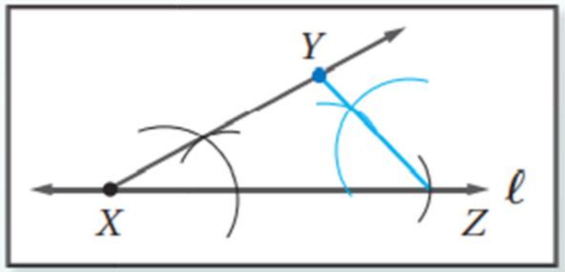
ارسم مستقيمًا ℓ ، واختر عليه النقطة X.
وأنشئ $\overline{XZ}$ على أن تكون $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2:



أنشئ زاوية مطابقة لِـ $\angle A$ عند النقطة X
باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية.

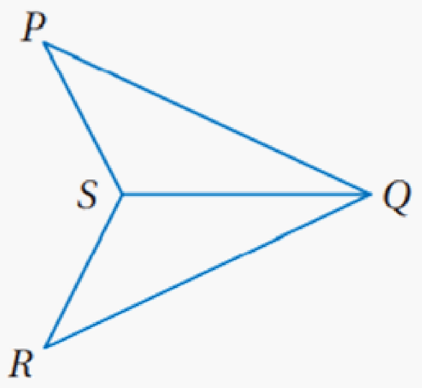
الخطوة 3:



أنشئ زاوية مطابقة لِـ $\angle C$ عند النقطة Z
باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية، وسمِّ نقطة
تقاطع الضلعين الجديدين للزاويتين Y.

استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين

مثال ١



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$

$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

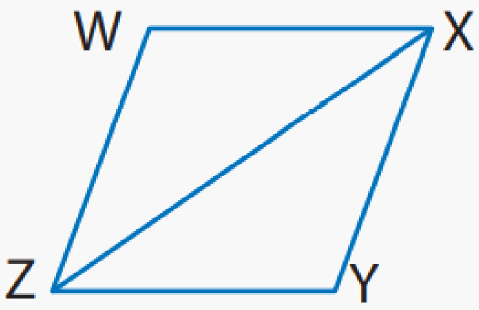
المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$ ، $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.	1) معطيات
2) $\angle PQS \cong \angle RQS$	2) تعريف منصّف الزاوية
3) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	3) خاصية الانعكاس للتطابق
4) $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	4) ASA

استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين

تحقق من فهمك



1) اكتب برهاناً حرًّا.

المعطيات: $\overline{ZX}$ تنصّف $\angle WZY$ ، $\overline{XZ}$ تنصّف $\angle YXW$.

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما
AAS

نظرية 3.5

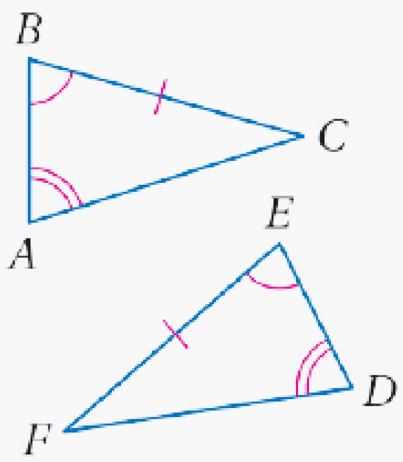
إذا طابقتْ زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.

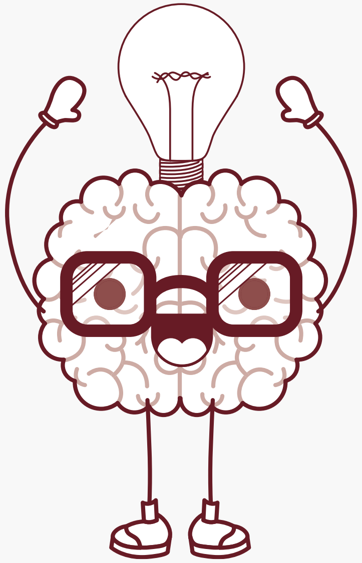
مثال إذا كانت $\angle A \cong \angle D,$

$\angle B \cong \angle E,$

$\overline{BC} \cong \overline{EF},$

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



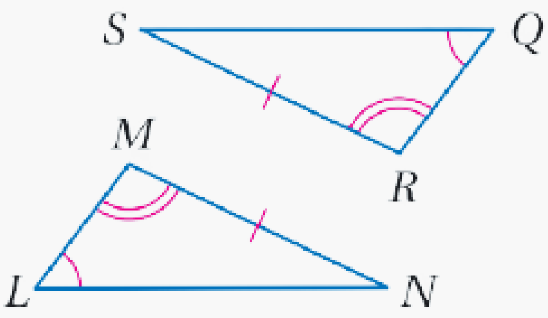


إرشادات للدراسة

تطابق ضلعين SSA وزاوية غير محصورة بينهما:
بالرغم من أن تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان؛ لكن تطابق زاويتين وضلع سواءً أكان محصورًا بينهما أو غير محصور بينهما كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.

نظرية التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما
AAS

برهان



المعطيات: $\angle L \cong \angle Q,\ \angle M \cong \angle R,\ \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

البرهان:

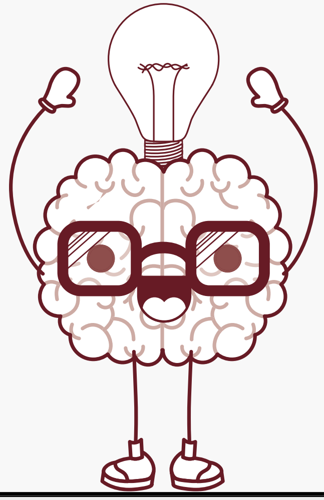
$\angle L \cong \angle Q$
معطى

$\angle M \cong \angle R$
معطى

$\overline{MN} \cong \overline{RS}$
معطى

$\angle N \cong \angle S$
نظرية الزاوية الثالثة

$\triangle LMN \cong \triangle QRS$
ASA

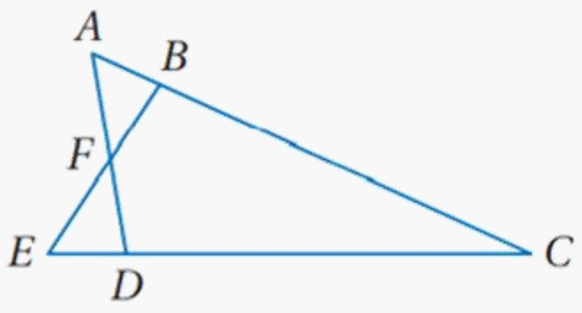


إرشادات للدراسة

SSA تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما: بالرغم من أن تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان؛ لكن تطابق زاويتين وضلع سواءً أكان محصورًا بينهما أو غير محصور بينهما كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.

استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين

مثال ٢



اكتب برهانًا حرًّا.

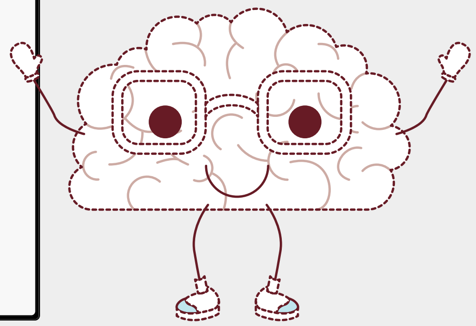
المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC,$

$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

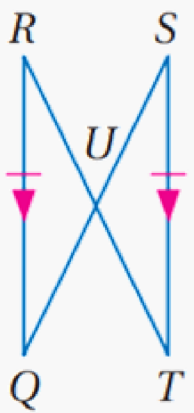
البرهان: بما أن: $\overline{BC} \cong \overline{DC}, \angle BEC \cong \angle DAC$، وأن $\angle C \cong \angle C$ بحسب خاصية الانعكاس،

إذن $\triangle ECB \cong \triangle ACD$ بحسب النظرية AAS.



استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين

تحقق من فهمك



2) اكتب برهانًا تسلسليًّا:

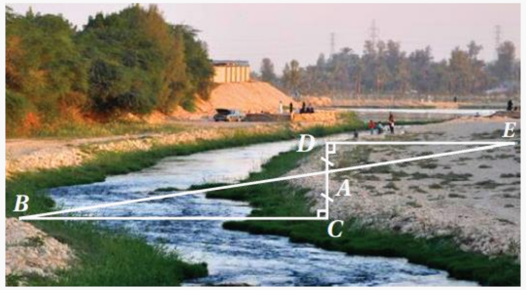
المعطيات: $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$, $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

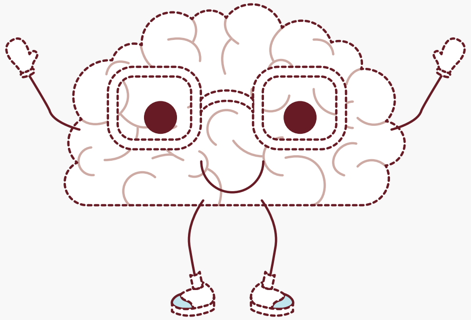
المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

من واقع الحياة

مثال ٣

مسافات: أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين C, B، فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها نقطةً مرجعيةً، بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول DE يساوي 8 ft، فاحسب المسافة بين النقطتين C, B.





لتحديد طول $\overline{CB}$، يجب أولًا أن نثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

لتحديد طول $\overline{CB}$، يجب أولًا أن نثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

- بما أن $\overline{CD}$ عمودية على كلٍّ من $\overline{CB}, \overline{DE}$ كما هو مبيّن في الشكل، وجميع الزوايا القوائم متطابقة. إذن $\angle BCA \cong \angle EDA$.
- $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
- $\angle BAC, \angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس إذن هما متطابقتان، وبحسب ASA ينتج أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$

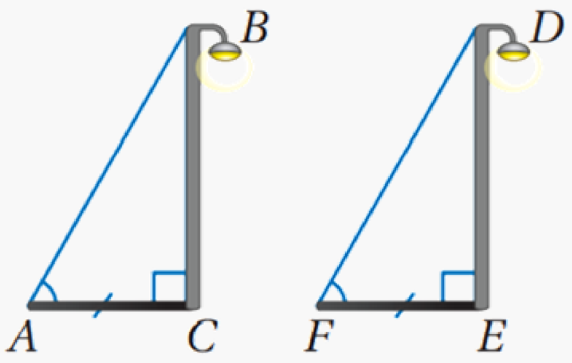
وبما أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ فإن $\overline{DE} \cong \overline{CB}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة متطابقة. وبما أن طول $\overline{DE}$ يساوي 8 ft فإن طول $\overline{CB}$ يساوي 8 ft أيضًا، وهي المسافة بين النقطتين C, B.

إرشادات للدراسة

زاوية-زاوية-زاوية

$\angle B, \angle E$ في المثال 3 متطابقتان بحسب نظرية الزاوية الثالثة.
إن تطابق الزوايا الثلاث المتناظرة غير كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.

من واقع الحياة

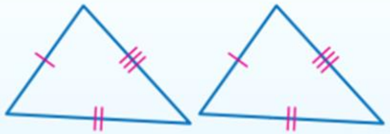


3) استعمل الشكل المجاور الذي يمثل عمودَي كهرباء وظلَّيهما لكتابة برهان حرٍّ يبيِّن أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

تحقق من فهمك

إثبات تطابق المثلثات

SSS



يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعُهما المتناظرة متطابقة.

SAS

يتطابق المثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

ASA

يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

AAS

يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

إثبات تطابق المثلثات ASA,AAS

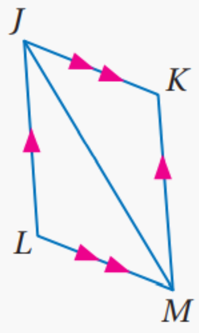
تأكد

برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

1) برهان تسلسلي

المعطيات: $\overline{JK} \parallel \overline{LM}$, $\overline{JL} \parallel \overline{KM}$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JML \cong \triangle MJK$



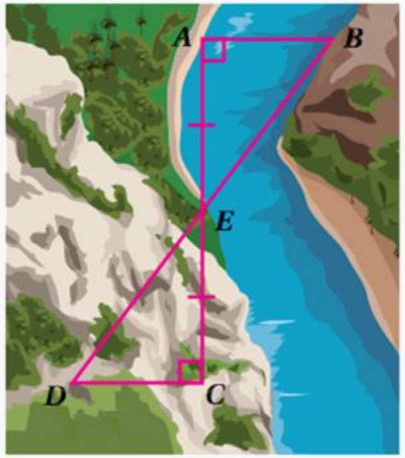
إثبات تطابق المثلثات ASA,AAS

تأكد

3) **بناء جسور:** يحتاج مسّاح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين A, B المبينتين في الشكل المجاور لبناء جسر فوق النهر. فوضعَ وتدًا عند A، ووضع زميله وتدًا عند B في الجهة المقابلة، ثمّ عيّن المسّاح النقطة C في جهة A، بحيث كانت $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ووضع وتدًا رابعًا عند E، التي هي نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا وضع وتدًا عند النقطة D، بحيث كان $\overline{CD} \perp \overline{CA}$، والنقاط D, E, B تقع على مستقيم واحد.

a) وضّح كيف يمكن أن يستعمل المسّاح المثلثين المتكونين لإيجاد المسافة بين النقطتين A, B.

b) إذا كان: $AC = 160\text{ m}, DC = 60\text{ m}, DE = 100\text{ m}$، فأوجد المسافة بين النقطتين A, B. ووضّح إجابتك.



إثبات تطابق المثلثات ASA,AAS

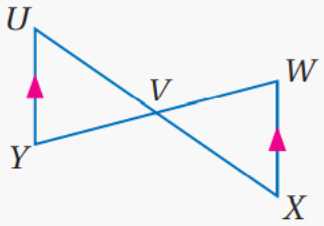
تدرب وحل

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

5) **المعطيات:** V نقطة منتصف $\overline{WY}$

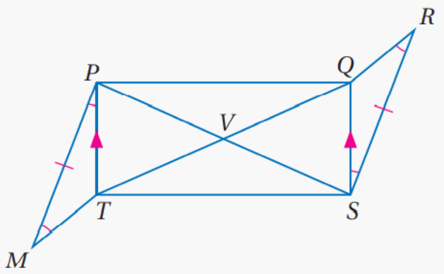
$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$

المطلوب: $\triangle UVY \cong \triangle XVW$

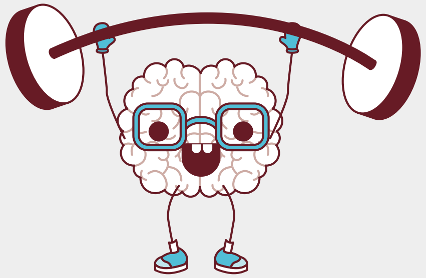


إثبات تطابق المثلثات ASA,AAS

مهارات التفكير العليا



تحدٍّ: باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهانًا تسلسليًّا لإثبات أن $\triangle PVQ \cong \triangle SVT$.



3-6

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

والآن

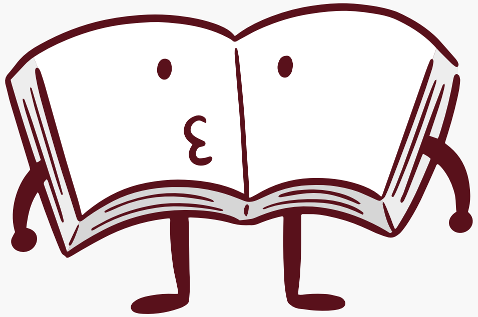
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المفردات

ساقا المثلث المتطابق الضلعين
legs of an isosceles triangle

زاوية الرأس
vertex angle

زاويتا القاعدة
base angles



DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

لماذا؟

للعبة القطار السريع في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لتقويتها وتثبيتها، والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكّر أن المثلثات المتطابقة الضلعين لها ضلعان متطابقان على الأقل، وأن لعناصرها أسماءً خاصة.

حيث يُسمّى الضلعان المتطابقان **الساقين**، والزاوية التي ضلعاها الساقان تُسمّى **زاوية الرأس**. ويُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدةَ. والزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتَي القاعدة**.

ففي الشكل المجاور، $\angle 1$ هي زاوية الرأس،

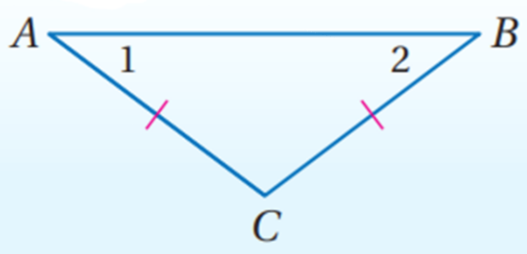
وزاويتا القاعدة هما $\angle 3$, $\angle 2$.

المثلث المتطابق الضلعين

نظريات

3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

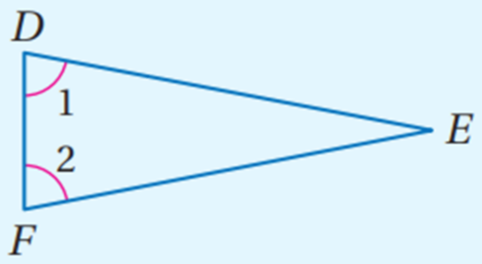
إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.



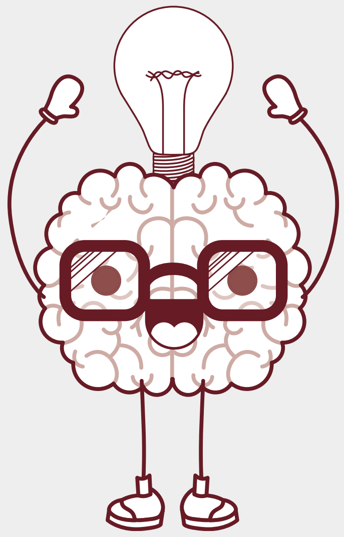
مثال: إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BC}$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

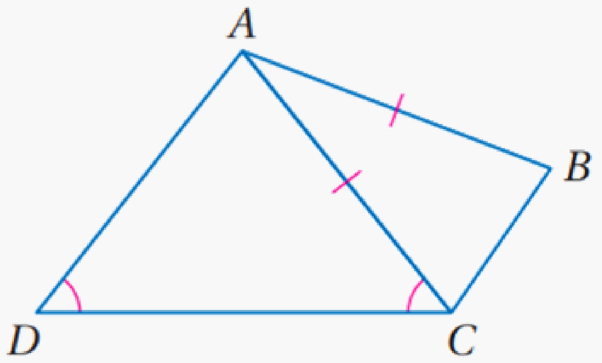


مثال: إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\overline{FE} \cong \overline{DE}$



القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة

مثال ١



(a سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\angle ACB$ تقابل $\overline{AB}$، $\angle B$ تقابل $\overline{AC}$ ؛

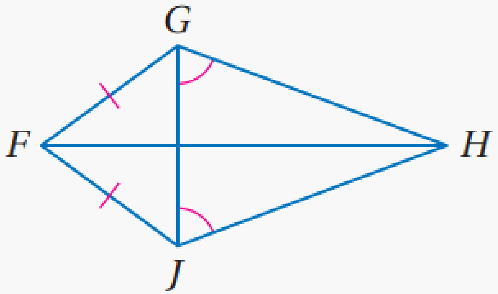
لذا فإن $\angle B \cong \angle ACB$.

(b سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\overline{AD}$ تقابل $\angle ACD$، $\overline{AC}$ تقابل $\angle D$ ، لذا فإن $\overline{AC} \cong \overline{AD}$.

القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة

تحقق من فهمك



1A) سمّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل.

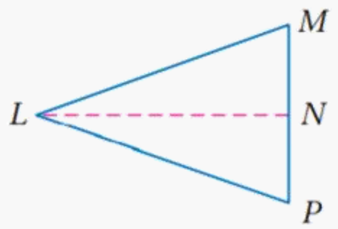
1B) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

البرهان

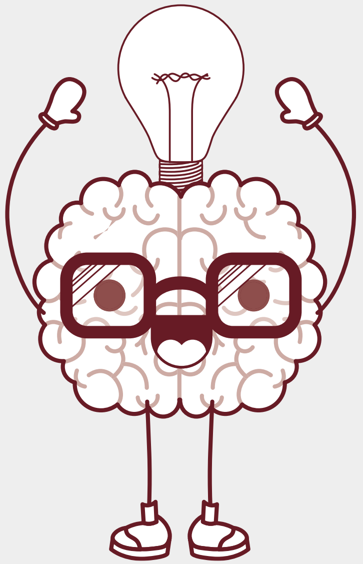
المعطيات: في $\triangle LMP$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: إثبات أن: $\angle M \cong \angle P$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$.	1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.
2) ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$.	2) كل نقطتين تحدّدان مستقيمًا.
3) $\overline{PN} \cong \overline{NM}$	3) نظرية نقطة المنتصف.
4) $\overline{LN} \cong \overline{LN}$	4) خاصية الانعكاس في التطابق.
5) $\overline{LM} \cong \overline{LP}$	5) معطًى.
6) $\triangle LMN \cong \triangle LPN$	6) مسلّمة التطابق بثلاثة أضلاع.
7) $\angle M \cong \angle P$	7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة.



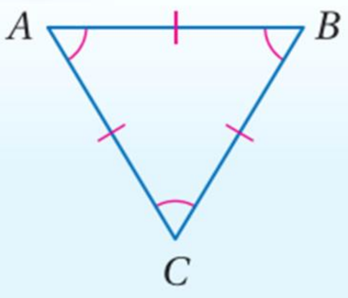
المثلث المتطابق الأضلاع

نتيجتان

خصائص المثلث المتطابق الأضلاع: نظرية المثلث المتطابق الضلعين تقود إلى نتيجتين حول زوايا المثلث المتطابق الأضلاع.

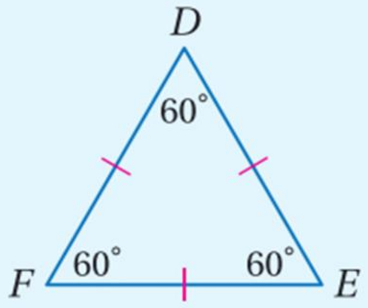
3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

مثال: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ، إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$



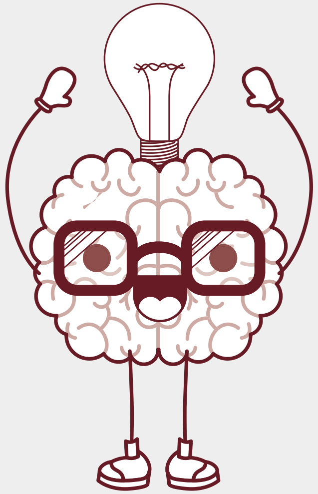
3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع $60°$.

مثال: إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ، فإن $m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60°$.



مراجعة المفردات

المثلث المتطابق الأضلاع: هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

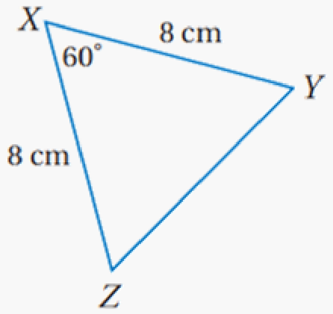


إيجاد القياسات المجهولة

مثال ٢

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

a) $m\angle Y$

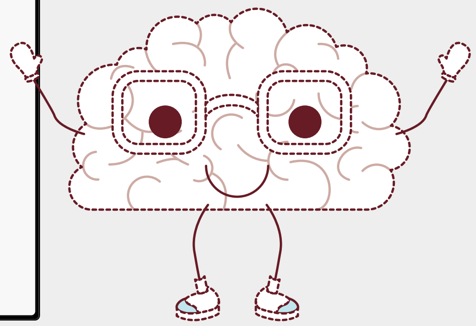


بما أن $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$, $XY = XZ$ ، وباستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين، تكون زاويتا القاعدة Y , Z متطابقتين؛ لذا فإن $m\angle Z = m\angle Y$. استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث لإيجاد $m\angle Y$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60° + m\angle Y + m\angle Y = 180°$	$m\angle X = 60°, m\angle Z = m\angle Y$
$60° + 2(m\angle Y) = 180°$	بسّط
$2(m\angle Y) = 120°$	اطرح 60 من كل طرف
$m\angle Y = 60°$	اقسم كل طرف على 2

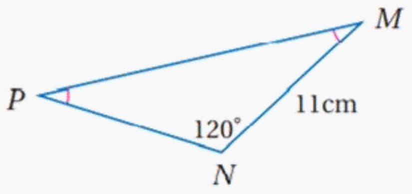
b) YZ

$m\angle Z = m\angle Y$ ؛ لذا بالتعويض فإن $m\angle Z = 60°$، وبما أن $m\angle X = 60°$ ، فإن قياس كل زاوية من الزوايا الثلاث $60°$ ؛ لذا فالمثلث متطابق الزوايا. وهو متطابق الأضلاع أيضًا، لذا فإن $XY = XZ = ZY$. وبما أن $XY = 8\,\text{cm}$ ، إذن $YZ = 8\,\text{cm}$



إيجاد القياسات المجهولة

تحقق من فهمك



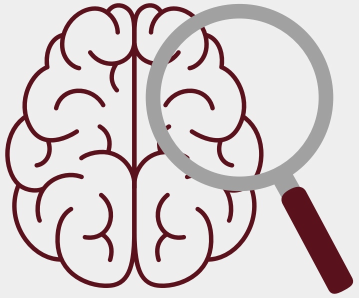
2A) $m\angle M$

2B) PN

إرشادات للدراسة

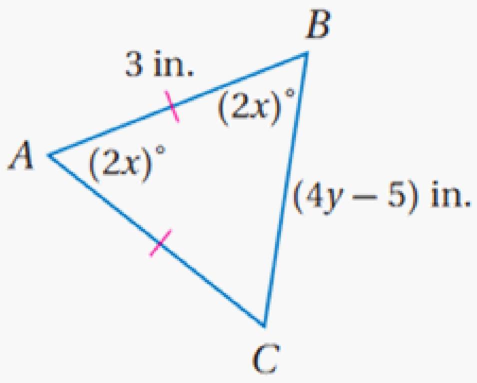
المثلثات المتطابقة الضلعين

كما اكتشفت في المثال 2 ، أي مثلث متطابق الضلعين فيه زاوية قياسها 60° يكون مثلثًا متطابق الأضلاع.



إيجاد القيم المجهولة

مثال ٣



جبر: أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور.

بما أن $m\angle A = m\angle B$؛ أي أن $\angle A \cong \angle B$ فإن $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ باستعمال عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين؛ وبذلك فإن أضلاع المثلث متطابقة. وقياس كل زاوية فيه تساوي $60°$؛ لذا فإن $x = 30$, $2x = 60$.

وبما أن المثلث متطابق الأضلاع، إذن جميع الأضلاع متطابقة.

$AB = BC$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3 = 4y - 5$	عوِّض
$8 = 4y$	اجمع 5 إلى كلٍّ من الطرفين
$2 = y$	اقسم كل طرف على 4

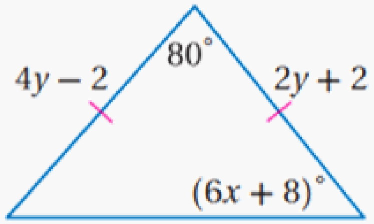
DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

إيجاد القيم المجهولة

تحقق من فهمك

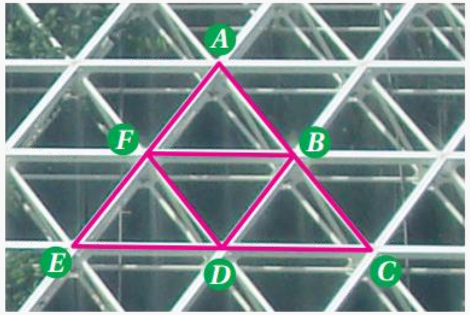
3) أوجد قيمة كلٍّ من المتغيرين في الشكل المجاور .



تطبيق تطابق المثلثات

مثال ٤

بناء: في الصورة المجاورة. $\triangle ACE$ مثلث متطابق الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، B نقطة منتصف $\overline{CA}$. برهن أن $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.



المعطيات: $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، و F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، و B نقطة منتصف $\overline{CA}$

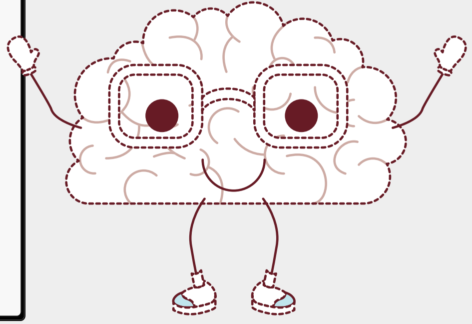
المطلوب: إثبات أن: $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع.	(1 معطى
(2 F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، و B نقطة منتصف $\overline{CA}$.	(2 معطى
(3 $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$	(3 المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا
(4 $AF = FE, ED = DC, CB = BA$	(4 تعريف نقطة المنتصف
(5 $\overline{CA} \cong \overline{AE} \cong \overline{EC}$	(5 تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
(6 $CA = AE = EC$	(6 تعريف التطابق
(7 $\frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}BC$	(7 خاصية الضرب
(8 $AF = FE = ED = DC = AB = BC$	(8 بالتعويض
(9 $\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$	(9 تعريف التطابق
(10 $\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$	(10 مسلّمة SAS
(11 $\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$	(11 العناصر المتناظرة متطابقة.
(12 $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.	(12 تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

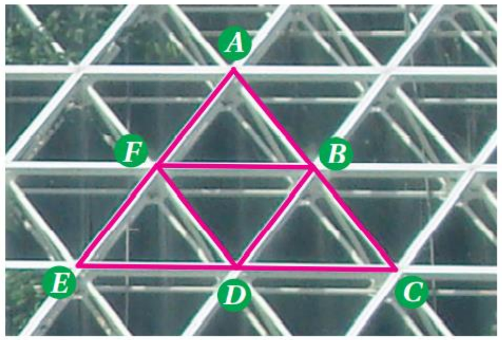
الربط مع الحياة

استعمل المهندس المعماري في هذا المبنى قضبانًا حديديّة تم تثبيتها على شكل مثلثات لتزيد المبنى دعمًا وقوةً مراعيًا في ذلك الجوانب الجمالية للبناء أيضًا.



تطبيق تطابق المثلثات

تحقق من فهمك

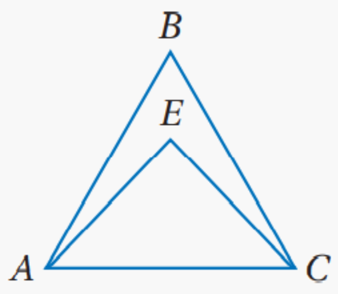


4) في الصورة أعلاه إذا علمت أن $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، فيه: $\overline{BC} \parallel \overline{FD}$، $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ ، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، فأثبت أن $\triangle BDC \cong \triangle FED$.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

تأكد

باستعمال الشكل المجاور أجب عن السؤالين الآتيين:



1) إذا كان $\overline{CB} \cong \overline{AB}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

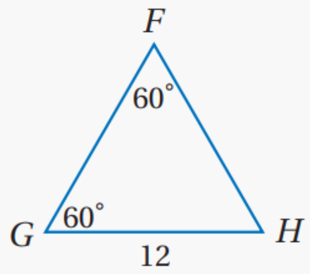
2) إذا كان $\angle ECA \cong \angle EAC$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

تأكد

أوجد قياس

3) FH

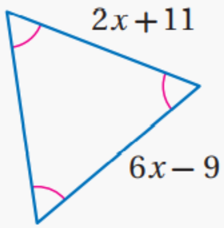


المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

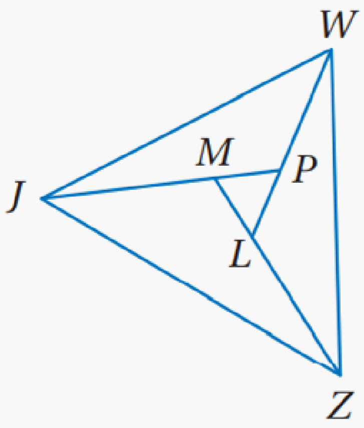
تدرب وحل

جبر: أوجد قيمة المتغير

(14

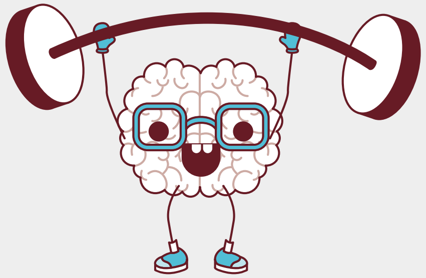


المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع



تحدٍّ: في الشكل المجاور إذا كان $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ ، فأثبت أن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$.

مهارات التفكير العليا



3-7

المثلثات والبرهان الإحداثي

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

المثلثات والبرهان الإحداثي

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

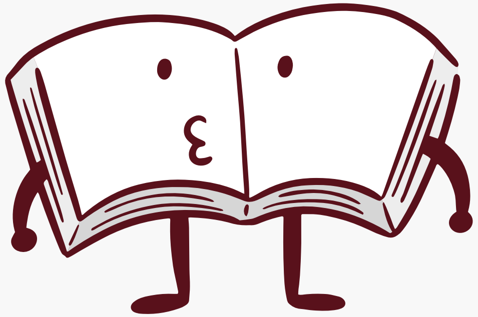
درست استعمال الهندسة الإحداثية لبرهان تطابق المثلثات.

والآن

- أرسم مثلثات، وأحدد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أكتب برهانًا إحداثيًا.

المفردات

البرهان الإحداثي
coordinate proof



المثلثات والبرهان الإحداثي

لماذا؟

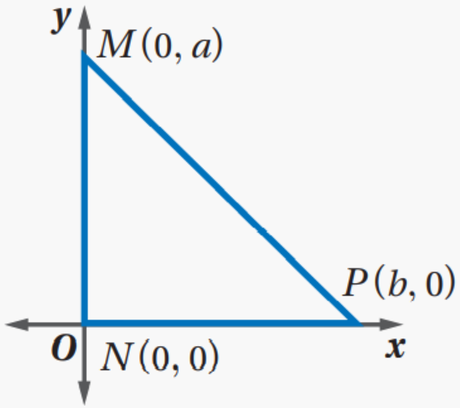
نظام تحديد الموقع العالمي (GPS) يستقبل البث من الأقمار الاصطناعية، والتي يمكن بواسطتها تحديد موقع السيارة. ويمكن الاستفادة من هذه المعلومات بالإضافة إلى برمجيات أخرى لتوجيه حركة السيارة.

المثلثات والبرهان الإحداثي

موقع المثلث وتسميته: كما هو الحال في نظام تحديد الموقع العالمي، فإن معرفة إحداثيات رؤوس شكل ما في مستوى إحداثيٍّ، يمكِّنك من اكتشاف خصائصه والتوصل إلى استنتاجات خاصة به. ويستعمل **البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى الإحداثي.

تحديد موقع المثلث وتسميته

مثال ١



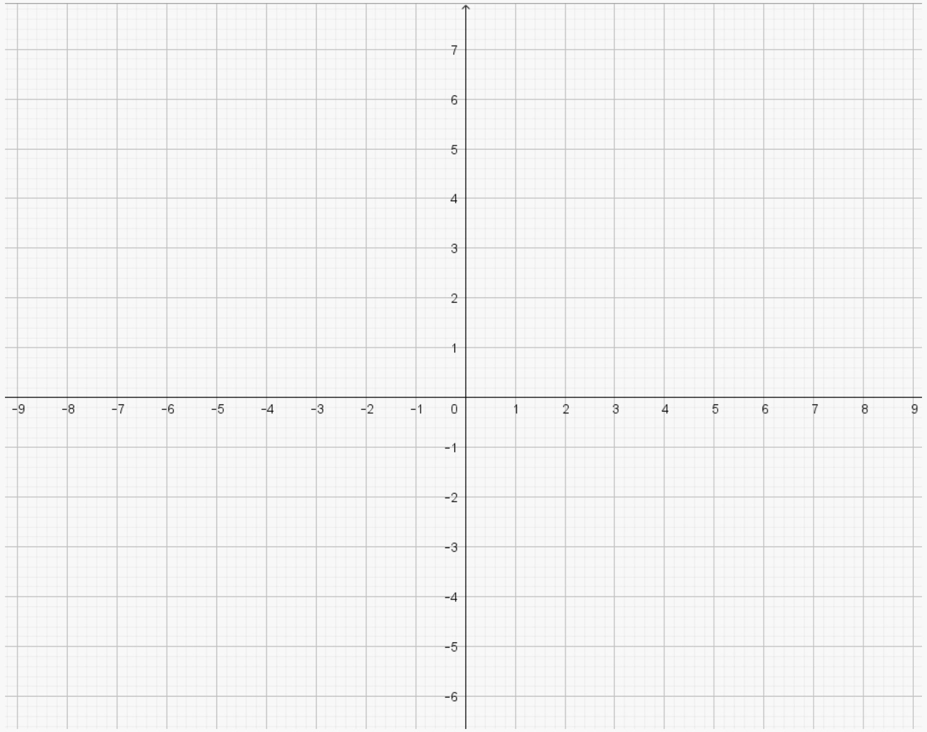
ارسم المثلث القائم MNP في المستوى الإحداثي، وسمّ رؤوسه على أن يكون طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة.

- يُحدّد طول الضلع الذي يقع على أحد المحورين بسهولة؛ لذا من الأفضل وضع ضلعَي القائمة على المحورين x, y.
- اجعل زاوية المثلث القائمة $\angle N$ على نقطة الأصل، فيكون ضلعا القائمة على المحورين هما x, y.
- ارسم المثلث في الربع الأول.
- ارسم M على المحور y، وبما أن طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، فإن إحداثيها x يساوي صفرًا، وإحداثيها y يساوي a.
- ارسم P على المحور x، وبما أن طول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة، فإن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي b.

تحديد موقع المثلث وتسميته

تحقق من فهمك

1) ارسم المثلث JKL المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي وسمِّ رؤوسه، على أن يكون طول قاعدته $\overline{JL}$ يساوي a وحدة، ويكون ارتفاعه b وحدة، والرأس K يقع على المحور y.



إرشادات للدراسة

الارتفاع على القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين ينصف القاعدة.

رسم المثلثات في المستوى الإحداثي

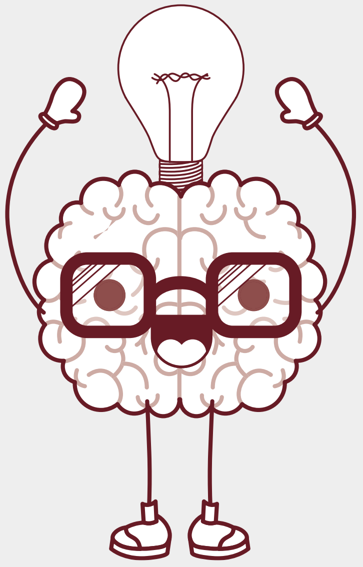
مفهوم أساسي

الخطوة 1: اجعل نقطة الأصل رأسًا للمثلث.

الخطوة 2: ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

الخطوة 3: ارسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

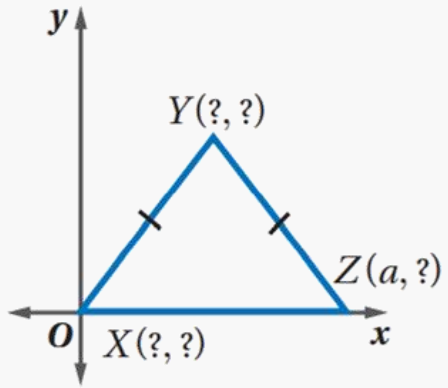
الخطوة 4: استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.



إيجاد الإحداثيات المجهولة

مثال ٢

أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث XYZ المتطابق الضلعين.

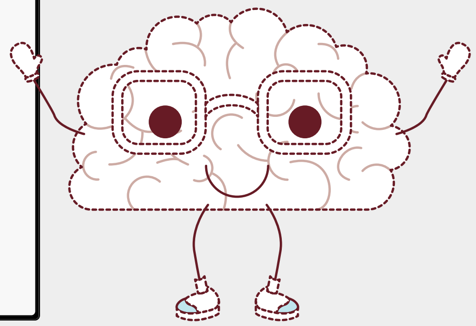


بما أن الرأس X يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$، ولأن الرأس Z يقع على المحور x ، فإن الإحداثي y له يساوي صفرًا، فتكون إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$ ، وبما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فإن الإحداثي x للنقطة Y يقع في منتصف المسافة بين $0, a$ ويكون $\frac{a}{2}$ ، أما الإحداثي y للنقطة Y فلا يمكننا إيجاده بدلالة a ، وإذا افترضناه b ، فتكون إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

إرشادات للدراسة

الزاوية القائمة

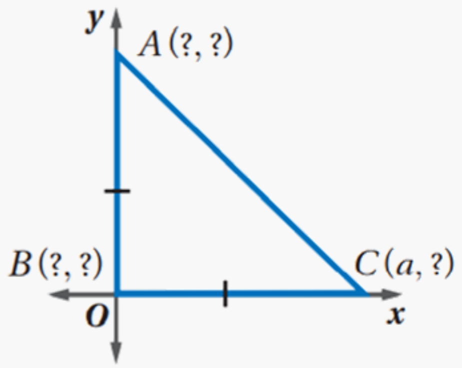
تقاطع المحور x مع المحور y يشكّل زاوية قائمة؛ ولذا يُعد هذا التقاطع المكان المناسب لموقع الزاوية القائمة.



إيجاد الإحداثيات المجهولة

تحقق من فهمك

2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.



كتابة البرهان الإحداثي

مثال ٣

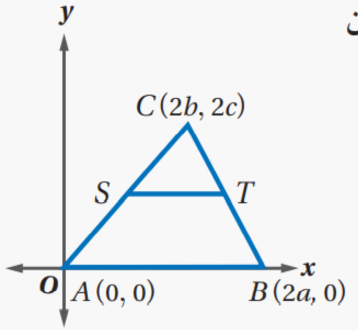
كتابة البرهان الإحداثي بعد رسم المثلث في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه، يمكنك استعمال البرهان الإحداثي؛ للتحقق من بعض الخصائص وبرهنة بعض النظريات.

