

سلسلة عروض رفعة الرياضيات لنموذج رياضيات



اعداد وتصميم :
ابتسام عاتق الطاهري
هدى علي الشمراني



السادة / ابتسام الطاهري و هدى الشمراني

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بـ:

(سلسلة عروض رفعة الرياضيات لمنهج رياضيات 5)

هـ، ورقم ردمك 8-9300-03-603-978

1443/03/07

وتاريخ

1443/2535

تحت رقم إيداع

اللهم اجعلها عودة مباركة للجميع
حافلة بالجد و الاجتهاد
وعامرة بالنشاط والعمل
وسهلة وميسرة لنشر العلم وطلبه
تحت رضاك ورحمتك وتوفيقك



توثيق

تطوير

فيما سبق : درست الدوال وتمثيلاتها البيانية

والآن :

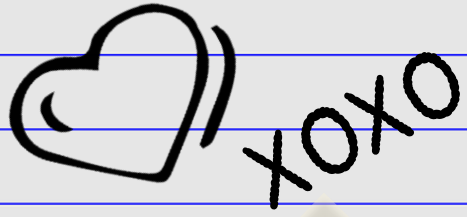
- اتعرف الدوال وخصائصها وتمثيلاتها البيانية .
- اتعرف الدوال الرئيسية ، والتحويلات الهندسية عليها .
- أجد كلا من : متوسط معدل تغير دالة ، تركيب الدوال ، الدالة العكسية .

الآنذا :

إدارة أعمال : تستعمل الدوال في عالم الأعمال والتجارة لتحليل التكلفة ، والتنبؤ بالمبيعات ، وحساب الأرباح ، وتوقع التكاليف ، وتقدير الانخفاض في القوة الشرائية ... الخ

قراءة سابقة : كون قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الدوال ، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل .

الفصل الأول تحليل الدوال



مراجعة المفردات

كثيرة الحدود بمتغير واحد (polynomial in one variable):

هي عبارة جبرية على الصورة:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ ، أعداد حقيقية، $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$

n عدد كلي.

الدالة النسبية (rational function):

هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $a(x), b(x)$ كثيرتا حدود،

$$b(x) \neq 0$$

القانون العام (quadratic formula):

تعطي حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالصيغة:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ حيث } a \neq 0$$

الميل (slope):

يعطي الميل m لمستقيم يحوي النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2)

$$\text{بالصيغة: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ حيث } x_2 \neq x_1$$

الجذر النوني (nth root):

العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

ويشير الرمز $\sqrt[n]{}$ إلى الجذر النوني.

رمز الجذر
ما تحت الجذر
الدليل

$$\sqrt[n]{81}$$

مثل كلا من المتباينات الآتية على خط الأعداد :

$$x \leq -5 \quad (3)$$

$$x \leq -2 \quad (2)$$

$$x > -3 \quad (1)$$

$$-4 < x \quad (6)$$

$$7 \geq x \quad (5)$$

$$x > 1 \quad (4)$$

حل كل من المعادلات الآتية بالنسبة لـ y

$$2x - y^2 = 7 \quad (9)$$

$$y + 4x = -5 \quad (8)$$

$$y - 3x = 2 \quad (7)$$

$$y^3 - 9 = 11x \quad (12)$$

$$9 + y^3 = -x \quad (11)$$

$$y^2 + 5 = -3x \quad (10)$$

$$1 + 2 = 3$$

(13) حلوى: يستعمل صانع حلوى المعادلة $12D = n$ لحساب العدد الكلي المبيع من قطع الحلوى؛ حيث D عدد عبوات الحلوى، و n العدد الكلي من قطع الحلوى التي تم بيعها. كم عبوة من الحلوى تم بيعها إذا كان عدد القطع المباعة 312 قطعة؟

مجموعة رفعة الرياضيات

لتطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات

لتطوير - إنتاج - توثيق

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة للمتغير بجانبها

$$x^2 + 2x - 3, x = -4a \quad (16)$$

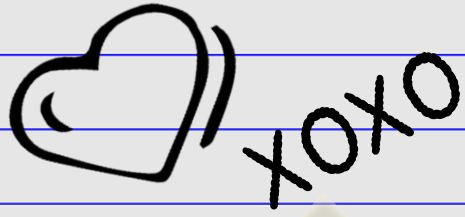
$$2b + 7, b = -3 \quad (15)$$

$$3y - 4, y = 2 \quad (14)$$

$$2 + 3p^2, p = -5 + 2n \quad (19)$$

$$-4c^2 + 7, c = 7a^2 \quad (18)$$

$$5z - 2z^2 + 1, z = 5x \quad (17)$$



(20) درجات حرارة: تُستعمل المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ للتحويل بين درجات الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي؛ حيث تمثل C الدرجات السيليزية، و F الدرجات الفهرنهايتية، فإذا كانت درجة الحرارة 73°F ، فأوجد درجة الحرارة السيليزية المقابلة لها مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

مجموعة رفعة الرياضيات

نظور - إنعام - توفيق

مجموعة رفعة الرياضيات

نظور - إنعام - توفيق







جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر

المفردات:

الصفة المميزة للمجموعة

set-builder notation

رمز الفترة

interval notation

الدالة

function

رمز الدالة

function notation

المتغير المستقل

independent variable

المتغير التابع

dependent variable

الدالة المتعددة التعريف

piecewise-defined function

المجال المناسب

relevant domain

فيما سبق :
درست المجموعات
ورموزها .

والآن :

- اصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية
- اتعرف الدوال . واحسب قيمها واجد مجالاتها .





لماذا؟

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معاً؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلاً تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية : تستعمل الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، الزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:



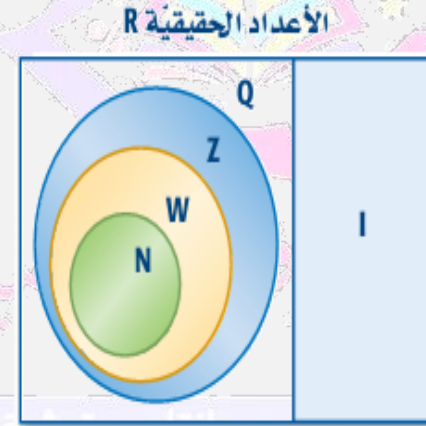
مقطع توضيحي



الأعداد الحقيقية

مفهوم أساسي

أمثلة	المجموعة	الرمز
$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666\dots$	الأعداد النسبية	Q
$\pi, \sqrt{3} = 1.73205\dots$	الأعداد غير النسبية	I
$-5, 17, -23, 8$	الأعداد الصحيحة	Z
$0, 1, 2, 3\dots$	الأعداد الكلية	W
$1, 2, 3, 4\dots$	الأعداد الطبيعية	N



إذا تستعمل الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث،
ويقرأ الرمز " $\in$ " ينتمي إلى أو عنصر في.

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 16, x \in \mathbb{Z}\}$$

الأعداد x حيث...

x لها هذه

الخصائص...

x ينتمي إلى مجموعة
الأعداد المعطاة.

مثال 1

اكتب كلاً من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

(a) $\{8, 9, 10, 11, \dots\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

وتقرأ مجموعة الأعداد x ، حيث x أكبر من أو تساوي 8،
و x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

(b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in \mathbb{R}\}$

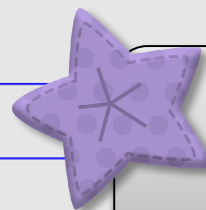
(c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in \mathbb{R}\}$

استعمال
الصفة المميزة

تطوير - إنتاج - توثيق



تفقد من نفسك

$$-1 \leq x \leq 5 \quad (1C)$$

$$x \leq -3 \quad (1B)$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (1A)$$

تُستعمل رموز الفترات لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "] " للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعمل الرمزان "(" أو ") " للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان " $-\infty$ " أو " ∞ " فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

غير محدودة:

تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقف).

فترات غير محدودة		فترات محدودة	
رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة	المتباينة
$[a, \infty)$	$x \geq a$	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
$(-\infty, a]$	$x \leq a$	(a, b)	$a < x < b$
(a, ∞)	$x > a$	$[a, b)$	$a \leq x < b$
$(-\infty, a)$	$x < a$	$(a, b]$	$a < x \leq b$
$(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$		

مثال 2

اكتب كلاً من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

$$(a) \quad -8 < x \leq 16 \quad (-8, 16]$$

$$(b) \quad x < 11 \quad (-\infty, 11)$$

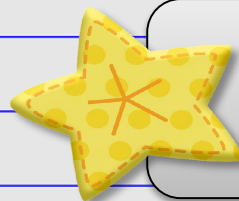
$$(c) \quad x \leq -16 \text{ أو } x > 5 \quad (-\infty, -16] \cup (5, \infty)$$

الرمزان $\cup$ ، $\cap$:
يُقرأ الرمز " $\cup$ " (اتحاد)،
ويعني: جميع العناصر
المنتمية إلى كلا
المجموعتين.
يُقرأ الرمز " $\cap$ " (تقاطع)،
ويعني: جميع العناصر
المشتركة بين المجموعتين.

استعمال
رمز الفترة

تطوير - إنتاج - توثيق



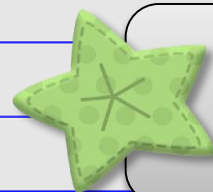


تفكر من تفكير

$$x < -2 \text{ أو } x > 9 \quad (2C)$$

$$a \geq -3 \quad (2B)$$

$$-4 \leq y < -1 \quad (2A)$$



تدريب

$$(6) \quad x > 21 \text{ أو } x < -19$$

$$(4) \quad \{-3, -2, -1, \dots\}$$

$$(1) \quad x > 50$$



تدريب

$$1 + 2 = 3$$

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة،
وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2)

المجموعة $\{2,3,4,5,\dots\}$								1
$\{x \mid x > 2, x \in W\}$	D	$\{x \mid x \leq 5, x \in W\}$	C	$\{x \mid x \geq 2, x \in W\}$	B	$\{x \mid x \leq 1, x \in W\}$	A	
$-31 < x \leq 64$								2
$(-31, 64)$	D	$(-31, 64]$	C	$[-31, 64)$	B	$[-31, 64]$	A	
$x > 5$ أو $x < -1$								3
$(-\infty, -1] \cup (5, \infty)$	D	$(-\infty, -1) \cup [5, \infty)$	C	$(-\infty, -1) \cap (5, \infty)$	B	$(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$	A	

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

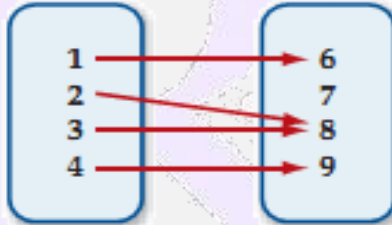


الدالة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B .

المجموعة A المجموعة B



العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثلة في المخطط المجاور تمثل دالة.

حيث تمثل المجموعة A مجال الدالة.

المجال = $\{1, 2, 3, 4\}$.

وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.

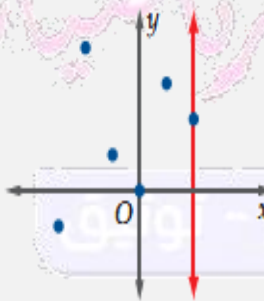
المدى = $\{6, 8, 9\}$.

مثال:

اختبار الخط الرأسي

مفهوم أساسي

نموذج



التعبير اللفظي: تُمثل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

إرشادات للدراسة

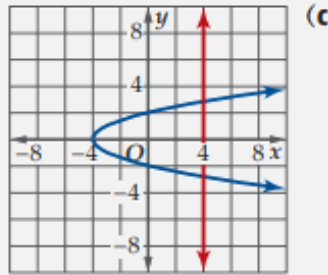
المجال والمدى
في هذا المفهوم الأساسي،
يمكن أن يستعمل الرمز D
للتعبير عن المجال، والرمز
 R للمدى، أي أن:
 $D = \{1, 2, 3, 4\}$
 $R = \{6, 8, 9\}$

مثال 3

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالة في x أم لا:

(a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثّل دالة في x .