إرشادات للدراسة

البرهان الإحداثي
تنطبق الإرشادات والطرائق المستعملة في هذا الدرس على كل المضلعات، ولا تقتصر على المثلثات.

اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

اجعل أحد رؤوس المثلث عند نقطة الأصل وسمِّه A، واستعمل إحداثيات من مضاعفات 2؛ لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2



المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه:
S نقطة منتصف $\overline{AC}$،
T نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

البرهان:

باستعمال قانون نقطة المنتصف، فإن إحداثيات S هي: $\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (b, c)$

وكذلك إحداثيات T هي: $\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$

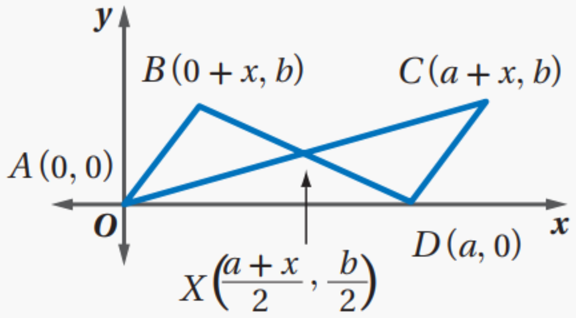
وبتطبيق قانون الميل، فإن ميل $\overline{ST}$ هو: $\frac{c-c}{a+b-b} = 0$

وميل $\overline{AB}$ هو: $\frac{0-0}{2a-0} = 0$

وبما أن ميل $\overline{ST}$ يساوي ميل $\overline{AB}$، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

كتابة البرهان الإحداثي

تحقق من فهمك



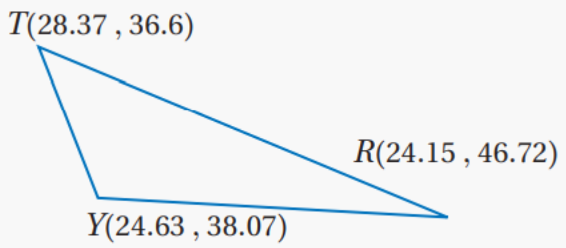
3) اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن:
$\triangle ABX \cong \triangle CDX$.

تصنيف المثلثات

مثال ٤

جغرافيا: إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لكلٍّ من الرياض وينبع وتبوك هي:
الرياض 24.15°N 46.72°E، ينبع 24.63°N 38.07°E، تبوك 28.37°N 36.6°E.

فاكتب برهانًا إحداثيًا يبيِّن أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.



إرشاد: يمكن التعبير عن إحداثي الرياض 24.15°N 46.72°E بالزوج المرتب $(24.15,\ 46.72)$ وكذلك بقية المدن.

الخطوة الأولى هي رسم شكل تقريبي لهذا المثلث، وتعيين المواقع الثلاثة وإحداثياتها على الرسم، ولتكن R تمثّل الرياض، و Y تمثّل ينبع ، و T تمثّل تبوك.

إذا لم يتطابق أي ضلعين في $\triangle RYT$ ، فسيكون مختلف الأضلاع. استعمل قانون المسافة بين نقطتين والآلة الحاسبة لإيجاد أطوال أضلاع المثلث.

$$RY=\sqrt{(24.15-24.63)^2+(46.72-38.07)^2}\approx 8.66$$

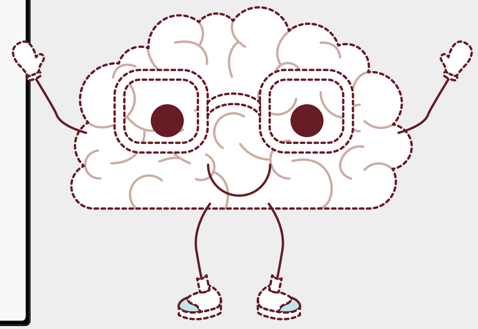
$$RT=\sqrt{(28.37-24.15)^2+(36.6-46.72)^2}\approx 10.96$$

$$YT=\sqrt{(24.63-28.37)^2+(38.07-36.6)^2}\approx 4.02$$

وبما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن فهو مثلث مختلف الأضلاع؛ أيْ أن المثلث الذي رؤوسه هي الرياض وينبع وتبوك مختلف الأضلاع.

الربط مع الحياة

يقع مثلث برمودا المبين في الخريطة في المحيط الأطلسي، وهو على شكل مثلث مختلف الأضلاع. وتقدر مساحته الحقيقية بـ 482344 ميلًا مربعًا.



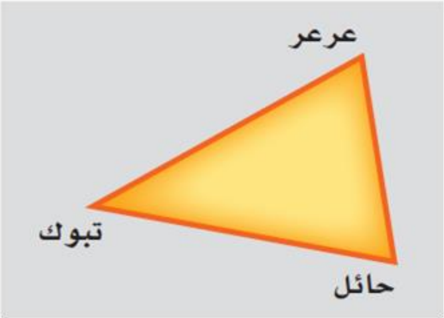
DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

تصنيف المثلثات

تحقق من فهمك

4) **جغرافيا:** يضم مجمَّع كشفيّ ثلاث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلثًا.
إذا كانت الإحداثيات التقريبية لمواقع هذه المدن الثلاث هي:
تبوك 28.37°N36.6°E ، عرعر 30.9°N41.13°E ، حائل 27.43°N41.68°E،
فاكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متطابق الضلعين تقريبًا.

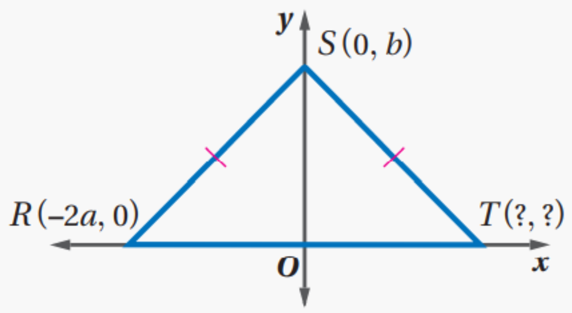


المثلثات والبرهان الإحداثي

تأكد

أوجد الإحداثيات المجهولة

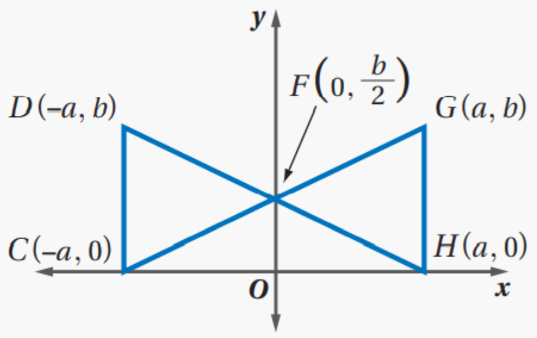
(3



المثلثات والبرهان الإحداثي

تأكد

5) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن $\triangle FDC \cong \triangle FGH$.

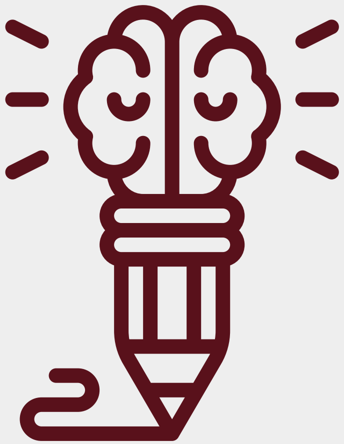


المثلثات والبرهان الإحداثي

تدرب وحل

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل عبارة من العبارات الآتية:

12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكّل مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.

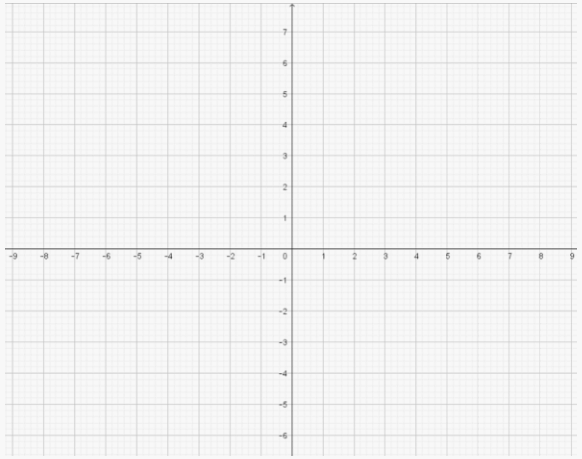


المثلثات والبرهان الإحداثي

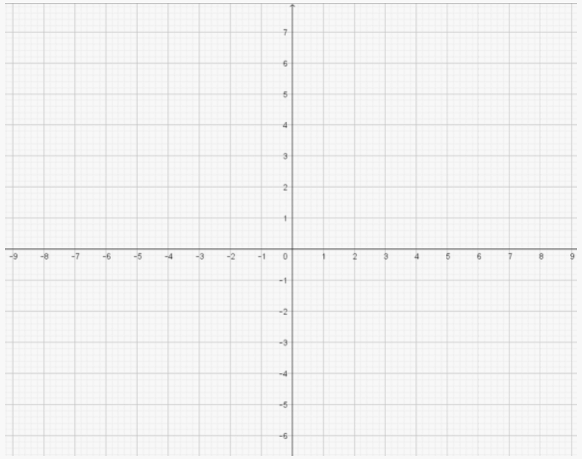
مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: إذا كانت إحداثيات النقطة J هي $(0, 0)$، والنقطة K هي $(2a, 2b)$، فأوجد إحداثيات النقطة L، على أن يكون $\triangle JKL$ من النوع المحدّد في كلٍّ من الأسئلة الثلاثة الآتية:

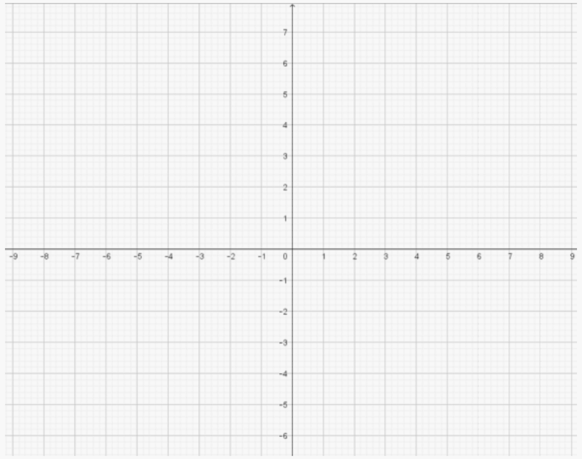
19) مثلث مختلف الأضلاع

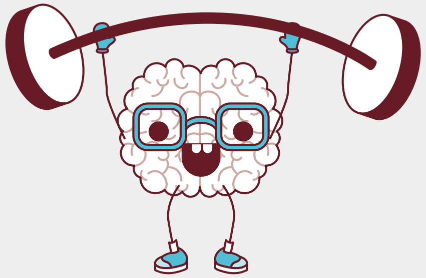


20) مثلث قائم الزاوية



21) مثلث متطابق الضلعين





الفصل الرابع

العلاقات في المثلث

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

الفصل الرابع

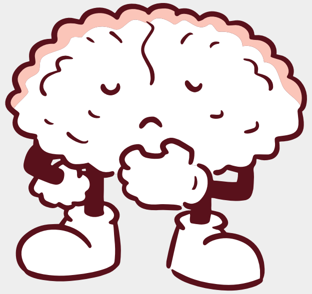
العلاقات في المثلث

التهيئة للفصل الرابع

العلاقات في المثلث

التصميم الداخلي:

تستعمل العلاقات في المثلث لإيجاد الأبعاد وقياسات الزوايا ومقارنتها. ويستعمل مهندسو التصميم الداخلي هذه العلاقات لتحسين تصاميمهم.



لماذا؟

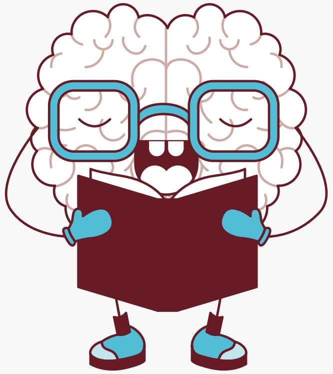
العلاقات في المثلث

فيما سبق

درستُ طرائق تصنيف المثلثات.

و الآن

- أتعرف القطع المستقيمة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- أتعرف العلاقات الخاصة بين أضلاع المثلث وزواياه.
- أكتب برهانًا غير مباشر.

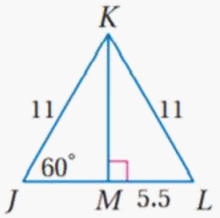


تشخيص الاستعداد

التهيئة

مراجعة سريعة

مثال 1



أوجد كلًّا من القياسين الآتيين :

a) JM b) $m\angle JKL$

a) بما أن $JK = KL$ (معطى)، فإن $m\angle J = m\angle L$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)، وبما أن $m\angle KMJ = m\angle KML = 90°$ $(KM \perp JM)$، فإن هذا يعني أن $\angle KMJ \cong \angle KML$، ويكون $\triangle KMJ \cong \triangle KML$ بحسب AAS، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $JM = ML = 5.5$

b) $m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$60° + m\angle JKL + 60° = 180°$ $m\angle J = m\angle L = 60°$

$120° + m\angle JKL = 180°$ بسّط

$m\angle JKL = 60°$ اطرح 120 من الطرفين

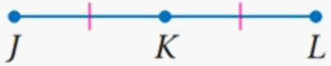
مثال 2

ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطى الآتي، إذا كانت K نقطة منتصف $\overline{JL}$، وارسم شكلًا يوضح تخمينك.

المعطيات: K نقطة منتصف $\overline{JL}$.

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

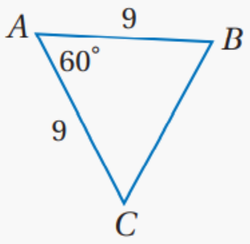
الرسم:



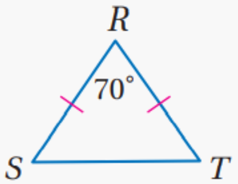
اختبار سريع

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين :

1) BC



2) $m\angle RST$



3) **حدائق:** يصمِّم عبد الله حوضًا لزراعة الورود على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول كلٍّ من ضلعَي القائمة 7 ft، فما طول الضلع الثالث (قرِّب إلى أقرب عدد صحيح)؟

الحل

اختبار سريع

الحل

للأسئلة 4–6 ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطيات وارسم شكلًا يوضح تخمينك:

4) $\angle 4$, $\angle 3$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم.

5) $JKLM$ مربع.

6) $\overrightarrow{BD}$ منصّف لِـ $\angle ABC$.

7) **تبرير:** حدّد ما إذا كان التخمين التالي المبني على المعطيات الواردة صحيحًا دائمًا أو صحيحًا أحيانًا أو غير صحيح أبدًا. وفسِّر إجابتك.

المعطيات: D, E, F ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

التخمين: $DE + EF = DF$

4-1

المنصفات في المثلث

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

المنصفات في المثلث

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ منصّف القطعة المستقيمة ومنصّف الزاوية.

والآن

- أتعرَّف الأعمدة المنصِّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرَّف منصِّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات

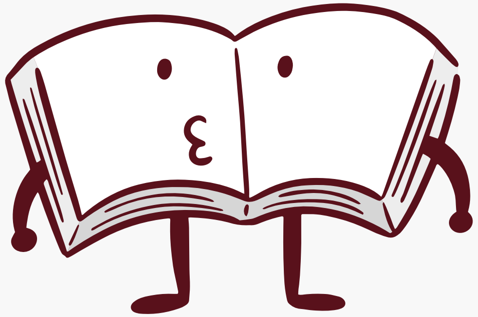
العمود المنصِّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

مركز الدائرة الخارجية للمثلث
circumcenter

مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter



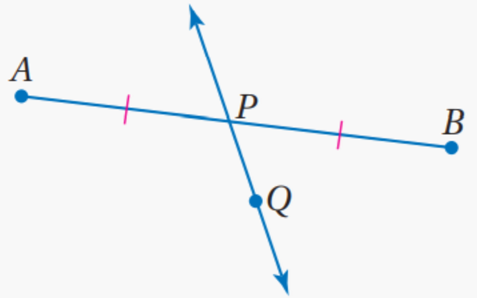
المنصفات في المثلث

إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كلٍّ من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

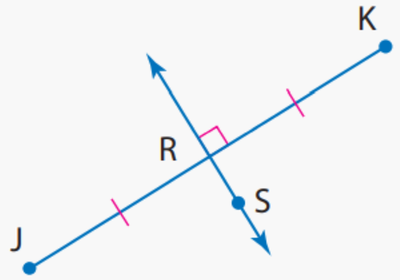
لماذا؟

المنصفات في المثلث

الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقًا أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها، وإذا كان المنصّف عموديًّا على القطعة سُمِّي **عمودًا منصّفًا** .



$\overleftrightarrow{PQ}$ منصّف لـِ $\overline{AB}$



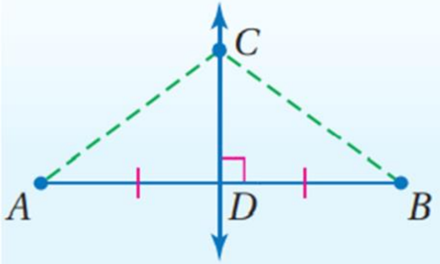
$\overleftrightarrow{RS}$ عمود منصّف لـِ $\overline{JK}$

تذكّر أنّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاطٍ في المستوى، تقع كلٌّ منها على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

الأعمدة المنصفة

نظريات

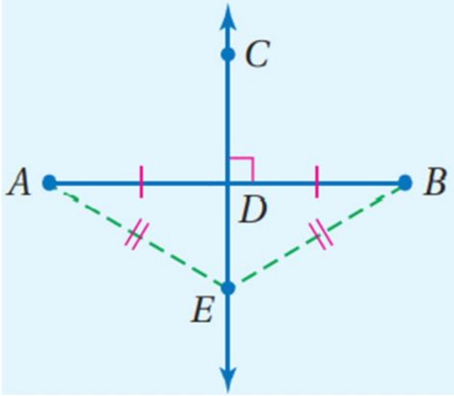
4.1 نظريّة العمود المنصّف



كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة.

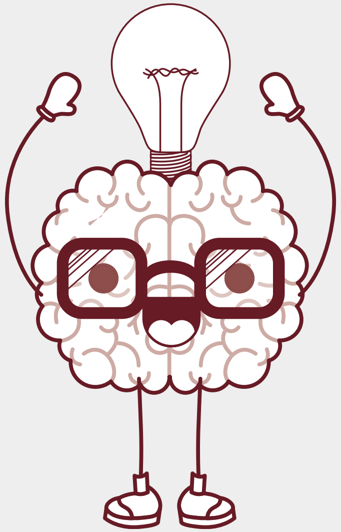
مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ عمودًا منصّفًا لـ $\overline{AB}$، فإن $AC = BC$.

4.2 عكس نظريّة العمود المنصّف



كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AE = BE$، و $\overleftrightarrow{CD}$ هو العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$، فإن E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$.

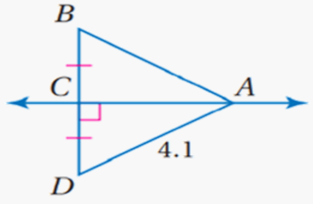


استعمال نظريات العمود المنصّف

مثال ١

أوجد كلّ قياس مما يأتي :

AB (a



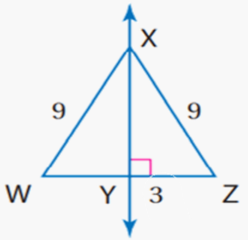
من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن

$\overleftrightarrow{CA}$ عمودٌ منصّف لِـ $\overline{BD}$

$AB = AD$ نظريّة العمود المنصَف

$AB = 4.1$ عوَض

WY (b



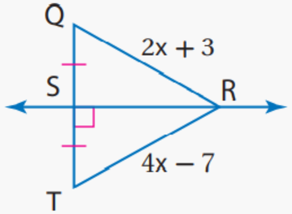
$WX = ZX, \overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$ معطيات

$\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصّف لِـ $\overline{WZ}$ عكس نظرية العمود المنصَف

$WY = YZ$ تعريف منصَف قطعة مستقيمة

$WY = 3$ عوَض

RT (c



$\overleftrightarrow{SR}$ عمود منصّف $\overline{QT}$.

$RT = RQ$ نظريّة العمود المنصَف

$4x - 7 = 2x + 3$ عوَض

$2x - 7 = 3$ اطرح $2x$ من الطرفين

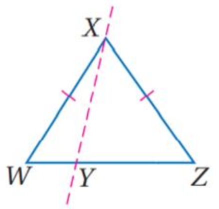
$2x = 10$ اجمع 7 إلى الطرفين

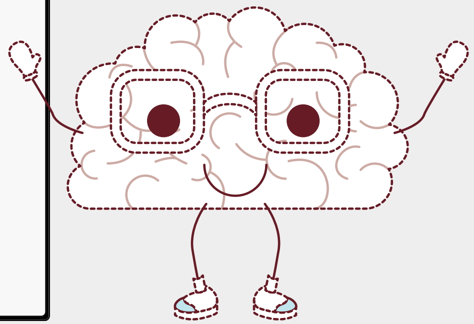
$x = 5$ اقسم الطرفين على 2

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$.

إرشادات للدراسة

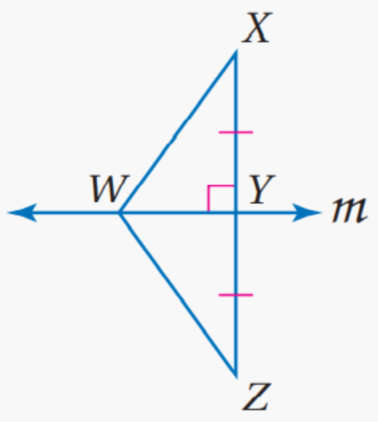
المعلومة $WX = ZX$ لوحدها لا تعدُ كافية لاستنتاج أن $\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصف لـ $\overleftrightarrow{WZ}$.





استعمال نظريات العمود المنصّف

تحقق من فهمك



1A) إذا كان $WZ = 25.3 , YZ = 22.4 , WX = 25.3$ ، فأوجد طول $\overline{XY}$.

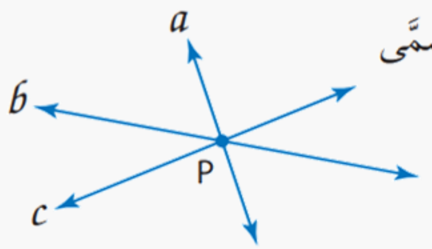
1B) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$، فأوجد طول $\overline{WX}$.

1C) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = a + 12 , WX = 4a - 15$
فأوجد طول $\overline{WX}$.

نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

نظرية 4.3

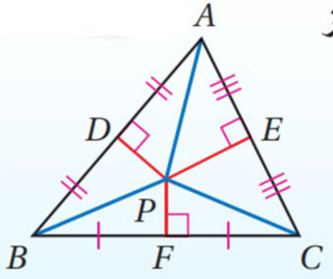
عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة، فإنّ هذه المستقيمات تُسمَّى **مستقيمات متلاقية**. والنقطة التي تلتقي فيها المستقيمات تسمّى **نقطة التلاقي**. وبما أنّ لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإنّ له ثلاثة أعمدة منصّفة. وهذه الأعمدة المنصّفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة **مركز الدائرة الخارجية للمثلث**.

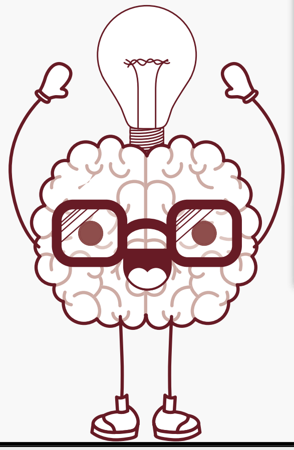


تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P.

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمّى مركز الدائرة الخارجية للمثلث، وهي دائرة تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.

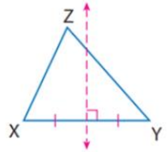
مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الخارجية للمثلث $\triangle ABC$، فإنّ $PB = PA = PC$





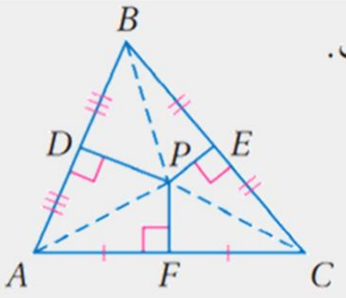
إرشادات للدراسة

العمود المنصّف
ليس من الضروري أن يمرّ العمود المنصّف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل. فمثلًا في $\triangle XYZ$ أدناه العمود المنصّف لـ $\overline{XY}$ لا يمرُّ بالرأس Z.



نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث

برهان



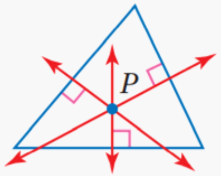
المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

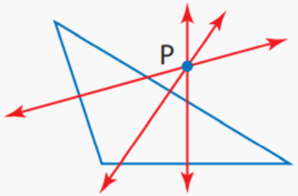
برهان حرّ:

بما أنّ P تقع على العمود المنصّف لِـ $\overline{AC}$، فإنها متساوية البُعد عن A, C. أي أن $AP = CP$. والعمود المنصّف لِـ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P. لذلك يكون $CP = BP$، وتبعًا لخاصيّة التعدّي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$؛ إذن $AP = CP = BP$.

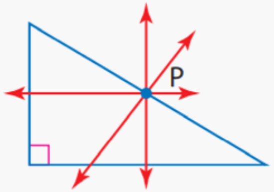
يمكن أن يقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا



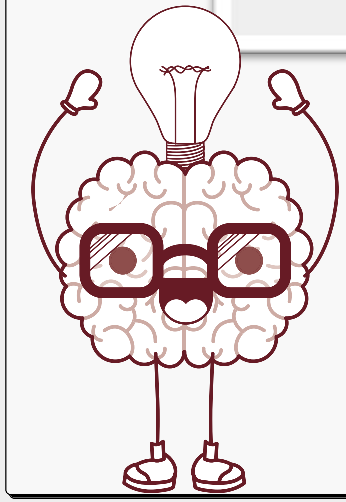
مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية

إرشادات للدراسة

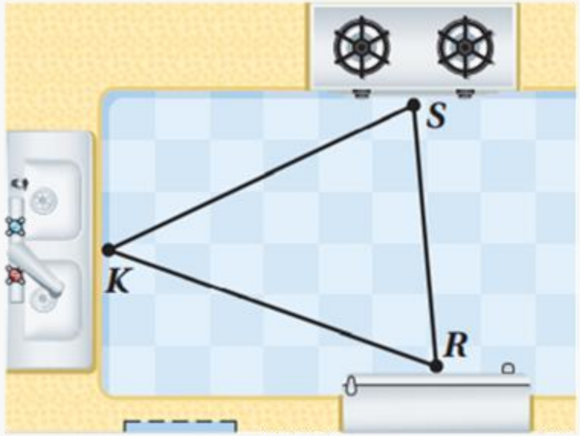
مركز الدائرة الخارجية للمثلث: هو مركز الدائرة التي تمر برؤوس هذا المثلث.



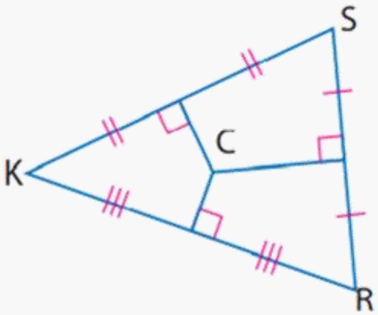
استعمال نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث

مثال ٢

تصميم داخلي: تطبيقًا للفكرة التي وردت في فقرة (لماذا؟)، إذا وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R.



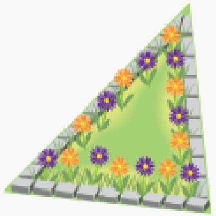
بحسب نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.



انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة الخارجية للمثلث SKR. وهي النقطة المطلوبة.

استعمال نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث

تحقق من فهمك

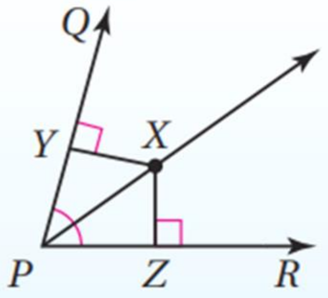


2) يريد عليّ أن يضع مرشَّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل . فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟

منصّفات الزوايا

نظرية

4.4 نظرية منصّف الزاوية

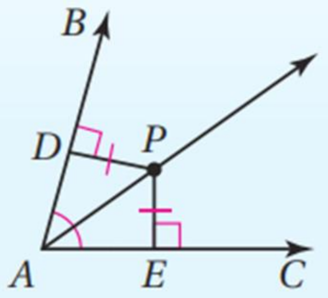


كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّفًا لِـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$, $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$

فإن $DF = FE$.

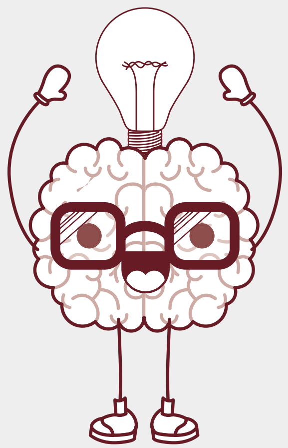
4.5 عكس نظريّة منصّف الزاوية



كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$ ،

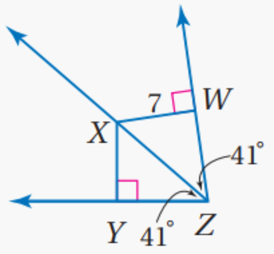
فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$



استعمال نظريتَي منصّفات الزاويا

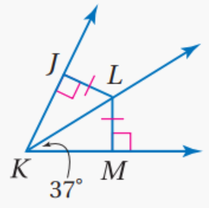
مثال ٣

أوجد كلّ قياس مما يأتي :



a) XY

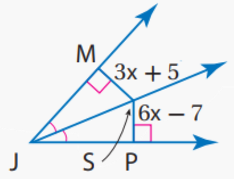
$XY = XW$	نظريّة منصّف الزاوية
$XY = 7$	عوّض



b) $m\angle JKL$

بما أن $LJ = LM$ ، $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}, \overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}$ ، فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصّف الزاوية، فإن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$

$\angle JKL \cong \angle LKM$	تعريف منصّف الزاوية
$m\angle JKL = m\angle LKM$	تعريف الزوايا المتطابقة
$m\angle JKL = 37°$	عوّض



c) SP

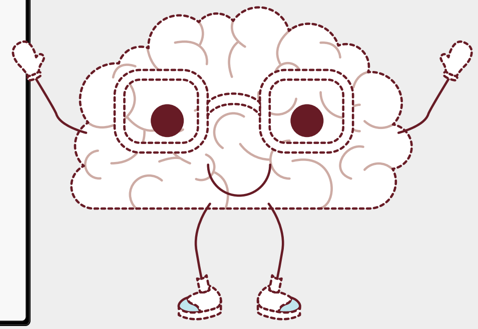
$SP = SM$	نظريّة منصّف الزاوية
$6x - 7 = 3x + 5$	عوّض
$3x - 7 = 5$	اطرح $3x$ من الطرفين
$3x = 12$	اجمع 7 إلى الطرفين
$x = 4$	اقسم الطرفين على 3

إذن $SP = 6(4) - 7 = 17$.

إرشادات للدراسة

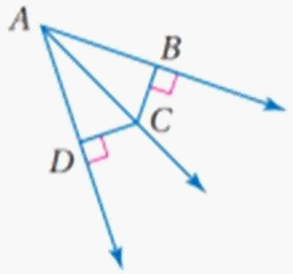
منصّف الزوايــة

لا تعدّ المعلومة $JL = LM$ في الفرع b لوحدها كافية لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$.



استعمال نظريتَي منصّفات الزاوايا

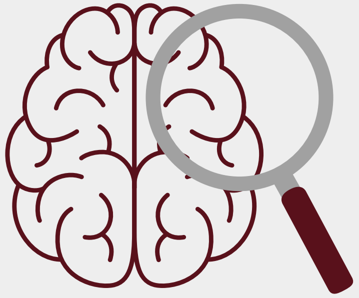
تحقق من فهمك



3A) إذا كان: $DC = 5$, $BC = 5$, $m\angle BAC = 38°$ ، فأوجد $m\angle DAC$

3B) إذا كان: $DC = 10$, $m\angle DAC = 40°$, $m\angle BAC = 40°$ ، فأوجد BC

3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصّف $\angle DAB$ ، و $DC = 9x - 7$, $BC = 4x + 8$
فأوجد BC



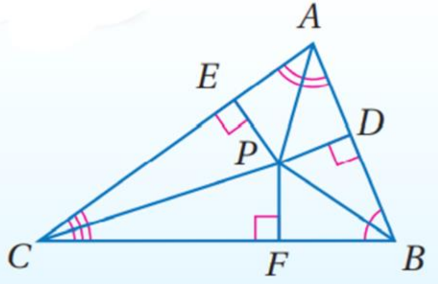
نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

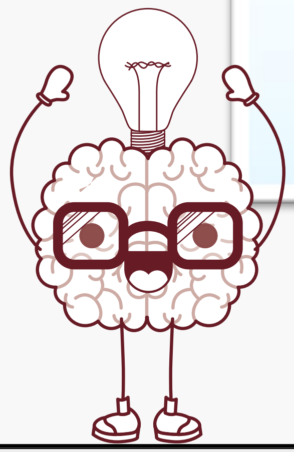
نظرية
4.6

وكما هو الحال في الأعمدة المنصّفة، بما أن للمثلث ثلاث زوايا، فإنّ له ثلاثة منصّفات للزوايا تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

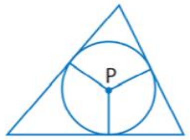
مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC،
فإنّ $PD = PE = PF$





قراءة الرياضيات

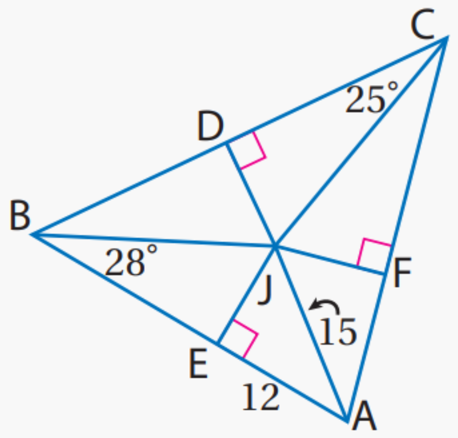
مركز الدائرة الداخلية للمثلث
هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع داخل المثلث دائمًا.



استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

مثال ٤

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle ABC$.



a) JF

بما أن J على أبعادٍ متساوية من أضلاع $\triangle ABC$، بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$ ؛ لذا أوجد JE باستعمال نظريّة فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	عوّض
$JE^2 + 144 = 225$	$12^2 = 144,\ 15^2 = 225$
$JE^2 = 81$	اطرح 144 من الطرفين
$JE = \pm 9$	خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ إذن نأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.

وبما أن $JE = JF$ فإنّ $JF = 9$

استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

مثال ٤

b) $m\angle JAC$

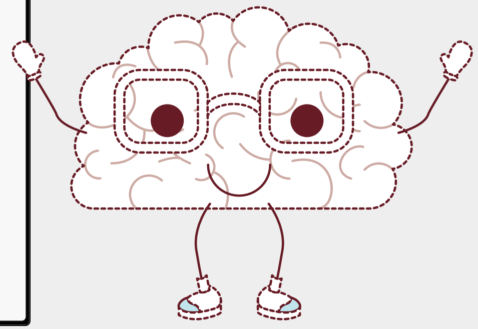
بما أنّ $\overrightarrow{BJ}$ ينصّف $\angle CBE$ ، فإنّ $m\angle CBE = 2m\angle JBE$ ؛ إذن $m\angle CBE = 2(28°) = 56°$.

وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$ ؛ إذن $m\angle DCF = 2(25°) = 50°$.

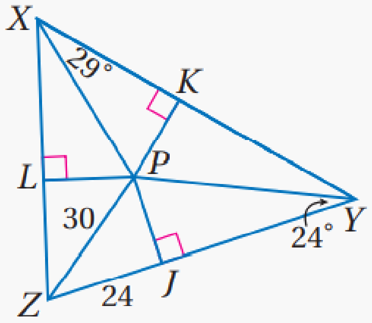
$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$56° + 50° + m\angle FAE = 180°$	$m\angle CBE = 56°;\ m\angle DCF = 50°$
$106° + m\angle FAE = 180°$	بسّط.
$m\angle FAE = 74°$	اطرح $106°$ من الطرفين.

وبما أنّ $\overline{AJ}$ ينصّف $\angle FAE$، فإنّ $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أنّ $m\angle JAC = \frac{1}{2} m\angle FAE$ ،

إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(74°) = 37°$.



استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

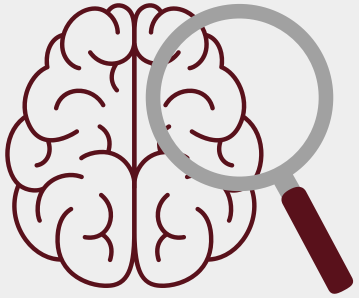


تحقق من فهمك

إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$، فأوجد القياسين الآتيين:

4A) PK 18

4B) $\angle LZP$ 37°

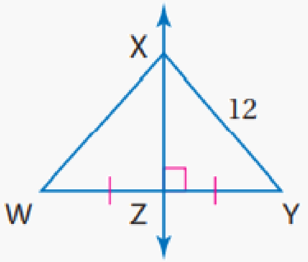


تأكد

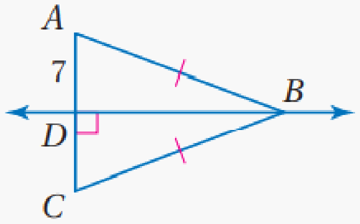
المنصفات في المثلث

أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

1) XW



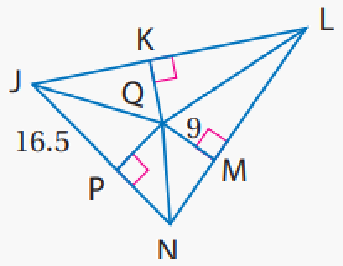
2) AC



المنصفات في المثلث

تأكد

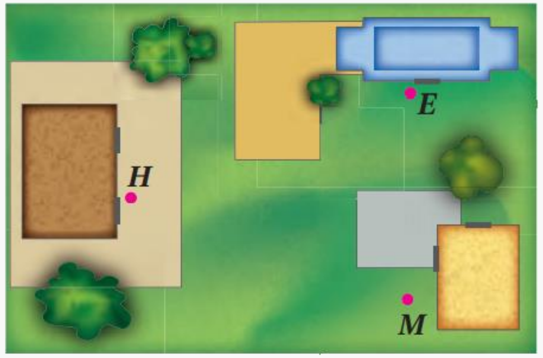
8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$ ، فأوجد طول $\overline{JQ}$.



المنصفات في المثلث

تدرب وحل

12) مدرسة: يتكون مجمّع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبيّنة في الصورة المجاورة. انسخ مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.



المنصفات في المثلث

مهارات التفكير العليا

اكتب: قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبيّنًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتَي التلاقي.

4-2

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ الأعمدة المنصِّفة ومنصفات الزوايا في المثلث واستعمالها.

والآن

- أتعرّف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرّف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

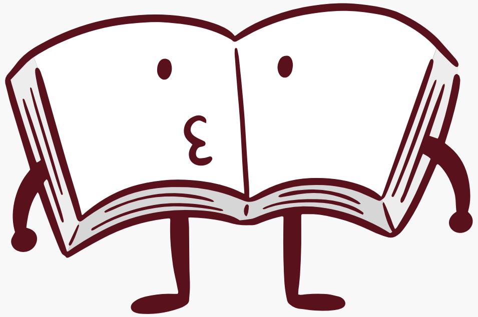
المفردات

القطعة المتوسطة
median

مركز المثلث
centroid

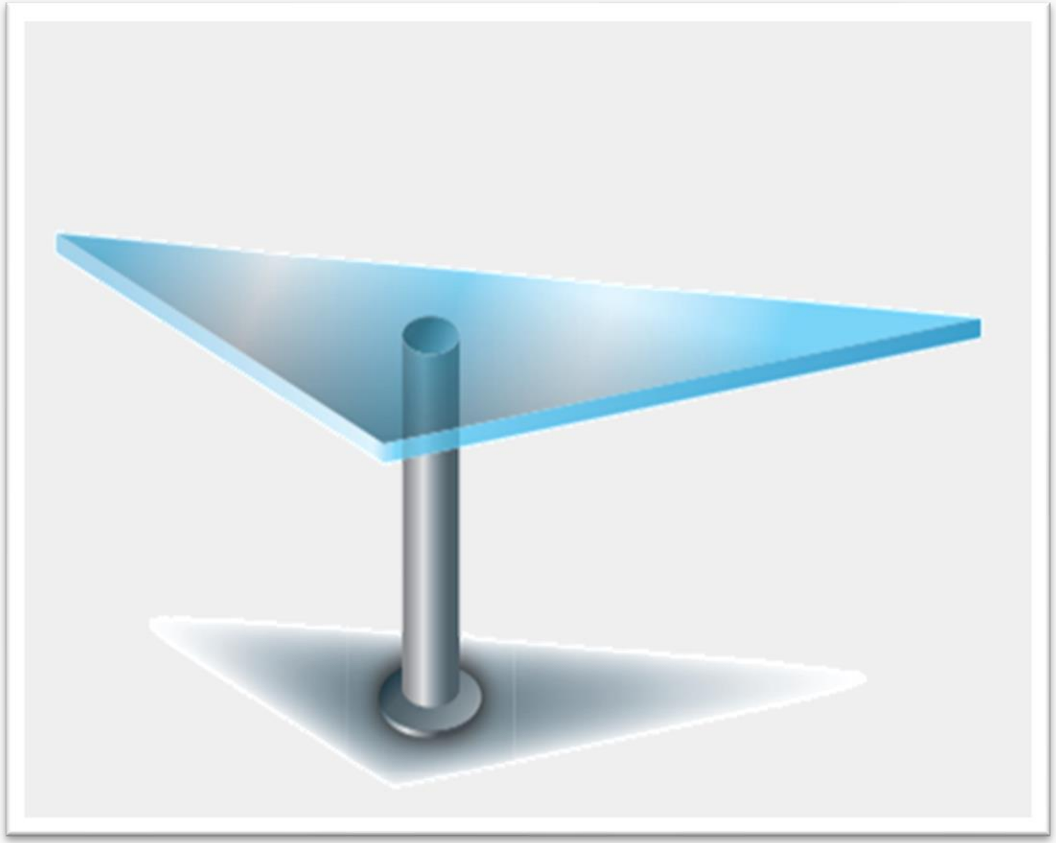
الارتفاع
altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter



القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

لماذا؟

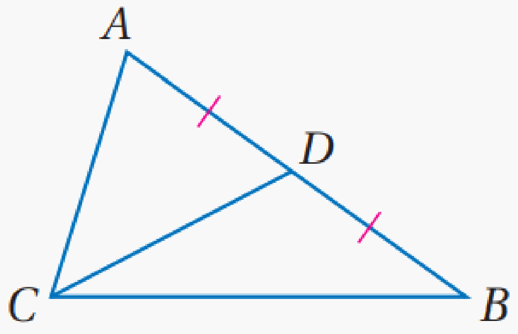


صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن، يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يرتكز على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو في حاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها، ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

القطع المتوسطة : **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقَى في نقطة تُسمّى **مركز المثلث**، وتقع داخله دائمًا.



$\overline{CD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$.

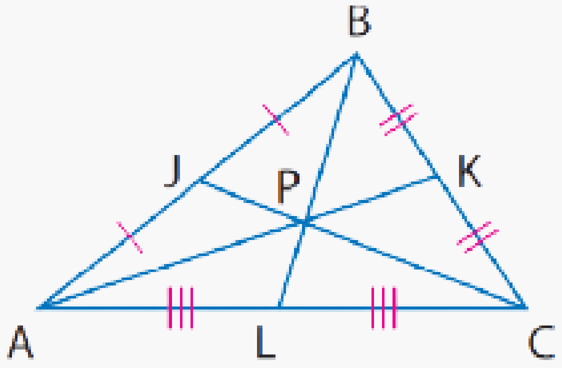
نظرية مركز المثلث

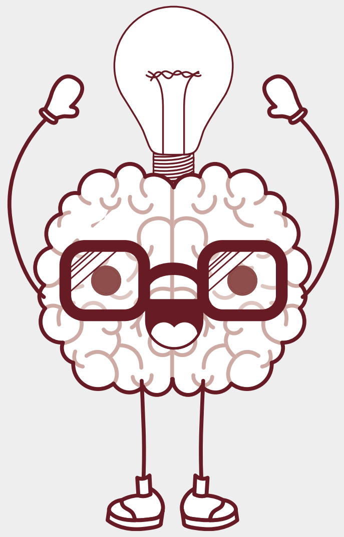
نظرية
4.7

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثُلُثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنَّ

$$AP = \frac{2}{3}AK ,\; BP = \frac{2}{3}BL ,\; CP = \frac{2}{3}CJ$$

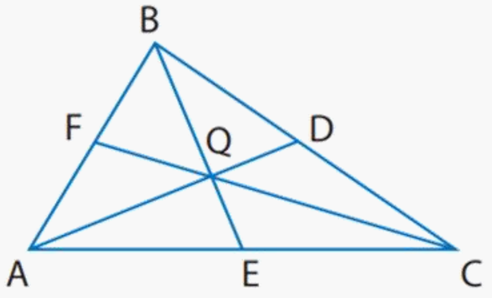




استعمال نظرية مركز المثلث

مثال ١

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$، $BE = 9$.
فأوجد كلًّا من QE , BQ .



$BQ = \frac{2}{3}\ BE$	نظرية مركز المثلث
$= \frac{2}{3}(9) = 6$	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	جمع أطوال القطع المستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	اطرح 6 من الطرفين

استعمال نظرية مركز المثلث

تحقق من فهمك

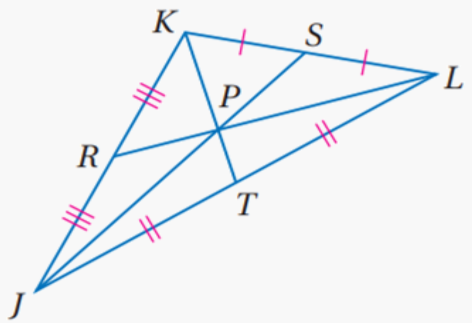
في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين :

1A) FQ

1B) QC

استعمال نظرية مركز المثلث

مثال ٢



في $\triangle JKL$، إذا كان $PT = 2$ ، فأوجد KP.

بما أنّ $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ ، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$ ، وبالمثل نستنتج أن S, T هما نقطتا منتصفَي $\overline{KL}, \overline{LJ}$ على الترتيب؛ لذا فإن $\overline{JS}, \overline{KT}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$ ، لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3} KT$	نظرية مركز المثلث
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	جمع القطع المستقيمة والتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3} KP + \frac{4}{3}$	خاصيّة التوزيع
$\frac{1}{3} KP = \frac{4}{3}$	اطرح $\frac{2}{3} KP$ من الطرفين
$KP = 4$	اضرب الطرفين في 3

إرشادات للدراسة

استعمال الحس العددي

في المثال 2 ، يمكنك أيضًا استعمال الحسَ العددي لإيجاد KP . بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$ ، فإن $PT = \frac{1}{3}KT$ وكذلك $KP = 2PT$ ؛ لذا إذا كان $PT = 2$ فإن $KP = 2(2) = 4$.

تحقق من فهمك

استعمال نظرية مركز المثلث

في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $JP = 9$, $RP = 3.5$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين:

2A) PL

2B) PS

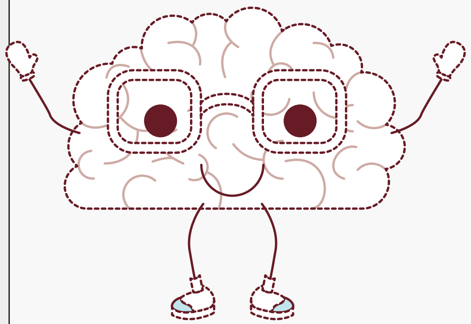
إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

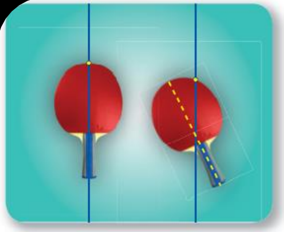
مثال ٣

فن الأداء: في مهرجان رياضي يُخطط عبدالعزيز لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور، وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10), (5, 0), (9, 5)$.
ما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبّت المثلث عندها حتى يحفظه متوازنًا؟ وضح إجابتك.

افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة، وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

خطّط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10), B(5, 0), C(9, 5)$، وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقَى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ إذن استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعدٍ من الرأس يساوي ثُلثَي طول القطعة المتوسطة.





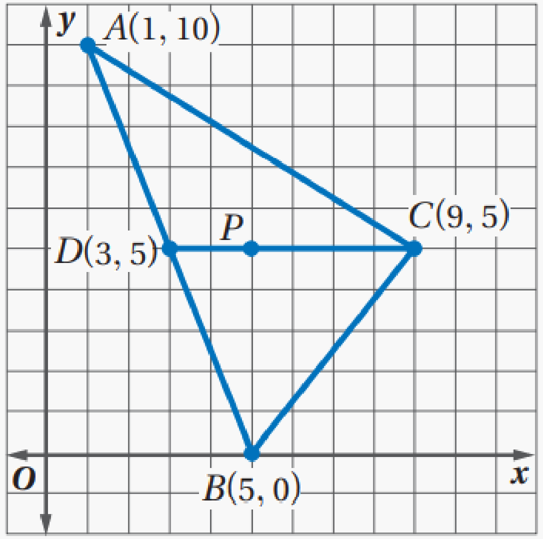
الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)
يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواء أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:
علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح، ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

مثال ٣

حل: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًّا .



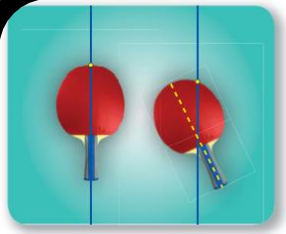
أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ الذي طرفاه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$.

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عيّن النقطة D ، ولاحظ أن $\overline{DC}$ أفقيّة، والمسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تساوي $9 - 3$ ، أيْ 6 وحداتٍ.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ $PC = \frac{2}{3}DC$ ؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$ ، أو 4 وحدات إلى اليسار من C، وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

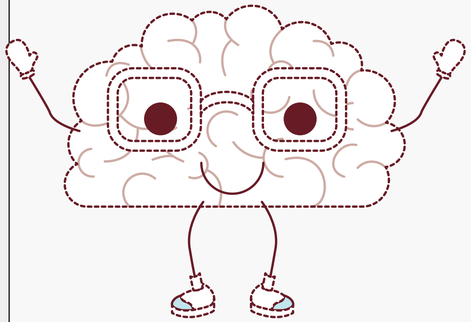


الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)

يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:

علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح. ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

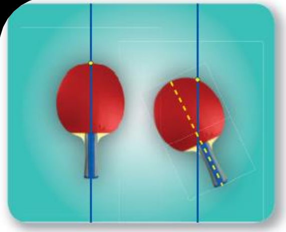


إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

مثال ٣

تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أنّ نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$، وأن $\overline{BF}$ رأسيّة فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$؛ أيْ 7.5 وحداتٍ، وعلى ذلك يكون $\overline{PB}$ يساوي $\frac{2}{3}(7.5)$ أيْ 5، إذن P تقع على بعد 5 وحداتٍ إلى أعلى من B.

وتكون إحداثيات P هي $(5, 0+5)$ أي $(5, 5)$. ✓

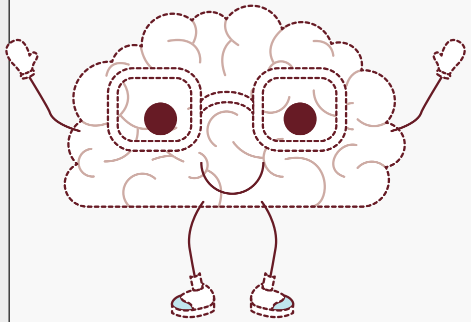


الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)

يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:

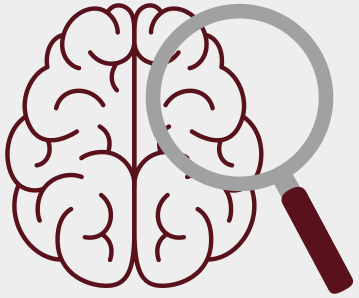
علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح. ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.



تحقق من فهمك

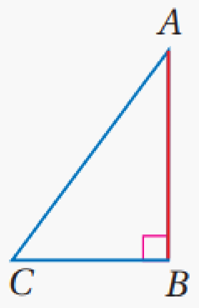
إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(12, 1)$, $(6, 11.5)$, $(0, 4)$، فما إحداثيات النقطة التي يتزن عندها هذا المثلث؟ وضّح إجابتك.

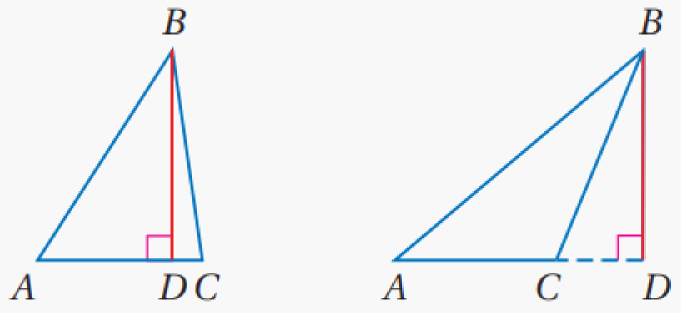


القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

ارتفاعات المثلث: **ارتفاع المثلث** هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



$\overline{AB}$ هو الارتفاع إلى $\overline{CB}$.



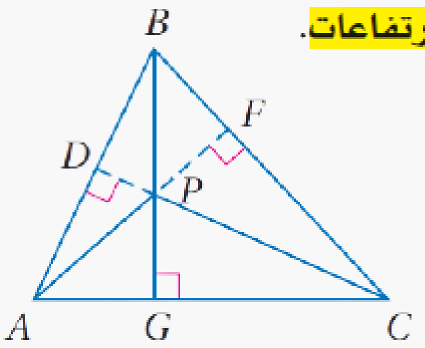
$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقَى المستقيمات التي تحويها في نقطة مشتركة.

ملتقى الارتفاعات

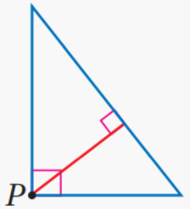
مفهوم أساسي

تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أيّ مثلث في نقطة تُسمَّى **ملتقى الارتفاعات**.

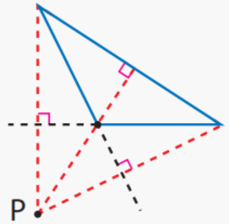


مثال: تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC.

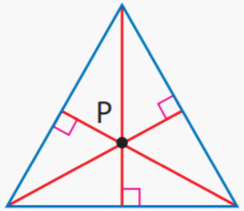
يمكن أن تلتقي الارتفاعات في مثلث داخله أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث قائم الزاوية



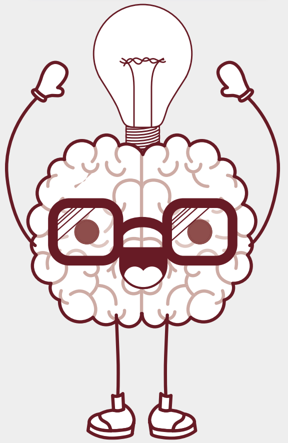
مثلث منفرج الزاوية



مثلث حاد الزوايا

قراءة الرياضيات

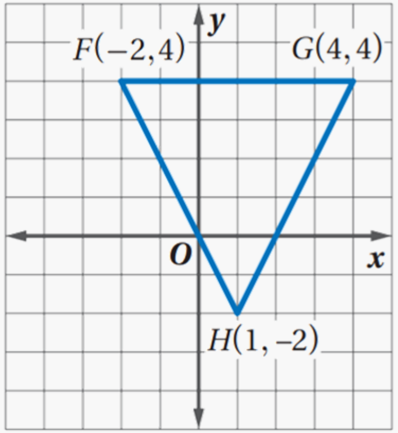
ارتفاع المثلث
يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.



إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

مثال ٤

هندسة إحداثيّة: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2,4)$, $G(4,4)$, $H(1,-2)$، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثّل $\triangle FGH$ بيانيًّا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$

بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي $\frac{4-(-2)}{4-1}=2$

فإنّ ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y-4=-\frac{1}{2}[x-(-2)]$	$(x_1,y_1)=F(-2,4)$, $m=-\frac{1}{2}$
$y-4=-\frac{1}{2}(x+2)$	بسّط
$y-4=-\frac{1}{2}x-1$	خاصية التوزيع
$y=-\frac{1}{2}x+3$	اجمع 4 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

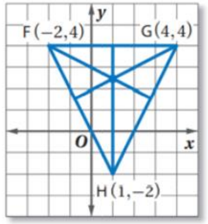
بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $\frac{-2-4}{1-(-2)}=-2$، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y-4=\frac{1}{2}(x-4)$	$(x_1,y_1)=G(4,4)$, $m=\frac{1}{2}$
$y-4=\frac{1}{2}x-2$	خاصية التوزيع
$y=\frac{1}{2}x+2$	اجمع 4 إلى الطرفين

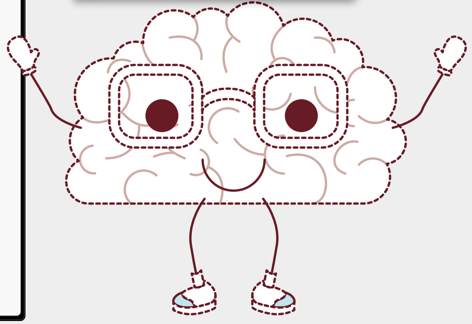
إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $(1, 2\frac{1}{2})$؛ لذا فالجواب معقول.



إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

مثال ٤

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x ، فينتج أن $2y = 5$ ، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$

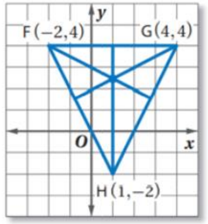
$y = \frac{1}{2}x + 2$	معادلة الارتفاع من G
$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$	$y = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$	اطرح $\frac{4}{2}$ ، أو 2 من الطرفين
$1 = x$	اضرب الطرفين في 2

إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$ هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$

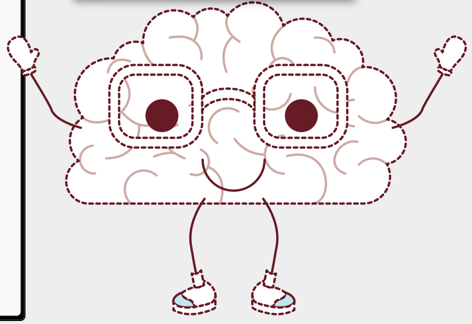
إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.

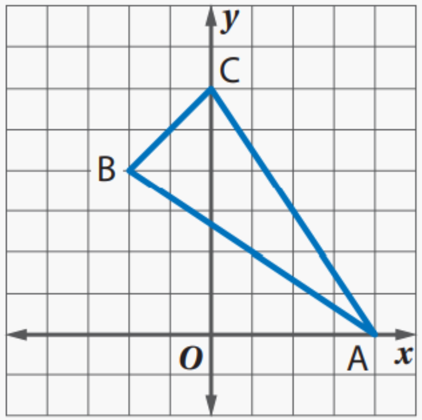


نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$؛ لذا فالجواب معقول.

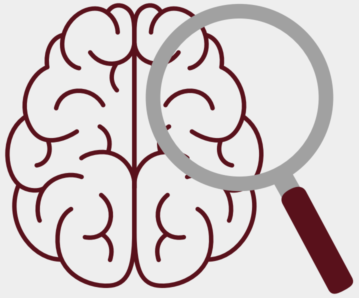


إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

تحقق من فهمك



4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.



القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

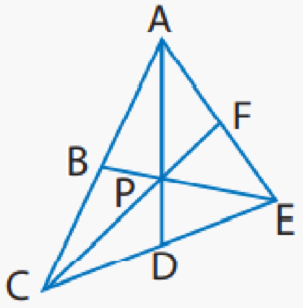
تأكد

إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $AD = 15$, $PF = 6$.

فأوجد كلّ طول مما يأتي:

1) PC

2) AP



القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

تأكد

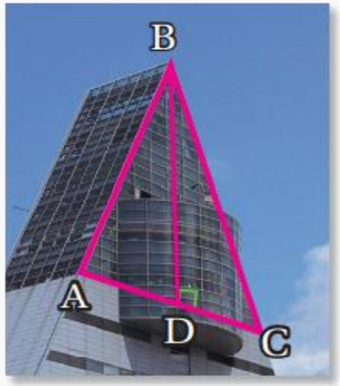
4) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه:
$A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

تدرب وحل

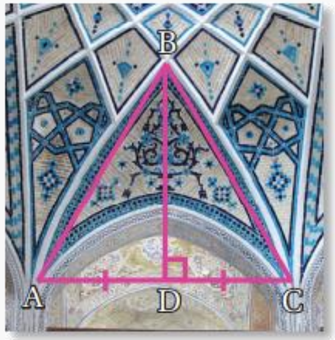
صنّف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصّف:

13



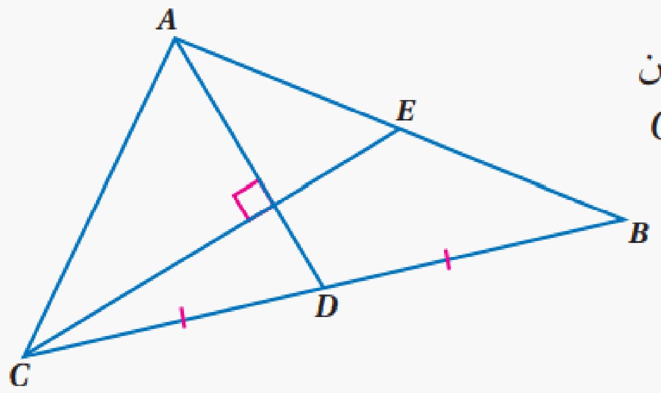
14

15

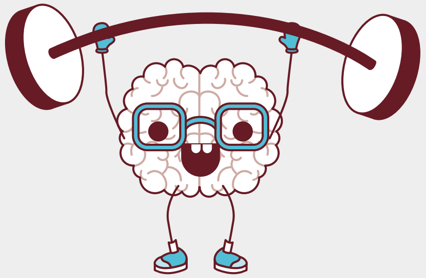


القطع المتوسطة
والارتفاعات في المثلث

مهارات التفكير العليا



29) تحدّ: في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{CE}$, $\overline{AD}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CE = 9$, $AB = 10$, $\overline{CE} \perp \overline{AD}$ ، فأوجد CA



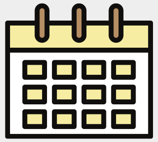
4-3

المتباينات في المثلث

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

رابط الدرس الرقمي

المتباينات في المثلث

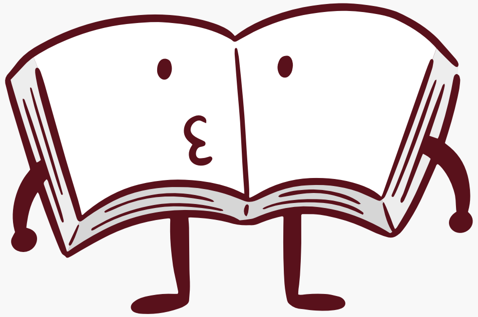


فيما سبق

درستُ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

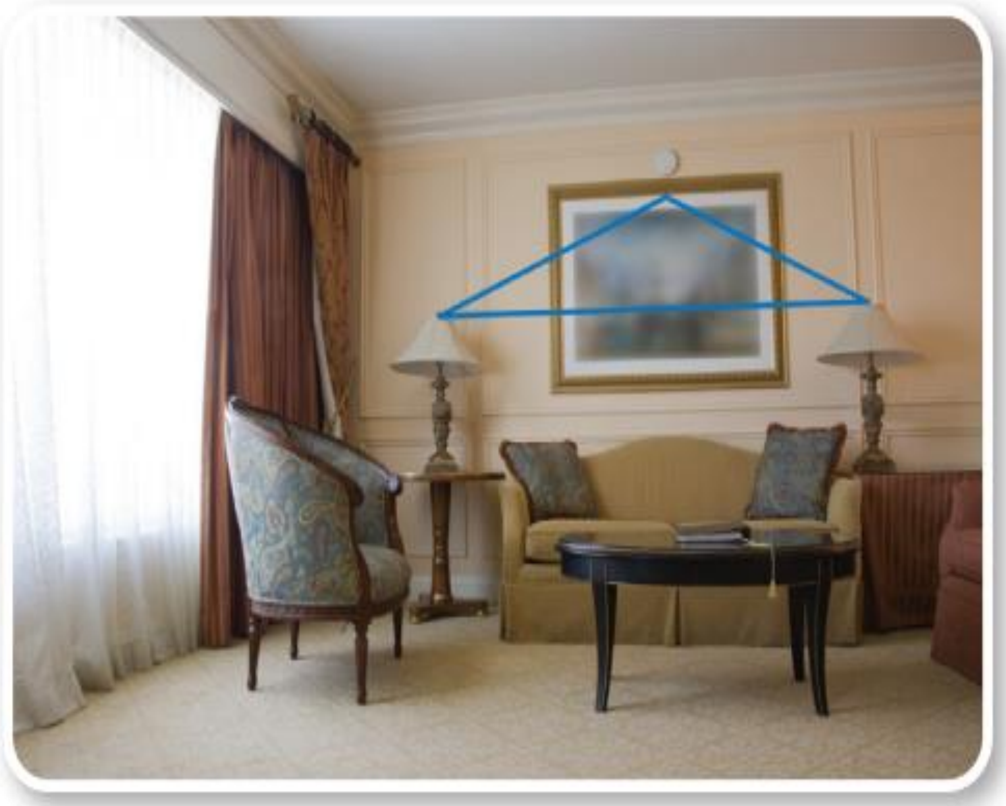
والآن

- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبّقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبّق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.



المتباينات في المثلث

لماذا؟



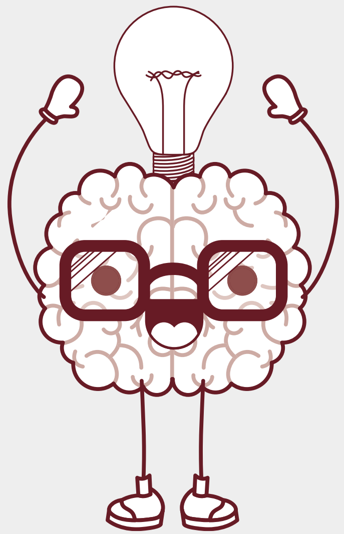
يستعمل المصمِّمون طريقة تُسمىّ التثليث؛ لإعطاء الغرفة مظهرًا يُوحي بالاتساع، ومن الأمثلة على هذه الطريقة وضع طاولة صغيرة عند كل طرف من طرفَي أريكة مع وضع لوحة فوقها. على أن يكون قياس كل زاوية من زاويتَي قاعدة المثلث أقل من قياس الزاوية الثالثة.

تعريف المتباينة

مفهوم أساسي

متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتُستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.

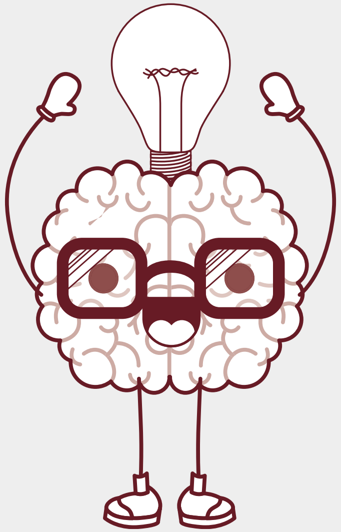
التعبير اللفظي	لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $a > b$، إذا وفقط إذا وُجِدَ عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$
مثال	إذا كان $5 = 2 + 3$، فإنّ $5 > 2$



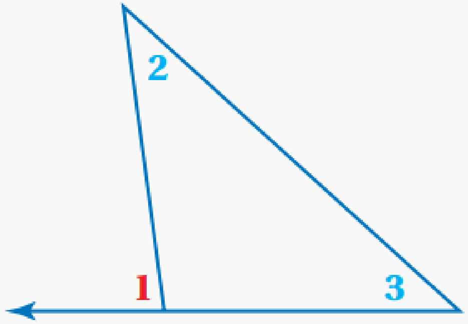
خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية

مفهوم أساسي

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c	
خاصيّة المقارنة	$a > b$ أو $a = b$ أو $a < b$.
خاصيّة التعدّي	1) إذا كان $a < b , b < c$ ، فإن $a < c$. 2) إذا كان $a > b , b > c$ ، فإن $a > c$.
خاصيّة الجمع	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصيّة الطرح	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.



المتباينات في المثلث



يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقية.

تأمّل $\angle 3$, $\angle 2$, $\angle 1$ في الشكل المجاور.

من نظرية الزاوية الخارجيّة، تعلم أنّ $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$

وبما أنّ قياسات الزوايا أعداد موجبة، إذن نستنتج أن:

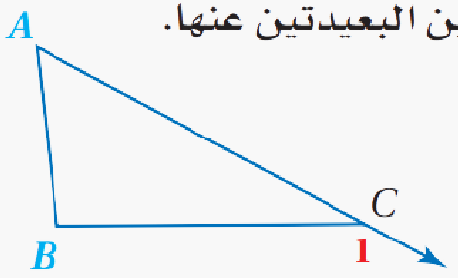
$m\angle 1 > m\angle 3$ وَ $m\angle 1 > m\angle 2$

وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:

متباينة الزاوية الخارجية

نظرية 4.8

قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أيّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



مثال:

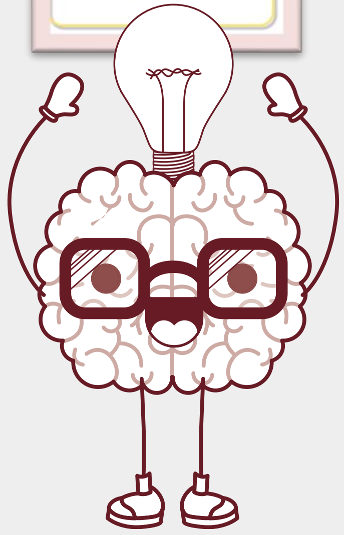
$m\angle 1 > m\angle A$

$m\angle 1 > m\angle B$

مراجعة المفردات

الزاويتان الداخليتان البعيدتان

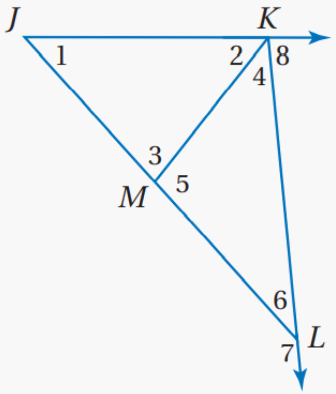
لكل زاوية خارجيّة لمثلث زاويتان داخليتان بعيدتان وهما الزاويتان غير المجاورتين لها.



استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجية

مثال ١

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ مما يأتي:



a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

$\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KML$، والزاويتان $\angle 4, \angle 5$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها، وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة يكون:

$m\angle 7 > m\angle 4 \;,\; m\angle 7 > m\angle 5$.

وكذلك $\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، والزاويتان $\angle 1, \angle JKL$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها؛ لذا فإن $m\angle 7 > m\angle 1$ و $m\angle 7 > m\angle JKL$. وبما أنّ $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$ ، وبالتعويض يكون $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$ ؛ إذن $m\angle 7 > m\angle 2$.

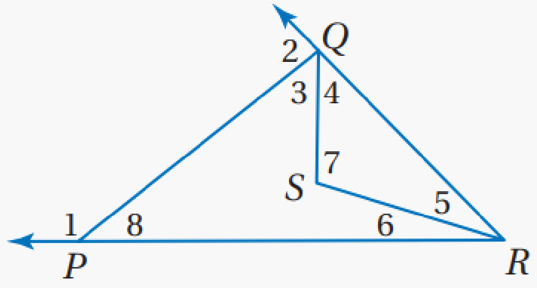
لذا فالزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 7$ هي $\angle 1, \angle 2, \angle 4, \angle 5$.

b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KLM$. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجية يكون $m\angle 3 > m\angle 6$. وبما أن $\angle 8$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$ ؛ لذا فقياس كلٍّ من $\angle 3, \angle 8$ أكبر من $m\angle 6$.

استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجية

تحقق من فهمك

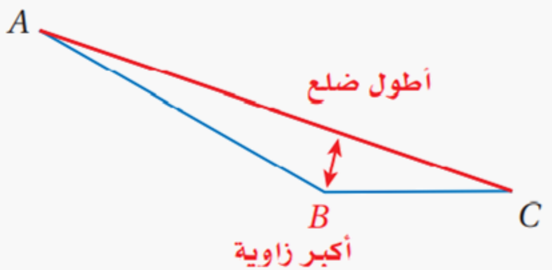


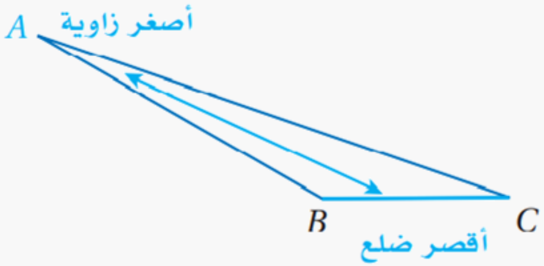
(1A قياساتها أقل من $m\angle 1$

(1B قياساتها أكبر من $m\angle 8$

العلاقات بين زوايا المثلث و أضلاعه

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه: في الدرس 3-6 ، تعلمت أنّه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان . ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متطابقين. وللإجابة عن هذا السؤال، افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.





لاحظ أنّ أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاوية، وبالمثل فإن أقصر ضلع يقابل أصغر زاوية أيضًا .

تنبيه !

تحديد الضلع المقابل

انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة، فالضلعان اللذان يشكّلان الزاوية لا يمكن أن يكون أحدهما مقابلًا لها.

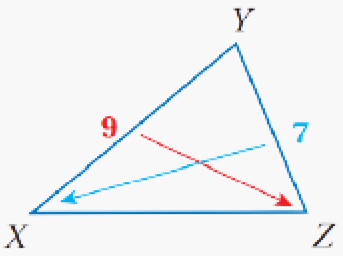
العلاقات بين زوايا المثلث و أضلاعه

نظريتان

إن العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث المنفرج الزاوية والمختلف الأضلاع تكون صحيحة لجميع المثلثات، ويمكن صياغتها باستعمال المتباينات في النظريتين الآتيتين:

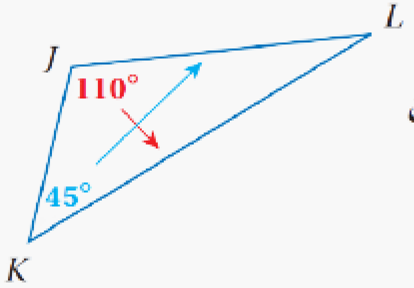
4.9 **متباينة ضلع-زاوية:** إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

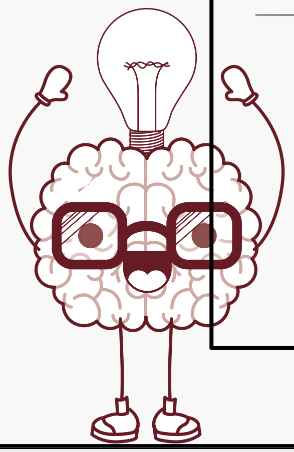
مثال بما أن $XY > YZ$، فإن $m\angle Z > m\angle X$.



4.10 **متباينة زاوية-ضلع:** إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

مثال بما أن $m\angle J > m\angle K$، فإن $KL > JL$.





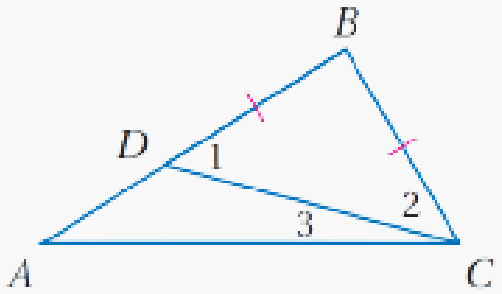
تنبيه !

رمزا الزاوية والمتباينة

يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهًا لرمز أقل من ($<$)، وخاصّة عند الكتابة باليد؛ لذا كن دقيقًا في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستعمل الرمزان معًا.

العلاقات بين زوايا المثلث و أضلاعه

برهان



المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه $AB > BC$.

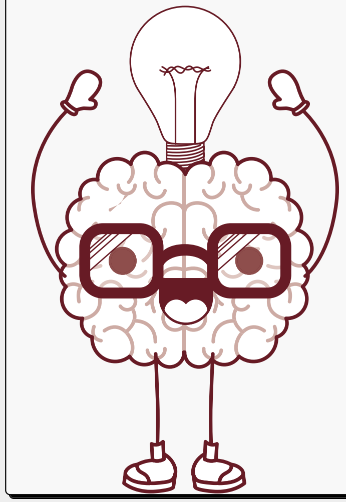
المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$.

البرهان:

بما أنّ $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنّه توجد نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم $\overline{CD}$ لتشكّل $\triangle BCD$ المتطابق الضلعين، وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 2 \cong \angle 1$ ، واستنادًا إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

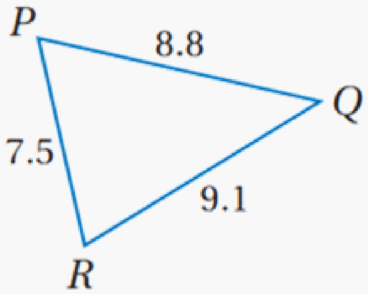
واعتمادًا على مسلمة جمع قياسات الزوايا يكون $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة. وبالتعويض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

وبناءً على نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة يكون $m\angle 1 > m\angle A$. وبما أن $m\angle BCA > m\angle 1 , m\angle 1 > m\angle A$ ، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدّي للمتباينة.



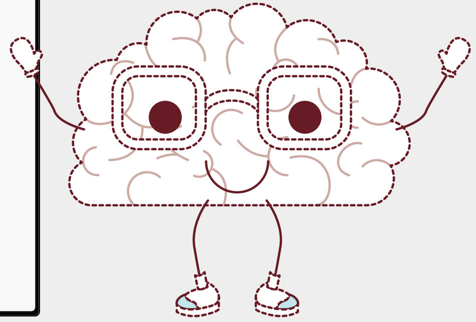
ترتيب زوايا المثلث وفقاً لقياسها

مثال ٢



اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

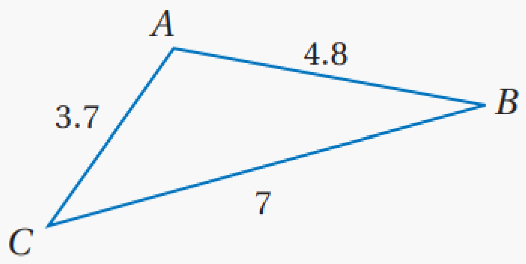
الأضلاع مرتَّبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{QR}, \overline{PQ}, \overline{PR}$. والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle P, \angle R, \angle Q$ على الترتيب؛ لذا فالزوايا مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر تكون على النحو الآتي: $\angle P, \angle R, \angle Q$

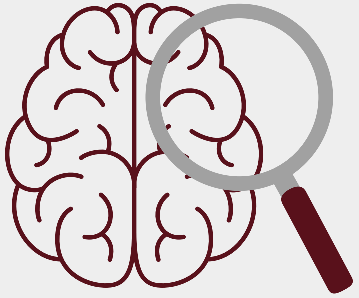


ترتيب زوايا المثلث وفقاً لقياسها

تحقق من فهمك

2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ مرتبّةً من الأصغر إلى الأكبر.

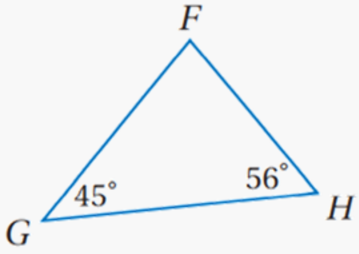




ترتيب أضلاع المثلث وفقاً لأطوالها

مثال ٣

اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتبة من الاقصر إلى الأطول.



أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.

$$m\angle F = 180 - (45^\circ + 56^\circ) = 79^\circ$$

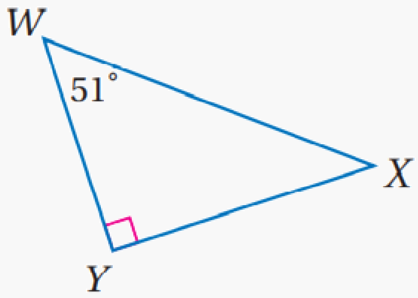
لذا فالزوايا مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle G, \angle H, \angle F$.

والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{GH}, \overline{FG}, \overline{FH}$ على الترتيب.

إذن فالأضلاع مرتبةً من الأقصر إلى الأطول تكون على النحو التالي: $\overline{GH}, \overline{FG}, \overline{FH}$.

ترتيب أضلاع المثلث وفقاً لأطوالها

تحقق من فهمك



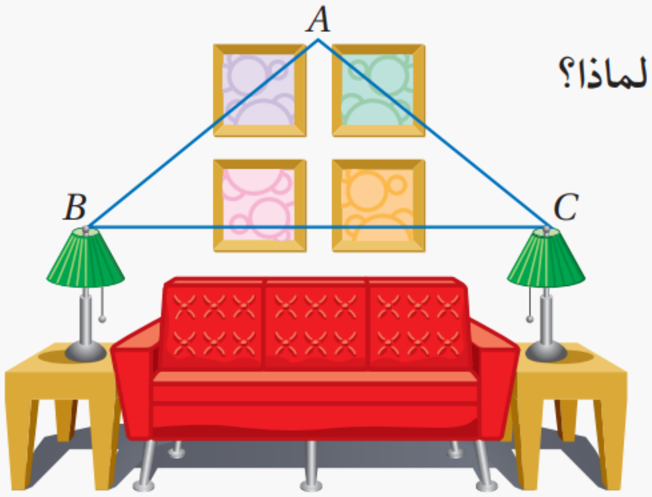
3) اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه، مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

العلاقات بين الزوايا و الأضلاع

مثال ٤

تصميم داخلي: يستعمل مصمّمٌ فكرة التثليث الواردة في فقرة لماذا؟ لترتيب غرفة الاستقبال.

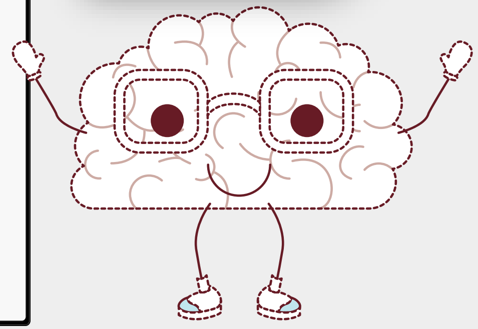
فإذا أراد المصمّم أن يكون $m\angle B$ أقلّ من $m\angle A$، فأي مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C؟ فسِّر إجابتك.