(b)

x	y
-8	-5
-5	-4
0	-3
3	-2
6	-3

بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن y لا تمثّل دالة في x .

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ، وعليه فإن y تمثّل دالة في x .

(d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالة في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لـ y .

المعادلة الأصلية $y^2 - 2x = 5$

أضف $2x$ لكلا الطرفين $y^2 = 5 + 2x$

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $y = \pm \sqrt{5 + 2x}$

y لا تمثّل دالة في x ؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين لـ y ، أحدها موجبة، والأخرى سالبة.

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y

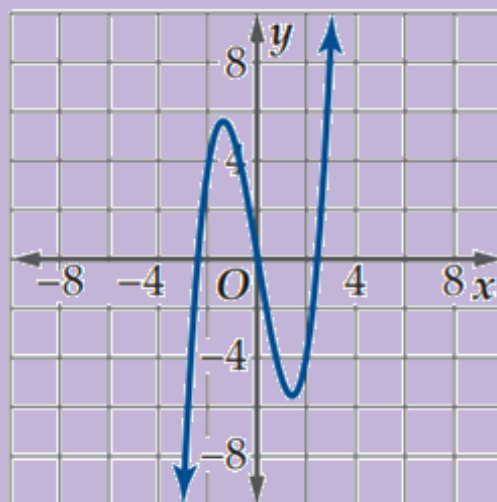
لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لـ y بأكثر من قيمة لـ x كما في المثال 3b.

تحديد العلاقات التي تمثّل دوال

تطوير - إنتاج - توثيق

تفكر من تفكير

$$3y + 6x = 18 \quad (3D)$$



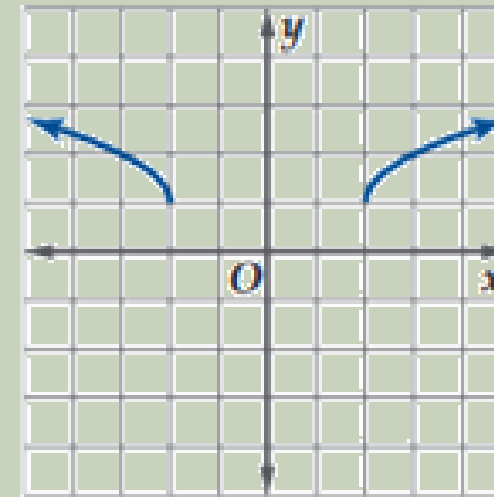
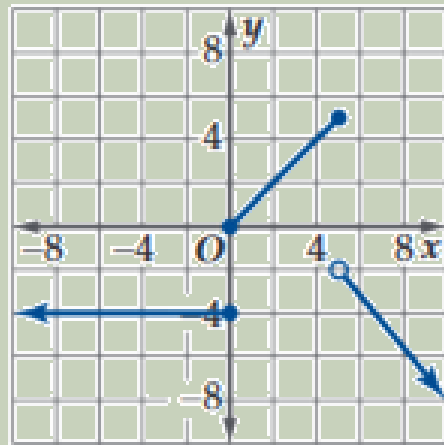
(3C)

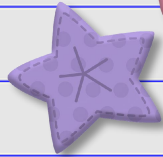
x	y
-6	-7
2	3
5	8
5	9
9	22

(3B)



تدريب





يُستعمل $f(x)$ رمزاً للدالة، ويُقرأ $(f \text{ of } x)$ ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثل قيمة y التي ترتبط بقيمة x ، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

الدالة المرتبطة بالمعادلة

$$f(x) = -6x$$

المعادلة

$$y = -6x$$

يمثل المتغير x قيم المجال ويسمى متغيراً مستقلاً. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى متغيراً تابعاً.

تطوير - إنتاج - توثيق

الربط مع تاريخ الرياضيات

ليونارد أويلر (1707م - 1783م)
عالم رياضي سويسري كتب أكثر من
800 بحث في الرياضيات، وهو أول
من استعمل رمز الدالة $f(x)$.

مثال 4

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

(a) $f(6)$

لإيجاد $f(6)$ ، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$$\text{الدالة الأصلية} \quad f(x) = x^2 + 8x - 24$$

$$\text{عوّض 6 مكان } x \quad f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$$

$$\text{بسّط} \quad = 36 + 48 - 24$$

$$\text{بسّط} \quad = 60$$

(b) $f(-4x)$

$$\text{الدالة الأصلية} \quad f(x) = x^2 + 8x - 24$$

$$\text{عوّض } -4x \text{ مكان } x \quad f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$$

$$\text{بسّط} \quad = 16x^2 - 32x - 24$$

(c) $f(5c + 4)$

$$\text{الدالة الأصلية} \quad f(x) = x^2 + 8x - 24$$

$$\text{عوّض } (5c + 4) \text{ مكان } x \quad f(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24$$

$$\text{فك الأقواس } (5c + 4)^2 \text{ و } 8(5c + 4) \quad = 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$$

$$\text{بسّط} \quad = 25c^2 + 80c + 24$$

إيجاد قيم الدالة
مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

تتحقق من نفسك

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

$$f(-3a+8) \quad (4C)$$

$$f(6x) \quad (4B)$$

$$f(12) \quad (4A)$$

مثال 5

حدّد مجال كلّ من الدوال الآتية:

$$(a) f(x) = \frac{2+x}{x^2-7x}$$

تكون العبارة $\frac{2+x}{x^2-7x}$ غير معرفة إذا كان المقام صفراً، وبحل المعادلة $x^2 - 7x = 0$ ، فإن القيم المستثناة

من المجال هي $x = 0$ و $x = 7$ ، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$

و $x = 7$ ، أي $D = \{x \mid x \neq 0, x \neq 7, x \in \mathbb{R}\}$ أو $D = (-\infty, 0) \cup (0, 7) \cup (7, \infty)$.

$$(b) g(t) = \sqrt{t-5}$$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t - 5 \geq 0$ ؛ أي أن مجال الدالة g هو

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D = \{x \mid x \geq 5, x \in \mathbb{R}\}$ أو $D = [5, \infty)$.

$$(c) h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$$

تكون هذه الدالة معرفة إذا كان المقام معرّفاً، وقيمته لا تساوي صفراً، وهذا يعني أنها معرفة عندما

يكون $x^2 - 9 > 0$ ، وعليه فإن $x^2 > 9$ وهذا يعني أن $|x| > 3$ ؛ لأن $\sqrt{x^2} = |x|$ ، ويكون مجال $h(x)$

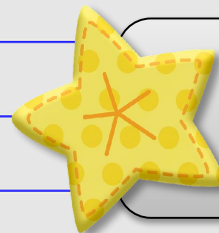
هو $D = \{x \mid x < -3 \text{ أو } x > 3, x \in \mathbb{R}\}$ أو $D = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

تحديد مجال
الدالة جبرياً

تطوير - إنتاج - توثيق

مقطع توضيحي



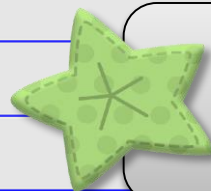


تتحقق من نفسك

$$g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}} \quad (5C)$$

$$h(a) = \sqrt{a^2 - 4} \quad (5B)$$

$$f(x) = \frac{5x-2}{x^2+7x+12} \quad (5A)$$



تمرين

$$h(x) = \sqrt{6 - x^2} \quad (29)$$

$$g(a) = \sqrt{1 + a^2} \quad (28)$$

$$f(x) = \frac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4} \quad (26)$$

مثال 6

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 , & 66 \leq x \leq 68 \\ 2x - 66 , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

(a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$$h(x) = 3x - 132 \quad \text{تعريف الدالة في الفترة } 66 \leq x \leq 68$$

$$h(67) = 3(67) - 132 \quad \text{عوض 67 مكان } x$$

$$= 201 - 132 = 69 \quad \text{بسط}$$

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

إيجاد قيم الدالة
متعددة التعريف

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 6

تُعرّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمى مثل هذه الدوال **الدوال المتعددة التعريف**.

(b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستخدم القاعدة $h(x) = 2x - 66$ ليجاد $h(72)$.

تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$$h(x) = 2x - 66$$

عوض 72 مكان x

$$h(72) = 2(72) - 66$$

بسند

$$= 144 - 66 = 78$$

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

إيجاد قيم الدالة
متعددة التعريف

تطوير - إنتاج - توثيق

تفقق من نفسك

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , 0 \leq t \leq 15 \\ 60 & , 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , 240 \leq t \leq 250 \end{cases}$$

$v(245)$ (6C)

$v(15)$ (6B)

$v(5)$ (6A)



تدريب

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3, & x < 3 \\ -x^3, & 3 \leq x \leq 8 \\ 3x^2 + 1, & x > 8 \end{cases} \quad (33)$$

$$f(-5)$$

$$g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4} \quad (23)$$

$$g(3m) \quad (b)$$

تدريب

(74) أي مما يأتي يمثل مجال الدالة:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

(73) أي العبارات الآتية صحيحة دائماً:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

(55) تحدد، إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1) = 1, G(2) = 2, G(3) = 3$

و $G(x+1) = \frac{G(x-2)G(x-1)+1}{G(x)}$ لكل $x \geq 3$ ، فأوجد $G(6)$.

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر





تحليل التمثيلات البيانية للسؤال والعلاقات



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر

المفردات:

الأصفار

zeros

الجنذور

roots

التمائل حول مستقيم

line symmetry

التمائل حول نقطة

point symmetry

الدالة الزوجية

even function

الدالة الفردية

odd function

فيما سبق :
درست الدوال وكيفية إيجاد
قيمها

والآن :

- استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم الدوال ، وإيجاد مجالها ومداهها ومقطعها مع محور y واصفاتها .
- استكشف تماثل منحنيات الدوال ، واحد الدوال الزوجية والدوال الفردية

تحليل التمثيلات
البيانية للدوال
والعلاقات

تدريس - إنتاج - توثيق
1-2



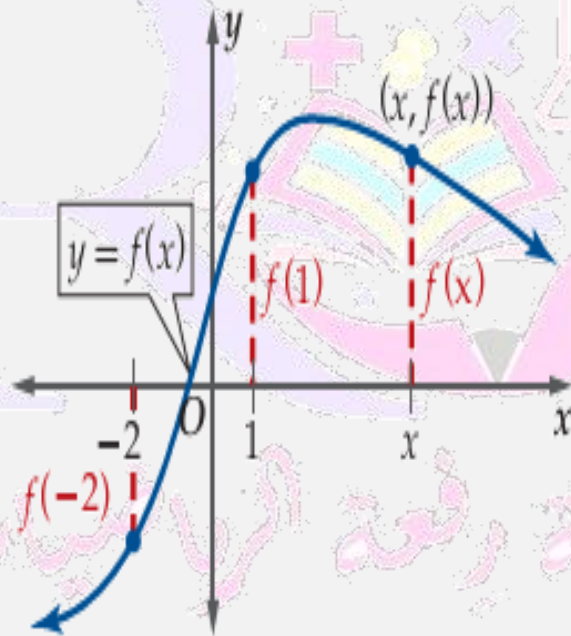
لماذا؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلاً يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلل الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1433 - 1440) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07, 1 \leq x \leq 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1433 هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

$$1 + 2 = 3$$



تحليل التمثيل البياني للدالة التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ ، حيث x أحد عناصر مجال f . وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. وعليه تكون قيمة الدالة مساوية لطول العمود الواصل من النقطة x على المحور x إلى منحنى الدالة كما هو موضح في الشكل المجاور.