بحسب نظرية «متباينة زاوية– ضلع»، لكي يكون $m\angle B < m\angle A$، يجب أن يكون طول الضلع المقابل لِـ $\angle B$ أقصر من طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$. وبما أن $\overline{AC}$ يقابل $\angle B$، و $\overline{BC}$ يقابل $\angle A$، فإنّ $AC < BC$؛ لذا فالمسافة BC بين المصباحين ستكون أكبرَ من المسافة بين النقطتين A, C

الربط مع الحياة

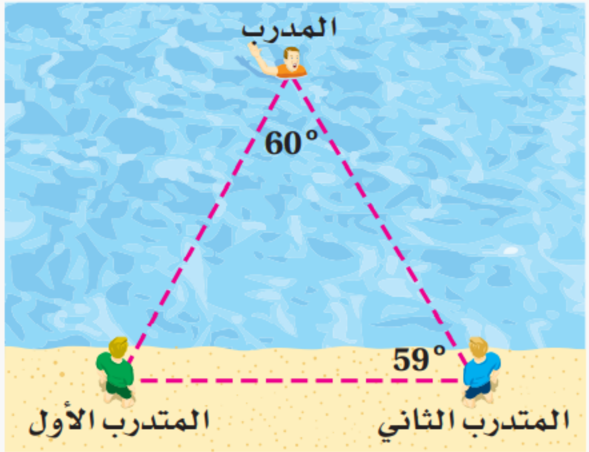
برامج إعداد المنقذين في السباحة تتضمن تدريبًا على المراقبة والإنقاذ والإسعافات الأولية، وتتراوح مدّة البرنامج عادة ما بين 30 إلى 37 ساعةً، تبعًا لطبيعة الوسط المائي مثل البرك أو شواطئ البحار.



العلاقات بين الزوايا و الأضلاع

تحقق من فهمك

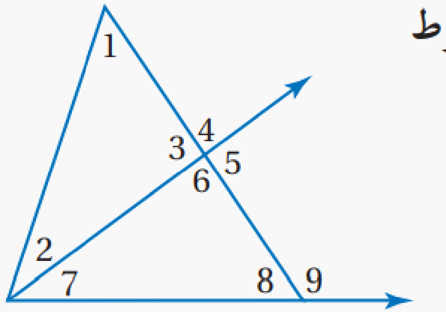
سبّاحو الإنقاذ: في أثناء التدريب يُمثّل المدرّب دور شخصٍ في خطر ليتمكَّن المتدرِّبان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرّب والمتدرِّبان الأول والثاني في المواقع المبيّنة في الشكل، فأيُّ المتدربَين أقرب إلى المدرّب؟



المتباينات في المثلث

تأكد

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة، لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي :

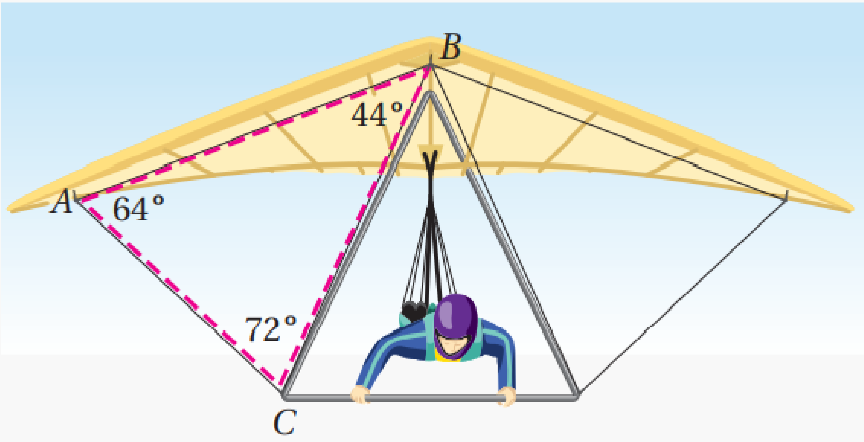


1) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

المتباينات في المثلث

تأكد

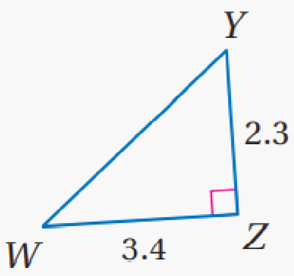
طيران شراعي: تشكّل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة . فأي دعامة تكون أطول: $\overline{AC}$ أم $\overline{BC}$ ؟ وضّح إجابتك.

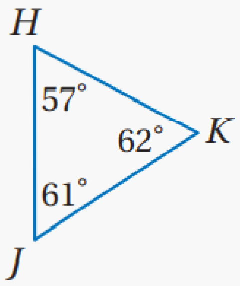


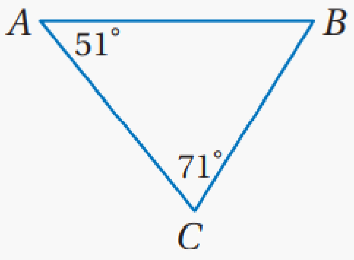
المتباينات في المثلث

تدرب وحل

اكتب زوايا كل مثلث مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في كلٍّ مما يأتي:

(12


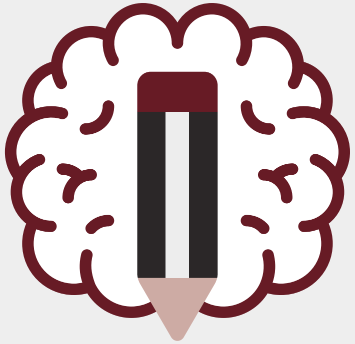
(13


(14


المتباينات في المثلث

مهارات التفكير العليا

اكتب: وضِّح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائمًا ؟



4-4

البرهان غير المباشر

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

البرهان غير المباشر

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ البراهين الحرّة وذات العمودين والتسلسليّة.

والآن

- أكتب براهين جبريّة غير مباشرة.
- أكتُب براهين هندسيّة غير مباشرة.

المفردات

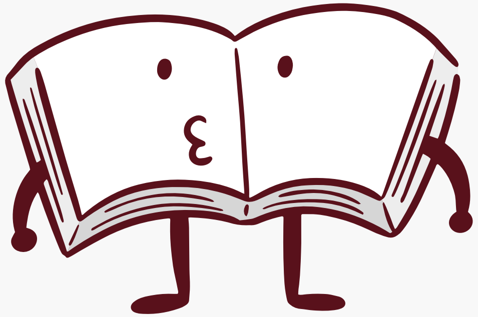
التبرير المباشر
direct reasoning

البرهان المباشر
direct proof

التبرير غير المباشر
indirect reasoning

البرهان غير المباشر
indirect proof

البرهان بالتناقض
proof by contradiction



البرهان غير المباشر

لماذا؟

أعلن محل أحذية عن تخفيض مقداره 25٪ على جميع القطع الموجودة في المحل، **فسألت هند أختها مها خلال تسوقهما في المحل قائلةً:** إذا كان ثمن القطعة 80 ريالًا بعد التخفيض، فهل كان ثمن القطعة أكثر من 100 ريالٍ قبل التخفيض؟

فأجابت مها: نعم؛ لأنه لو كان ثمن القطعة قبل التخفيض 100 ريالٍ أو أقل، فإن ثمنها بعد التخفيض سيكون 75 ريالًا أو أقل.

البرهان غير المباشر

البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها **التبرير المباشر**، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة هذه الطريقة من البرهان تعتبر **برهانًا مباشرًا**، وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبيّن أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع أيّ حقيقةٍ سابقةٍ كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقيًّا، فإنّ هذا يكون إثباتًا لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحةً، ويسمّى هذا النوع من البرهان **برهانًا غير مباشر** أو **برهانًا بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عمليّة البرهان غير المباشر.

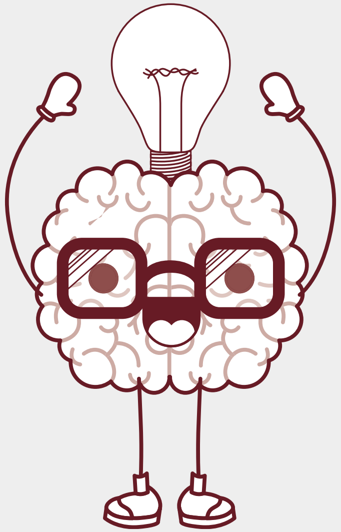
خطوات كتابة البرهان غير المباشر

مفهوم أساسي

الخطوة 1: حدّد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أنّ نفيها صحيح.

الخطوة 2: استعمل التبرير المنطقي لتبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع حقيقةٍ أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظريَّة.

الخطوة 3: بما أن الافتراض الذي بدأت به أدّى إلى تناقض، فبيِّن أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.



صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

مثال ١

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

a) $\angle ABC \ncong \angle XYZ$

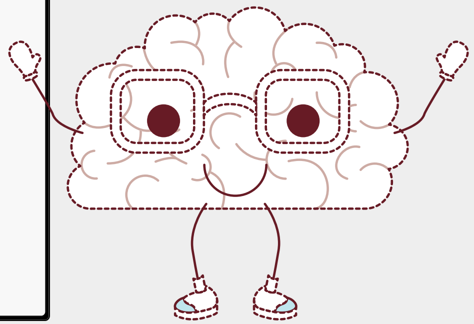
الافتراض هو: $\angle ABC \cong \angle XYZ$

b) إذا كان العدد 6 عاملًا للعدد n ، فإن 2 عامل للعدد n .

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي 2 عامل للعدد n ، ونفي هذه النتيجة هو 2 ليس عاملًا للعدد n ؛ لذا فالافتراض هو: العدد 2 ليس عاملًا للعدد n .

c) $\angle 3$ زاوية منفرجة.

الافتراض هو: $\angle 3$ ليست زاويةً منفرجةً.



صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

تحقق من فهمك

1A) $x > 5$

1B) النقاط J, K, L تقع على استقامة واحدة.

1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع.

كتابة برهان جبري غير مباشر

مثال ٢

اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنه: إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: إثبات أن $x < -4$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$ ؛ لذا افترض أن $x \geq -4$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \geq -4$	افترض
$-3x \leq 12$	اضرب الطرفين بـ -3
$-3x + 4 \leq 12 + 4$	اجمع 4 للطرفين
$-3x + 4 \leq 16$	بسّط

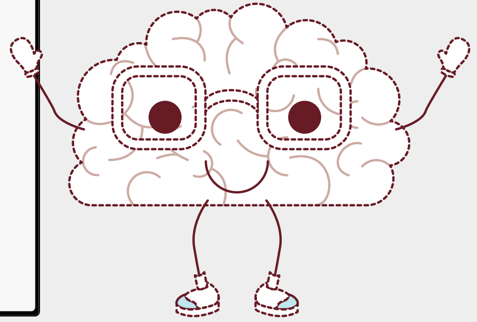
ولكن $-3x + 4 > 16$ معطى

الخطوة 3: الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $-3x + 4 > 16$ ؛ لذا فالافتراض بأن $x \geq -4$ يجب أن يكون خطأً، وأن النتيجة الأصليّة $x < -4$ هي الصحيحة.

قراءة الرياضيات

التناقض

التناقض مبدأ في المنطق ينصُّ على أنه لا يمكن تحقق الافتراض ونفيه في آنٍ واحد.



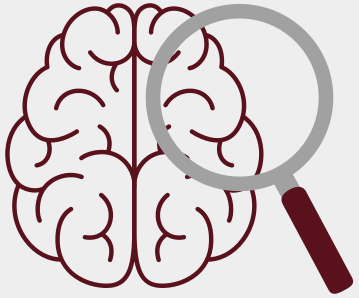
تحقق من فهمك

كتابة برهان جبري غير مباشر

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

2A) إذا كانت $7x > 56$ ، فإنّ $x > 8$

2B) إذا كان $-c$ موجبًا ، فإنّ c سالبٌ.



استعمال البرهان الجبري غير المباشر

مثال ٣

تسوق: اشترى فهد قميصين بأكثر من 60 ريالًا، وبعد عدّة أسابيع سأله صديقه حامدٌ عن ثمن كل قميص، ولكن فهدًا لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا.

المعطيات: ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

$x + y > 60$ ، حيث x ثمن القميص الأول، وy ثمن القميص الثاني.

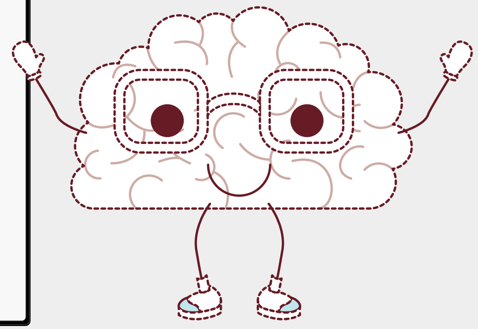
المطلوب: إثبات أن قميصًا واحدًا على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا؛ أي $x > 30$ أو $y > 30$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن ثمن كلٍّ من القميصين لا يزيد على 30 ريالًا، أي أنّ $x \leq 30 , y \leq 30$

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 30 , y \leq 30$ ، فإنّ $x + y \leq 30 + 30$ ؛ أي $x + y \leq 60$. وهذا تناقض، لأن ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

الخطوة 3: بما أن الافتراض أدّى إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فإن الافتراض بأن $x \leq 30 , y \leq 30$ افتراض خطأ. لذا يجب أن يكون ثمن أحد القميصين على الأقل أكثر من 30 ريالًا.



استعمال البرهان الجبري غير المباشر

تحقق من فهمك

3) **رحلة :** قطع رياض أكثر من 360 كيلومترًا في رحلة، وتوقّف في أثناء سفره مرتين فقط. استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضًا قطع أكثر من 120 كيلومترًا في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

مثال ٤

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًّا، فإنّ x عدد زوجي.

المعطيات: $x + 2$ عدد زوجي.

المطلوب: x عدد زوجي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد فردي ، وهذا يعني أن $x = 2k + 1$ ، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2:

$x + 2 = (2k + 1) + 2$	عوّض
$= (2k + 2) + 1$	خاصيّة الإبدال
$= 2(k + 1) + 1$	خاصية التوزيع

والآن حدّد ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا زوجيًّا أو فرديًّا. بما أن k عدد صحيح، فإنّ $k + 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أنّ m تساوي $k + 1$ ، فيكون:

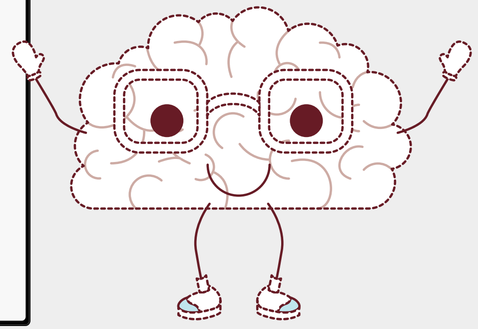
$$2(k + 1) + 1 = 2m + 1 \qquad \text{عوّض}$$

إذن $x + 2$ يمكن أن يُمثَّل بـ $2m + 1$ ، حيث m عدد صحيح، ولكن هذا التمثيل يعني أنّ $x + 2$ عدد فردي. وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة $x + 2$ عدد زوجي.

الخطوة 3: بما أنّ افتراض x عدد فردي أدّى إلى تناقضٍ مع العبارة المعطاة، فإنّ النتيجة الأصليّة x عدد زوجي يجب أن تكون صحيحةً.

إرشادات للدراسة

نظرية الأعداد
هي فرع من فروع الرياضيات تختص بدراسة الأعداد وخصائصها والعمليات عليها وتصنيفها إلى: زوجي، فردي، أولي، غير أولي...، وتثبت النظريات والحقائق لهذه الأعداد.



براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

تحقق من فهمك

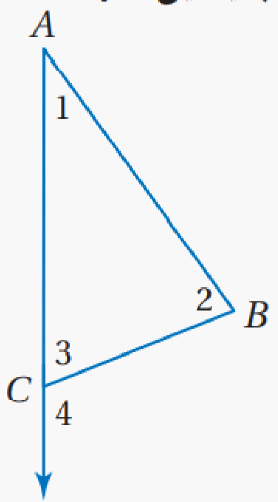
4) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه "إذا كانَ مربع عدد صحيح فرديًا، فإنّ العدد الصحيح فرديٌّ".

برهان هندسي

مثال ٥

البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة.

أثبت أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث يكون أكبر من قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



ارسم شكلًا توضيحيًّا، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 2$ ، وأن $m\angle 4 > m\angle 1$.

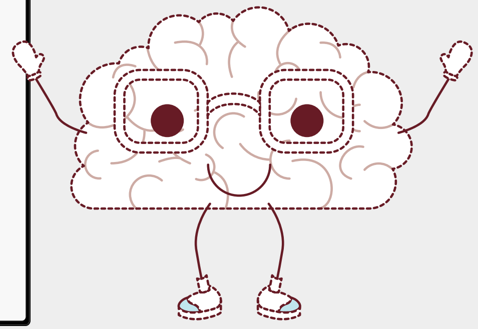
برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \ngtr m\angle 1$، أو $m\angle 4 \ngtr m\angle 2$.
أيْ أنّ $m\angle 4 \le m\angle 1$، أو $m\angle 4 \le m\angle 2$.

تنبيه!

البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد

البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يُستعمل المثال المضاد لإثبات خطأ تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.



برهان هندسي

مثال ٥

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن الافتراض $m\angle 1 \leq m\angle 4$ يؤدي إلى تناقضٍ، وبالمثل سيؤدي الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 2$ إلى تناقضٍ أيضًا .

الافتراض $m\angle 1 \leq m\angle 4$ يعني أن: $m\angle 1 = m\angle 4$ أو $m\angle 1 < m\angle 4$.

الحالة 1: $m\angle 1 = m\angle 4$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	نظرية الزاوية الخارجيّة
$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$	عوّض
$0 = m\angle 2$	اطرح $m\angle 4$ من كلا الطرفين.

وهذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0 ؛ لذا فإن $m\angle 1 \neq m\angle 4$.

الحالة 2: $m\angle 1 < m\angle 4$

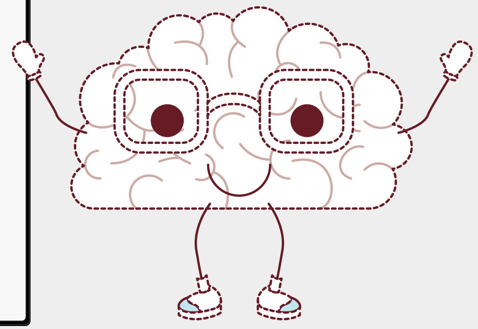
$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	نظرية الزاوية الخارجيّة
$m\angle 1 > m\angle 4$	قياسات الزوايا موجبة

الخطوة 3: في الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع نظرية أو تعريف؛ لذا فالنتيجة الأصليّة بأنّ $m\angle 2 < m\angle 4$ و أن $m\angle 1 < m\angle 4$ يجب أن تكون صحيحة.

تنبيه!

البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد

البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يُستعمل المثال المضاد لإثبات خطأ تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.



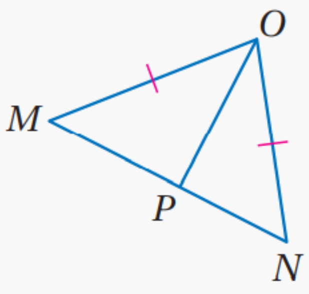
برهان هندسي

تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \ncong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \ncong \angle NOP$



البرهان غير المباشر

تأكد

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2) $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع.

البرهان غير المباشر

تأكد

كرة قدم: سجّل فهد 13 هدفًا لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أنّ متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3

البرهان غير المباشر

تدرب وحل

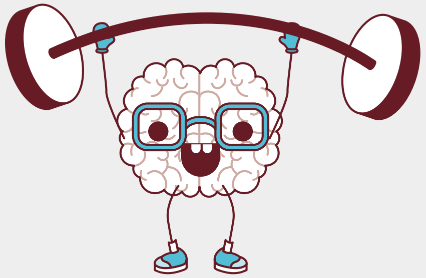
اكتب برهانًا غير مباشر

15) إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإنّ $x > -1$.

البرهان غير المباشر

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: إذا كان x عددًا نسبيًّا، فإنه يمكن تمثيله بالصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a, b عددان صحيحان، و $b \neq 0$. ولا يمكن تمثيل العدد غير النسبي في صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهانًا غير مباشر تبيّن فيه أن ناتج ضرب عدد نسبي لا يساوي الصفر في عدد غير نسبي، هو عدد غير نسبي.



4-5

متباينة المثلث

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

متباينة المثلث

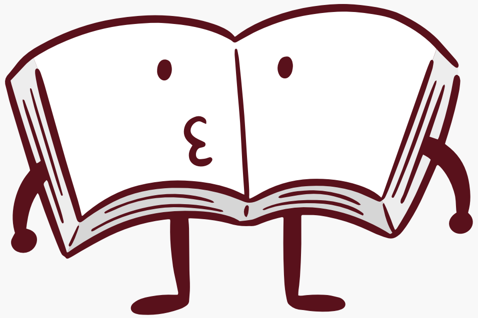
رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ خصائص المتباينات وتطبيقها على العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه.

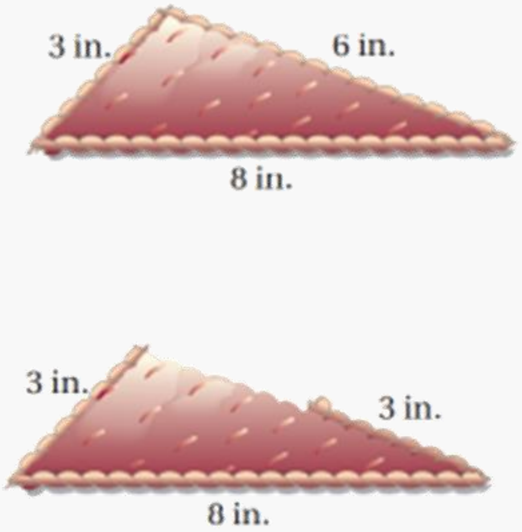
والآن

- أستعمل نظرية متباينة المثلث لأُعيّن الأطوال التي تكوّن مثلثًا.
- أُثبت العلاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.



متباينة المثلث

لماذا؟



يريد أحد المصمِّمين أن يستعمل قطع الخيوط المجدُولة والمتبقية من أحد أعماله لتزيين الوسائد المثلثة الشكل أدناه. ولتقليل الإهدار، أراد المصمّم أن يستعمل القطع دون قصها، فاختار ثلاث قطع عشوائيًا وحاول أن يشكّل مثلثًا. والشكلان الآتيان يبيّنان اثنتين من هذه المحاولات.

نظرية متباينة المثلث

نظرية
4.11

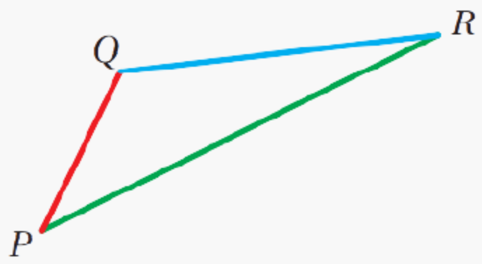
متباينة المثلث: بما أن المثلث يتكون من ثلاث قطع مستقيمة، فيجب أن تتوافر علاقة خاصّة بين أطوال هذه القطع؛ كي تشكّل مثلثًا.

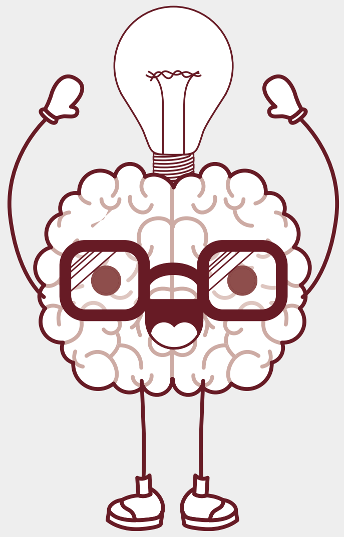
مجموع طولَي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أمثلة $PQ + QR > PR$

$QR + PR > PQ$

$PR + PQ > QR$





تعيين الأطوال التي تكون مثلثاً

مثال ١

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلّ من السؤالين الآتيين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضح السبب:

a) 8 in, 15 in, 17 in.

تحقق من صحة كل متباينة.

$8 + 15 \overset{?}{>} 17$ ، $8 + 17 \overset{?}{>} 15$ ، $15 + 17 \overset{?}{>} 8$

$23 > 17$ ✔ ، $25 > 15$ ✔ ، $32 > 8$ ✔

بما أنّ مجموع طولَي أيِّ قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإنّ القطع المستقيمة التي أطوالها $8, 15, 17$ تكوّن مثلثًا.

b) 6 m, 8 m, 14 m

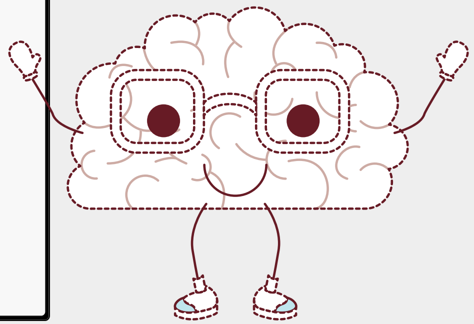
$6 + 8 \overset{?}{>} 14$

$14 \not> 14$ ✘

بما أن مجموع طولَي قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $6, 8, 14$ لا يمكن أن تكوِّن مثلثًا.

إرشادات للدراسة

إذا كان مجموع أقصر طولين أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأطوال الثلاثة تمثل أطوال أضلاع مثلث.



تعيين الأطوال التي تكون مثلثاً

تحقق من فهمك

1A) 15 cm , 16 cm , 30 cm

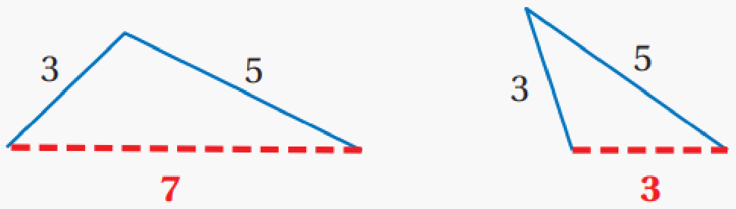
1B) 2 ft , 8 ft , 11 ft

إرشادات للدراسة

إذا كان مجموع أقصر طولين أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأطوال الثلاثة تمثل أطوال أضلاع مثلث.

تعيين الأطوال التي تكون مثلثاً

عندما يُعلم طولا ضلعين في مثلثٍ، يمكن تحديد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث باستعمال نظرية متباينة المثلث.



من الاختبار

مثال ٢

إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما $3\,cm$, $7\,cm$ ، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

A $3\,cm$

B $4\,cm$

C $5\,cm$

D $10\,cm$

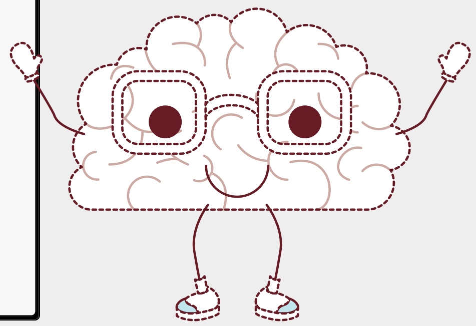
إرشادات للاختبار

اختبار البدائل

إذا كان الوقت غير كافٍ يمكنك اختبار كل بديل لإيجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد البدائل الأخرى.

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب هو تحديد أصغر قيمة ممكنة لطول الضلع الثالثِ في مثلثٍ طولا ضلعين من أضلاعه $3\,cm$, $7\,cm$

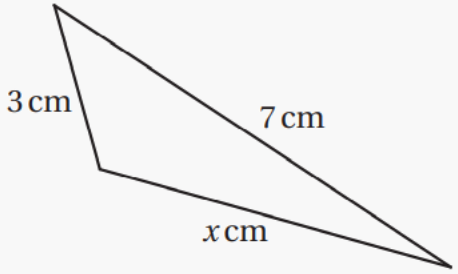


من الاختبار

مثال ٢

حل فقرة الاختبار

لتحديد أصغر طول ممكن من بين البدائل المعطاة، حدّد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث أولًا؛ لذا ارسم شكلًا وافترض أن طول الضلع الثالث يساوي x، ثم اكتب متباينات المثلث الثلاث، وحل كل واحدةٍ منها.



$3 + 7 > x$	$3 + x > 7$	$x + 7 > 3$
$10 > x$ أو $x < 10$	$x > 4$	$x > -4$

لاحظ أن $x > -4$ تكون صحيحةً دائمًا لأي قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ لِـ x، وبربط المتباينتين المتبقيتين، يكون مدى القيم التي تحقق كلتا المتباينتين هو $x > 4$ وَ $x < 10$، والذي يمكن كتابته في الصورة $4 < x < 10$

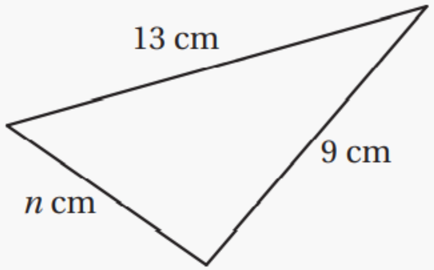
وأقلّ عدد صحيح موجب بين 4 وَ 10 هو 5 ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C .

قراءة الرياضيات

المتباينة المركبة

تقرأ المتباينة المركبة $4 < x < 10$ على النحو التالي: تقع x بين 4 وَ 10 أو x أكبر من 4 وأقل من 10

من الاختبار



2) في الشكل المجاور، أيُّ الأعداد الآتية **لا** يمكن أن يكون قيمة لـ n؟

A 7   **C** 10

B 13   **D** 22

تحقق من فهمك

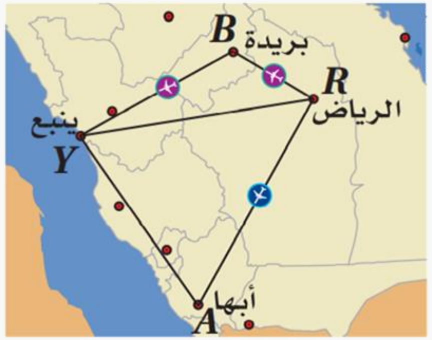
استعمال نظرية متباينة المثلث في البرهان

مثال ٣

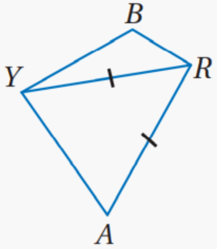
الربط مع الحياة

يختلف الطيران المباشر عن الطيران من دون توقف، ففي حالة الطيران المباشر لا يغيِّر المسافرون الطائرة، ولكن قد تحط الطائرة في مطار واحد أو أكثر قبل وصولها لغايتها.

طيران: المسافة الجوية من الرياض إلى ينبع تساوي المسافة الجوية من الرياض إلى أبها، أثبت أن الطيران المباشر من الرياض إلى ينبع مرورًا بمدينة بريدة يقطع مسافةً أكبر من المسافة المقطوعة عند الطيران من الرياض إلى أبها دون توقّف.



ارسم شكلًا تقريبيًّا يمثل المسألة، وضع عليه رموز أسماء المدن، وارسم القطعة $\overline{YA}$ لتشكّل $\triangle YRA$.

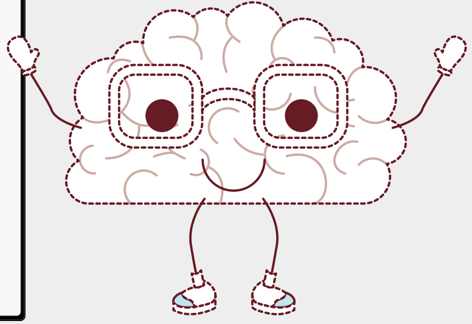


المعطيات: $RY = RA$

المطلوب: $RB + BY > RA$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $RY = RA$	1) معطى
2) $RB + BY > RY$	2) نظرية متباينة المثلث
3) $RB + BY > RA$	3) بالتعويض

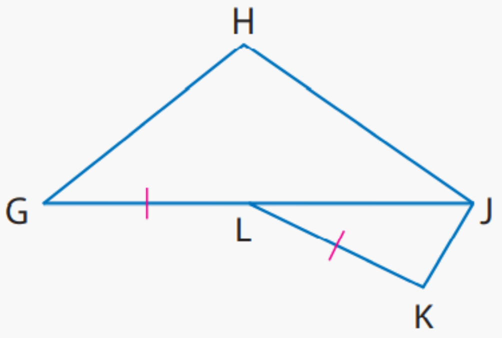


DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

استعمال نظرية متباينة المثلث في البرهان

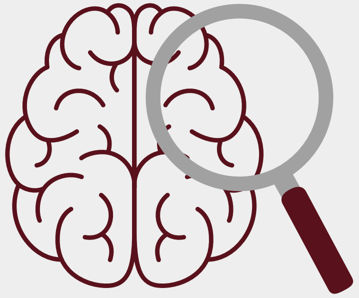
تحقق من فهمك



3) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$



متباينة المثلث

تأكد

حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضِّح السبب.

1) 5 cm, 7 cm, 10 cm

2) 3 in, 4 in, 8 in

3) 6 m, 14 m, 10 m

متباينة المثلث

تأكد

4) **اختيار من متعدّد:** إذا كان طولَا ضلعين في مثلث $5\,m$, $9\,m$ ، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثّل طول الضلع الثالث فيه؟

A $5\,m$ **B** $4\,m$ **C** $14\,m$ **D** $6\,m$

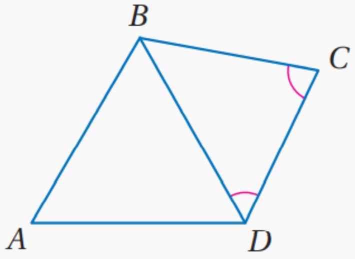
متباينة المثلث

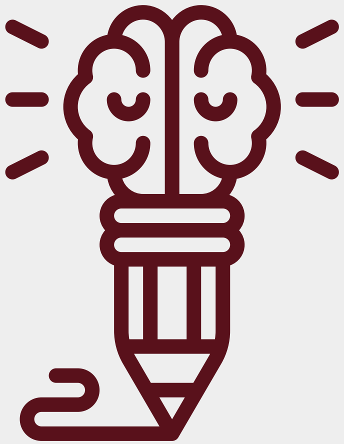
تدرب وحل

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ مما يأتي :

14) **المعطيات:** $\angle CDB \cong \angle BCD$

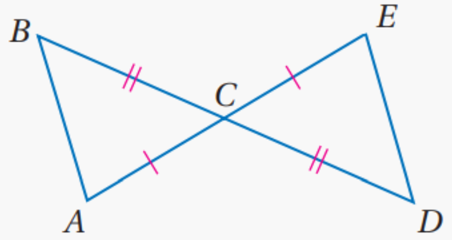
المطلوب: $AB + AD > BC$



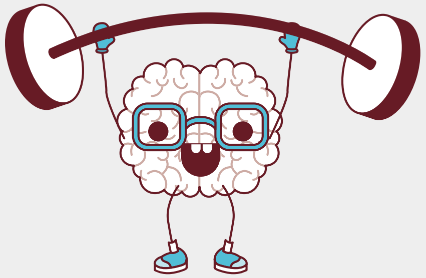


متباينة المثلث

مهارات التفكير العليا



تحدّ: ما مدى القيم الممكنة لمحيط الشكل $ABCDE$، إذا كان $AC = 7$, $DC = 9$؟ وضّح إجابتك.



4-6

المتباينات في مثلثين

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

المتباينات في مثلثين

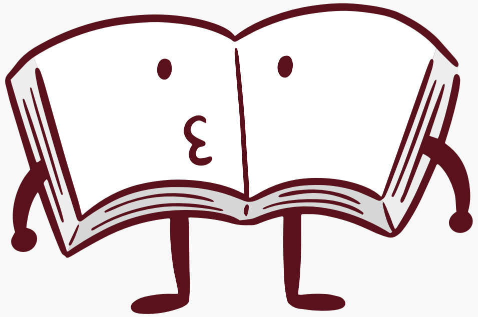
رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستَ المتباينات في المثلث الواحد.

و الآن

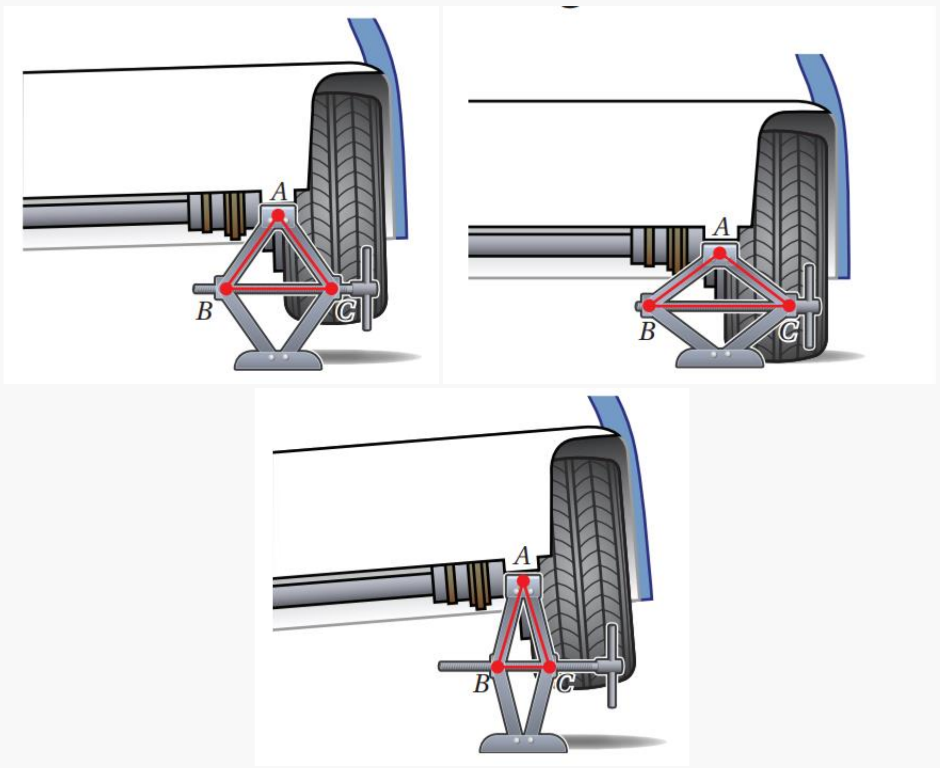
- أطبق متباينة SAS أو عكسها؛ لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين.
- أثبت صحة العلاقات باستعمال متباينة SAS أو عكسها.



المتباينات في مثلثين

تُستعمل الرافعة عند تغيير إطارات السيارات، والرافعة المبيّنة أدناه واحدة من الرافعات البسيطة التي ما زالت تُستعمل حتى يومنا هذا. لاحظ أنّه عندما تُنزَّلُ الرافعة فإنّ ساقَي $\triangle ABC$ يظلّان متطابقين، في حين تزداد الزاوية A اتّساعًا ويزداد طول الضلع $\overline{BC}$ المقابل لـ $\angle A$

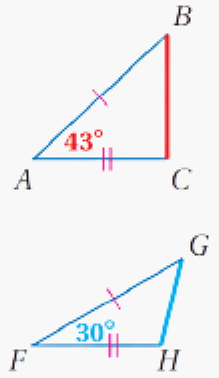
لماذا؟



المتباينات في مثلثين

نظريتان

متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS): الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوعٍ من المثلثات وتوضّح النظريتين الآتيتين:

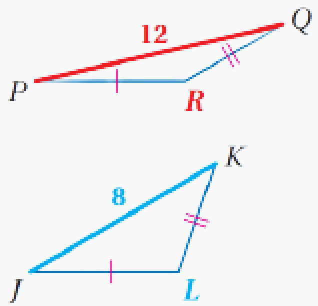


4.13 متباينة SAS

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $m\angle F < m\angle A$ ، $\overline{AB} \cong \overline{FG}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{FH}$ ،

فإنّ $GH < BC$.

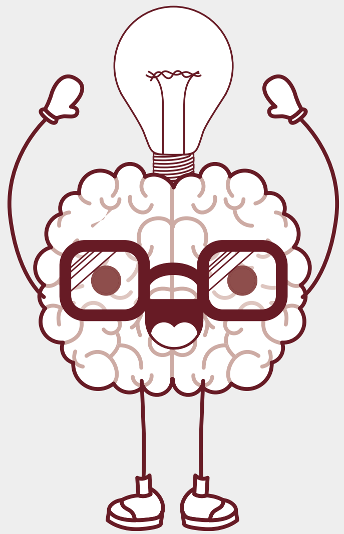


4.14 عكس متباينة SAS (SSS)

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $JK < PQ$ ، $\overline{PR} \cong \overline{JL}$ ، $\overline{QR} \cong \overline{KL}$ ،

فإن $m\angle L < m\angle R$.

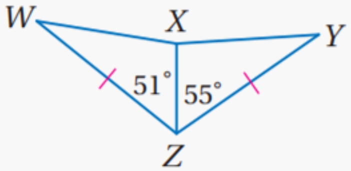


استعمال متباينة SAS وعكسها

مثال ١

قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

a) WX, XY

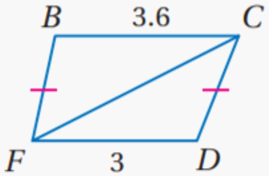


في المثلثين WXZ , YXZ ،

$\overline{WZ} \cong \overline{YZ}, \overline{XZ} \cong \overline{XZ}, m\angle YZX > m\angle WZX$ ،

وبحسب متباينة SAS فإن $WX < XY$

b) $m\angle FCD, m\angle BFC$

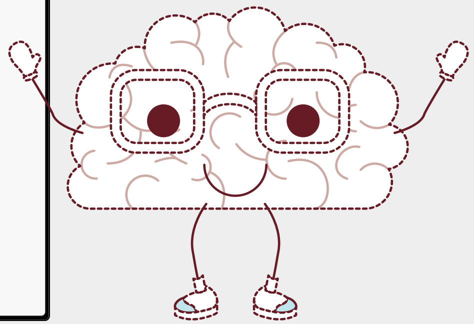


في المثلثين BCF , DFC ،

$\overline{BF} \cong \overline{DC}, \overline{FC} \cong \overline{CF}, BC > FD$ ،

وبحسب عكس متباينة SAS فإن

$m\angle BFC > m\angle DCF$

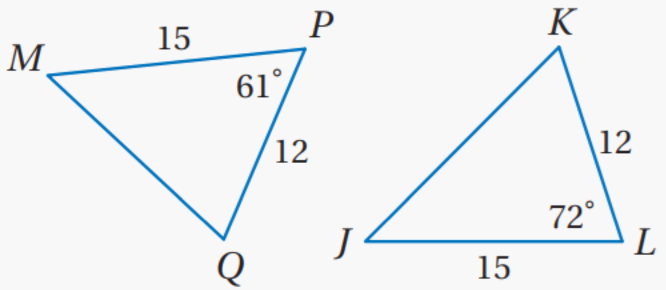


استعمال متباينة SAS وعكسها

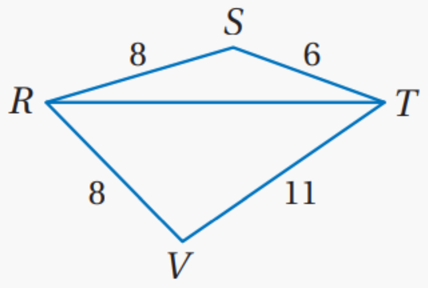
تحقق من فهمك

قارن بين القياسات المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(1A JK , MQ



(1B $m\angle SRT$, $m\angle VRT$

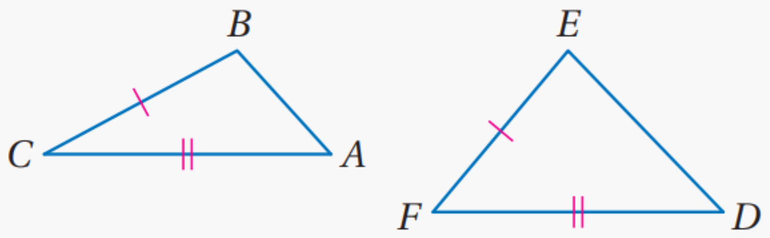


متباينة SAS

برهان

إرشادات للدراسة

متباينتا SSS, SAS
تُعرف المتباينة SAS باسم متباينة الرافعة، وعكسها يُعرف بالمتباينة SSS.