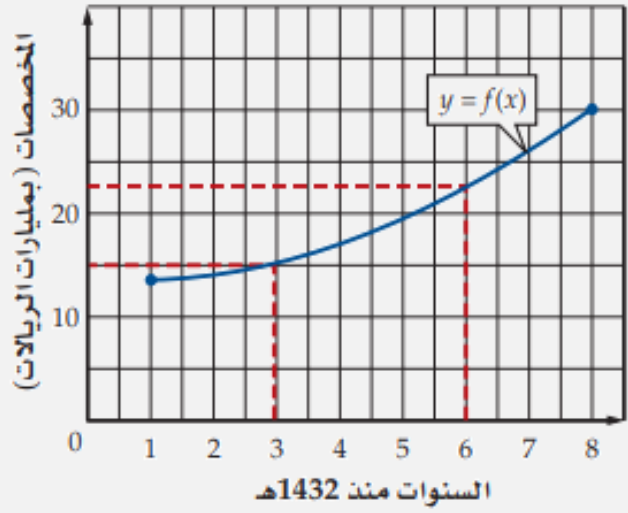
يُستعمل التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 1

مخصصات الصحة والهلال الأحمر



مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:

(a) قَدِّر قيمة المخصصات سنة 1438 هـ، ثم تحقِّق من إجابتك جبريًا.

السنة 1438 هـ هي السنة السادسة بعد 1432 هـ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1438 هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا.

وللتحقُّق من ذلك جبريًا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولًا.

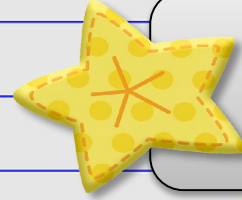
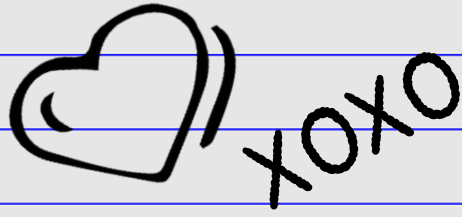
(b) قَدِّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقِّق من إجابتك جبريًا. يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1435 هـ. وللتحقُّق جبريًا أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

لذا تعد السنة التقريبية 1435 هـ معقولة.

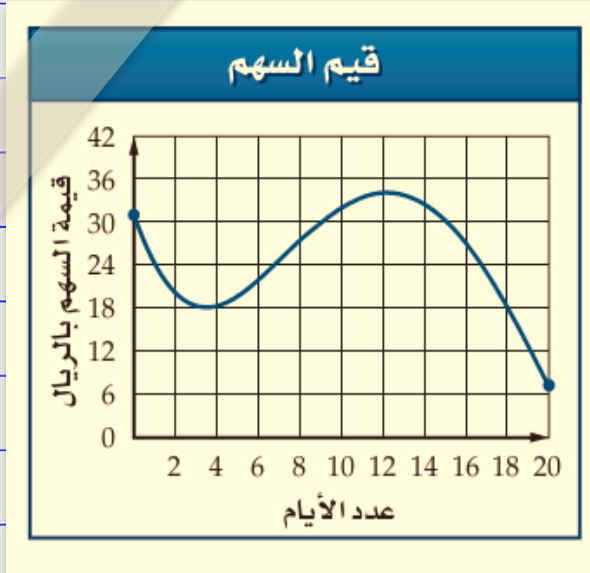
تقدير قيم
الدوال

تطوير - إنتاج - توثيق



تتق من نعمك

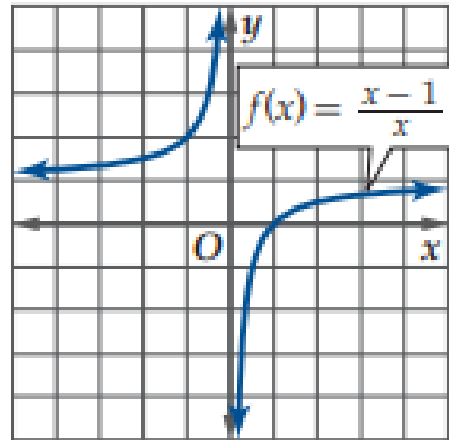
(1) **أسهم:** تابع مستمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة:
 $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \leq d \leq 20$ حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال
 في اليوم d .
 (1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر.



(1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالًا.

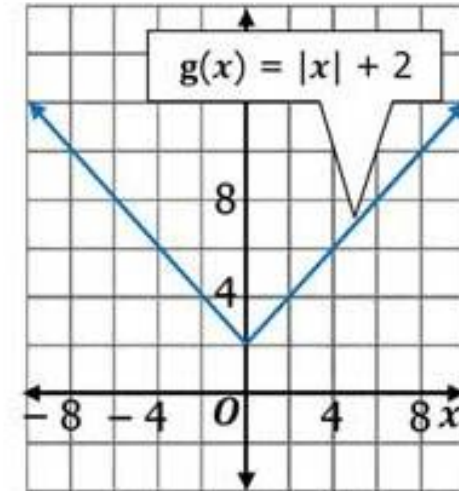


تدريب



(4

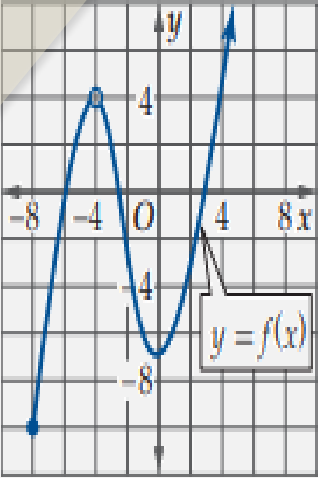
$f(1)$ (c) $f(0.5)$ (b) $f(-3)$ (a)



(2

$g(0)$ (c) $g(-3)$ (b) $g(-8)$ (a)

مثال 2



أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .

المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f .
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

مما سبق يكون مجال الدالة f هو $(-4, \infty) \cup [-8, -4)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid x \geq -8, x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$.

المدى:

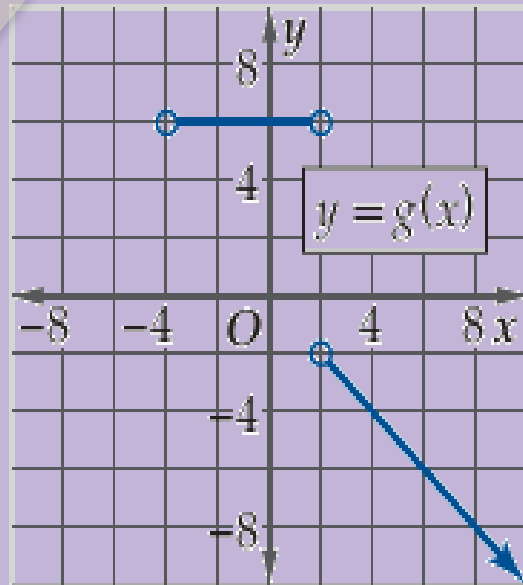
إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10 ، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x ، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

إيجاد المجال
والمدى

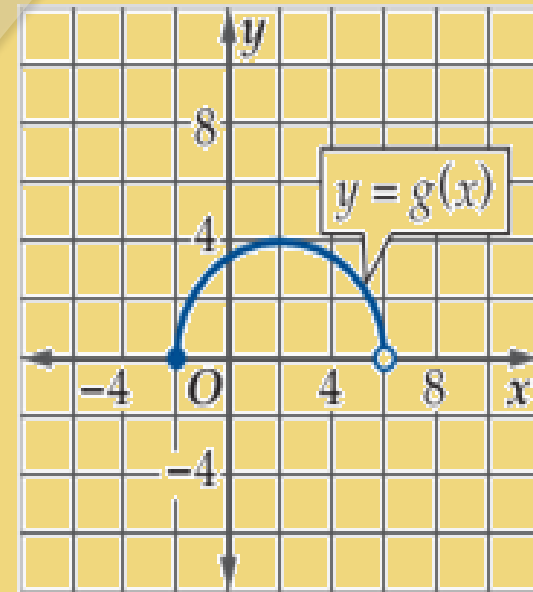
تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$

تفكر من نفسك



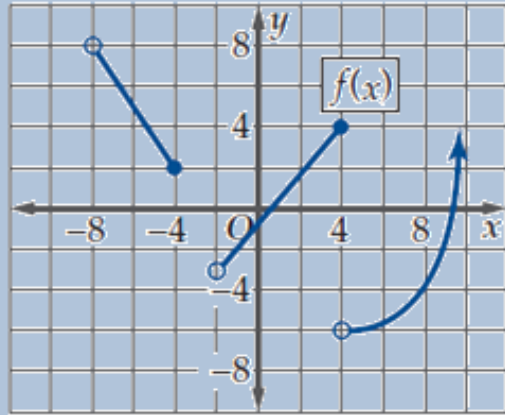
(2B)



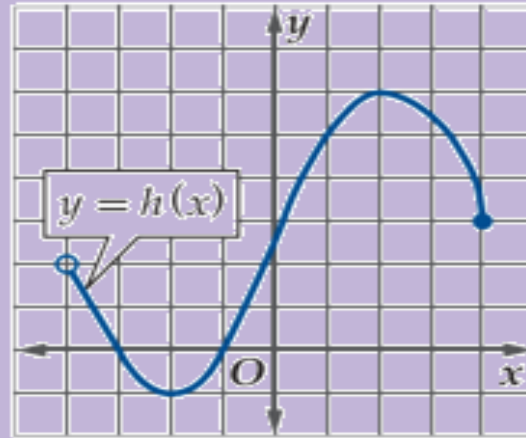
(2A)

تطوير

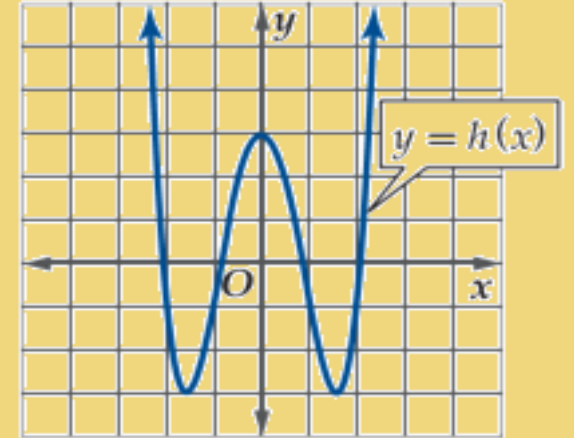
استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحديد مجالها ومدنها في كل مما يأتي:



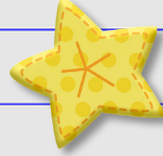
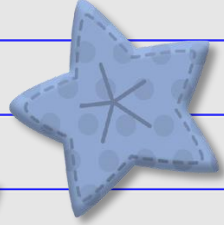
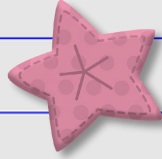
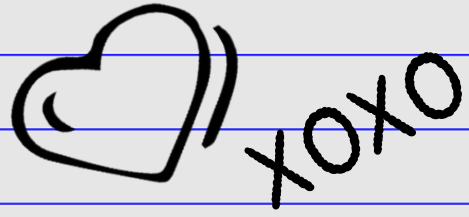
(39)



(7)

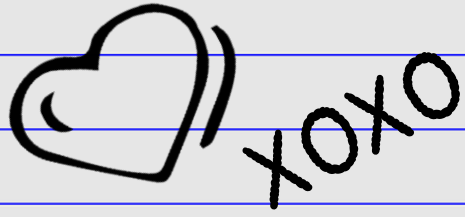


(6)

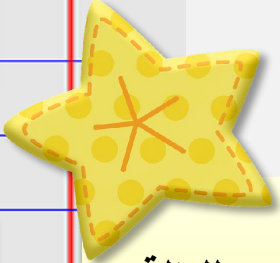


مقطع توضيحي

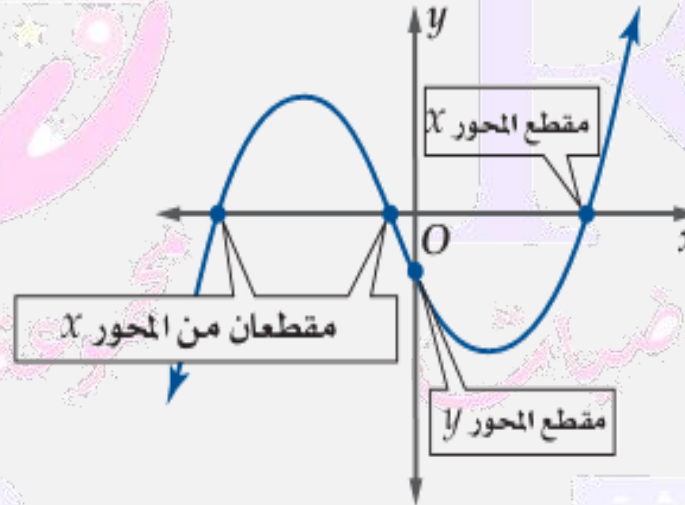




النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ ، وللحصول على المقطع y فإننا نعوض $x = 0$. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x ، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.



ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x وقد يكون هناك مقطع واحد أو أكثر



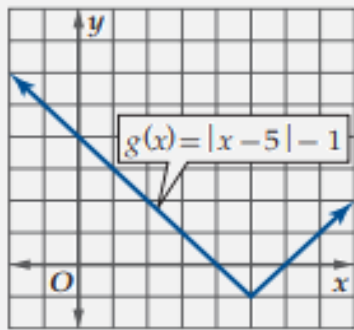
تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبرياً، فإننا نجد $f(0)$.

مثال 3

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y ، ثم أوجده جبريًا:



التقدير من التمثيل البياني:

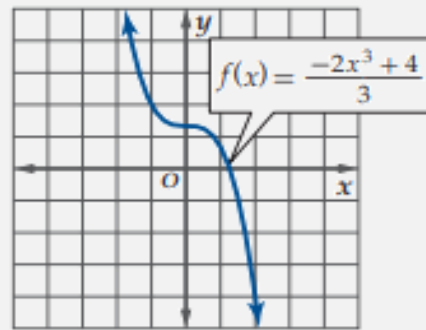
يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$ ، وعليه فإن المقطع y هو 4.

الحل جبريًا:

أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0 - 5| - 1 = 4$$

أي أن المقطع y هو 4.



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

الحل جبريًا:

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3 + 4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

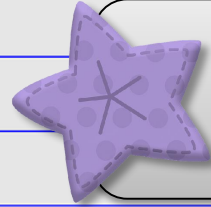
أي أن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ أو $\frac{4}{3}$.

إيجاد المقطع

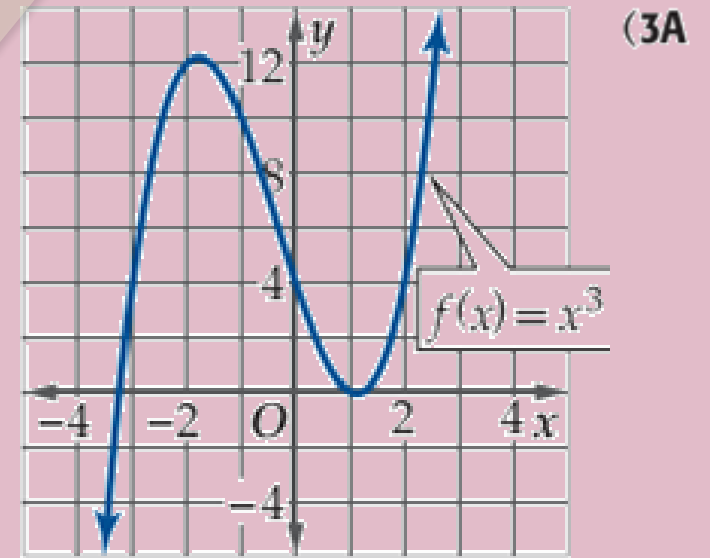
مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



تخقق من فهمك



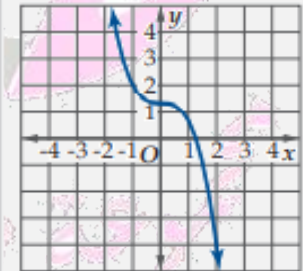


إرشادات للدراسة

تسمية المحورين في التمثيل البياني،
عندما نسمي المحورين في التمثيل البياني، فإن المتغير الذي يدل على المجال يكون على المحور x ، والمتغير الذي يدل على المدى يكون على المحور y . ويمكن أن تستعمل متغيرات كثيرة لكل من المجال والمدى. ولكن للتسهيل نسمي عادة المحور الأفقي x والرأسي y .

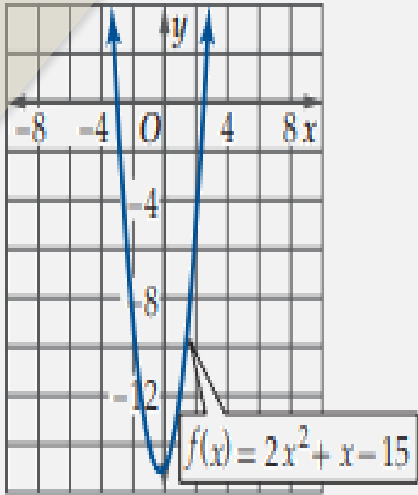
إرشادات للدراسة

تدريج المحورين x و y :
إذا لم يظهر التدريج على المحورين x و y في التمثيل البياني، فذلك يعني أن التدريج بالوحدات. انظر المثال 3a.



تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار الدالة**، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور المعادلة**. ولإيجاد أصفار دالة f ، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

مثال 4



استعمل التمثيل البياني المجاور، الذي يمثل الدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبرياً.

التقدير من المنحنى:

يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 و 2.5 تقريباً. لذا فإن صفري الدالة f هما -3 و 2.5 .

الحل جبرياً:

$$2x^2 + x - 15 = 0$$

$$(2x - 5)(x + 3) = 0$$

$$2x - 5 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 2.5 \quad \text{أو} \quad x = -3$$

$$\text{ضع } f(x) = 0$$

حل

خاصية الضرب الصفري

حل كل معادلة

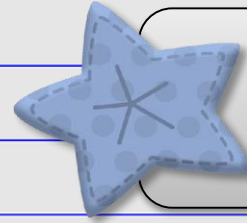
أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 و 2.5 وهما صفرا الدالة f .

إيجاد الأصفار

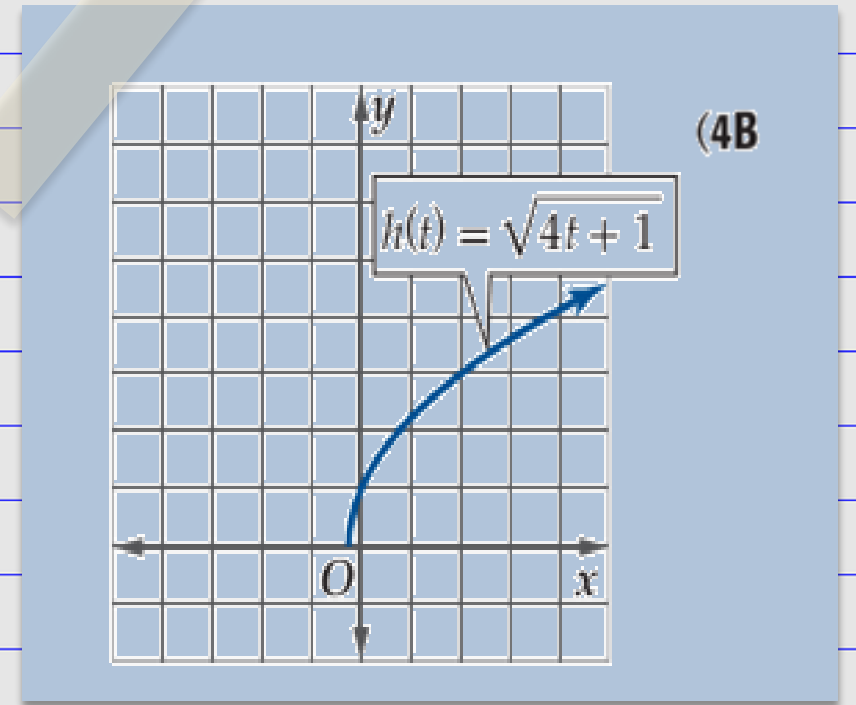
مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



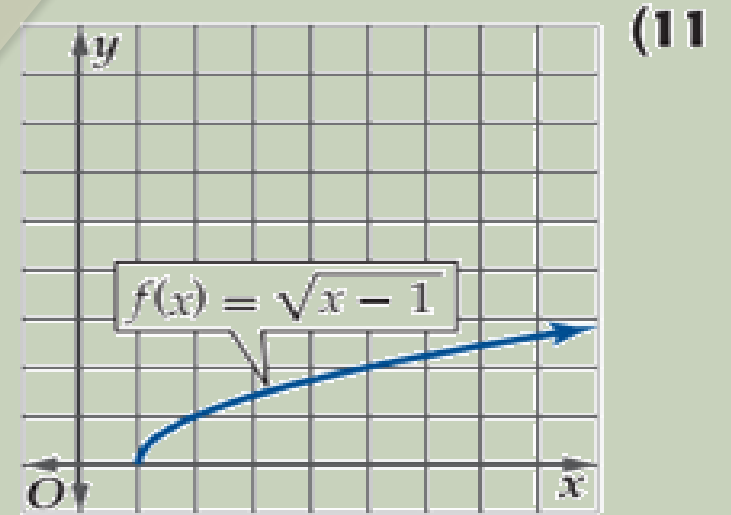
تخفق من نفسك





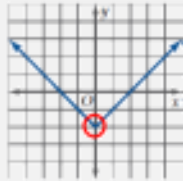
تدريب

$$h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8 \quad (37)$$



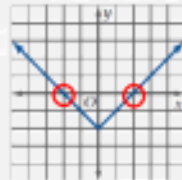
تحليل الدالة بيانياً 1

مقطع y
الإحداثي y لنقاط تقاطع منحنى
الدالة مع محور y
(قيم y تحت شرط $x = 0$)



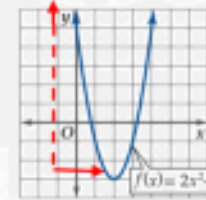
$$y = -2$$

أصفار الدالة (مقطع x)
الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى
الدالة مع محور x
(قيم x تحت شرط $y = 0$)



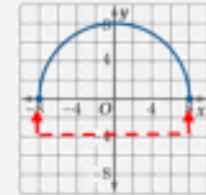
$$x = 2, -2$$

المدى
قيم y من أسفل التمثيل البياني
إلى الأعلى مع حذف نقاط عدم
التعريف

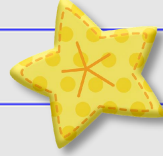
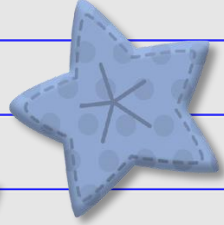
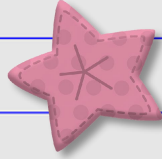
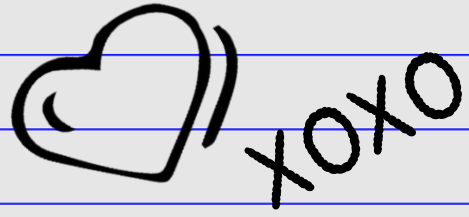


$$\text{المدى} = [-3, \infty)$$

المجال
قيم x من أقصى يسار التمثيل
البياني إلى أقصى اليمين مع حذف
نقاط عدم التعريف



$$\text{المجال} = [-8, 8]$$



مقطع توضيحي





إرشادات للدراسة

تماثل العلاقات والدوال

يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

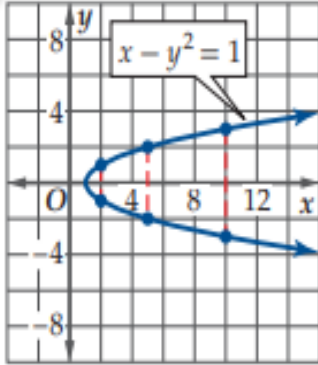
اختبارات التماثل

مفهوم أساسي

الاختبار الجبري	النموذج	اختبار التمثيل البياني
إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .		يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضاً.
إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .		يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضاً.
إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.		يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضاً.

مثال 5

استعمل التمثيل البياني لكل من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا.



$$(a) \quad x - y^2 = 1$$

التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x :

x	2	2	5	5	10	10
y	1	-1	2	-2	3	-3
(x, y)	(2, 1)	(2, -1)	(5, 2)	(5, -2)	(10, 3)	(10, -3)

التحقق جبريًا:

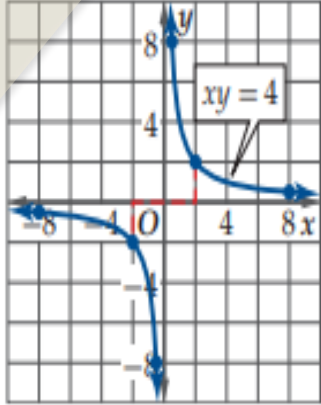
بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

اختبار التماثل

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 5



$$xy = 4 \quad (b)$$

التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

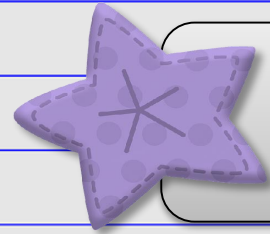
يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

x	-8	-2	-0.5	0.5	2	8
y	-0.5	-2	-8	8	2	0.5
(x, y)	$(-8, -0.5)$	$(-2, -2)$	$(-0.5, -8)$	$(0.5, 8)$	$(2, 2)$	$(8, 0.5)$

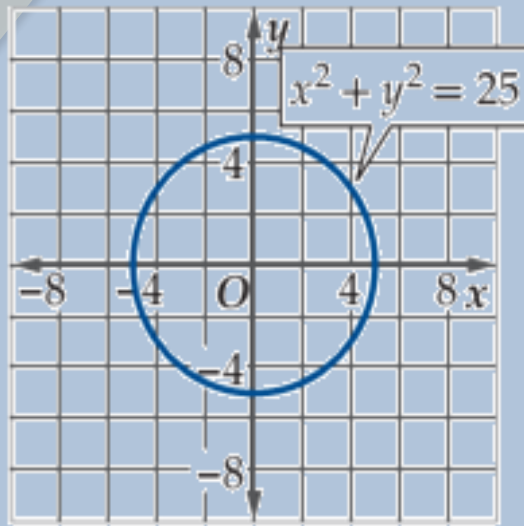
التحقق جبريًا:

بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

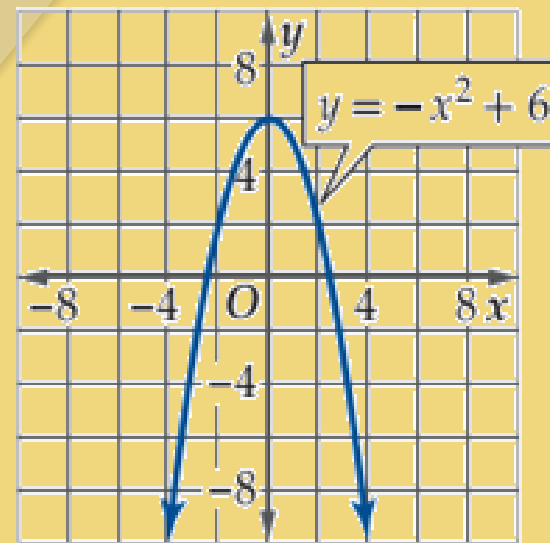
اختبار التماثل
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من نفسك



(5B)



(5A)

$$1 + 2 = 3$$

إرشادات للدراسة

الدوال الزوجية والدوال
الفردية،

قد تُظهر لك بعض
التمثيلات البيانية تماثلًا
والحقيقة غير ذلك؛ لذا
عليك التأكد من التماثل
جبريًا في كل مرة.

يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

مفهوم أساسي

الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f ، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f ، فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانياً. ثم حلل منحناها لتحديد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبرياً.

$$f(x) = x^3 - 2x \quad (a)$$

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلك جبرياً نجد:

عوّض $-x$ مكان x

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$$

بسّط

$$= -x^3 + 2x$$

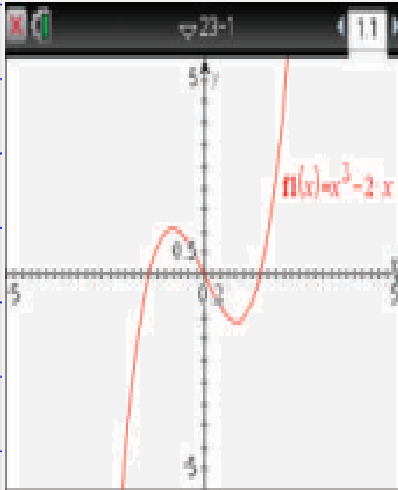
خاصية التوزيع

$$= -(x^3 - 2x)$$

$$f(x) = x^3 - 2x \text{ الدالة الأصلية}$$

$$= -f(x)$$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.



تحديد الدوال الزوجية
والدوال الفردية

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 6

$$f(x) = x^4 + 2 \quad (b)$$

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y ، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبرياً نجد:

$$f(-x) = (-x)^4 + 2 \quad \text{عوض } -x \text{ مكان } x$$

$$= x^4 + 2 \quad \text{بسّط}$$

$$= f(x) \quad \text{الدالة الأصلية } f(x) = x^4 + 2$$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

$$f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x \quad (c)$$

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست متماثلة حول المحور y وليست متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبرياً نجد:

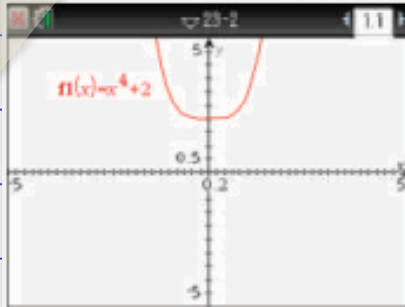
$$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x) \quad \text{عوض } -x \text{ مكان } x$$

$$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x \quad \text{بسّط}$$

$$\text{وبما أن } -f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$$

$$\text{فإن } f(-x) \neq f(x) \text{، وكذلك } -f(x) \neq f(-x)$$

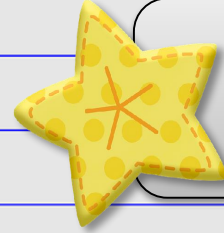
لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.



تحديد الدوال الزوجية
والدوال الفردية

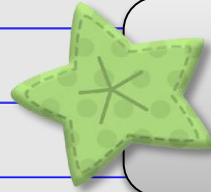
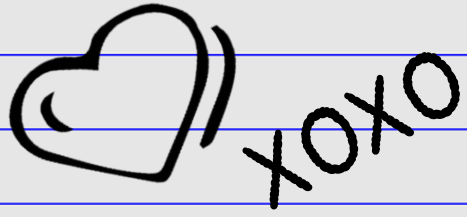
تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$

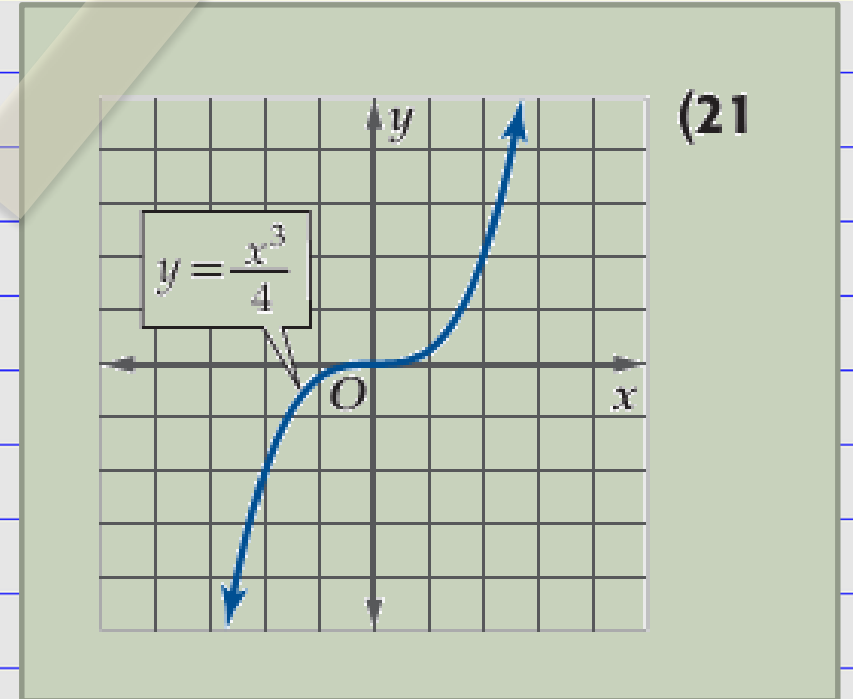


تحقق من نفسك

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \quad (6A)$$

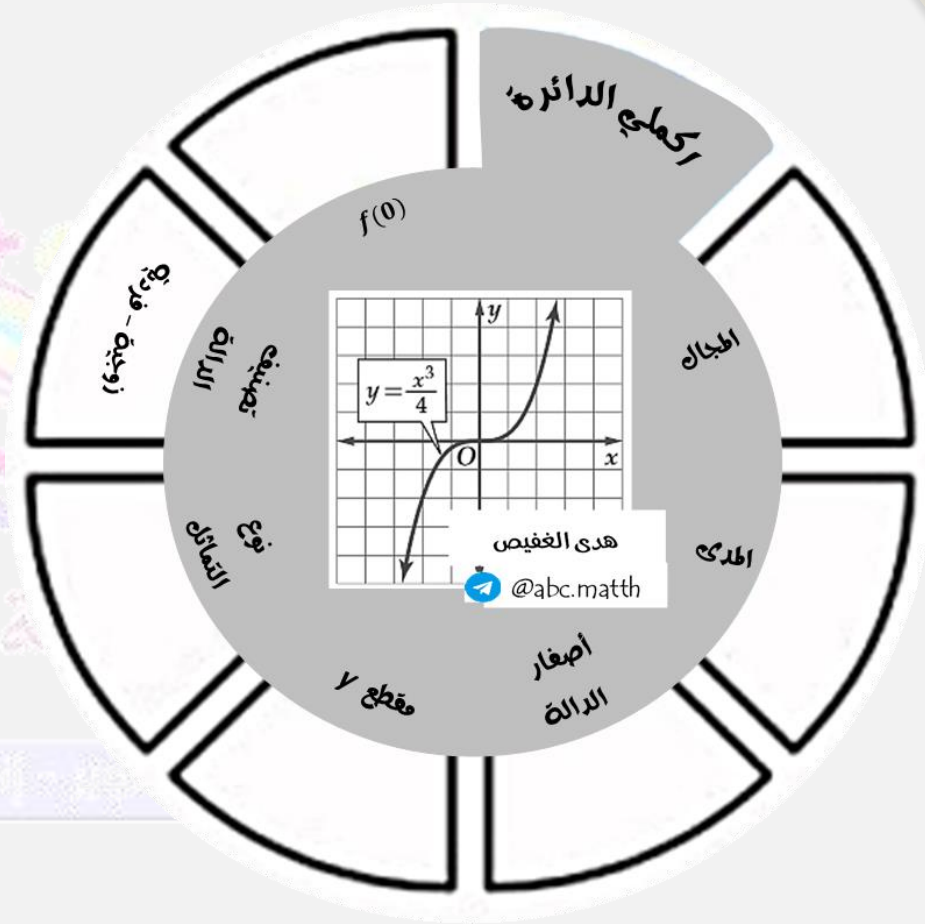
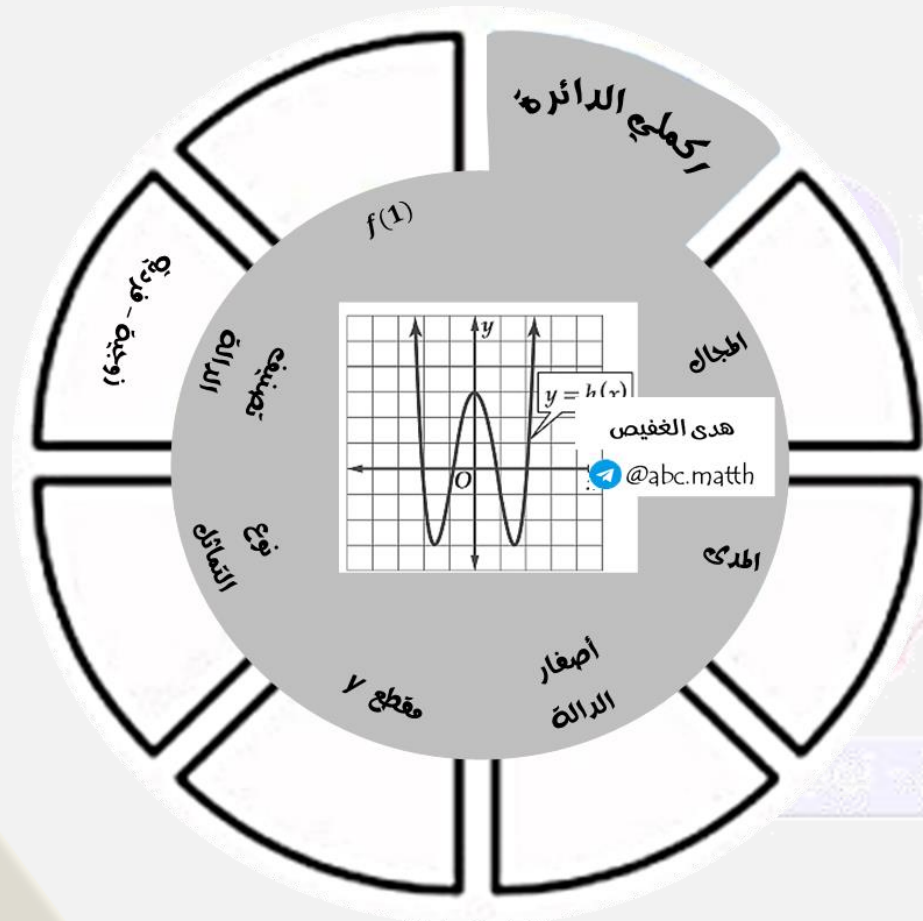