المعطيات: في المثلثين ABC, DEF ،
$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, m\angle F > m\angle C$

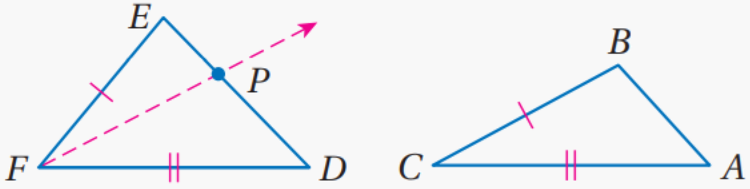
المطلوب: $DE > AB$

البرهان:

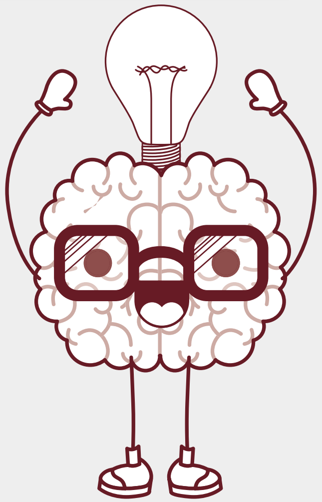
تعلم أنّ: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، وتعلم أيضًا أن: $m\angle F > m\angle C$.

ارسم نصف المستقيم FP،على أن يكون $m\angle DFP = m\angle C, \overline{PF} \cong \overline{BC}$ ، وهذا سيقودنا إلى حالتين هما :

الحالة 1 P تقع على $\overline{DE}$، وعندها يكون $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بحسب SAS، لذا يكون $PD = BA$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، وبحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة،



ومسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة يكون $DE = EP + PD$ ؛ لذا يكون $DE > PD$ بناءً على تعريف المتباينة، وبالتعويض يكون $DE > AB$

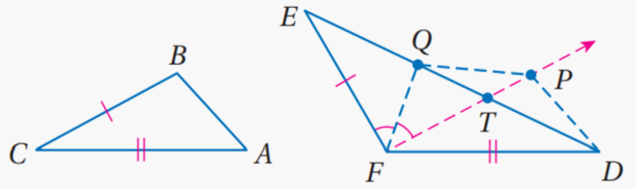


متباينة SAS

برهان

الحالة 2 P لا تقع على $\overline{DE}$

وعندئذٍ سمِّ نقطة تقاطع $\overline{ED}, \overline{FP}$ بالحرف T، وارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{FQ}$ على أن تكون Q على $\overline{DE}$ ، وتكون $\angle EFQ \cong \angle QFP$ ، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين المساعدتين $\overline{PQ}, \overline{PD}$.

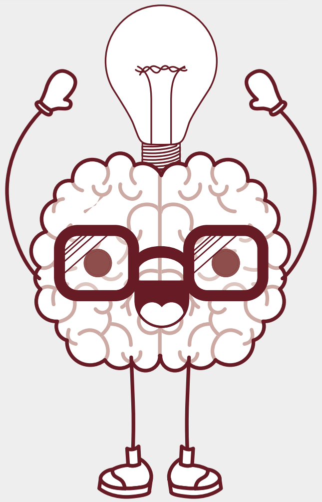


$\overline{FP} \cong \overline{BC}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$	معطى
$\overline{FP} \cong \overline{EF}$	خاصية التعدّي للتطابق
$\overline{QF} \cong \overline{QF}$	خاصية الانعكاس للتطابق
$\angle EFQ \cong \angle QFP$	شرط تحديد النقطة Q
$\triangle EFQ \cong \triangle PFQ$	مسلّمة SAS
$\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$	تطابق العناصر المتناظرة
$EQ = PQ$	تعريف التطابق
$m\angle DFP = m\angle C$	شرط تحديد النقطة

$\triangle FPD \cong \triangle CBA$	مسلّمة SAS
$\overline{PD} \cong \overline{BA}$	تطابق العناصر المتناظرة
$PD = BA$	تعريف التطابق
$QD + PQ > PD$	متباينة المثلث
$QD + EQ > PD$	بالتعويض
$ED = QD + EQ$	مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$ED > PD$	بالتعويض
$ED > BA$	بالتعويض

إرشادات للدراسة

متباينتا SSS, SAS
تُعرف المتباينة SAS باسم متباينة الرافعة، وعكسها يُعرف بالمتباينة SSS.



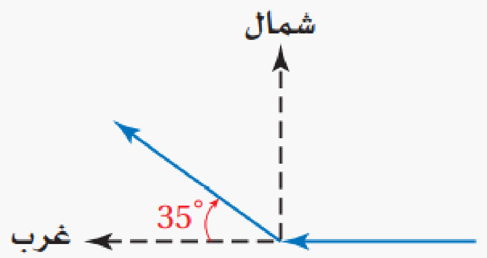
استعمال متباينة SAS

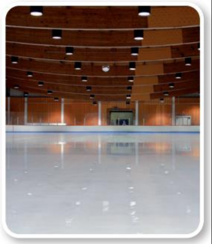
مثال ٢

التزلّج على الجليد: في إحدى صالات التزلّج، انطلق اثنان من المتزلّجين على الجليد من المكان نفسه، فقطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف °35 في اتجاه الشمال الغربي قاطعًا 15 m ، بينما قطع المتزلّج B مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف °40 في اتجاه الشمال الشرقي قاطعًا 15 m ، أيُّهما كان الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضّح إجابتك.

افهم: **المعطيات:** قطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف °35 في اتجاه الشمال الغربي قاطعًا 15 m، والمتزلج B قطع مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف °40 في اتجاه الشمال الشرقي قاطعًا 15 m.

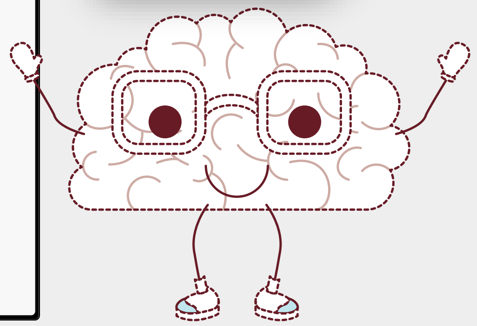
المطلوب: أيُّهما كان أبعد عن مكان الانطلاق.





الربط مع الحياة

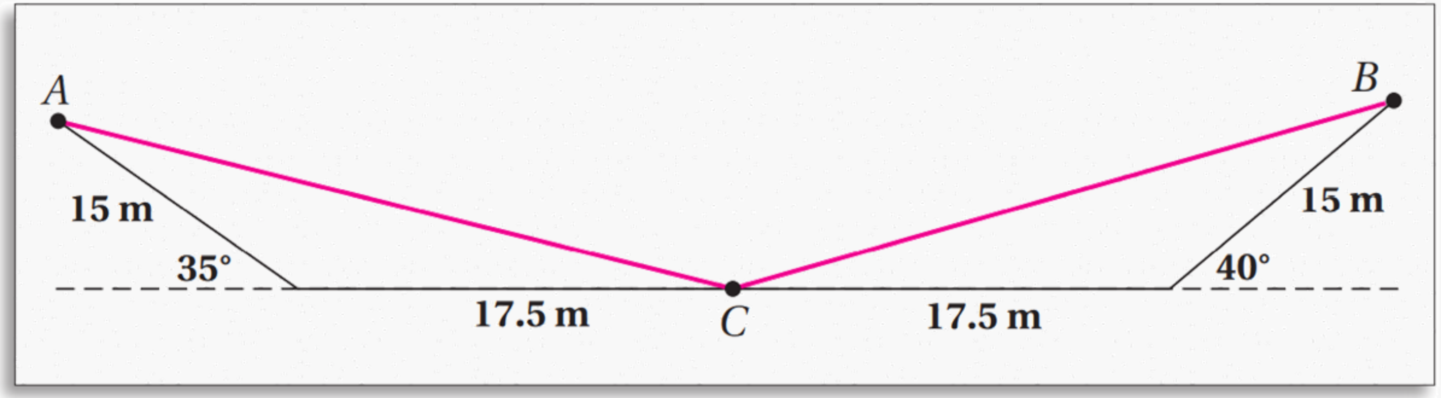
ظهرت رياضة التزلج على الجليد في منتصف القرن التاسع عشر، ونُظمت أولُ بطولة لها عام 1891م، وهي رياضة مشهورة في البلاد الباردة، مثل كندا والدول الاسكندنافية.



استعمال متباينة SAS

مثال ٢

خطط: ارسم شكلًا لهذا الوضع.



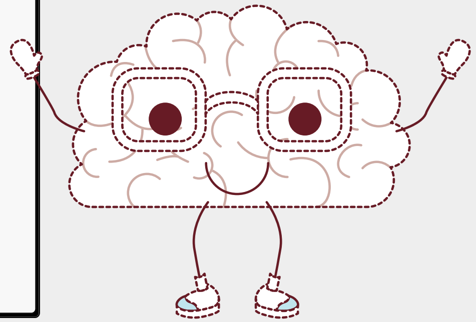
المسار الذي اتّبعه كل متزلج وبعده عن مكان الانطلاق يشكّل مثلثًا؛ إذ قطع كلُّ متزلجٍ 17.5 m ، ثم انحرف وقطع 15 m أخرى.

استعمل أزواج الزوايا المستقيمة لإيجاد قياس الزاويتين المحصورتين، ثم طبّق متباينة SAS؛ لتقارن بين بُعدي المتزلّجين عن مكان الانطلاق.

إرشادات لحل

رسم شكل توضيحي

ارسم شكلًا لمساعدتك على فهم المسألة اللفظية وتوضيحها بصورة صحيحة.



استعمال متباينة SAS

مثال ٢

حل: قياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج A يساوي $180^\circ - 35^\circ$ أو 145° ، وقياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج B يساوي $180^\circ - 40^\circ$ أو 140°

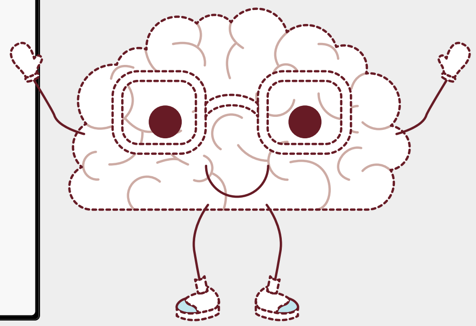
بما أنّ $145^\circ > 140^\circ$ ، إذن $AC > BC$ بحسب متباينة SAS؛ لذا فالمتزلج A أبعد عن مكان الانطلاق من المتزلج B .

تحقق: المتزلج B انحرف 5° أكثر مما فعل المتزلج A في اتجاه مكان الانطلاق؛ لذا سيكون المتزلج B أقرب إلى مكان الانطلاق من المتزلج A . ✓

إرشادات لحل

رسم شكل توضيحي

ارسم شكلًا لمساعدتك على فهم المسألة اللفظية وتوضيحها بصورة صحيحة.



استعمال متباينة SAS

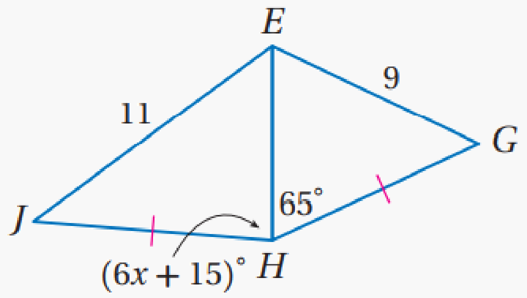
تحقق من فهمك

2) **التزلج على الجليد:** انطلقت مجموعتان من المتزلجين من المكان نفسه، فقطعت المجموعة A مسافة 4 mi في اتجاه الشرق، ثم انحرفت °70 في اتجاه الشمال الشرقي قاطعةً مسافة 3 mi، وقطعت المجموعة B مسافة 4 mi في اتجاه الغرب، ثم انحرفت °75 في اتجاه الشمال الغربي قاطعةً 3 mi، أي مجموعة كانت الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك.

استعمال الجبر في العلاقات بين مثلثين

مثال ٣

جبر: أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x.



الخطوة 1: من الشكل نعلم أن:

$\overline{JH} \cong \overline{GH}$, $\overline{EH} \cong \overline{EH}$, $JE > EG$.

إذن، $m\angle JHE > m\angle EHG$ عكس متباينة SAS

$6x + 15 > 65$ عوّض

$x > 8\frac{1}{3}$ حُل بالنسبة لـِ x

الخطوة 2: استعمل حقيقة أن قياس أيّ زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة أخرى.

$m\angle JHE < 180°$

$6x + 15 < 180$ عوّض

$x < 27.5$ حُل بالنسبة لـِ x

الخطوة 3: اكتب المتباينتين $x < 27.5$, $x > 8\frac{1}{3}$ في صورةِ متباينةٍ مركّبةٍ بالشكل $8\frac{1}{3} < x < 27.5$

إرشادات للدراسة

استعمال حقائق إضافية

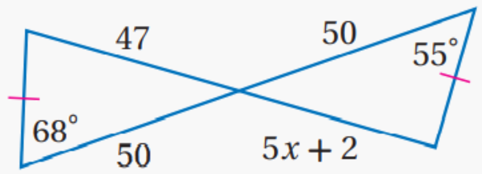
عند إيجاد مدى القيم الممكنة للمتغير x، قد تحتاج إلى استعمال إحدى الحقائق الآتية:

- قياس أي زاوية في المثلث يكون أكبر من 0 وأقل من 180 دائمًا.
- طول أي قطعة مستقيمة يكون أكبر من 0 دائمًا.

استعمال الجبر في العلاقات بين مثلثين

تحقق من فهمك

3) أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x .

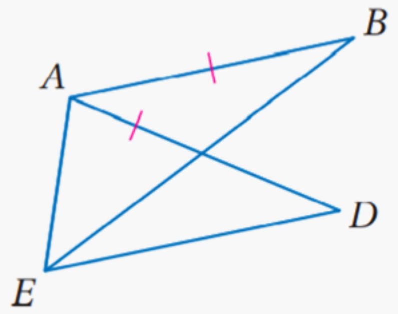


إثبات علاقات المثلث باستعمال متباينة SAS

مثال ٤

إثبات العلاقات في مثلثين: يمكنك استعمال متباينة SAS وعكسها لإثبات صحّة العلاقات في مثلثين.

اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

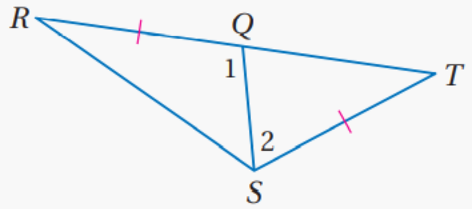
المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	(1 معطى
(2 $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	(2 خاصية الانعكاس
(3 $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	(3 مسلّمة جمع قياسات الزوايا
(4 $m\angle EAB > m\angle EAD$	(4 تعريف المتباينة
(5 $EB > ED$	(5 متباينة SAS

إثبات علاقات المثلث باستعمال متباينة SAS

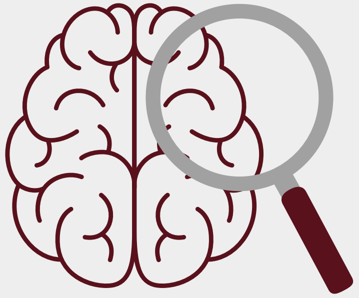
تحقق من فهمك



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$



إثبات علاقات باستعمال عكس متباينة SAS

مثال ٥

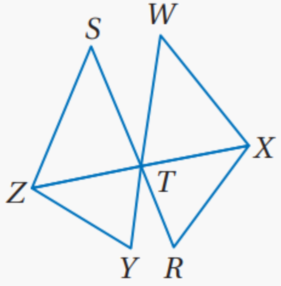
اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: T نقطة منتصف $\overline{ZX}$.

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$

$SZ > WX$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$



البرهان التسلسلي:

T نقطة منتصف $\overline{ZX}$
معطى

$\overline{ZT} \cong \overline{TX}$
نظرية نقطة المنتصف

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$
معطى

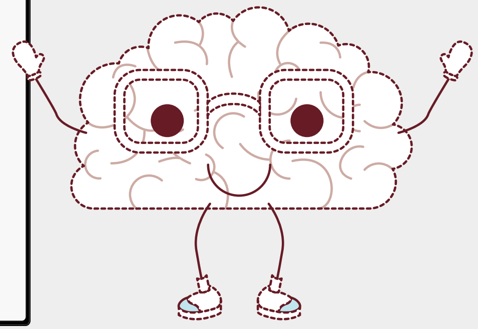
$SZ > WX$
معطى

$m\angle STZ > m\angle WTX$
عكس نظرية الرافعة

$\angle STZ \cong \angle XTR$
$\angle WTX \cong \angle ZTY$
الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة

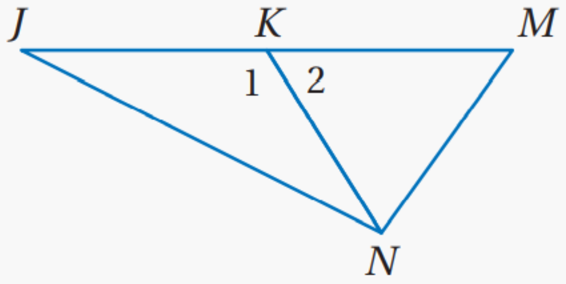
$m\angle STZ = m\angle XTR$
$m\angle WTX = m\angle ZTY$
تعريف تطابق الزوايا

$m\angle XTR > m\angle ZTY$
بالتعويض



إثبات علاقات باستعمال عكس متباينة SAS

تحقق من فهمك



5) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في $\triangle JMN$.

$JN > NM$

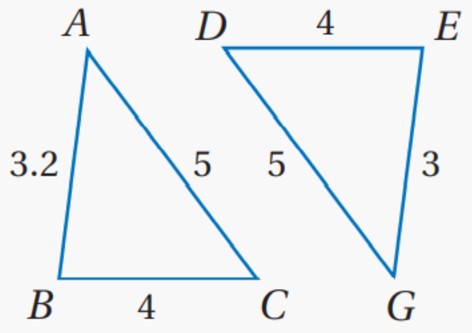
المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

المتباينات في مثلثين

تأكد

قارن بين القياسين المحددين

1) $m\angle ACB, m\angle GDE$



المتباينات في مثلثين

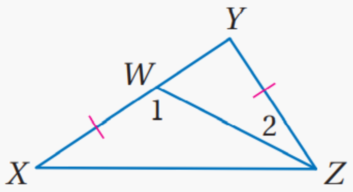
تأكد

برهان اكتب برهانًا ذا عمودين

6) **المعطيات:** $\triangle YZX$

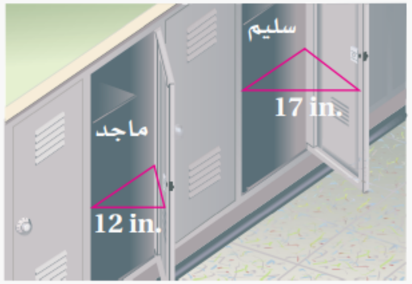
$\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

المطلوب: $ZX > YW$



المتباينات في مثلثين

تدرب وحل



14) **خزائن:** خزانَتَا سليم وماجد مفتوحتان، كما في الشكل المجاور. أيُّ بابَيْ الخزانتين يشكّل زاويةً قياسها أكبر؟ وضح إجابتك.

المتباينات في مثلثين

مهارات التفكير العليا

اكتب: بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متباينة SAS والمسلّمة SAS لتطابق المثلثات.

الأشكال الرباعية

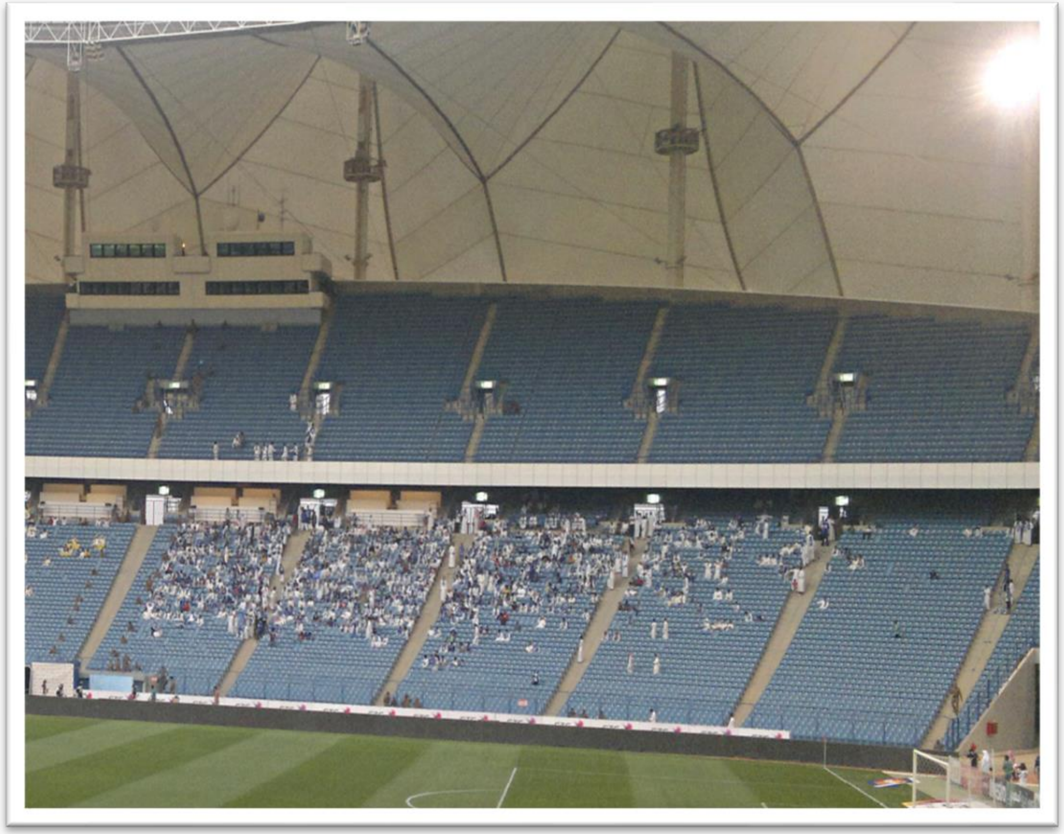
أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

الفصل الخامس

الأشكال الرباعية

التهيئة للفصل الخامس

لماذا؟



الأشكال الرباعية

أدوات رياضية:

تُستعمل خصائص الأشكال الرباعيّة لإيجاد قياسات زوايا أو أطوال أضلاع، كقياس زوايا الملاعب وتخطيطها.

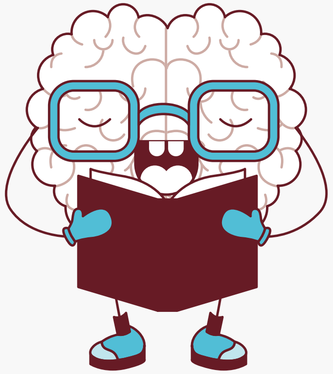
الأشكال الرباعية

و الآن

- أجد مجموع قياسات كل من الزوايا الداخلية والخارجيّة لمضلع، وأستعملها.
- أتعرف خصائص الأشكال الرباعية، وأطبّقها.
- أقارن بين الأشكال الرباعيّة.

فيما سبق

درستُ تصنيف المضلعات وميَّزت خصائصها وطبَّقتُها.



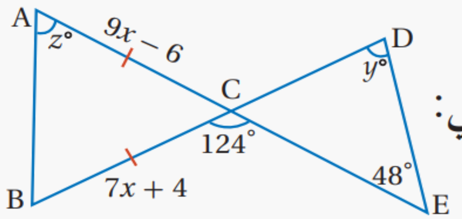
تشخيص الاستعداد

التهيئة

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد (x, y, z) في الشكل الآتي:



$AC = BC$	معطى
$9x - 6 = 7x + 4$	بالتعويض
$2x = 10$	بالطرح
$x = 5$	بالتبسيط
$124° = y° + 48°$	نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث
$(y) = 76°$	بالتبسيط
$124° = z° + z°$	نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث
$124° = 2z°$	بالجمع
$z° = 62°$	بالتبسيط

مثال 2

إذا كان $A(-2, 5), B(4, 17), C(0, 1), D(8, -3)$ ،
فحدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ صيغة الميل

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{17 - 5}{4 - (-2)} = \frac{12}{6} = 2$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{-3 - 1}{8 - 0} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

بما أن ميلي المستقيمين غير متساويين، فهما غير متوازيين.

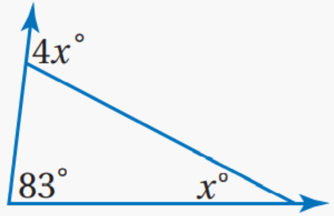
$2(-\frac{1}{2}) = -1$ حاصل ضرب ميلي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

وبما أن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1، فهما متعامدان.

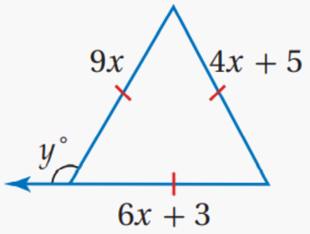
اختبار سريع

أوجد قيم x, y في كل مما يأتي مقرَّبًا إلى أقرب عُشر:

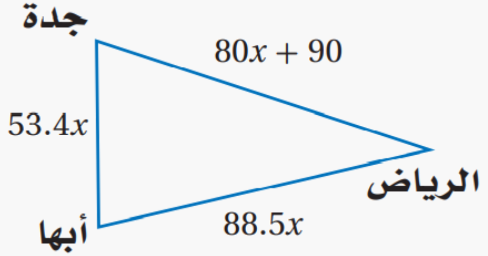
(1



(2



(3 **مدن:** تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث.



الحل

الحل

اختبار سريع

حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي:

4) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$

5) $A(4, 2), B(1, -3), C(-3, 5), D(2, 2)$

6) $A(-8, -7), B(4, -4), C(-2, -5), D(1, 7)$

7) **حدائق:** صمَّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2, 1), B(3, -3), C(5, 7),$ $D(-3, 4)$. إذا رسم ممرين يقطعانها $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$. فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك.

5-1

زوايا المضلع

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

زوايا المضلع

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

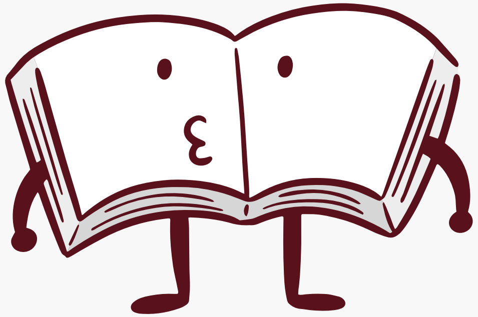
درستُ أسماء المضلعات وتصنيفها.

والآن

- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، وأستعمله.
- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع، وأستعمله.

المفردات

القطر
diagonal



زوايا المضلع

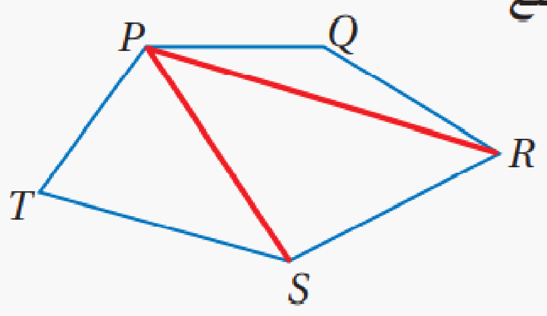
لماذا؟

تنتج عاملات النحل اليافعة شمعًا تشكِّله بعناية نحلات أخريات على صورة خلايا سداسيّة. ومع أنّ سُمْكَ جدران الخلايا 0.1 mm، إلّا أنّها تتحمّل ثقلًا يعادل 25 مثل وزنها. وتشكِّل جدران الخلايا الزاوية نفسها عند كل التقاء. وقياس هذه الزاوية يساوي قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم.

زوايا المضلع

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع:

قطر المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين أي رأسين غير متتاليين فيه. رأسا **المضلع** $PQRST$ غير التاليين للرأس P؛ هما: R, S؛
لذا فالمضلع $PQRST$ له قطران من الرأس P؛ هما: $\overline{PS}$, $\overline{PR}$.
لاحظ أن هذين القطرين يقسمان الشكل الخماسي إلى ثلاثة مثلثات.



زوايا المضلع

مجموع قياسات زوايا المضلع يساوي مجموع قياسات زوايا المثلثات التي تتشكّل عند رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس.

بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث 180°، فإنّه يمكننا إنشاء جدول والبحث عن نمط لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مضلع محدّب.

المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$180^\circ(1) = 180^\circ$
رباعي	4	2	$180^\circ(2) = 360^\circ$
خماسي	5	3	$180^\circ(3) = 540^\circ$
سداسي	6	4	$180^\circ(4) = 720^\circ$
ذو n من الأضلاع	n	$n-2$	$180^\circ(n-2)$

مراجعة المفردات

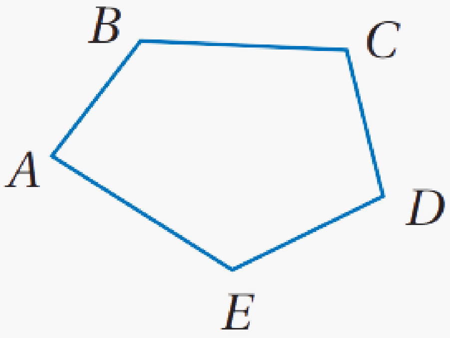
المضلع: هو شكل مغلق، يتكوّن من ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، تلتقي كل قطعة بطرفي قطعتين أخريين من المضلع، ولا تقع أي قطعتين منها على استقامة واحدة، وتكون رؤوس المضلع هي أطراف القطع المستقيمة فيه.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

نظرية 5.1

مراجعة المفردات

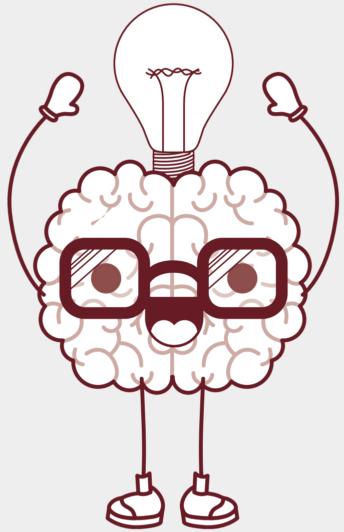
الزاوية الداخلية: هي الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين في مضلع وتقع داخله.



مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدّب عدد أضلاعه n يساوي $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

مثال:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = (5 - 2) \cdot 180^\circ$$
$$= 540^\circ$$



إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

مثال ١

a) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب.

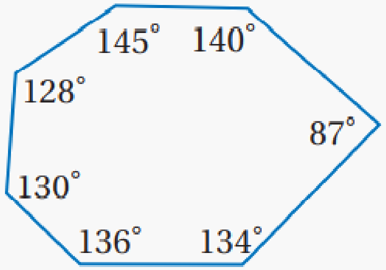
السباعي المحدب له سبعة أضلاع. استعمل النظرية5.1 ؛ لإيجاد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$$(n-2)\cdot 180^\circ = (7-2)\cdot 180^\circ \qquad n=7$$

$$= 5\cdot 180^\circ = 900^\circ \qquad \text{بالتبسيط}$$

إذن فمجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب يساوي °900.

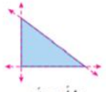
ارسم سباعيًّا محدّبًا، واستعمل المنقلة لقياس كل زاوية داخليّة مقربًا إلى أقرب درجة، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.



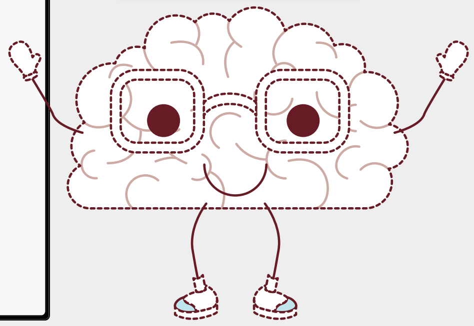
$$128^\circ+145^\circ+140^\circ+87^\circ+134^\circ+136^\circ+130^\circ = 900^\circ \;\checkmark$$

مراجعة المفردات

المضلع المحدّب: مضلع يكون قياس أيّ من زواياه الداخلية أقل من °180، ولا يقطع امتداد أي ضلع فيه أي ضلع آخر من أضلاع المضلع.


مضلع محدب


مضلع مقعر

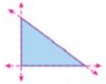


إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

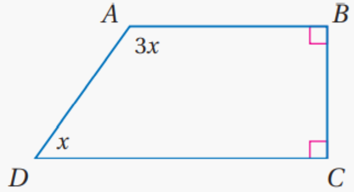
مثال ١

مراجعة المفردات

المضلع المحدّب:
مضلع يكون قياس أيّ من زواياه الداخلية أقل من 180°، ولا يقطع امتداد أي ضلع فيه أي ضلع آخر من أضلاع المضلع.



b) **جبر:** أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للرباعي المجاور.



الخطوة 1: أوجد قيمة (x).

بما أن للشكل الرباعي 4 زوايا، فإن مجموع قياسات زواياه الداخليّة يساوي $(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$.

$360^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$	مجموع قياسات الزوايا الداخليّة
$360^\circ = 3x + 90^\circ + 90^\circ + x$	بالتعويض
$360^\circ = 4x + 180^\circ$	بتجميع الحدود المتشابهة
$180^\circ = 4x$	بطرح 180° من كلا الطرفين
$45^\circ = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4

الخطوة 2: استعمل قيمة x لإيجاد قياس كل زاوية.

$m\angle D = x$
$= 45^\circ$

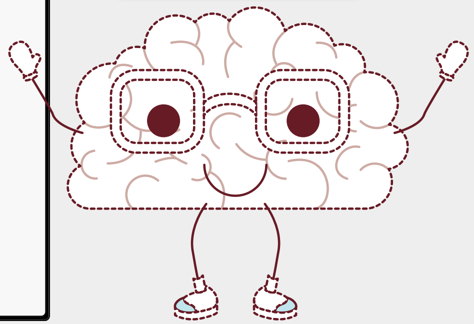
$m\angle B = 90^\circ$
$m\angle C = 90^\circ$

$m\angle A = 3x$
$= 3(45^\circ)$
$= 135^\circ$

اكتب قياسات الزوايا الداخلية للرباعي، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

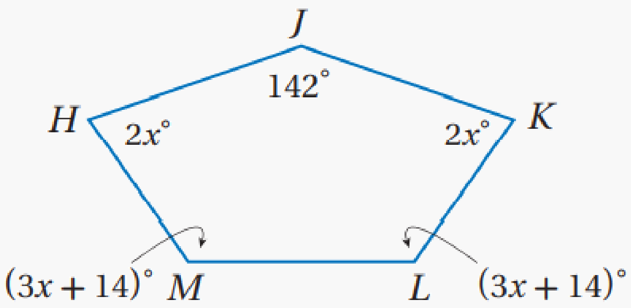
$90^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 135^\circ$

$90^\circ + 90^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ✓



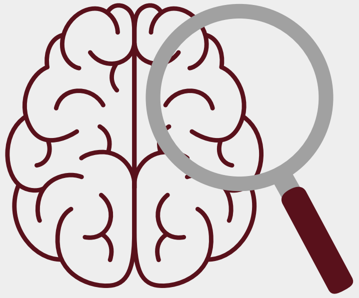
إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

تحقق من فهمك



1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

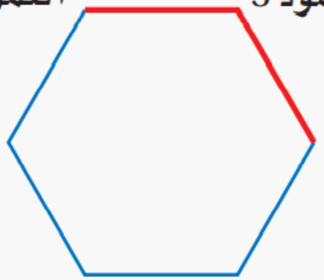
مثال ٢

مظلة : في المنظر العلوي للمظلة المجاورة، تشكّل الأعمدة رؤوس مضلع سداسي منتظم. أوجد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي من أركان المظلة.

افهم : **المعطيات:** منظر علوي لمظلة سداسية منتظمة الشكل.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي ركن من أركان المظلة.

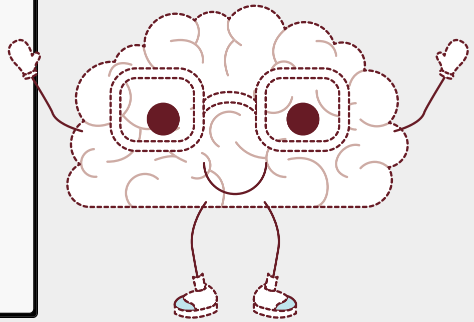
ارسم شكلًا يمثِّل المنظر العلوي للمظلة.



الزاوية التي تتشكّل عند أي من أركان المظلة هي زاوية داخليّة لسداسي منتظم.

مراجعة المفردات

المضلع المنتظم: هو مضلع محدّب جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه متطابقة.



قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

مثال ٢

مراجعة المفردات

المضلع المنتظم: هو مضلع محدّب جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه متطابقة.

خطط: استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسداسي. وبما أن الزوايا الداخلية للسداسي المنتظم متطابقة، فإن قياس كل زاوية داخلية يساوي ناتج قسمة المجموع على عدد الزوايا.

حل: أولًا: أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة.

$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$ صيغة مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$= (6 - 2) \cdot 180^\circ$ $n = 6$

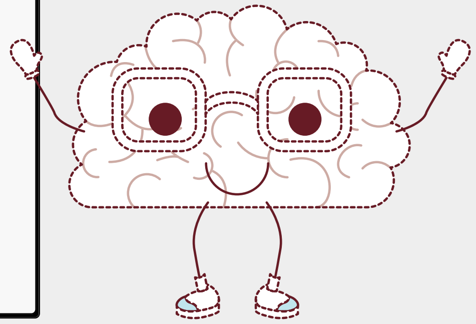
$= 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ بالتبسيط

ثانيًا: أوجد قياس كل زاوية داخليّة.

$\dfrac{\text{مجموع قياسات الزوايا الداخلية}}{\text{عدد الزوايا الداخلية}} = \dfrac{720^\circ}{6}$ بالتعويض

$= 120^\circ$ بالقسمة

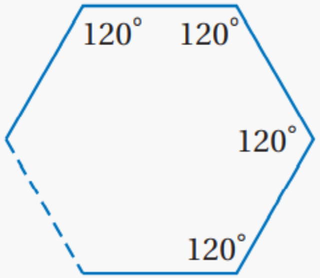
إذن قياس الزاوية المتكوِّنة عند كل ركن يساوي 120°.



قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

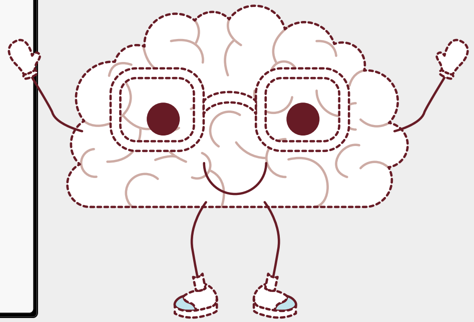
مثال ٢

تحقق: للتحقق من أنّ هذا القياس صحيح، استعمل المسطرة والمنقلة لرسم سداسي منتظم قياس زاويته الداخليّة °120.
سيرتبط الضلع الأخير بنقطة البداية لأول قطعة مستقيمة رُسمت. ✓



مراجعة المفردات

المضلع المنتظم: هو مضلع محدّب جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه متطابقة.



قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

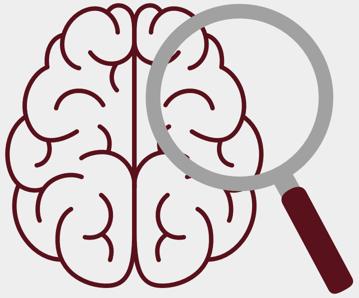
تحقق من فهمك

2A) **سجاد:** أوجد قياس الزاوية الداخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

تحقق من فهمك

2B) **نوافير:** تزيِّن النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة. أوجد قياس الزاوية الداخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.



مثال ٣

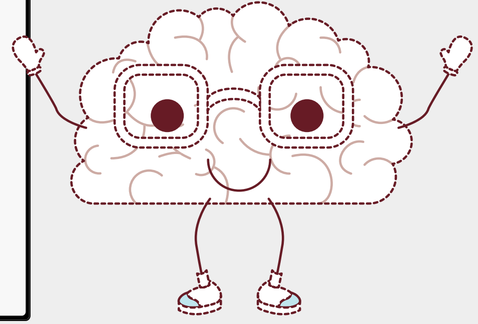
إيجاد عدد الأضلاع إذا عُلم قياس زاوية داخليّة

إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي 135°، فأوجد عدد أضلاعه .

افترض أن عدد أضلاع المضلع يساوي n. وبذلك يكون مجموع قياسات زواياه الداخليّة $135n$ ؛ لأن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. وبناءً على نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة يمكن التعبير أيضًا عن مجموع قياسات الزوايا الداخليّة بالعبارة $S = (n-2) \cdot 180$.

$135^\circ n = (n-2) \cdot 180^\circ$	كتابة معادلة
$135^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$	خاصية التوزيع
$-45^\circ n = -360^\circ$	بطرح $180n$ من كلا الطرفين
$n = 8$	بقسمة كلا الطرفين على -45

إذن للمضلع 8 أضلاع.



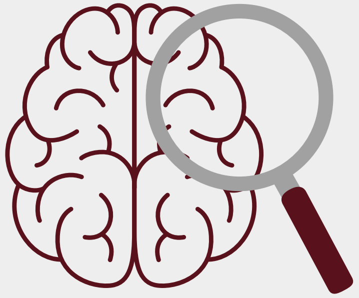
DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

إيجاد عدد الأضلاع إذا عُلم قياس زاوية داخليّة

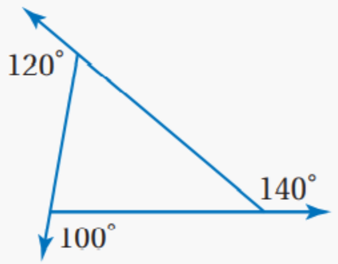
تحقق من فهمك

3) إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي 144°، فأوجد عدد أضلاعه.

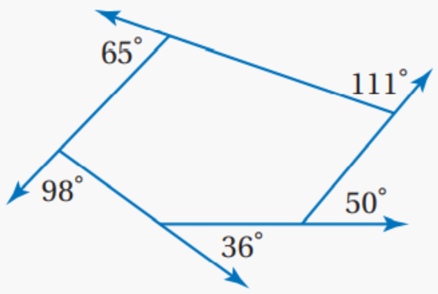


مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

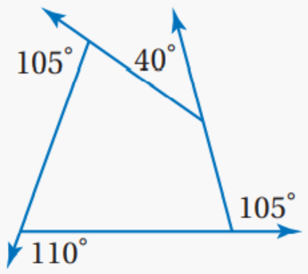
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع: هل توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلع محدّب ومجموع قياسات زواياه الخارجية؟ انظر المضلعات أدناه التي أُعطي في كل منها قياس زاوية خارجية عند كل رأس.



$120^\circ + 100^\circ + 140^\circ = \mathbf{360^\circ}$



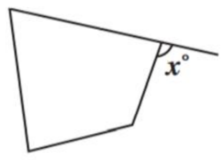
$65^\circ + 98^\circ + 36^\circ + 50^\circ + 111^\circ = \mathbf{360^\circ}$



$105^\circ + 110^\circ + 105^\circ + 40^\circ = \mathbf{360^\circ}$

مراجعة المفردات

الزاوية الخارجيّة: الزاوية الخارجية لمضلع محدب هي زاوية محصورة بين أحد أضلاعه وامتداد ضلع آخر.



لاحظ أنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس في كل حالة يساوي 360°. وتقودنا هذه الملاحظة إلى النظرية الآتية :

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

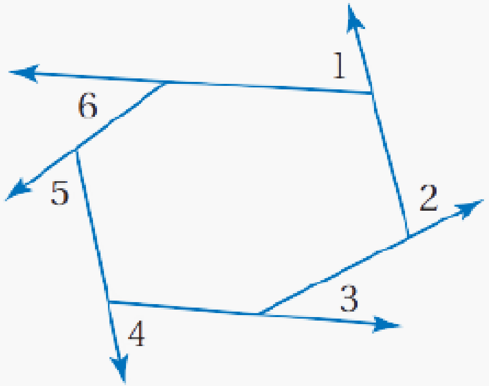
نظرية
5.2

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية الخارجية:

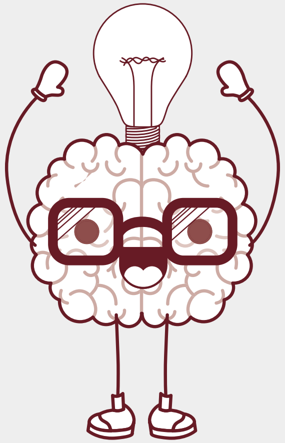
قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n يساوي $\frac{360°}{n}$

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.



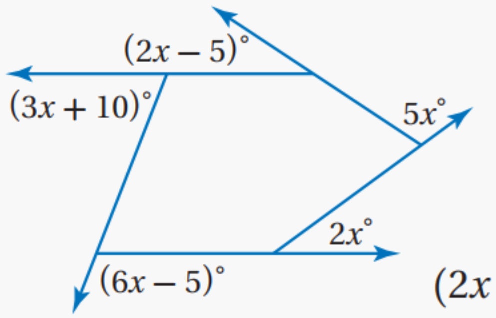
مثال:

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360°$$



إيجاد قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

مثال ٤



a) **جبر:** أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع لكتابة معادلة، ثمّ حُلّها لإيجاد قيمة x.

$$(2x-5)^\circ + 5x^\circ + 2x^\circ + (6x-5)^\circ + (3x+10)^\circ = 360^\circ$$

$$(2x+5x+2x+6x+3x)^\circ + [-5+(-5)+10]^\circ = 360^\circ$$

$$18x^\circ = 360^\circ$$

$$x^\circ = \frac{360^\circ}{18} = 20$$

b) **أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للتساعي المنتظم.**

تتطابق الأضلاع والزوايا الداخلية في التساعي المنتظم وتكون الزوايا الخارجية متطابقة لأن المكملات للزوايا المتطابقة تكون متطابقة أيضًا.

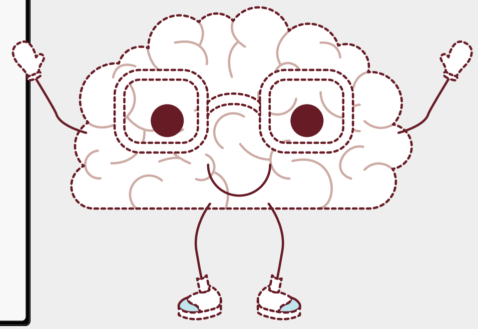
افترض أن قياس كل زاوية خارجيّة يساوي x، ثم اكتب معادلة وحلّها.

$9x = 360^\circ$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع
$x = 40^\circ$	بقسمة كلا الطرفين على 9

إذن قياس كل زاوية خارجيّة للمضلع التساعي المنتظم يساوي 40°.

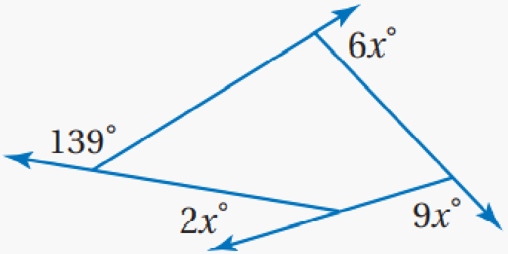
إرشادات للدراسة

طريقة بديلة:
لإيجاد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم يمكنك إيجاد قياس زاوية داخليّة وطرح هذا القياس من 180°؛ لأنّ الزاوية الخارجيّة والزاوية الداخليّة المرتبطة بها متكاملتان.



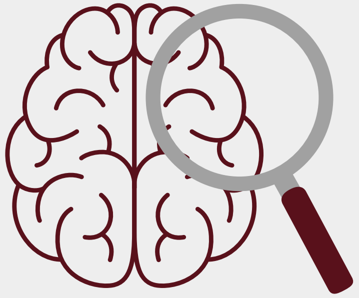
إيجاد قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

تحقق من فهمك



4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

4B) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

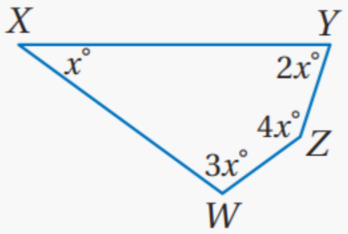


زوايا المضلع

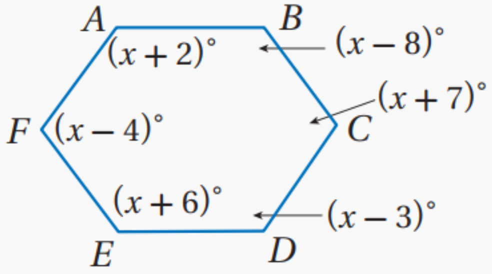
تأكد

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



4)



تأكد

زوايا المضلع

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) 150°

7) 170°

زوايا المضلع

تدرب وحل

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعًا

13) ذو 20 ضلعًا

مهارات التفكير العليا

زوايا المضلع

اكتب: وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

5-2

متوازي الأضلاع

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

@A_Shark_s

متوازي الأضلاع

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

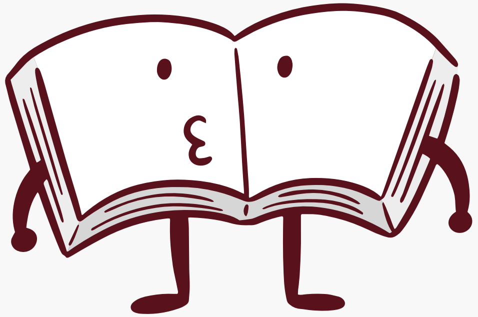
درستُ تصنيف المضلعات الرباعية .

والآن

- أتعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وأطبّقها.
- أتعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وأطبّقها.

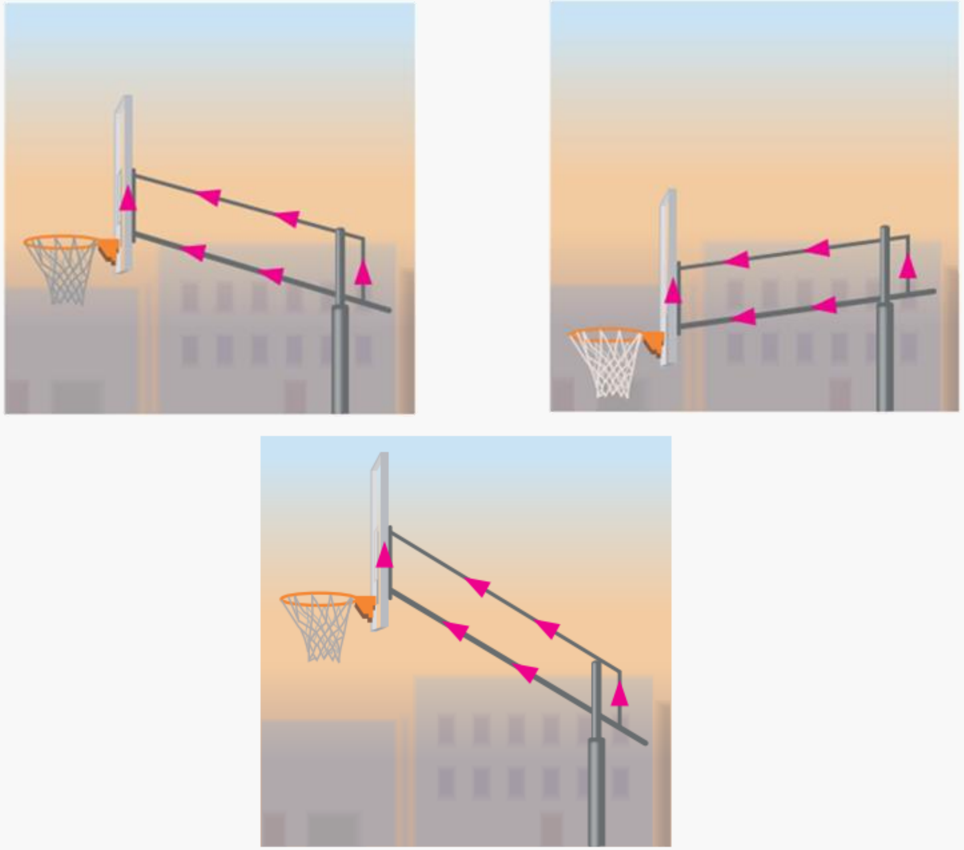
المفردات

متوازي الاضلاع
parallelogram



متوازي الأضلاع

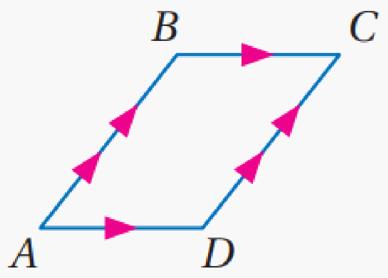
لماذا؟



يمكن التحكم في ارتفاع مرمى كرة السلة من خلال أذرع خلفية كما في الشكل أدناه. لاحظ أنّه كلّما تم تعديل الارتفاع، يبقى كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الذي تشكّله الأذرع متوازيين.

متوازي الأضلاع

أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه: **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ويُرمز لمتوازي الأضلاع بالرمز $\square$.
ففي $\square ABCD$ المبين جانبًا $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ بحسب التعريف.



$\square ABCD$

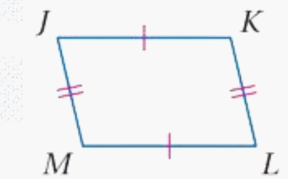
تقدم النظريات الآتية خصائص أخرى لمتوازي الأضلاع.

خصائص متوازي الأضلاع

نظريات

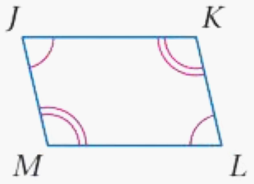
5.3 كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

مثال: $\overline{JK} \cong \overline{ML}\ ,\ \overline{JM} \cong \overline{KL}$



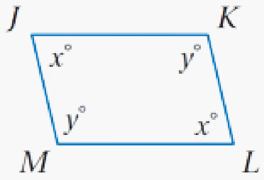
5.4 كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.

مثال: $\angle J \cong \angle L\ ,\ \angle K \cong \angle M$



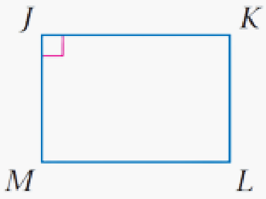
5.5 كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.

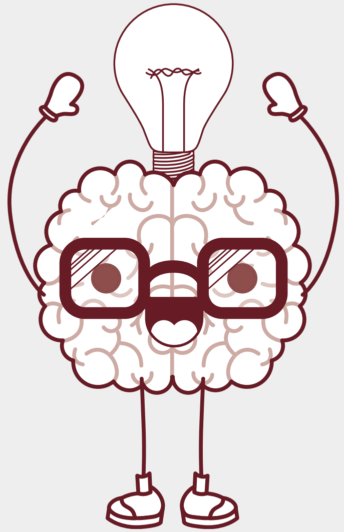
مثال: $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$



5.6 إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

مثال: في $\square JKLM$ ، إذا كانت $\angle J$ قائمة، فإنّ :
$\angle K, \angle L, \angle M$ قوائم أيضًا.





خصائص متوازي الأضلاع

برهان

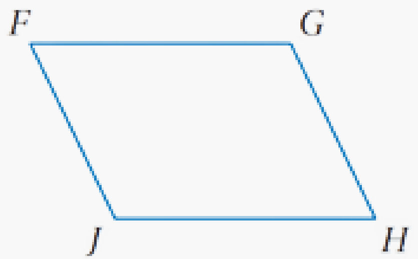
نظريّة 5.4

اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريّة 5.4.

المعطيات: $\square FGHJ$

المطلوب: $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$

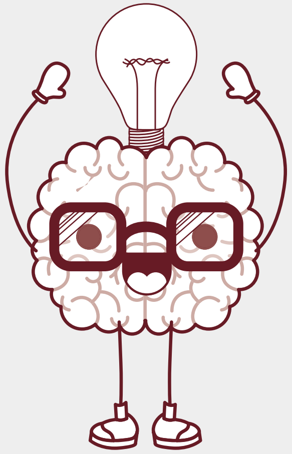
البرهان:



العبارات	المبررات
1) $\square FGHJ$	1) معطى.
2) $\overline{FG} \parallel \overline{JH}, \overline{FJ} \parallel \overline{GH}$	2) تعريف متوازي الأضلاع.
3) $\angle F$ ، $\angle J$ متكاملتان. $\angle J$ ، $\angle H$ متكاملتان. $\angle H$ ، $\angle G$ متكاملتان.	3) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
4) $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$	4) الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها تكونان متطابقتين.

إرشادات للدراسة

رسم الأشكال: تكتب النظريات بمصطلحات عامّة، أما في البرهان فيجب رسم شكل بحيث يمكن من خلاله الإشارة إلى القطع المستقيمة والزوايا بصورة دقيقة.



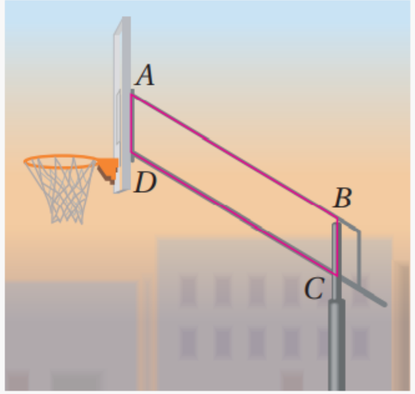
استعمال خصائص متوازي الأضلاع

مثال ١

الربط مع الحياة

الأبعاد القياسية لملعب كرة السلة هي $94\text{ ft} \times 50\text{ ft}$، والارتفاع القياسي للهدف عن الأرض 10 ft .

كرة سلّة : في $\square ABCD$ ، إذا كان $AB = 2.5\text{ ft}, m\angle A = 55^\circ$ ، $BC = 1\text{ ft}$، فأوجد كلًّا مما يأتي، وبرِّر إجابتك.



a) DC

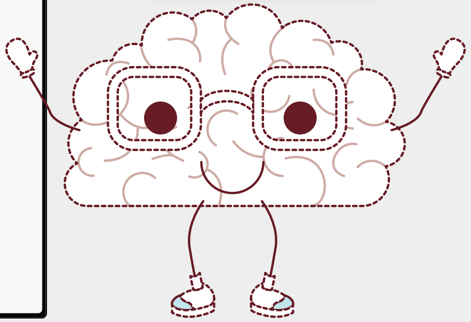
$\overline{DC} \cong \overline{AB}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$DC = AB$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$= 2.5\text{ ft}$	بالتعويض

b) $m\angle B$

$m\angle B + m\angle A = 180^\circ$	كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان
$m\angle B + 55^\circ = 180^\circ$	بالتعويض
$m\angle B = 125^\circ$	بطرح 55° من كلا الطرفين

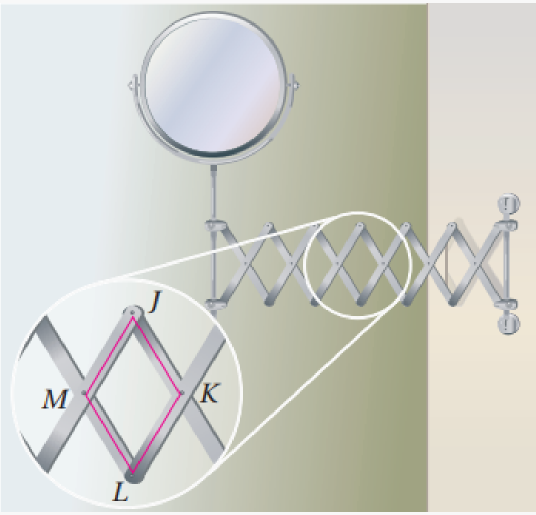
c) $m\angle C$

$m\angle C = m\angle A$	كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان
$= 55^\circ$	بالتعويض



استعمال خصائص متوازي الأضلاع

تحقق من فهمك



1) **مرايا:** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$ ، إذا كان $m\angle J = 47°, MJ = 8$ cm، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK

B) $m\angle L$

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90°$، فكم يصبح قياس كلٍّ من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

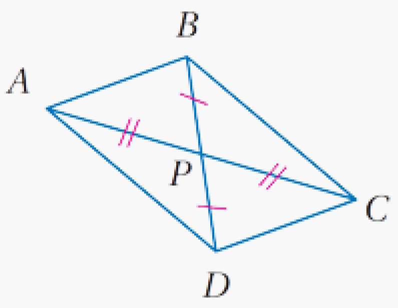
قطرا متوازي الأضلاع

نظريات

قطرا متوازي الأضلاع: قطرا متوازي الأضلاع يُحقّقان الخاصيّتين الآتيتين :

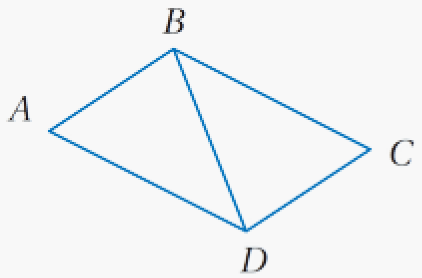
5.7 قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.

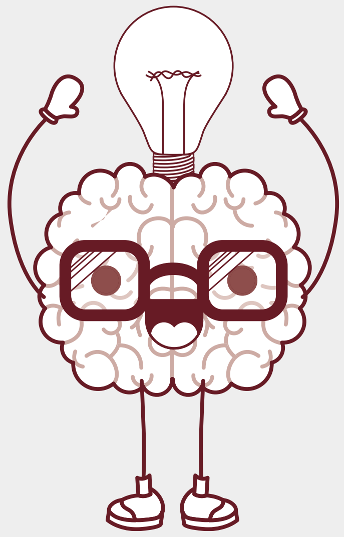
مثال: $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, $\overline{DP} \cong \overline{PB}$.



5.8 قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

مثال: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



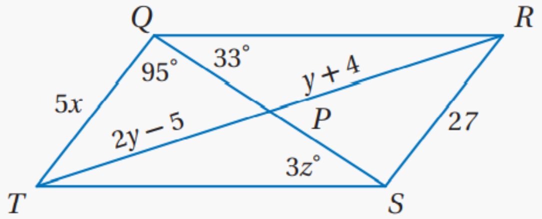


DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

خصائص متوازي الأضلاع والجبر

مثال ٢



جبر: إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة كل من المتغيرات الآتية:

a) x

$\overline{QT} \cong \overline{RS}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$QT = RS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$5x = 27$	بالتعويض
$x = 5.4$	بقسمة كلا الطرفين على 5

b) y

$\overline{TP} \cong \overline{PR}$	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2y - 5 = y + 4$	بالتعويض
$y = 9$	بطرح y وإضافة 5 لكلا الطرفين

c) z

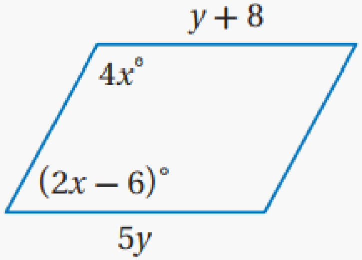
$\triangle TQS \cong \triangle RSQ$	قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين
$\angle QST \cong \angle SQR$	العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة
$m\angle QST = m\angle SQR$	تعريف تطابق الزوايا
$3z = 33°$	بالتعويض
$z = 11$	بقسمة كلا الطرفين على 3

خصائص متوازي الأضلاع والجبر

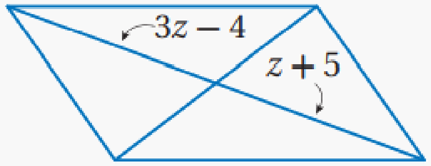
تحقق من فهمك

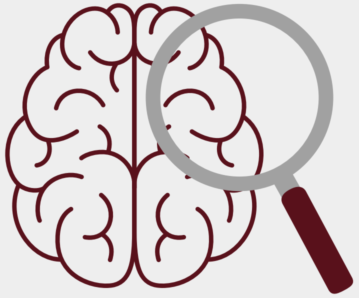
أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

(2A



(2B





متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثية

مثال ٣

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-2, 4), G(3, 5), H(2, -3), J(-3, -4)$.

بما أنّ قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{GJ}$, $\overline{FH}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{FH}$ التي طرفاها $(2, -3)$, $(-2, 4)$.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{4 + (-3)}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$= (0, 0.5) \quad \text{بالتبسيط}$$

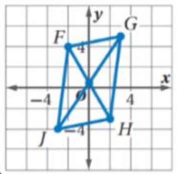
إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ هما $(0, 0.5)$.

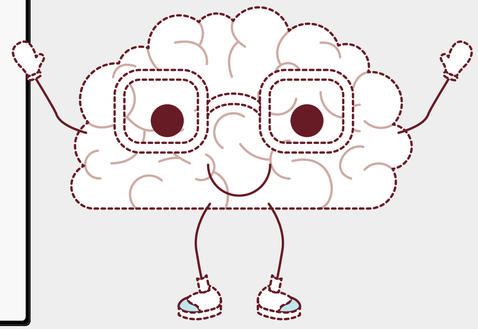
تحقق: أوجد نقطة منتصف $\overline{GJ}$ التي طرفاها $(-3, -4)$, $(3, 5)$.

$$\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-4)}{2}\right) = (0, 0.5) \quad ✔$$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: في المثال 3، مثّل متوازي الأضلاع على المستوى الإحداثي وعيّن نقطة تقاطع القطرين التي أوجدتها. ارسم القطرين لتجد أن نقطة تقاطعهما هي $(0, 0.5)$.

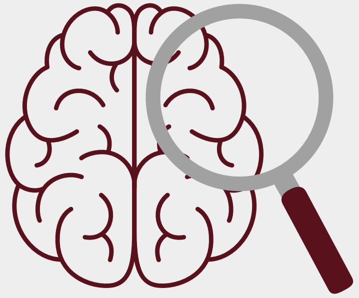




متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثية

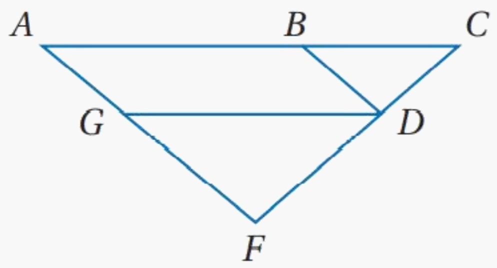
تحقق من فهمك

3) **هندسة إحداثيّة :** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$.



استعمال خصائص متوازي الأضلاع لكتابة براهين

مثال ٤



اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\square ABDG, \overline{AF} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $\angle BDG \cong \angle C$

البرهان:

من المعطيات $ABDG$ متوازي أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle BDG \cong \angle A$. ومعطى أيضًا أنّ $\overline{AF} \cong \overline{CF}$. ومن نظريّة المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle A \cong \angle C$. ومن خاصيّة التعدّي للتطابق تكون $\angle BDG \cong \angle C$.

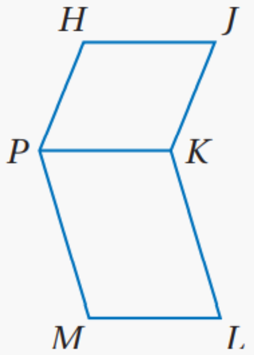
استعمال خصائص متوازي الأضلاع لكتابة براهين

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square HJKP$, $\square PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

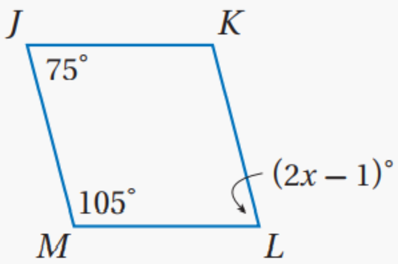


متوازي الأضلاع

تأكد

جبر: أوجد قيمة المتغير

(2



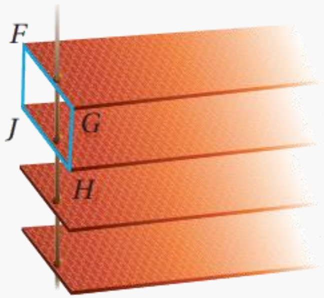
متوازي الأضلاع

تأكد

4) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

متوازي الأضلاع

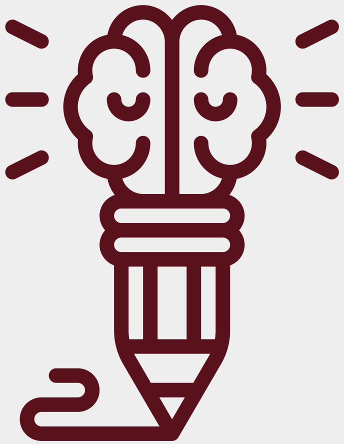
تدرب وحل



11) **ستائر:** في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}$ in, $FG = 1$ in, $m\angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

a) JH

b) GH



مهارات التفكير العليا

متوازي الأضلاع

اكتب: هل توجد نظرية SSSS في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك.

5-3

تمييز متوازي الأضلاع

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

تمييز متوازي الأضلاع

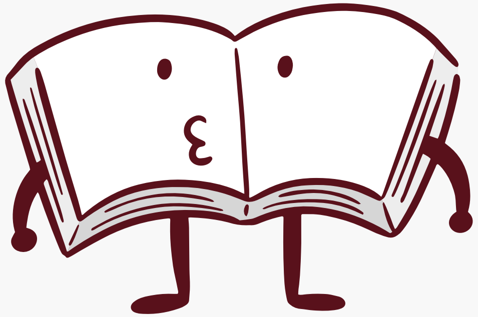
رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ خصائص متوازي الأضلاع وطبَّقتها.

والآن

- أتعرّف الشروط التي تؤكد أنّ شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع وأطبّقها.
- أُبرهن على أنّ أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.

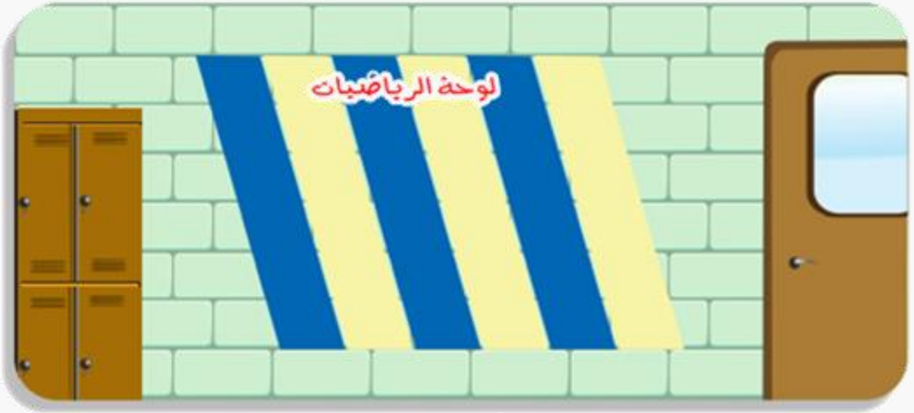


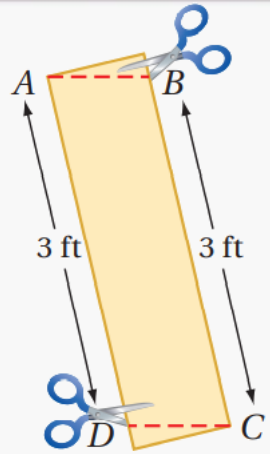
تمييز متوازي الأضلاع

قصّت فاطمة شرائح ورقية ملونة لتكون خلفية للوحة الرياضيات عند مدخل المدرسة. فسألتها صديقتها: كيف قصصتِ الشرائح دون استعمال المنقلة بحيث كان الضلعان العلوي والسفلي في كل منها متوازيين؟

أجابت فاطمة: بما أن الضلعين الأيمن والأيسر للشريحة متوازيان، فإننا نحتاج فقط التأكد من أن لهما الطول نفسه عند قص الضلعين العلوي والسفلي للشريحة حتى نضمن أن الشرائح سوف تشكل متوازيات أضلاع.

لماذا؟





تمييز متوازي الأضلاع

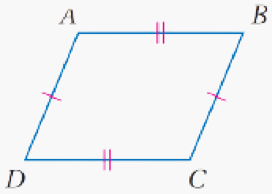
شروط متوازي الأضلاع: في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متوازيين، فإنّه متوازي أضلاع بحسب التعريف. ولكن ليس هذا هو الشرط الوحيد الذي يمكن استعماله لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

شروط متوازي الأضلاع

نظريات

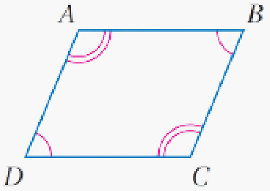
5.9 في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$،
فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



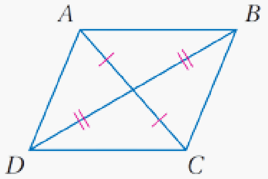
5.10 في الشكل الرباعي، إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$ ،
فإنَ $ABCD$ متوازي أضلاع.



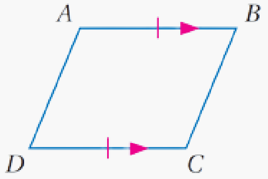
5.11 إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

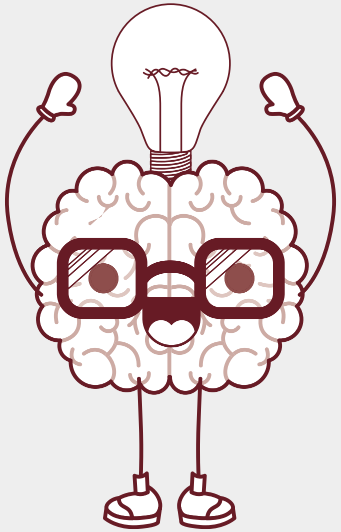
مثال: إذا كان $\overline{AC}, \overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر،
فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



5.12 في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$ ،
فإنَ $ABCD$ متوازي أضلاع.





شروط متوازي الأضلاع

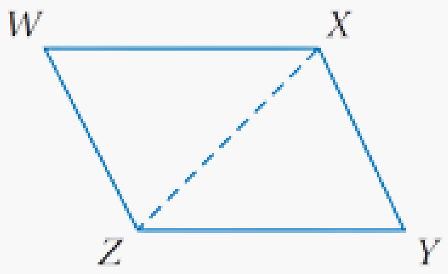
برهان

نظريَة 5.9

اكتب برهاناً حرًّا للنظريَة 5.9

المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$

المطلوب: $WXYZ$ متوازي أضلاع.

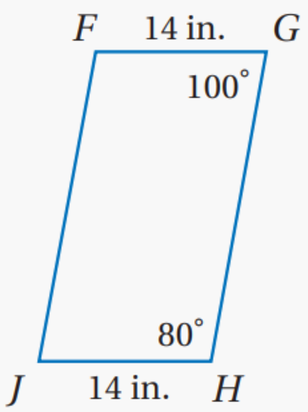


البرهان:

ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{ZX}$ (قطر $\square WXYZ$)لتشكيل $\triangle XYZ$, $\triangle ZWX$. ومن المعطيات $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$. وكذلك $\overline{ZX} \cong \overline{XZ}$ بحسب خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ إذن $\triangle ZWX \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS. وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإنّ $\angle WXZ \cong \angle YZX, \angle WZX \cong \angle YXZ$. وهذا يعني أنّ $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا. وبما أن الأضلاع المتقابلة في $WXYZ$ متوازية، فإنه متوازي أضلاع بحسب التعريف.

تحديد متوازي الأضلاع

مثال ١



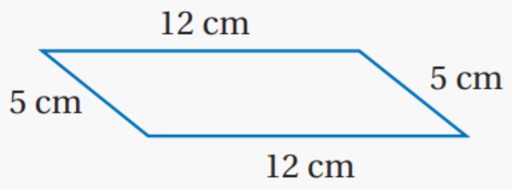
حدد ما إذا كانت المعطيات على الشكل الرباعي المجاور كافية ليكون متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

الضلعان المتقابلان $\overline{JH}$, $\overline{FG}$ متطابقان؛ لأنهما متساويان في الطول.
وبما أن $\angle GHJ$, $\angle FGH$ متحالفتان ومتكاملتان، فإنّ $\overline{JH} \parallel \overline{FG}$.
إذن فمن النظرية 5.12، يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

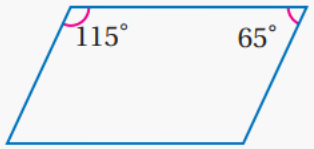
تحديد متوازي الأضلاع

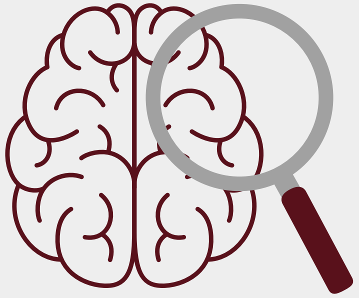
تحقق من فهمك

(1A



(1B



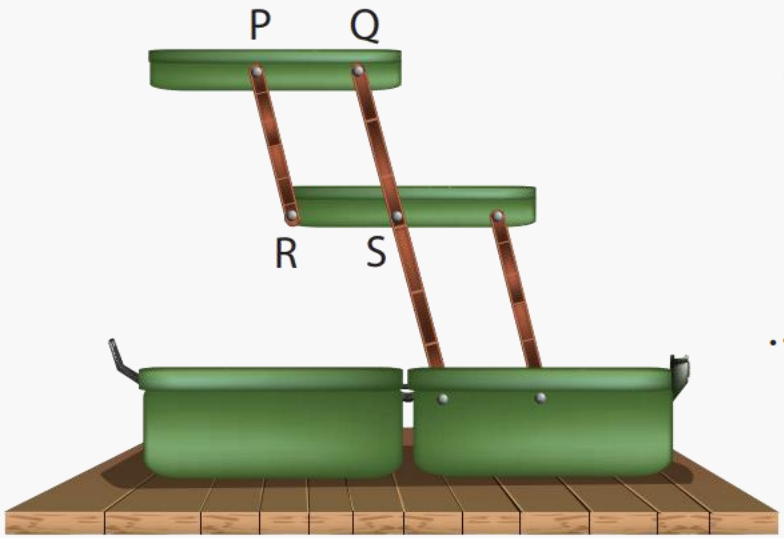


مثال ٢

استعمال متوازي الأضلاع لإثبات علاقات

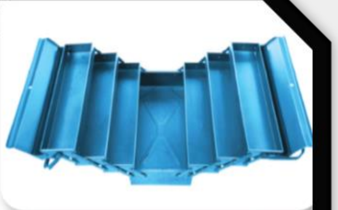
صندوق الأدوات: في الشكل المجاور،

إذا كان $PR = QS$, $PQ = RS$، فبيِّن لماذا تبقى الطبقتان العلوية والوسطى متوازيتين عند أي ارتفاع .



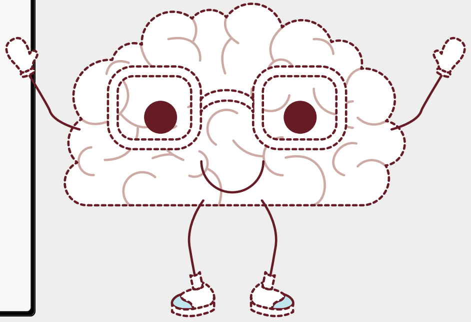
بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $PQSR$ متطابقان، فإن $PQSR$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 5.9.

إذن $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ ؛ لذا وبغض النظر عن ارتفاع الطبقتين، فستبقيان متوازيتين.



الربط مع الحياة

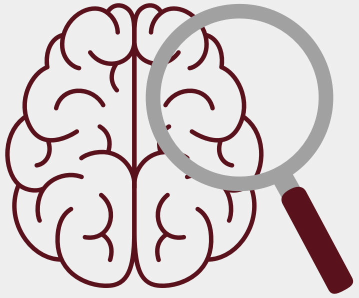
يضع الفنيون أدواتهم في صناديق ذات طبقات متداخلة تسهّل تنظيم الأدوات وتبقيها في متناول أيديهم.



استعمال متوازي الأضلاع لإثبات علاقات

تحقق من فهمك

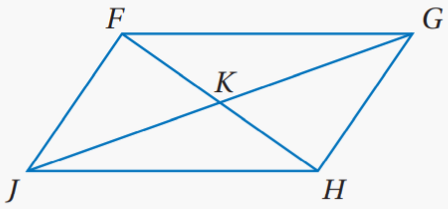
2) **لوحات:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريحة متوازيين.



مثال ٣

استعمال متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة

في الشكل المجاور: $FK = 3x - 1, KG = 4y + 3$، $JK = 6y - 2, KH = 2x + 3$. أوجد قيمتي x, y بحيث يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.



بناءً على النظرية 5.11، إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؛ لذا أوجد قيمة x التي تجعل $\overline{FK} \cong \overline{KH}$ ؛ وقيمة y التي تجعل $\overline{JK} \cong \overline{KG}$.

$FK = KH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3x - 1 = 2x + 3$	بالتعويض
$x - 1 = 3$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين
$x = 4$	بإضافة 1 إلى كلا الطرفين
$JK = KG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6y - 2 = 4y + 3$	بالتعويض
$2y - 2 = 3$	بطرح $4y$ من كلا الطرفين
$2y = 5$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين
$y = 2.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

إذن عندما تكون $x = 4, y = 2.5$، يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

تنبيه !