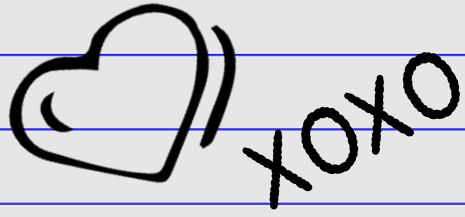
توبي



اللعب واستنتج

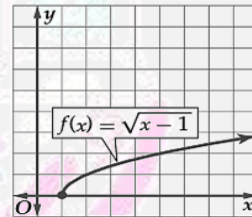
$$1 + 2 = 3$$





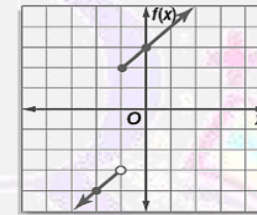
العب واستمتع

ضعي القصصات بالمكان المناسب



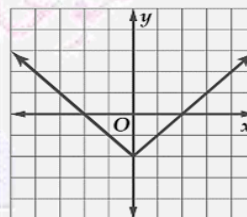
المدى

المجال



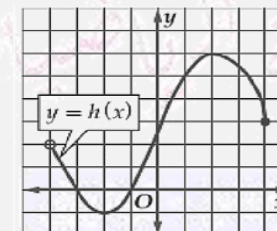
المدى

المجال



المدى

المجال



المدى

المجال

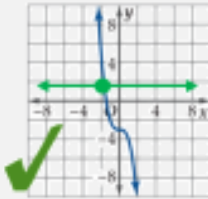
هذي الغفيس

@abc_matth

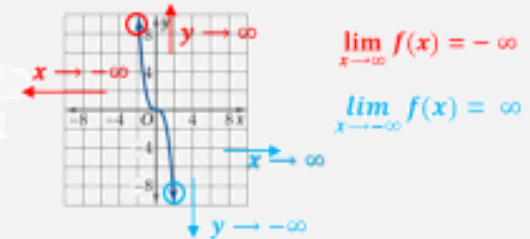
تحليل الدالة بيانياً 2

هل الدالة لها دالة عكسية؟!

إذا حققت اختبار الخط الأفقي



سلوك طرفي
التمثيل البياني



الدوال الزوجية والفردية

فردية

زوجية

إذا حققت العبارة: $f(-x) = -f(x)$

إذا حققت العبارة: $f(-x) = f(x)$

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر





الاتصال والنشاطات

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشوري

المفردات:

الدالة المتصلة

continuous function

النهاية

limit

الدالة غير المتصلة

discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي

infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي

jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة

removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة

nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل

البياني

end behavior

فيما سبق :

درست إيجاد مجال الدالة
ومداها باستعمال تمثيلها
البياني

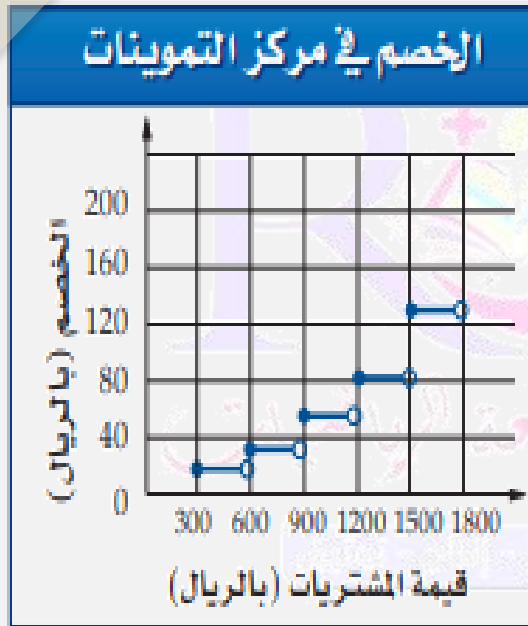
والآن :

- استعمل النهايات للتحقق من اتصال دالة ، واطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة .
- استعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة .

الاتصال والنهايات

1-3

تطوير - إنتاج - توثيق



لماذا؟

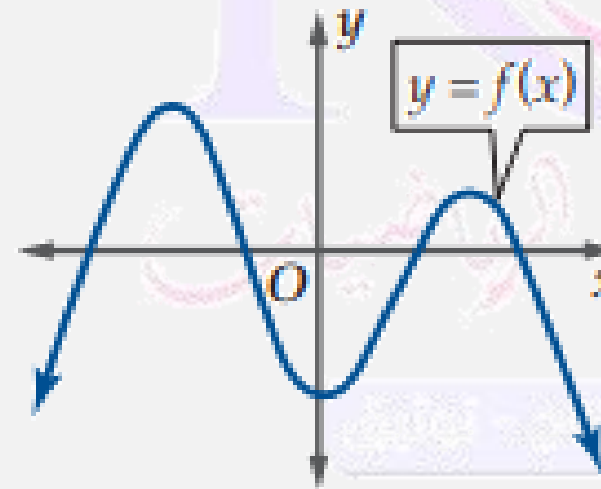
بمناسبة الافتتاح، قدم مركز التموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقاً لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.

تطوير - إنتاج - توزيع



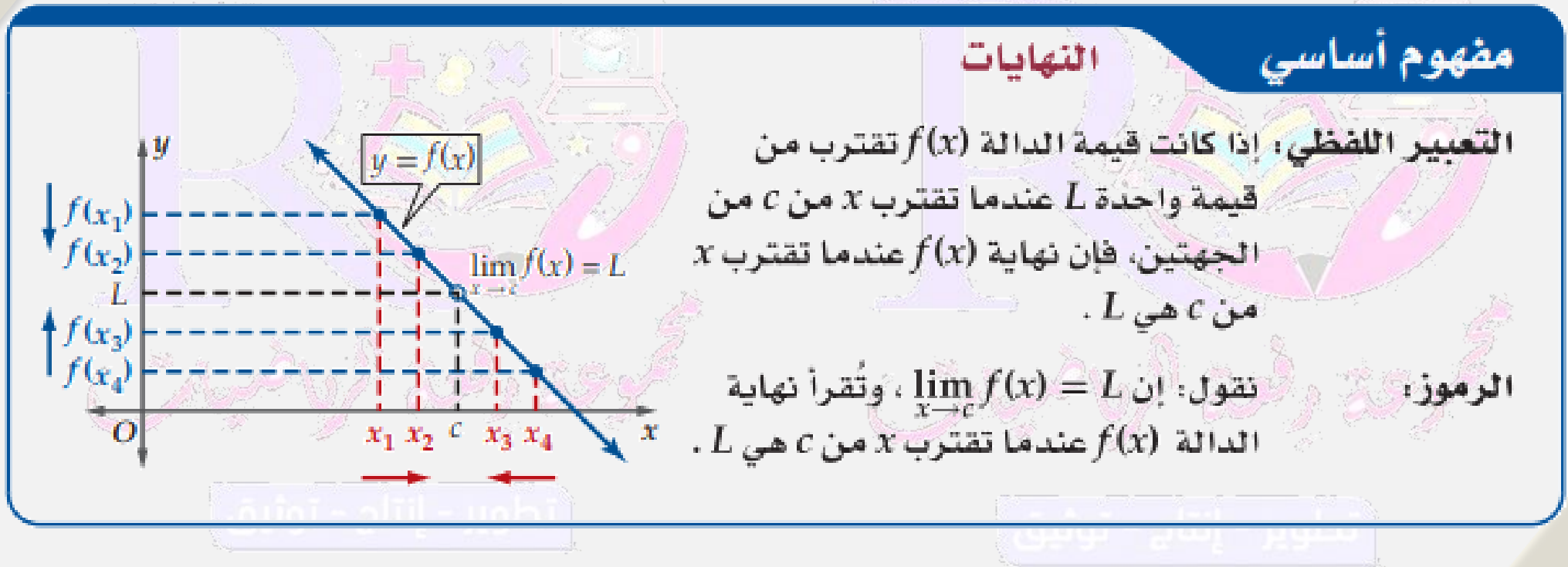
الاتصال: تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحني دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى النهاية.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x .

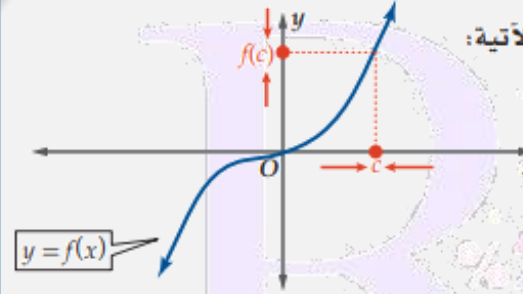
$$1 + 2 = 3$$





اختبار الاتصال

ملخص المفهوم



يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط الآتية:

• $f(x)$ معرفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.

• $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة.

• $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

إرشادات للدراسة

النهايات:

إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c .

مثال 1

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.
تحقق من شروط الاتصال الثلاثة.