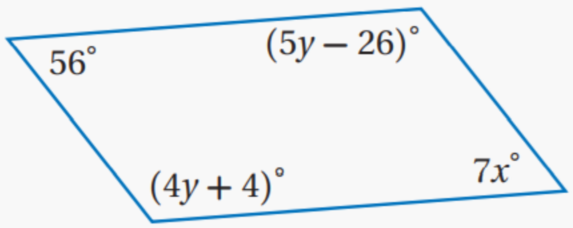
متوازي الأضلاع:
في المثال 3، إذا كانت x تساوي 4، فإن y يجب أن تساوي 2.5 حتى يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع. وهذا يعني أنه إذا كانت x تساوي 4 و y تساوي 1 مثلًا، فلن يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

استعمال متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة

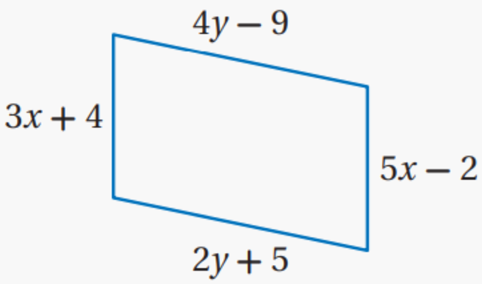
تحقق من فهمك

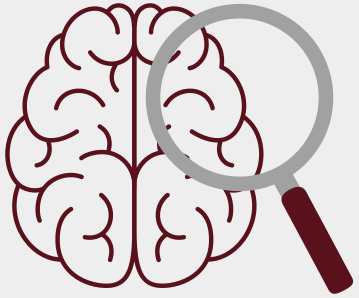
أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(3A



(3B





ملخص المفهوم

إثبات أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقّق أيًا من الشروط الآتية:

1) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. (التعريف)

2) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين. (النظرية 5.9)

3) إذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين. (النظرية 5.10)

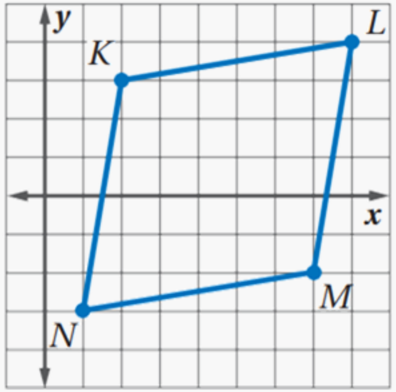
4) إذا كان قطراه ينصّف كل منهما الآخر. (النظرية 5.11)

5) إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. (النظرية 5.12)

متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثيّة

مثال ٤

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $KLMN$ الذي رؤوسه $K(2, 3), L(8, 4), M(7, -2), N(1, -3)$. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.



إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازية فإنه متوازي أضلاع.

ميل $\overline{KL}$: $\frac{4-3}{8-2} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{NM}$: $\frac{-2-(-3)}{7-1} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{KN}$: $\frac{-3-3}{1-2} = \frac{-6}{-1} = 6$

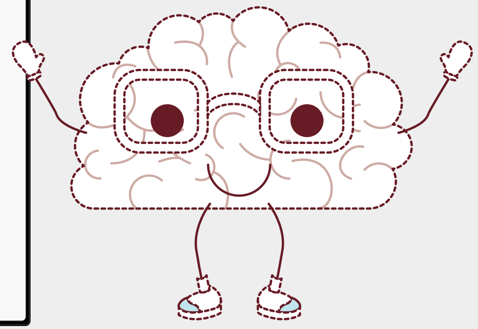
ميل $\overline{LM}$: $\frac{-2-4}{7-8} = \frac{-6}{-1} = 6$

بما أنّ الأضلاع المتقابلة لها الميل نفسه، فإنّ $\overline{KN} \parallel \overline{LM}$, $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$.

لذا فالشكل الرباعي $KLMN$ متوازي أضلاع بحسب التعريف.

إرشادات للدراسة

صيغة نقطة المنتصف: لبيان أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع، يمكنك استعمال صيغة نقطة المنتصف، فإذا كانت نقطتا المنتصف للقطرين متساويتين، فإنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر.



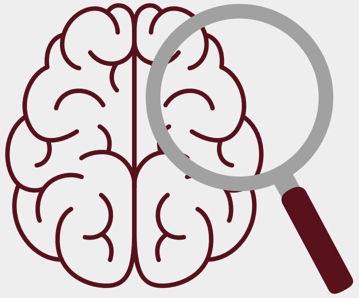
متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثيّة

تحقق من فهمك

مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدِّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برِّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال:

4A) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ ، صيغة المسافة.

4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف.



متوازي الأضلاع والبرهان الإحداثي

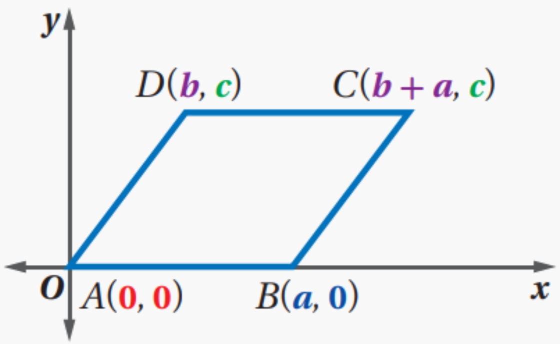
مثال ٥

مراجعة المفردات

البرهان الإحداثي: هو برهان تُستعمل فيه أشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات مفاهيم هندسيّة.

اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية :

في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



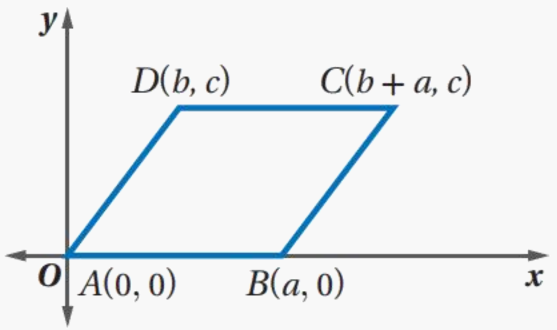
الخطوة 1: ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في المستوى الإحداثي على أن يكون $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

- عيّن الرأس A عند النقطة $(0, 0)$.
- افترض أن طول $\overline{AB}$ يساوي a وحدة. فيكون إحداثيا B هما $(a, 0)$.
- بما أنّ القطع المستقيمة الأفقيّة متوازية دائمًا، فعيّن نقطتي طرفي $\overline{DC}$ على أن يكون لهما الإحداثي y نفسه وليكن c.
- بما أن المسافة من D إلى C تساوي أيضًا a وحدة، وبفرض أنّ الإحداثي x للنقطة D يساوي b ، يكون الإحداثي x للنقطة C يساوي $b + a$.

متوازي الأضلاع والبرهان الإحداثي

مثال ٥

الخطوة 2: استعمل الشكل الذي رسمته لكتابة برهان.



المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

برهان إحداثي:

من التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.

ومن المعطيات $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. يبقى أن نثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

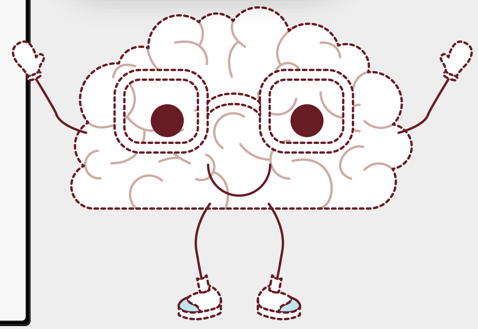
استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{AD}$: $\frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$ ميل $\overline{BC}$: $\frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

وبما أن $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ؛ لذا فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت
(1596م – 1650م)
عالم رياضيات فرنسي، وهو أول من استعمل المستوى الإحداثي . وقيل إنه فكر أولاً بربط كل موقع في مستوى مع زوج من الأعداد.



متوازي الأضلاع والبرهان الإحداثي

تحقق من فهمك

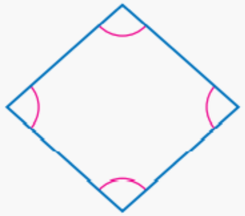
5) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

تمييز متوازي الأضلاع

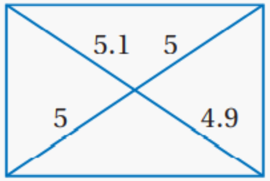
تأكد

حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

(1



(2

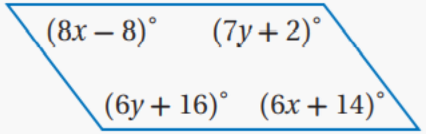


تمييز متوازي الأضلاع

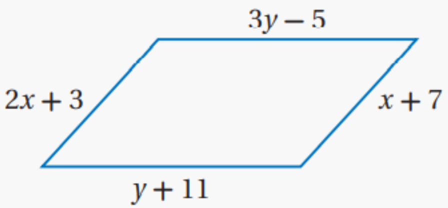
تأكد

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(4



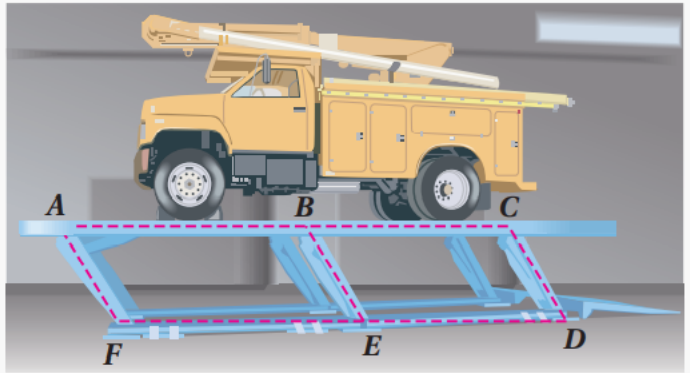
(5



تمييز متوازي الأضلاع

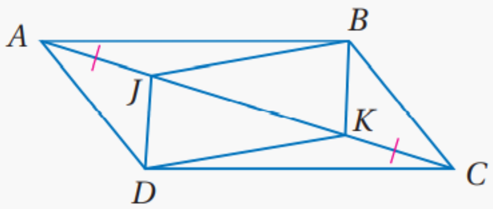
تدرب وحل

16) **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.

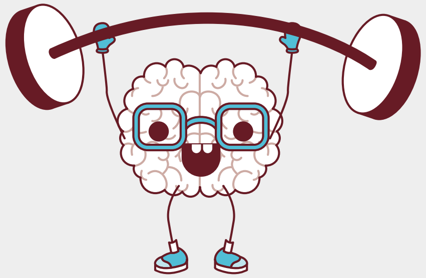


تمييز متوازي الأضلاع

مهارات التفكير العليا



تحدٍّ: في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.
بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.



5-4

المستطيل

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

المستطيل

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

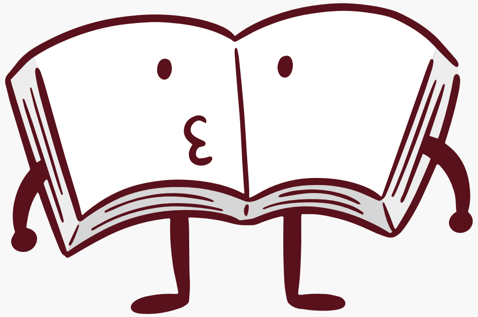
درستُ استعمال خصائص متوازي الأضلاع وتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

والآن

- أتعرّف خصائص المستطيل وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا.

المفردات

المستطيل
rectangle



المستطيل

لماذا؟

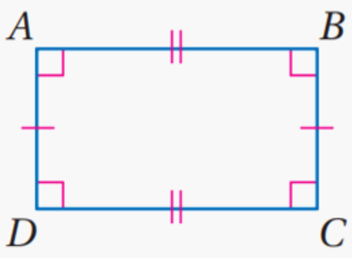
أحمد هو الطالب المسؤول عن عرض لوحات الرياضيات في يوم النشاط المدرسي. ولعمل خلفية مميزة يعرض عليها لوحات الرياضيات، قام بطلاء جزء من جدار على شكل مستطيل يبدأ طوله من أسفل الجدار ويمتد للأعلى، وكان طوله 80 in، وعرضه 36 in. كيف يمكنه أن يتحقق من أنّ الجزء الذي قام بطلائه مستطيل؟

المستطيل

خصائص المستطيل: المستطيل هو متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم. ونجد من ذلك أنّ للمستطيل الخصائص الآتية :

- الزوايا الأربع قوائم.
- كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- القطران ينصِّف كل منهما الآخر.

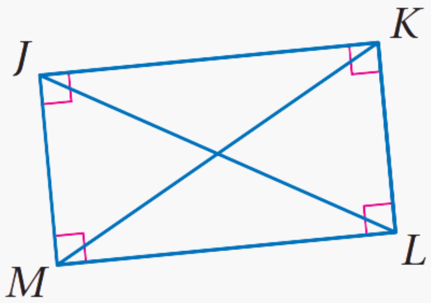
وبالإضافة إلى ذلك، قطرا المستطيل متطابقان، كما توضح النظرية الآتية:



المستطيل $ABCD$

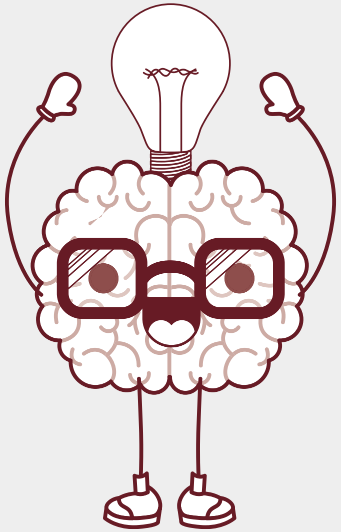
قطرا المستطيل

نظرية



إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإن قطريه متطابقان.

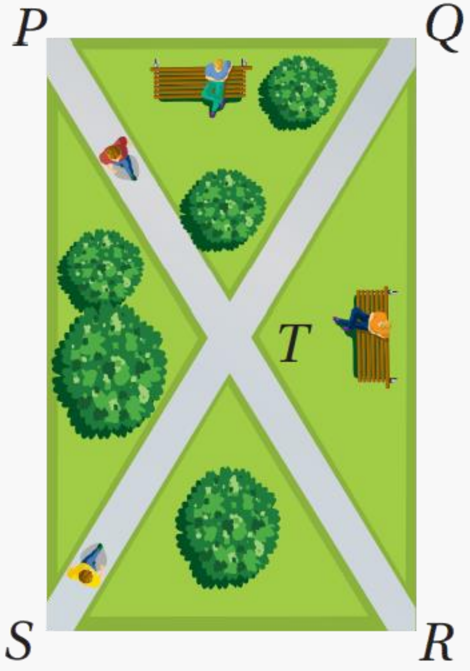
مثال : إذا كان $\square JKLM$ مستطيلًا ، فإنّ $\overline{MK} \cong \overline{JL}$.



استعمال خصائص المستطيل

مثال ١

حدائق: حديقة مستطيلة الشكل تحتوي على ممرين كما في الشكل المجاور.
إذا كان $PR = 200$ m، فأوجد QT.

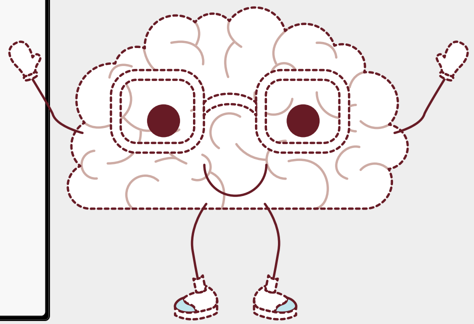


$\overline{QS} \cong \overline{PR}$	قطرا المستطيل متطابقان
$QS = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$QS = 200$	بالتعويض

وبما أن $PQRS$ مستطيل، لذا فإن قطريه ينصِّف كل منهما الآخر؛ لذا

$$QT = \frac{1}{2}QS$$

$$QT = \frac{1}{2}(200) = 100$$ بالتعويض



استعمال خصائص المستطيل

تحقق من فهمك

استعن بالشكل في المثال 1.

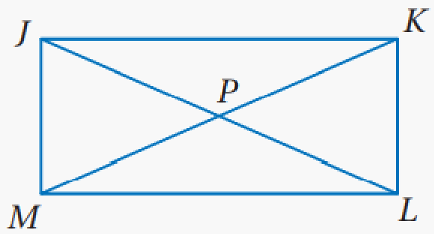
1A) إذا كان $TS = 120$ ، فأوجد PR.

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64°$، فأوجد $m\angle SQR$.

استعمال خصائص المستطيل والجبر

مثال ٢

جبر: الشكل الرباعي $JKLM$ مستطيل. إذا كان $m\angle KJL = (2x + 4)^\circ$ و $m\angle JLK = (7x + 5)^\circ$، فأوجد قيمة x.

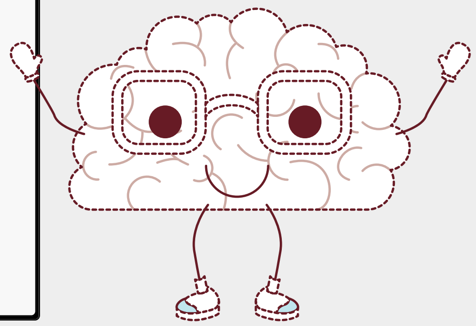


بما أن $JKLM$ مستطيل، فإن زواياه الأربع قوائم؛ إذن $m\angle MLK = 90^\circ$.
وبما أن $JKLM$ المستطيل متوازي أضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطر متطابقة.
لذا فإن $\angle JLM \cong \angle KJL$ ، ومن ذلك $m\angle JLM = m\angle KJL$.

$m\angle JLM + m\angle JLK = m\angle MLK$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle KJL + m\angle JLK = 90^\circ$	بالتعويض
$(2x + 4)^\circ + (7x + 5)^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$(9x + 9)^\circ = 90^\circ$	بجمع الحدود المتشابهة
$9x^\circ = 81^\circ$	بطرح 9 من كلا الطرفين
$x = 9$	بقسمة كلا الطرفين على 9

إرشادات للدراسة

الزوايا القوائم: تذكّر من النظرية 5.6 أنّه إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.



استعمال خصائص المستطيل والجبر

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $MK = 5y + 1$, $JP = 3y - 5$، فأوجد قيمة y.

تحقق من فهمك


إرشادات للدراسة

الزاويتان المتبادلتان داخليًا بالنسبة لقطر:

درست سابقًا في نظرية الزاويتان المتبادلتان داخليًا أنّه إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإنّ كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان، وينطبق هذا على الزاويتين المتبادلتين بالنسبة لقطر متوازي الأضلاع.

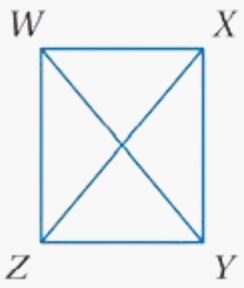
مثال:

$\angle 1 \cong \angle 2 , \angle 3 \cong \angle 4$

إثبات أنّ متوازي أضلاع يكون مستطيلًا

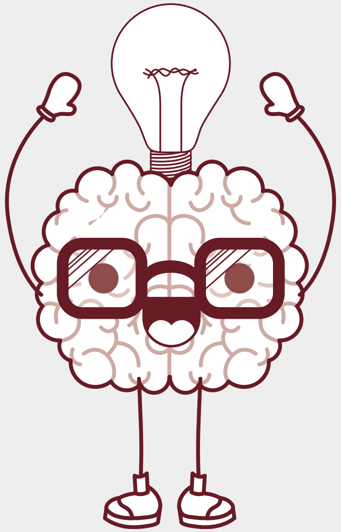
نظرية

إثبات أنَ متوازي أضلاع يكون مستطيلًا : عكس النظرية 5.13 صحيح أيضًا.



إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنَه مستطيل.

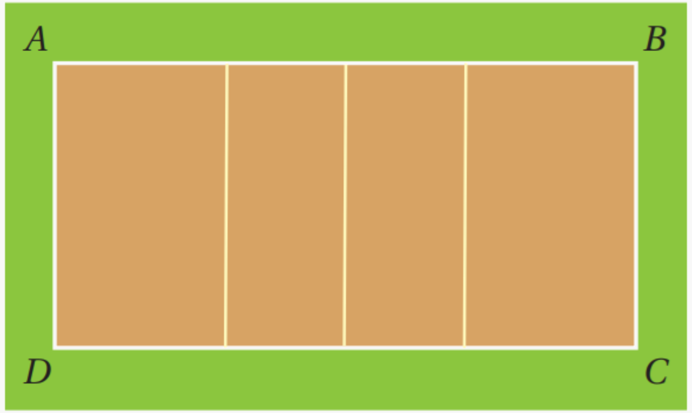
مثال : في $\square WXYZ$ ، إذا كان $\overline{XZ} \cong \overline{WY}$،
فإنَ $\square WXYZ$ مستطيل.



إثبات علاقات في المستطيل

مثال ٣

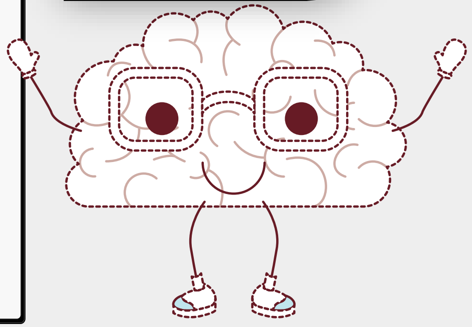
كرة طائرة: أنشأ نادٍ رياضي ملعبًا لكرة الطائرة، وللتأكد من أنه يحقق المواصفات المطلوبة، قاس المشرفون أطوال أضلاع الملعب وقطريه، فإذا كان $AB = 60$ ft, $BC = 30$ ft, $CD = 60$ ft, $AD = 30$ ft، $AC = 67$ ft، $BD = 67$ ft، فكيف يمكنهم التحقق من أنه مستطيل.



بما أن $AB = CD, BC = AD, AC = BD$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{BC} \cong \overline{AD}, \overline{AC} \cong \overline{BD}$. وبما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{BC} \cong \overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. ولأن $\overline{AC}, \overline{BD}$ قطران متطابقان في $\square ABCD$، فإنّ $\square ABCD$ مستطيل.

الربط مع الحياة

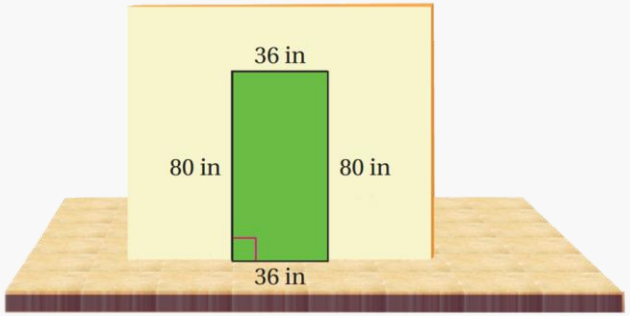
كرة الطائرة هي رياضة جماعية يتنافس فيها فريقان، لكل منهما ستة لاعبين، أما الكرة المستخدمة في هذه اللعبة، فهي متوسطة الحجم وأصغر من كرة القدم وأخف منها وزنًا.



إثبات علاقات في المستطيل

تحقق من فهمك

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضِّح إجابتك.



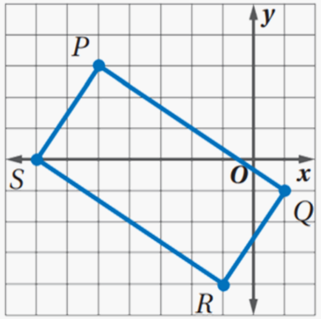
الربط مع الحياة

زاوية النجارين: عبارة عن ضلع خشبي سميك ومسطرة معدنية مثبتة معه بحيث يصنعان زاوية $90°$، وتُصنع من المعدن أو الخشب، وتستخدم لقياس وتحديد الزوايا القائمة، ورسم خطوط عمودية على الأحرف.

المستطيل والهندسة الإحداثيّة

مثال ٤

هندسة إحداثيّة: إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $PQRS$ هي $P(-5, 3), Q(1, -1), R(-1, -4), S(-7, 0)$. فهل $PQRS$ مستطيل؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.



الخطوة 1: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحدد ما إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، وذلك بالتحقق من أن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

$$PQ = \sqrt{(-5-1)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{52}$$

$$RS = \sqrt{[-1-(-7)]^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$PS = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$QR = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [-1-(-4)]^2} = \sqrt{13}$$

بما أن أضلاع $PQRS$ المتقابلة متساوية الطول، فإنّها متطابقة؛ لذا فإن $PQRS$ متوازي أضلاع.

الخطوة 2: هل قطرا $\square PQRS$ متطابقان؟

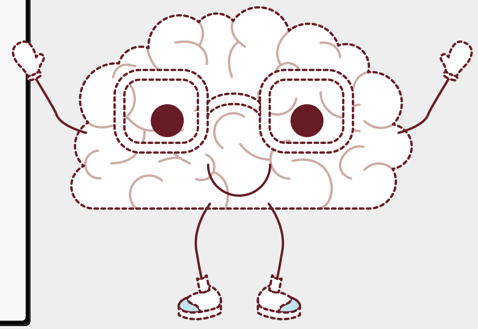
$$PR = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + [3-(-4)]^2} = \sqrt{65}$$

$$QS = \sqrt{[1-(-7)]^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{65}$$

بما أن للقطرين الطول نفسه، فإنّهما متطابقان؛ لذا فإن $\square PQRS$ مستطيل.

إرشادات للدراسة

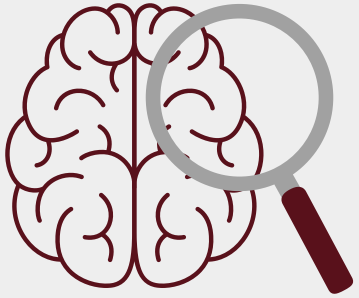
المستطيل ومتوازي الأضلاع: كل مستطيل متوازي أضلاع، ولكن ليس كل متوازي أضلاع مستطيلًا.



المستطيل والهندسة الإحداثيّة

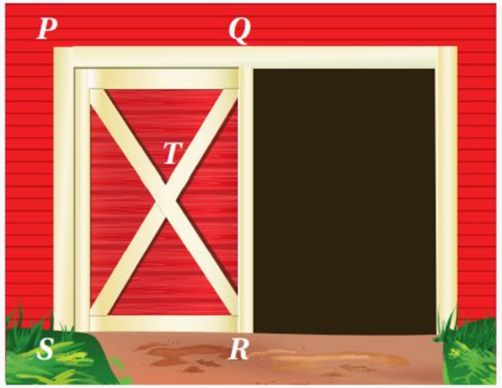
تحقق
من
فهمك

4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-10, 2), K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$.
فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل



المستطيل

تأكد



زراعة: الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

إذا كان $PS = 7\text{ ft}, ST = 3\frac{13}{16}\text{ ft}, m\angle PTQ = 67^\circ$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

1) QR

2) SQ

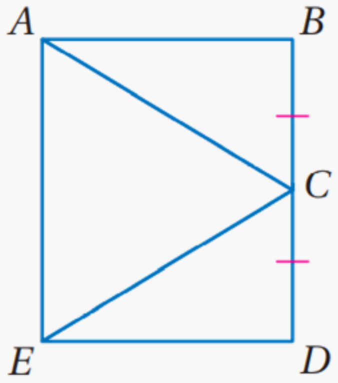
3) $m\angle TQR$

4) $m\angle TSR$

المستطيل

تأكد

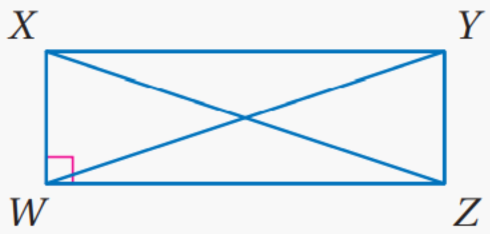
برهان: إذا كان $ABDE$ مستطيلًا، و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$،
فأثبت أنّ $\overline{AC} \cong \overline{EC}$.



المستطيل

تدرب وحل

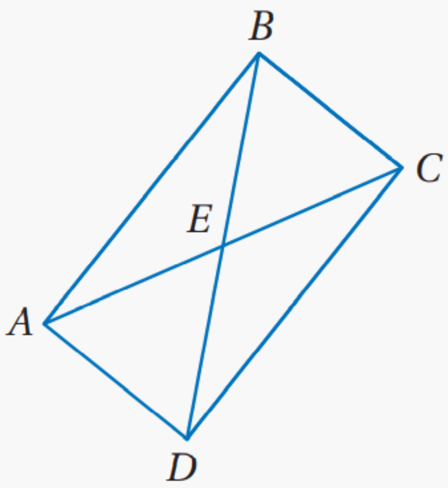
جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبيَّن جانبًا.



37) إذا كان $XW = 3,\ WZ = 4$ ، فأوجد YW.

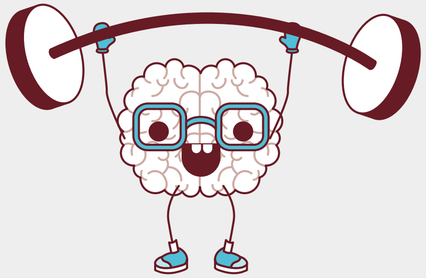
38) إذا كان $ZY = 6,\ XY = 8$ ، فأوجد WY.

المستطيل



تحدٍّ: في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle EAB = (4x + 6)^\circ$،
$m\angle DEC = (10 - 11y)^\circ, m\angle EBC = 60^\circ$، فأوجد قيمة كل من x , y.

مهارات التفكير العليا



5-5

المعين والمربع

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

@A_Shark_s

المعين و المربع

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو مستطيلًا.

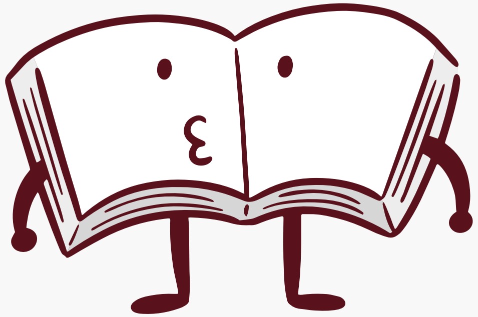
و الآن

- أتعرّف خصائص المعيّن والمربّع وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا أو معيّنًا أو مربعًا.

المفردات

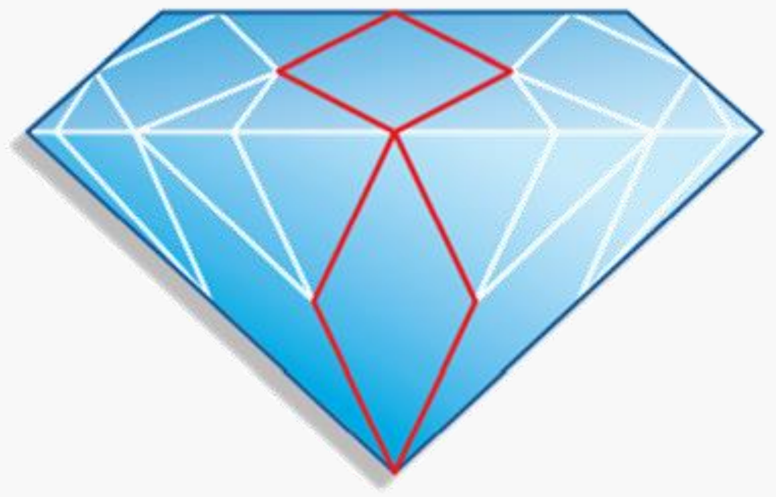
المعيّن
rhombus

المربّع
square



المعين والمربع

لماذا؟

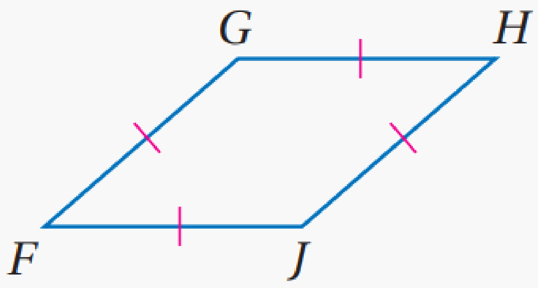


تصمم الألماسات باستعمال أنماط متكررة من الأشكال الهندسية. إذا صمم فنان الألماسة المجاورة، بحيث تكوّنت من أنماط متكررة من مثلثات و أشكال رباعية، كيف يمكن تحديد نوع الأشكال الرباعية المحددة باللون الأحمر في الألماسة؟

المعين والمربع

خصائص المعيّن والمربّع:

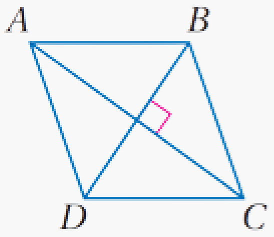
المعيّن هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة. وللمعيّن جميع خصائص متوازي الأضلاع علاوة على الخاصيتين الواردتين في النظريتين الآتيتين :



نظريات

قطرا المعين

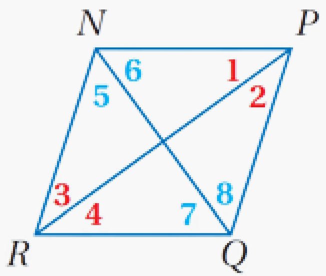
5.15 إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا، فإنّ قطريه متعامدان.



مثال: إذا كان $\square ABCD$ معيّنًا، فإنّ

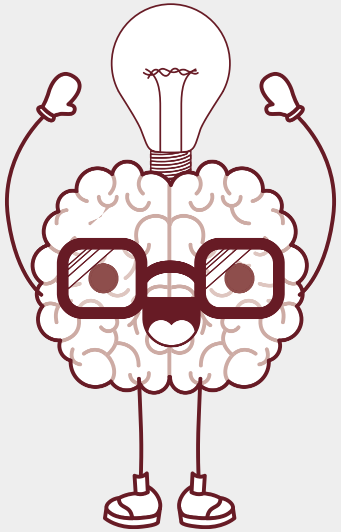
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

5.16 إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا فإنّ كل قطر فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما.



مثال: إذا كان $\square NPQR$ معيّنًا، فإنّ

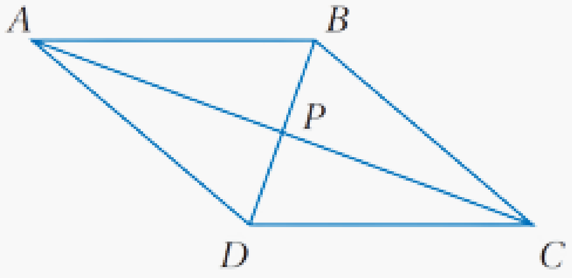
$\angle 1 \cong \angle 2 , \angle 3 \cong \angle 4 , \angle 5 \cong \angle 6 , \angle 7 \cong \angle 8$



قطرا المعين

برهان

أكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.15

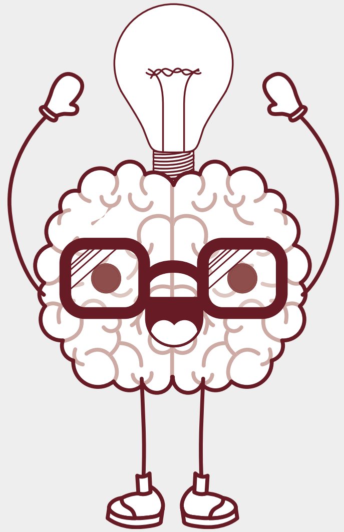


المعطيات: $ABCD$ معيّن.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

البرهان:

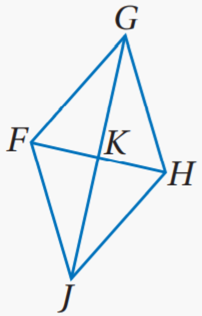
بما أنّ $ABCD$ معيّن، فإنّ $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ بحسب التعريف.
وبما أن المعيّن متوازي أضلاع، وقطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{BD}$ ينصِّف $\overline{AC}$ عند P؛ لذا فإن $\overline{PC} \cong \overline{AP}$. وكذلك $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ بحسب خاصية الانعكاس؛ إذن $\triangle CPB \cong \triangle APB$ بحسب SSS.
وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة، فإنّ $\angle CPB \cong \angle APB$.
وكذلك $\angle CPB$ ، $\angle APB$ متجاورتان على مستقيم، والزاويتان المتطابقتان المتجاورتان على مستقيم تكونان قائمتين. وبما أن $\angle APB$ قائمة، فإن $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.



استعمال خصائص المعيّن

مثال ١

استعن بالمعيّن $FGHJ$ المبيَّن جانبًا.



a) إذا كان $m\angle FJH = 82°$، فأوجد $m\angle KHJ$.

بما أن $FGHJ$ معيّن، فإنّ القطر $\overline{JG}$ ينصِّف $\angle FJH$.

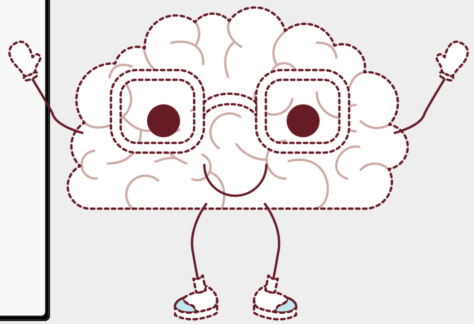
لذا فإن $m\angle KJH = \frac{1}{2} m\angle FJH$. إذن $m\angle KJH = \frac{1}{2}(82°) = 41°$

وبما أن قطري المعيّن متعامدان، فإنّ $m\angle JKH = 90°$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

$m\angle KJH + m\angle JKH + m\angle KHJ = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$41° + 90° + m\angle KHJ = 180°$	بالتعويض
$131° + m\angle KHJ = 180°$	بالتبسيط
$m\angle KHJ = 49°$	بطرح $131°$ من كلا الطرفين

b) **جبر:** إذا كان $GH = x + 9$, $JH = 5x - 2$ ، فأوجد قيمة x.

$\overline{GH} \cong \overline{JH}$	تعريف المعين
$GH = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 9 = 5x - 2$	بالتعويض
$9 = 4x - 2$	بطرح x من كلا الطرفين
$11 = 4x$	بجمع 2 لكلا الطرفين
$2.75 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4



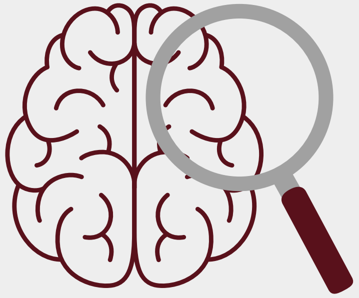
استعمال خصائص المعيّن

تحقق من فهمك

استعن بالمعيّن $FGHJ$ أعلاه.

1A) إذا كان $FK = 5, FG = 13$، فأوجد KJ.

1B) **جبر:** إذا كان $m\angle KFG = (9y - 5)^\circ$, $m\angle JFK = (6y + 7)^\circ$، فأوجد قيمة y.



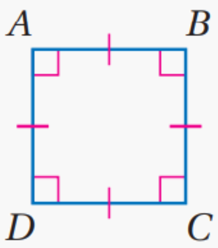
المربع

إرشادات للدراسة

المربّع والمعيّن:
كل مربَع معيّن، ولكن ليس كل معيّن مربعًا، وكل مربع مستطيل وليس كل مستطيل مربعًا.

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا، وعليه فإن المربع هو متوازي أضلاع ومستطيل ومعيّن.

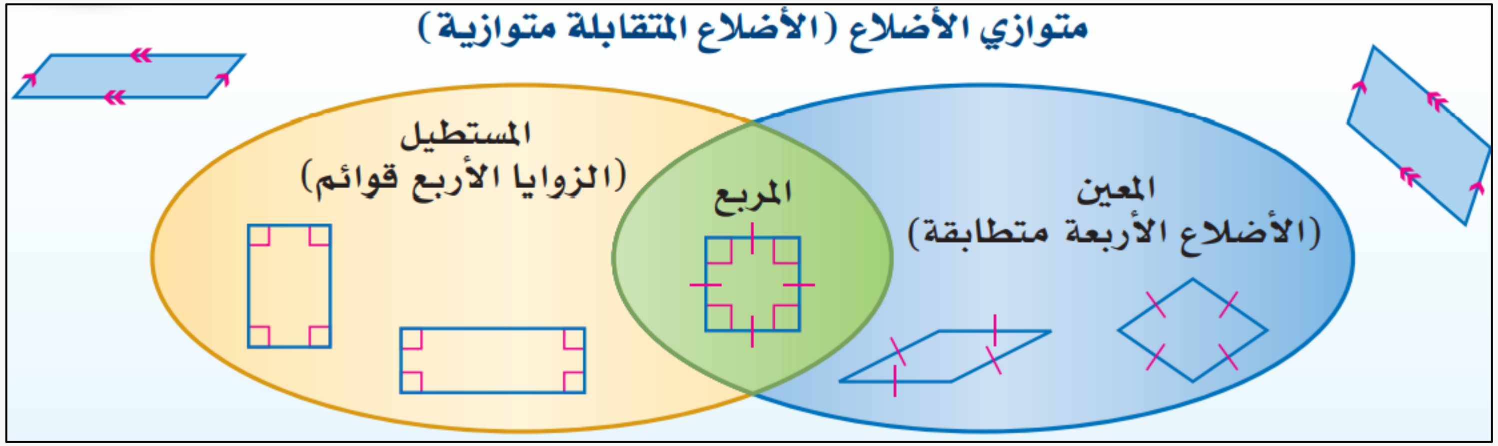
ويلخص شكل ڤن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع والمعيّن والمربّع والمستطيل.



المربع $ABCD$

متوازي الأضلاع

ملخص المفهوم



جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن تنطبق على المربّع. فمثلًا قطرا المربع ينصّف كل منهما الآخر (متوازي أضلاع)، وهما متطابقان (مستطيل)، ومتعامدان (معيّن).

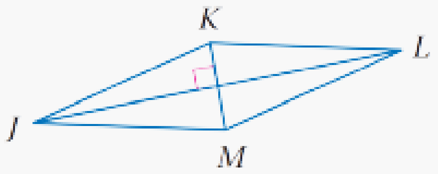
إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربع: تُحدِّد النظريات الآتية الشروط الكافية للمعيّن والمربّع.

الشروط الكافية للمعين والمربع

نظريات

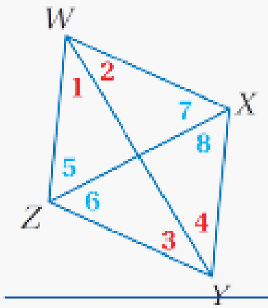
5.17 إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنَّه معيَّن. (عكس النظرية 5.15)

مثال: إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{JL} \perp \overline{KM}$، فإنَّ $\square JKLM$ معيَّن.



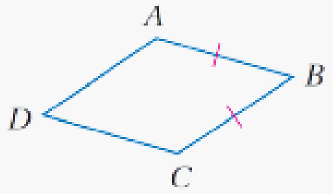
5.18 إذا نصَّف قطر متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع يكون معينًا. (عكس النظرية 5.16)

مثال: إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، وكانت $\angle 3 \cong \angle 4$, $\angle 1 \cong \angle 2$، أو $\angle 7 \cong \angle 8$, $\angle 5 \cong \angle 6$، فإنَّ $\square WXYZ$ معيَّن.

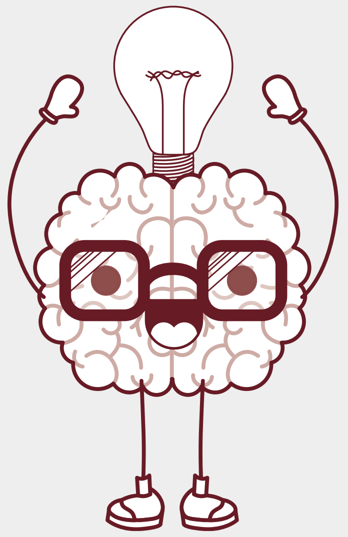


5.19 إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنَّه معيَّن.

مثال: إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإنَّ $\square ABCD$ معيَّن.



5.20 إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعينًا فإنه مربَّع.



استعمال خصائص المعيّن والمربّع في البراهين

مثال ٢

اكتب برهانًا حرًّا.

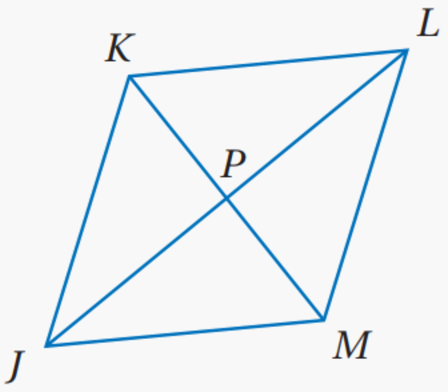
المعطيات: $JKLM$ متوازي أضلاع.

$\triangle JKL$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $\square JKLM$ معيّن.

برهان حرّ:

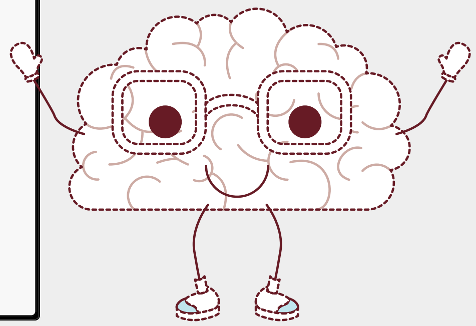
بما أنّ $\triangle JKL$ متطابق الضلعين، فإنّ $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ بحسب التعريف، وهذان الضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع $JKLM$، لذا وبحسب النظرية 1.19، يكون $\square JKLM$ معيّنًا.



إرشادات للدراسة

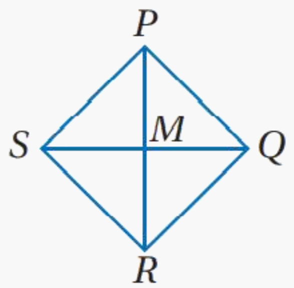
المثلثات المتطابقة

بما أن للمعيَّن أربعة أضلاع متطابقة، فإن كلًّا من قطريه يقسمه إلى مثلثين متطابقي الضلعين ومتطابقين. وإذا رُسم القطران فإنهما يقسمان المعيّن إلى أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة.



استعمال خصائص المعيّن والمربّع في البراهين

تحقق من فهمك



2) اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لِـ $\overline{PR}$.

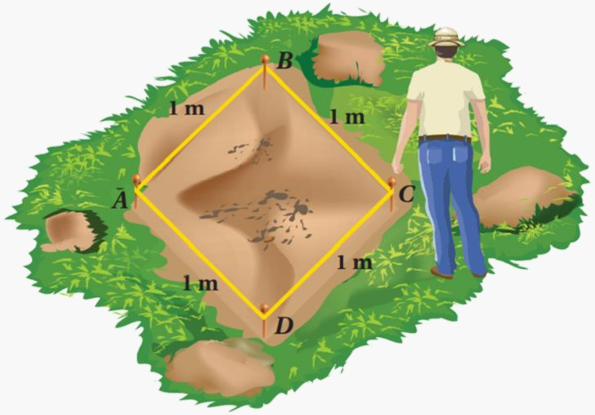
$\overline{PR}$ عمود منصّف لِـ $\overline{SQ}$.

$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.

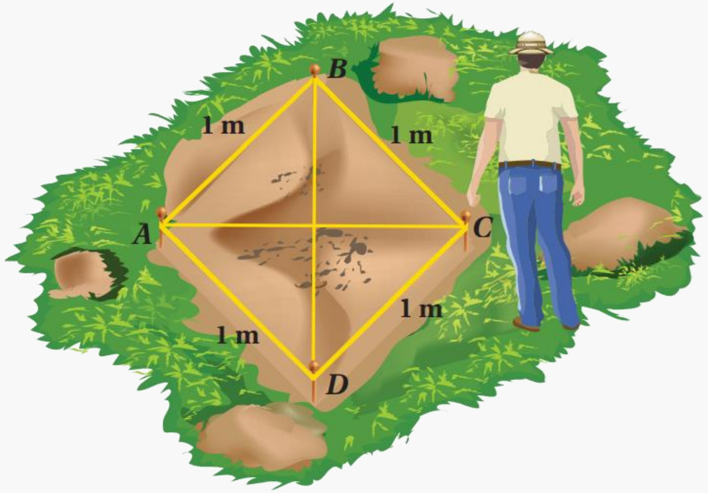
استعمال المعيّن والمربع

مثال ٣



علم الآثار: مفتاح الكشف الناجح عن الآثار هو وضع خريطة دقيقة لموقع البحث. كيف يمكن لعالم الآثار في الصورة أدناه أن يتحقق من أن منطقة بحثه هي مربع طول ضلعه $1\,m$ مستعملًا الحبل وشريط القياس فقط؟

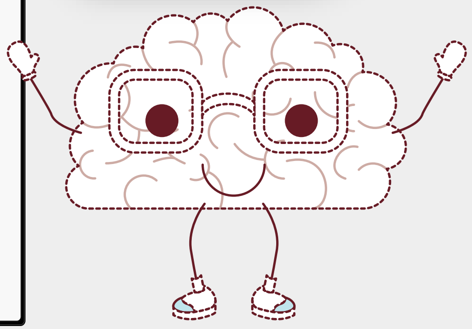
طول كل من أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ يساوي $1\,m$. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن أضلاع $ABCD$ المتتالية متطابقة فإنّه معيّن. وإذا استطاع عالم الآثار بيان أنّ $\square ABCD$ مستطيل أيضًا فإنّه بحسب النظرية 5.20، يكون مربعًا.



إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل؛ لذا يمكن لعالم الآثار استعمال الحبل لقياس طولي القطرين، فإذا وجدهما متساويين، فإن $\square ABCD$ يكون مربّعًا.

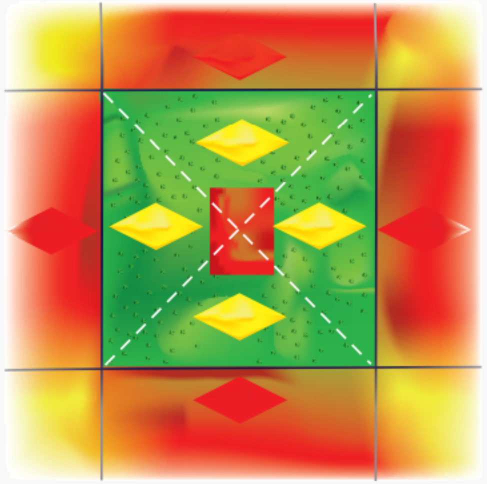
الربط مع الحياة

علم الآثار هو دراسة أعمال الإنسان في العصور القديمة كي يزودنا بمعلومات حول حياته ونشاطاته. وساعد اكتشاف الإنسان للكتابة منذ 5000 عام تقريبًا على فهم أسرار أزمنة ما بعد هذا التاريخ.



استعمال المعيّن والمربع

تحقق من فهمك



3) **خياطة:** خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما في الرسم المجاور.

A) رسمت كوثر قطري كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان، هل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء معيّن؟ وضِّح إجابتك.

B) إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس، والضلعان الأيسر والسفلي متساويي الطول، فهل يمكنها استنتاج أن القطعة الخضراء مربّع؟ وضِّح إجابتك.

تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

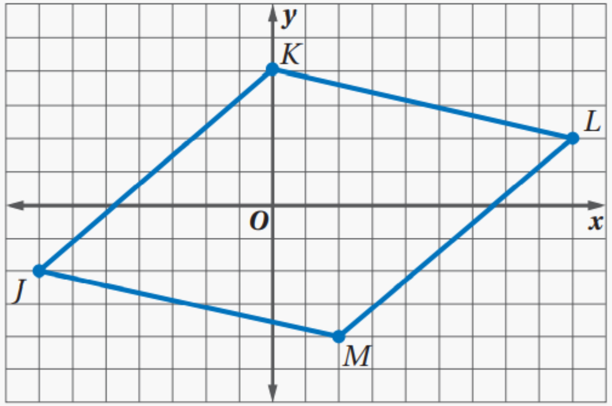
مثال ٤

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-7,-2)$، $K(0,4)$، $L(9,2)$، $M(2,-4)$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

افهم: **المعطيات:** $\square JKLM$ إحداثيات رؤوسه: $J(-7,-2)$، $K(0,4)$، $L(9,2)$، $M(2,-4)$.

المطلوب: إثبات أن $\square JKLM$ هو معين أو مستطيل أو مربع.

خطط: عيّن الرؤوس على المستوى الإحداثي وصل بينها.



يظهر من الرسم أن أضلاع $\square JKLM$ متطابقة. ولكنّ زواياه ليست قوائم؛ لذا يبدو أنّه معيّن وليس مربّعًا أو مستطيلًا.

إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل. وإذا كانا متعامدين فإنّه معيّن. وإذا كانا متطابقين ومتعامدين فإنه مستطيل ومعيّن؛ أيّ أنّه مربّع.

إرشادات للدراسة

تمثيل الشكل بيانيًا: عند تحليل شكل رباعي باستعمال الهندسة الإحداثيّة، مثّله بيانيًا لمساعدتك على وضع تخمين، ثم تحقق من تخمينك جبريًا.

تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

مثال ٤

حل: أولًا: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$KM = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$JL = \sqrt{[9-(-7)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

بما أن $4\sqrt{17} \neq 2\sqrt{17}$، فإن القطرين ليسا متطابقين؛ لذا $\square JKLM$ ليس مستطيلًا.
وبما أنه ليس مستطيلًا فإنّه ليس مربّعًا أيضًا.

ثانيًا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدين.

ميل $\overline{KM}$: $\frac{-4-4}{2-0} = \frac{-8}{2} = -4$

ميل $\overline{JL}$: $\frac{2-(-2)}{9-(-7)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

وبما أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1، فإن القطرين متعامدان؛ لذا فإن $\square JKLM$ معيّن.

تحقق: $JK = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [0-(-7)]^2} = \sqrt{85}$

$$KL = \sqrt{(9-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85}$$

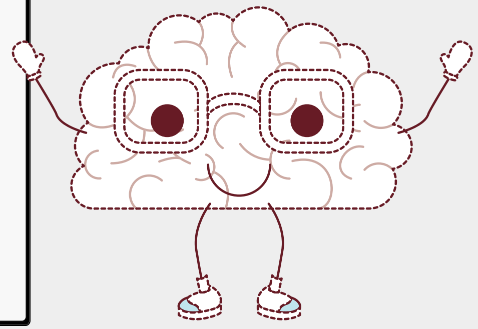
لذا فإن $\square JKLM$ معيّن بحسب النظرية 1.20 .

ميل $\overline{JK}$: $\frac{4-(-2)}{0-(-7)} = \frac{6}{7}$ ، وميل $\overline{KL}$: $\frac{2-4}{9-0} = -\frac{2}{9}$

وبما أن حاصل ضرب هذين الميلين لا يساوي -1، فإن الضلعين المتتاليين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$
غير متعامدين؛ لذا فإن $\angle JKL$ ليست قائمة؛ إذن $\square JKLM$ ليس مستطيلًا ولا مربّعًا. ✔

إرشادات للدراسة

تمثيل الشكل بيانيًا: عند تحليل شكل رباعي باستعمال الهندسة الإحداثيّة، مثّله بيانيًا لمساعدتك على وضع تخمين، ثم تحقق من تخمينك جبريًّا.



تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

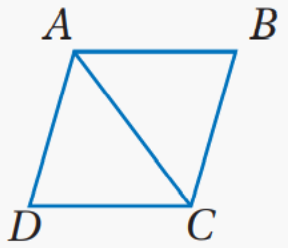
تحقق من فهمك

4) حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$ ، معيّنًا أو مستطيلًا أو مربّعًا ؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

المعين والمربع

تأكد

جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًا.



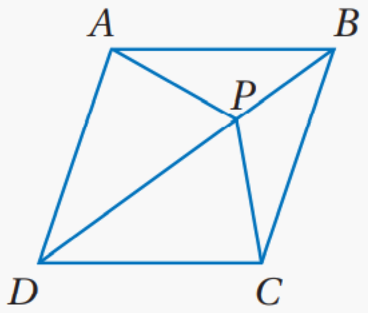
1) إذا كان $m\angle BCD = 114°$، فأوجد $m\angle BAC$.

2) إذا كان $BC = x + 7$, $AB = 2x + 3$، فأوجد CD.

المعين والمربع

تأكد

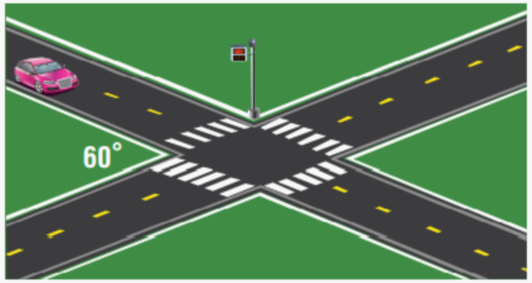
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّه إذا كان $ABCD$ معيّنًا وكان $\overline{DB}$ قطرًا فيه، فإنّ $\overline{AP} \cong \overline{CP}$.



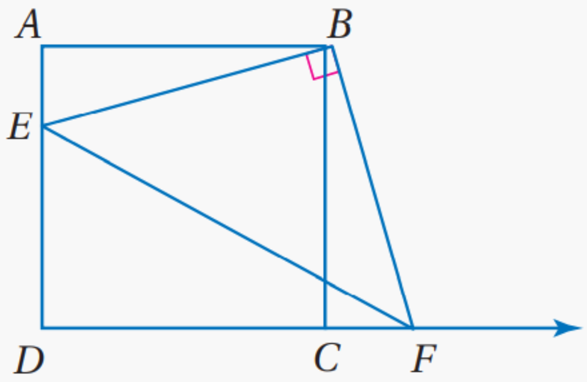
المعين والمربع

تدرب وحل

14) **طرق:** يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك.

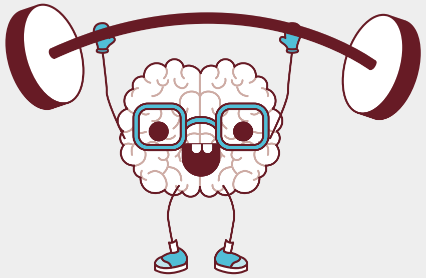


المعين والمربع



39) تحدٍّ: مساحة المربّع $ABCD$ المجاور تساوي 36 وحدة مربّعة. ومساحة $\triangle EBF$ تساوي 20 وحدة مربّعة. إذا كانت $\overline{BF} \perp \overline{EB}$ ، وطول $\overline{AE}$ يساوي وحدتين، فأوجد طول $\overline{CF}$.

مهارات التفكير العليا



5-6

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ استعمال خصائص أنواع خاصة من متوازي الأضلاع.

والآن

- أتعرّف خصائص شبه المنحرف وأطبّقها.
- أتعرّف خصائص شكل الطائرة الورقيّة وأطبّقها.

المفردات

شبه المنحرف
trapezoid

قاعدتا شبه المنحرف
bases

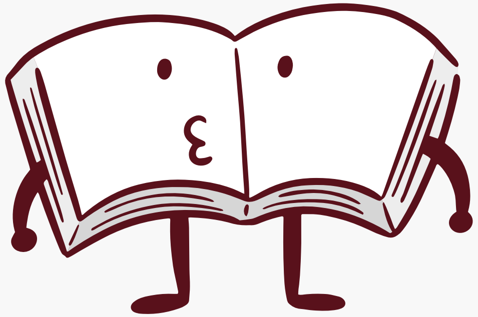
ساقا شبه المنحرف
legs of a trapezoid

زاويتا القاعدة
base angles

شبه المنحرف المتطابق الساقين
isosceles trapezoid

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
midsegment of a trapezoid

شكل الطائرة الورقيّة
kite



شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

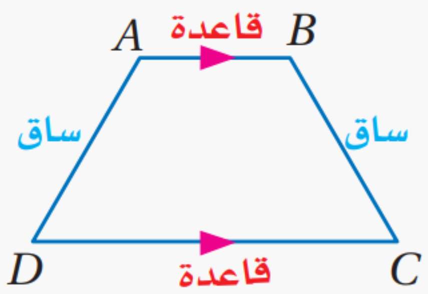
لماذا؟

تستعمل في رياضات القفز ، صناديق ذات أجزاء متداخلة مصنوعة من الإسفنج ذي الضغط العالي، وتتخذ منصّات وثب ودرجات صعود، وتمثّل جوانب كل من الأجزاء شبه منحرف.

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

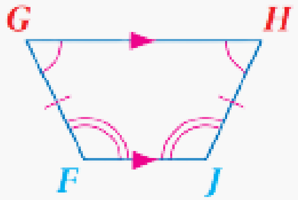
خصائص شبه المنحرف: **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يُسميان **قاعدتي شبه المنحرف**. ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. و **زاويتا القاعدة** مكوّن كل منهما من قاعدة وأحد ضلعي الساقين. ففي شبه المنحرف $ABCD$ المبيَّن جانبًا، $\angle A, \angle B$ زاويتا القاعدة $\overline{AB}$ ، وكذلك $\angle C, \angle D$ زاويتا القاعدة $\overline{DC}$.

إذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين فإنه يسمى **شبه منحرف متطابق الساقين**.



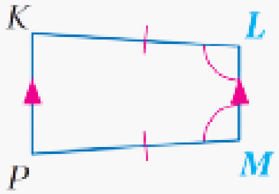
شبه المنحرف المتطابق الساقين

نظريات



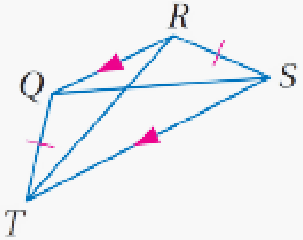
5.21 إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإنّ زاويتي كل قاعدة متطابقتان.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين،
فإنّ $\angle J \cong \angle F$ ، $\angle H \cong \angle G$.



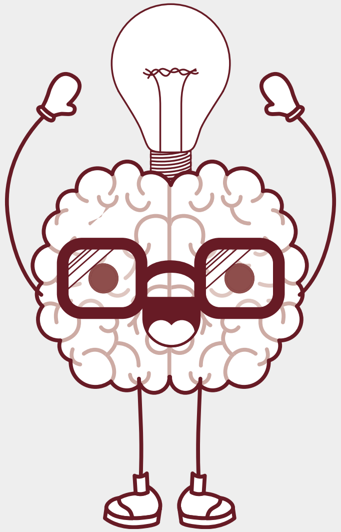
5.22 إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنّه متطابق الساقين.

مثال: إذا كان $KLMP$ شبه منحرف، فيه $\angle M \cong \angle L$
فإنه متطابق الساقين.



5.23 يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين،
فإنّ $\overline{RT} \cong \overline{QS}$. وكذلك إذا كان $QRST$ شبه منحرف،
فيه $\overline{RT} \cong \overline{QS}$ فإنّه متطابق الساقين.



DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

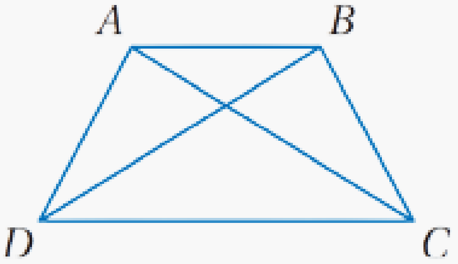
شبه المنحرف المتطابق الساقين

برهان

الحالة الأولى من النظريّة 5.23

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



$ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.
معطى

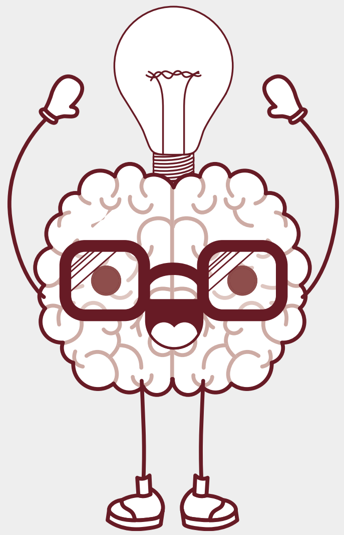
$\overline{DC} \cong \overline{CD}$
خاصية الانعكاس للتطابق

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$
تعريف شبه المنحرف المتطابق الساقين

$\angle ADC \cong \angle BCD$
زاويتا قاعدة شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان.

$\triangle ADC \cong \triangle BCD$
SAS

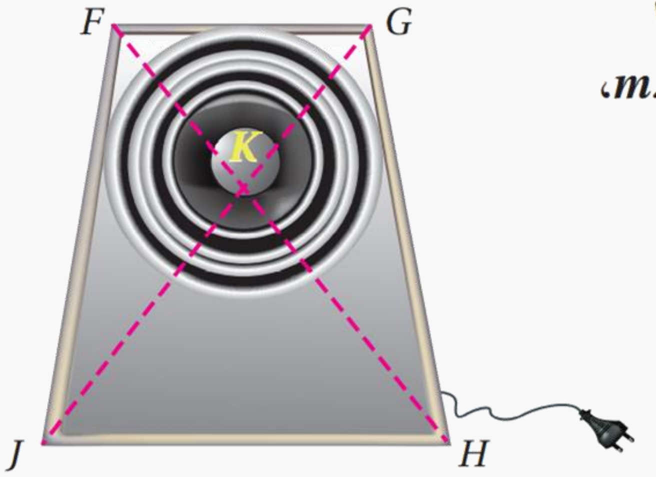
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$
ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين



استعمال خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين

مثال ١

مكبرات الصوت: المنظر الأمامي لمكبِّر الصوت المبيّن جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $m\angle FJH = 85°$، $FK = 8\,\text{in}, JG = 19\,\text{in}$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) $m\angle FGH$

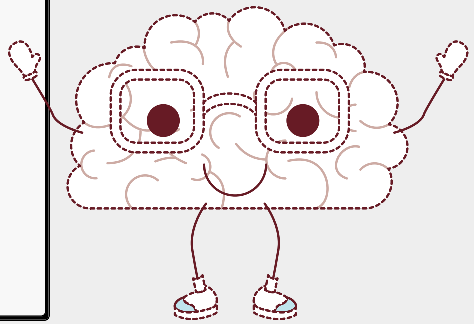
بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ $\angle FJH$ و $\angle GHJ$ زاويتا قاعدة متطابقتان؛ لذا فإن $m\angle GHJ = m\angle FJH = 85°$.

وبما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف، فإنّ $\overline{JH} \parallel \overline{FG}$.

$m\angle FGH + m\angle GHJ = 180°$	نظرية الزاويتين المتحالفتين
$m\angle FGH + 85° = 180°$	بالتعويض
$m\angle FGH = 95°$	بطرح 85 من كلا الطرفين

إرشادات للدراسة

شبه المنحرف المتطابق الساقين: تكون زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين فقط إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين.



استعمال خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين

مثال ١

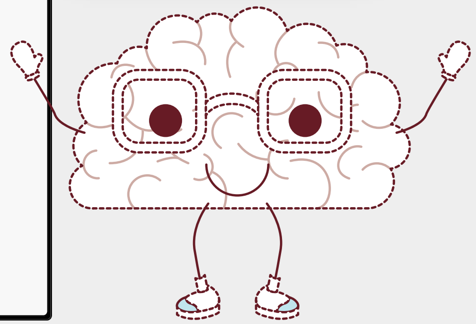
b) KH

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ متطابقان.

$FH = JG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$FK + KH = JG$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$8 + KH = 19$	بالتعويض
$KH = 11 \text{ in}$	بطرح 8 من كلا الطرفين

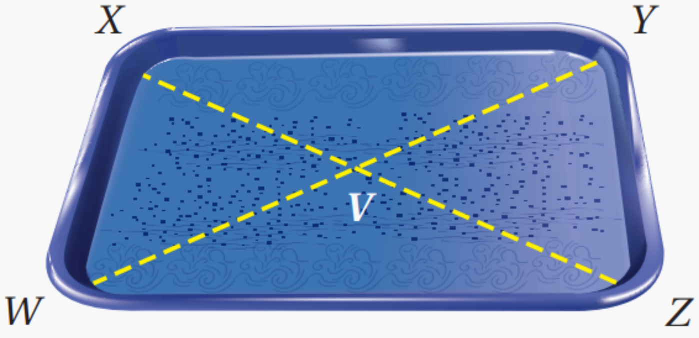
الربط مع الحياة

مكبّرات الصوت هي مضخّمات تُكثّف الأمواج الصوتية حتى تصبح مسموعة بدرجة أكبر. ويحتوي كل من المذياع والتلفاز والحاسوب مضخمات صوتية.



استعمال خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين

تحقق من فهمك



1) **مطاعم:** لاستغلال مساحة الطاولات المربعة، تستعمل في مطعم أطباقٌ على شكل شبه منحرف كما في الشكل المجاور. إذا كان $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين، وكان $m\angle YZW = 85°$, $WV = 15$ cm، $VY = 10$ cm، فأوجد كلًّا مما يأتي :

A) $m\angle XWZ$

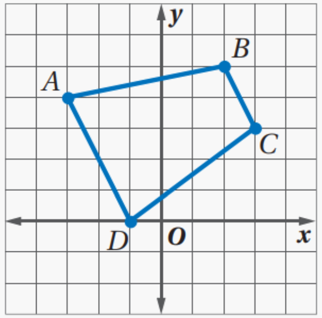
B) $m\angle WXY$

C) XZ

شبه المنحرف المتطابق الساقين والهندسة الإحداثيّة

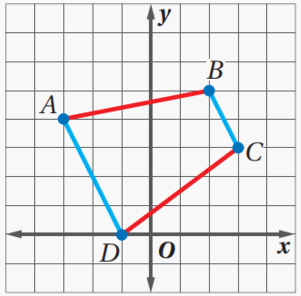
مثال ٢

هندسة إحداثيّة: رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-3, 4), B(2, 5), C(3, 3), D(-1, 0)$.
بيّن أن $ABCD$ شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.



ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في مستوى إحداثي.

الخطوة 1: استعمل صيغة الميل لمقارنة ميلي الضلعين المتقابلين $\overline{BC}, \overline{AD}$ وكذلك الضلعين المتقابلين $\overline{AB}, \overline{DC}$. فالشكل الرباعي يكون شبه منحرف إذا كان فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيين.



الضلعان المتقابلان $\overline{AD}$, $\overline{BC}$:

ميل $\overline{BC}$: $\frac{3-5}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{0-4}{-1-(-3)} = \frac{-4}{2} = -2$

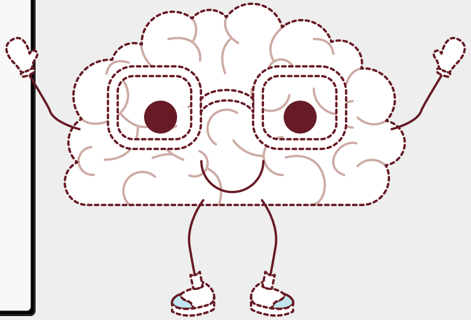
بما أن ميلي $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ متساويان، فإنّ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

الضلعان المتقابلان $\overline{DC}$, $\overline{AB}$:

ميل $\overline{AB}$: $\frac{5-4}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$

ميل $\overline{DC}$: $\frac{0-3}{-1-3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

بما أنّ ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ ليسا متساويين، فإنّ $\overline{DC} \nparallel \overline{AB}$. وبما أن $ABCD$ فيه ضلعان فقط متوازيان، فإنّه شبه منحرف.



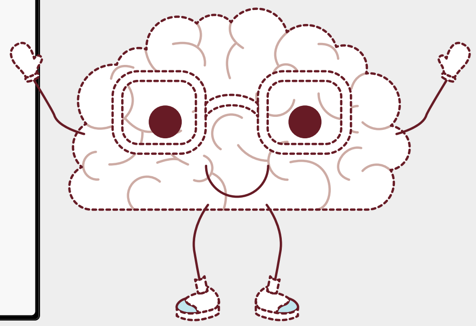
مثال ٢

الخطوة 2: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي الساقين $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ وتحديد ما إذا كان شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

$$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$DC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

بما أنّ $AB \neq DC$ ، فإنّ شبه المنحرف $ABCD$ ليس متطابق الساقين.



تحقق من فهمك

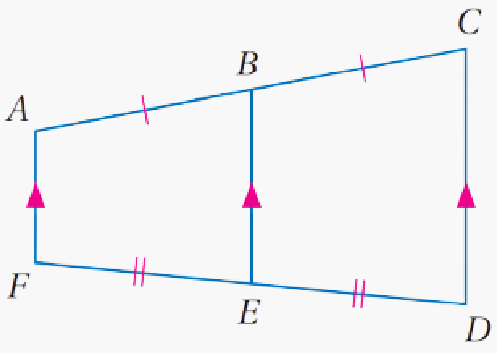
2) رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-8, -4), R(0, 8), S(6, 8), T(-6, -10)$.
بيّن أن $QRST$ شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف هي قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ساقيه. وتبين النظرية الآتية العلاقة بين القطعة المتوسطة وقاعدتي شبه المنحرف.

نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

نظرية



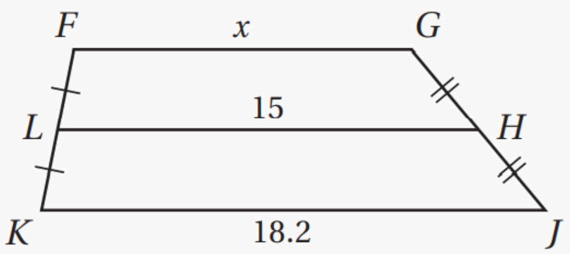
القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًا من القاعدتين ، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

مثال : إذا كانت $\overline{BE}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $ACDF$ ، فإنَّ $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ ، $BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$.

مثال ٣

من اختبار

في الشكل المجاور، $\overline{LH}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟

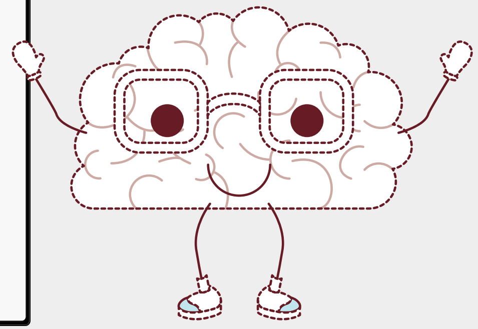


اقرأ سؤال الإختبار

أُعطيت في السؤال طول القطعة المتوسطة لشبه المنحرف وطول إحدى قاعدتيه. ويطلب إليك إيجاد طول القاعدة الأخرى.

حل سؤال الاختبار

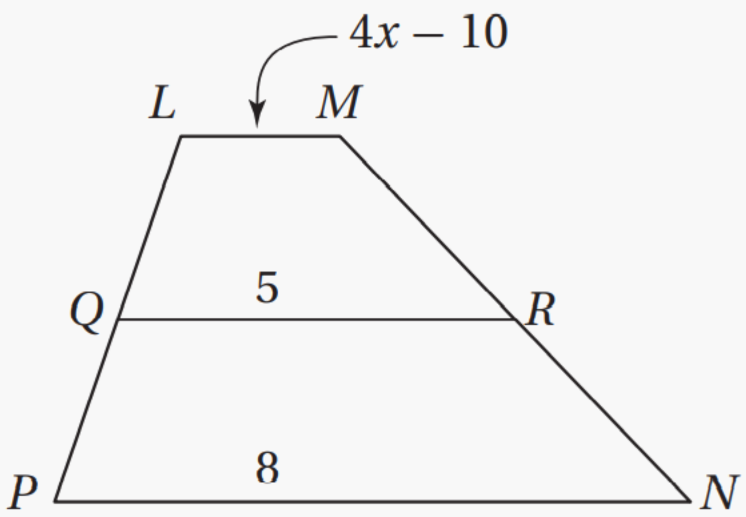
$LH = \frac{1}{2}(FG + KJ)$	نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
$15 = \frac{1}{2}(x + 18.2)$	بالتعويض
$30 = x + 18.2$	بضرب كلا الطرفين في 2
$11.8 = x$	بطرح 18.2 من كلا الطرفين

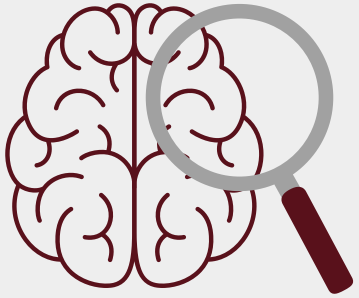


من اختبار

تحقق من فهمك

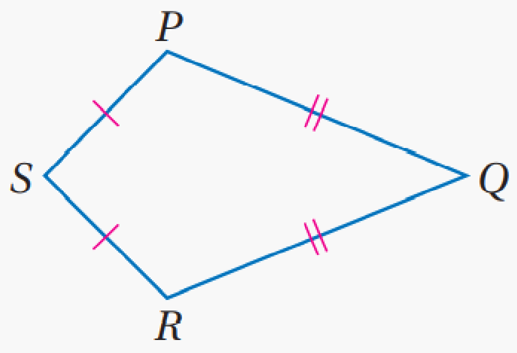
3) في الشكل أدناه، $\overline{QR}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $LMNP$. ما قيمة x؟





خصائص شكل الطائرة الورقية

خصائص شكل الطائرة الورقيّة: **شكل الطائرة الورقيّة** هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة. وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقيّة ليسا متطابقين ولا متوازيين.

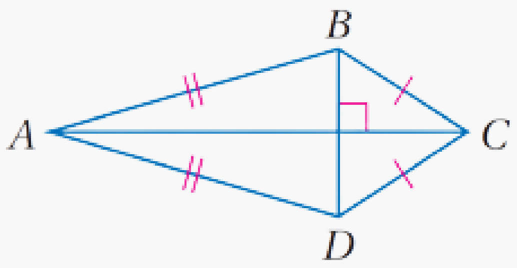


نظريات

شكل الطائرة الورقية

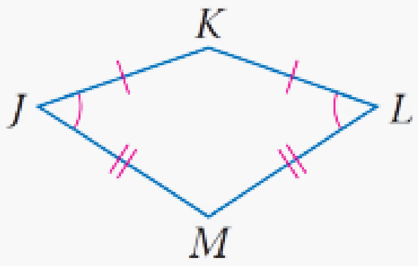
5.25 قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.

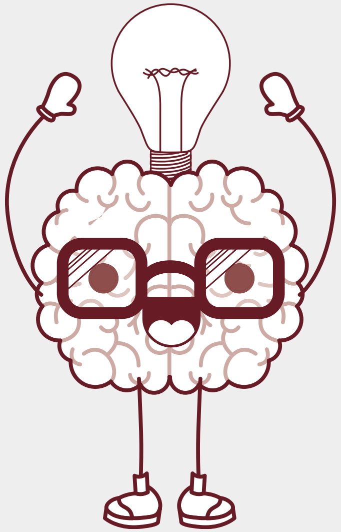
مثال: بما أن $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة ،
فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



5.26 يوجد في شكل الطائرة الورقية زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.

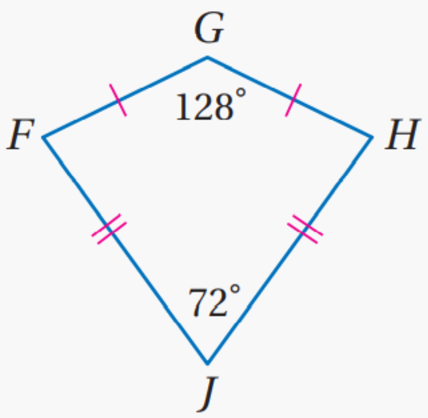
مثال: بما أن $JKLM$ شكل طائرة ورقيّة، فإنّ $\angle K \ncong \angle M$, $\angle J \cong \angle L$.





مثال ٤

استعمال خصائص شكل الطائرة الورقيّة



a) إذا كان $FGHJ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle F$.

في شكل الطائرة الورقيّة زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة،
وبما أن $\angle J \ncong \angle G$ ، فإنّ $\angle F \cong \angle H$؛ لذلك $m\angle F = m\angle H$.

اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle F$.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H + m\angle J = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle F + 128° + m\angle F + 72° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle F + 200° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle F = 160°$	بطرح 200 من كلا الطرفين
$m\angle F = 80°$	بقسمة كلا الطرفين على 2

الربط مع الحياة

أقصى سرعة مسجّلة لطائرة ورقيّة $120\,mi/h$.
وأقصى ارتفاع مسجّل لطائرة ورقيّة $12471\,ft$.

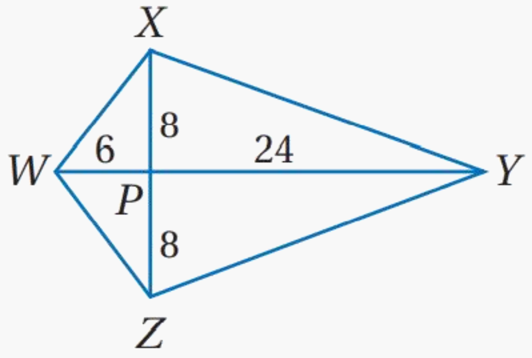
DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

استعمال خصائص شكل الطائرة الورقيّة

مثال ٤

b) إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد ZY .

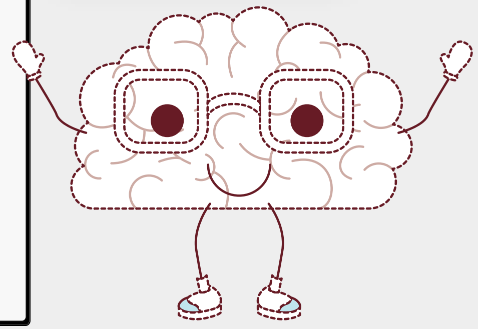


بما أن قطري شكل الطائرة الورقيّة متعامدان فإنهما يقسمانه إلى أربعة مثلثات قائمة الزاوية. استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ZY ، وهو طول وتر المثلث القائم الزاوية $\triangle YPZ$.

$PZ^2 + PY^2 = ZY^2$	نظرية فيثاغورس
$8^2 + 24^2 = ZY^2$	بالتعويض
$640 = ZY^2$	بالتبسيط
$\sqrt{640} = ZY$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين
$8\sqrt{10} = ZY$	بالتبسيط

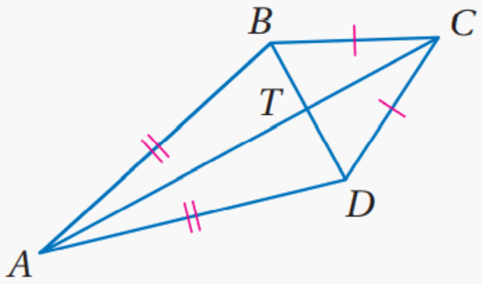
الربط مع الحياة

أقصى سرعة مسجّلة لطائرة ورقيّة 120 mi/h. وأقصى ارتفاع مسجّل لطائرة ورقيّة 12471 ft.



استعمال خصائص شكل الطائرة الورقيّة

تحقق من فهمك



4A) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقية، فيه:
$m\angle BCD = 50^\circ$, $m\angle BAD = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle ADC$.

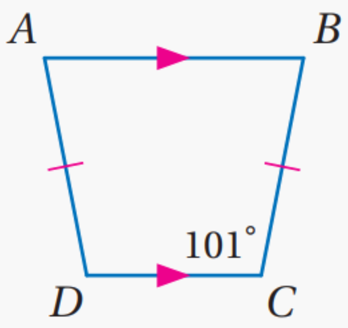
4B) إذا كان $TC = 8$, $BT = 5$ ، فأوجد CD.

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

تأكد

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle D$



شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

تأكد

هندسة إحداثيّة : رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-4, -1), B(-2, 3), C(3, 3), D(5, -1)$.

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف.

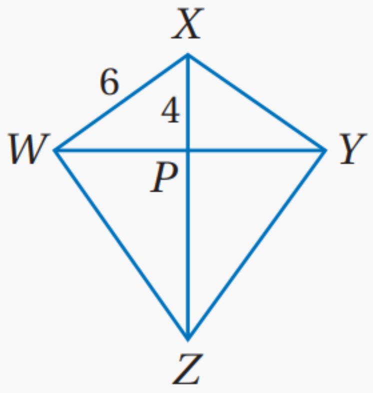
4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين ؟ وضِّح إجابتك.

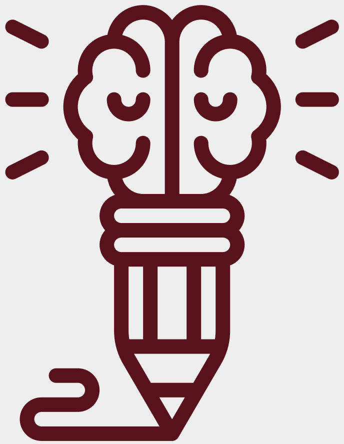
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

تدرب وحل

إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب

17) WP

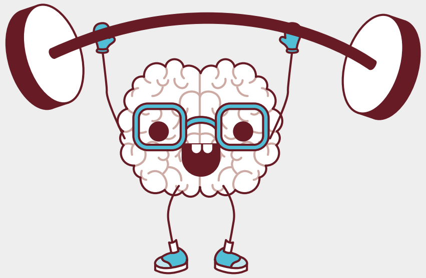




شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x + 4, y = x - 8$ ، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟



المراجع

وزارة التعليم

رياضيات ١-٢

التعليم الثانوي

(نظام المسارات)

(السنة الأولى المشتركة)

الفصل الدراسي الثاني

تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

You Tube