(1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$ ، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

(2) هل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجودة؟

كوّن جدولاً يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

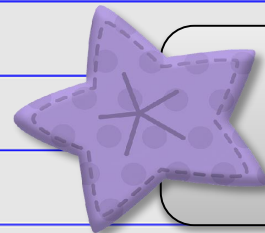
(3) هل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

التحقق من الاتصال
عند نقطة

مجموعة رعدة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



تتحقق من نفسك

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases} \quad (1B)$$

$$f(x) = x^3 \quad (1A)$$

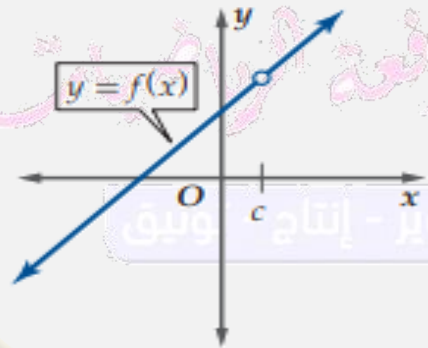
$$1 + 2 = 3$$

أنواع عدم الاتصال

مفهوم أساسي

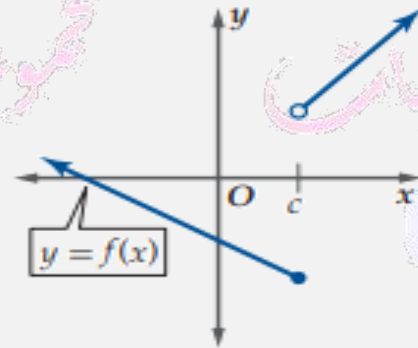
للدالة عدم اتصال قابل لإزالة عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة (o) غير مظللة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



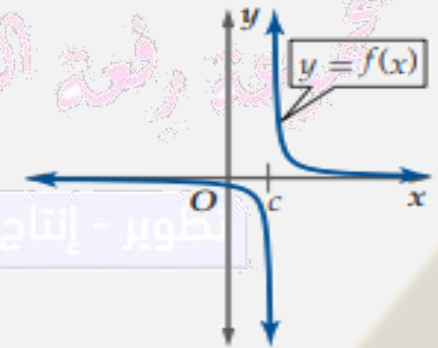
للدالة عدم اتصال قفزي عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

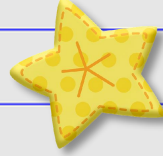
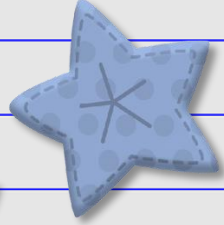
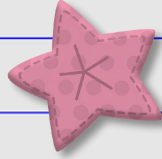
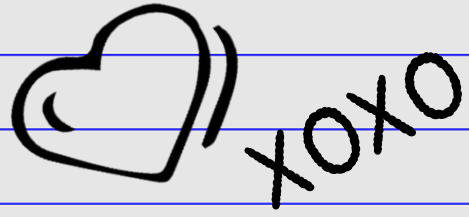
مثال:



للدالة عدم اتصال لانهاضي عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:





مقطع توضيحي



مثال 2

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهاضي، قفزي، قابل للإزالة.

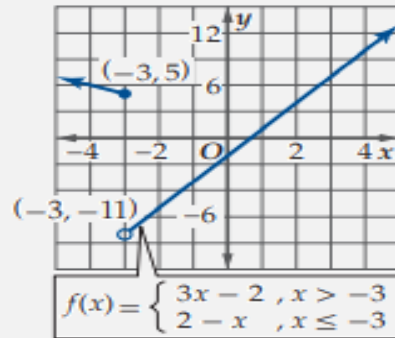
$$(a) f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > -3 \\ 2 - x, & x \leq -3 \end{cases} \text{ عند } x = -3$$

$$(1) f(-3) \text{ موجودة؛ لأن } f(-3) = 5$$

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. وبما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x = -3$. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x = -3$.



الشكل 1.3.2

تحديد نوع عدم
الاتصال عند نقطة

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 2

(b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = -3, x = 3$.

عند $x = 3$

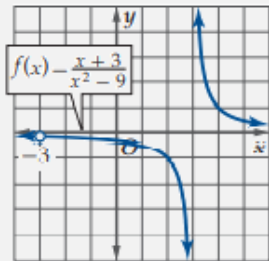
(1) $f(3) = \frac{6}{0}$ ، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = 3$.

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ غير موجودة.

(3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهاضي عند $x = 3$ ؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.



الشكل 1.3.3

تحديد نوع عدم
الاتصال عند نقطة

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 2

عند $x = -3$

(1) $f(-3) = \frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$.

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

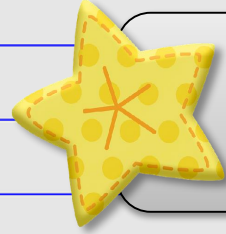
يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \approx -0.167$$

(3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = -3$. ويوضح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

تحديد نوع عدم
الاتصال عند نقطة

تطوير - إنتاج - توثيق



نحقق من فهمك

$$x = 2 \text{ عند } f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , x > 2 \\ 2 - x & , x \leq 2 \end{cases} \quad (2B)$$

$$x = 0 \text{ عند } f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (2A)$$

تدريب

$$3) \text{ عند } x = 6, x = -6 : h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$$

$$7) \text{ عند } x = -6 : f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , x \leq -6 \\ -x + 2 & , x > -6 \end{cases}$$

$$1) f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \text{ عند } x = -5$$



شروط اتصال دالة $x = c$:

1 $f(c)$ موجودة

2 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة ، حيث : $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$

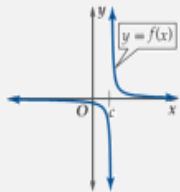
3 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

حالات عدم اتصال الدالة

لا نهائي

إذا تحققت الحالة التالية :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$$



قفزي

إذا تحققت الحالة التالية :

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

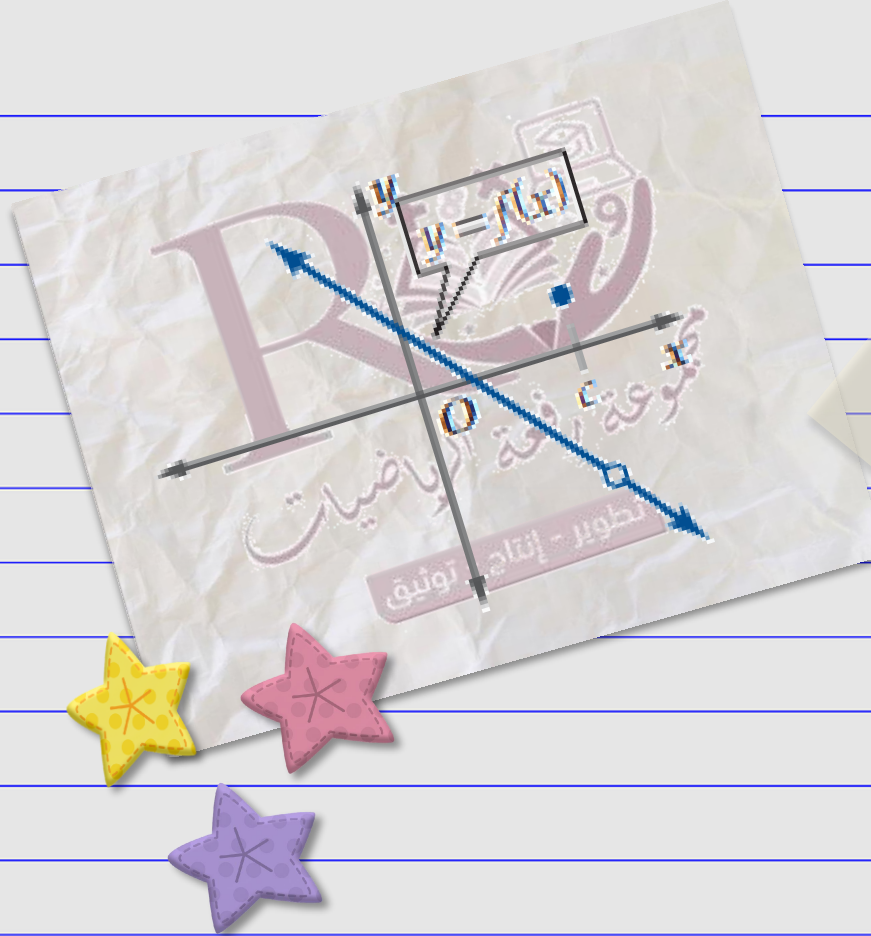


قابل للإزالة

إذا تحققت الحالة التالية :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$$





لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما عدم اتصال غير قابل للإزالة؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محددة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

مثال 3

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

(1) $f(4) = \frac{0}{0}$ أي أن $f(4)$ غير موجودة.

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8$.

(3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = 4$ ؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$.

(4) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$ ، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

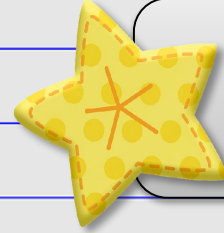
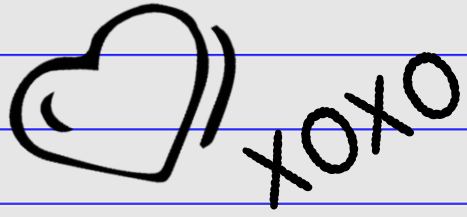
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 8, & x = 4 \end{cases}$$

لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x = 4$ ؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8

إزالة عدم الاتصال

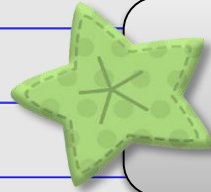
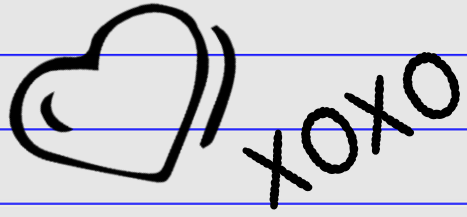
مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



تخفق من نفسك

(3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x=1$.



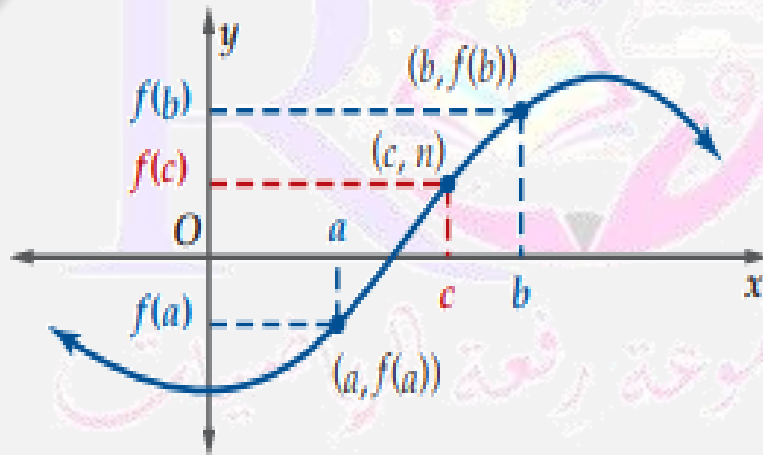
تدريب

$$x = -3, f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3} \quad (9)$$

$$1 + 2 = 3$$

نظرية

نظرية القيمة المتوسطة



إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ ، وكانت $a < b$ ،
ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين
 a و b ، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة
متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة،
فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث
 $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .

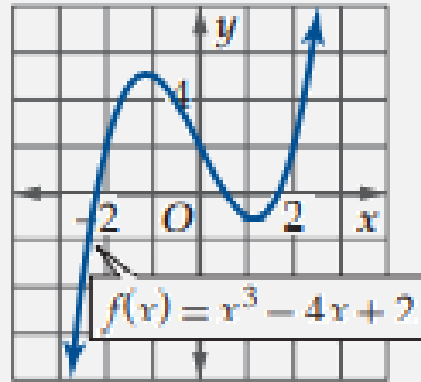


مثال 4

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

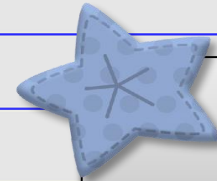
تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -3 و -2 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 و -2 ، والعددين 0 و 1 والعددين 1 و 2 . ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.



الشكل 1.3.4

تقريب الأصفار عند
تغيير الإشارة

تطوير - إنتاج - توثيق



تفكر من نفسك

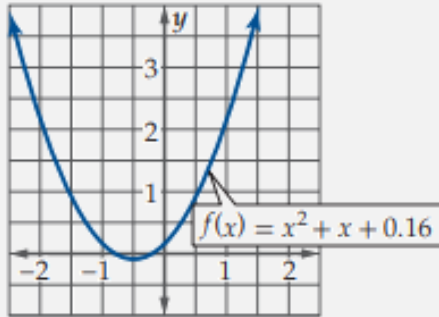
$$[-3, 4], f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4} \quad (4B)$$

$$[-6, 4], f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3 \quad (4A)$$

مثال 5

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16



تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$ ؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0 . مثل الدالة بياناً للتحقق من ذلك.

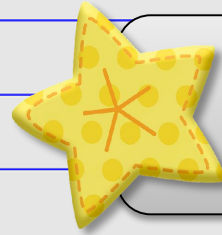
يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$ ؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

إرشاد تقني

قد يُظهر التمثيل البياني للدالة صفراً واحداً؛ لذا اختر التدرج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.

تقريب الأصفار دون
تغيير الإشارة

تطوير - إنتاج - توثيق



تحقق من فهمك

$$[0, 4] : f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14 \quad (5B)$$

$$[-5, 5] : f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1 \quad (5A)$$

قراءة الرياضيات

النهايات،

تقرأ العبارة $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف سلوك طرفي التمثيل البياني شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$ ، ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

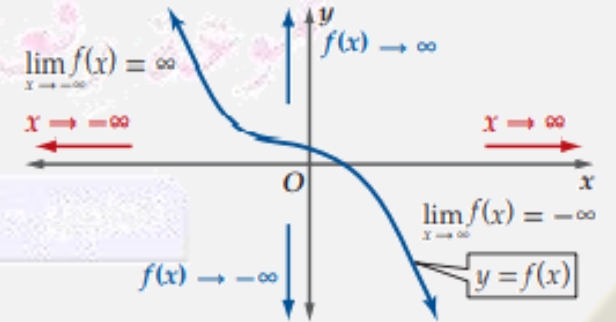
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

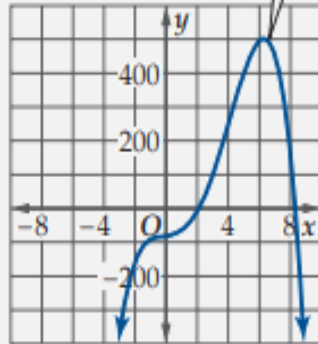
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$





مثال 6

$$f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$$



استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ،
وأن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًا:

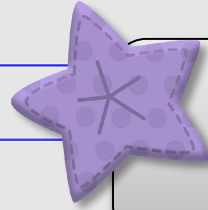
كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ ، أي استقص قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^8$	-80	$-1 \cdot 10^8$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

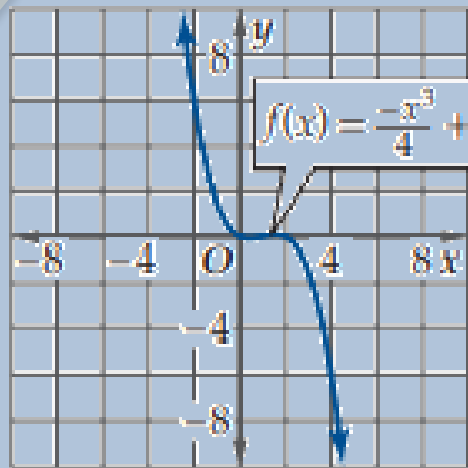
لاحظ أنه عندما $x \rightarrow -\infty$ ، فإن $f(x) \rightarrow -\infty$ ، وبالمثل عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $f(x) \rightarrow -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

المنحنيات التي تقترب
من ما لانهاية

تطوير - إنتاج - توثيق

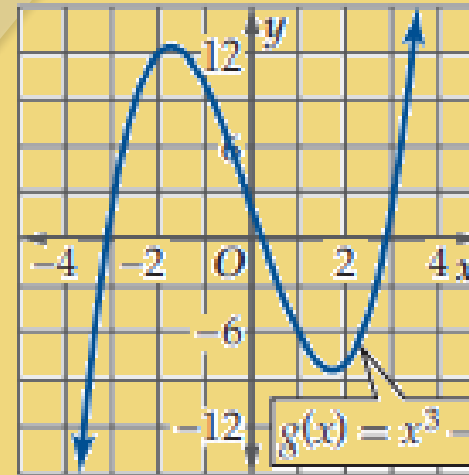


نتحقق من فهمك



$$f(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2}$$

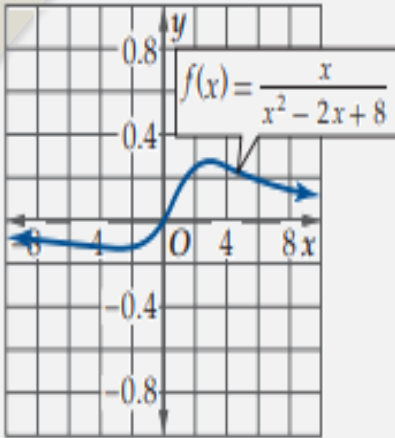
(6B)



$$g(x) = x^3 - 9x + 2$$

(6A)

مثال 7



استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عددياً.

التحليل بيانياً :

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

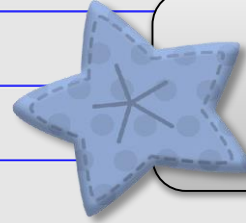
التعزيز عددياً :

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

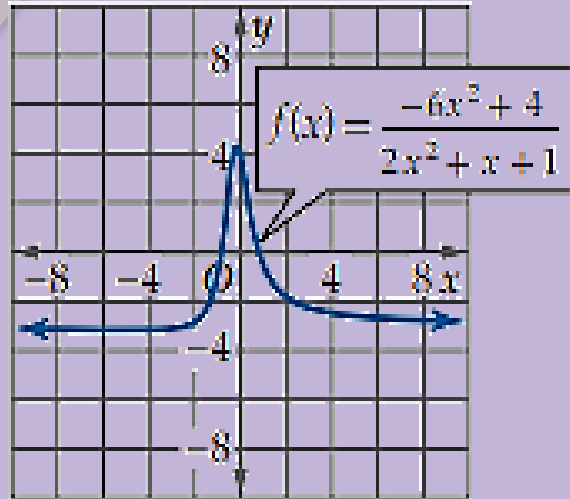
لاحظ أنه عندما $x \rightarrow -\infty$ ، فإن $f(x) \rightarrow 0$ وعندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $f(x) \rightarrow 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

منحنيات دوال تقترب
من قيمة محددة

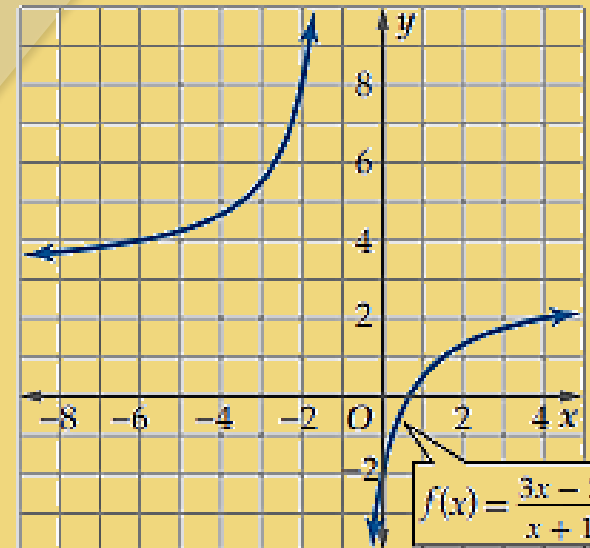
تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من فهمك

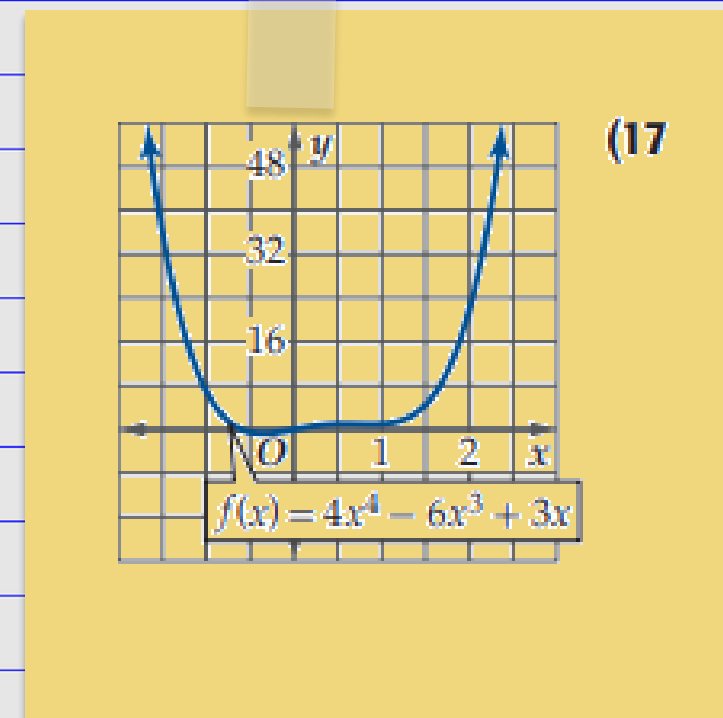
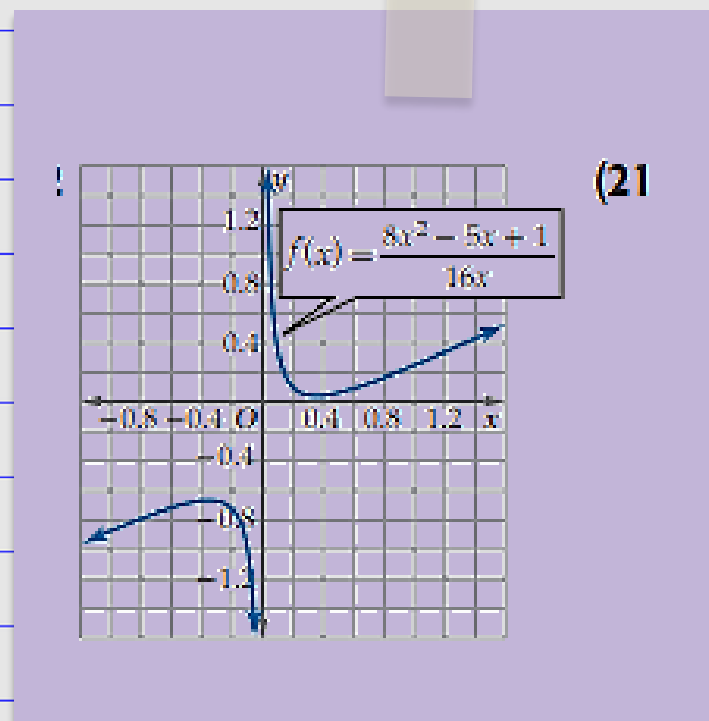
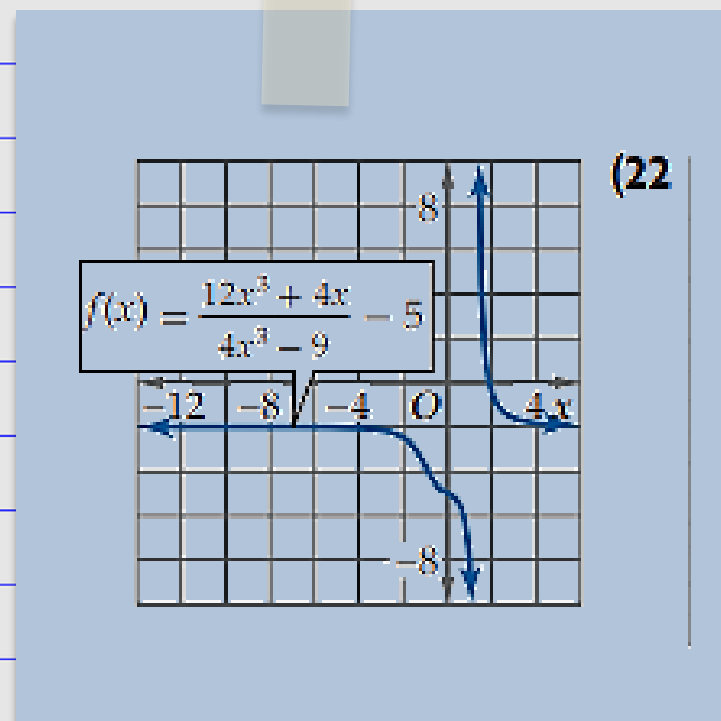
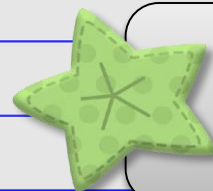


(7B)



(7A)

تدريب





تدريب

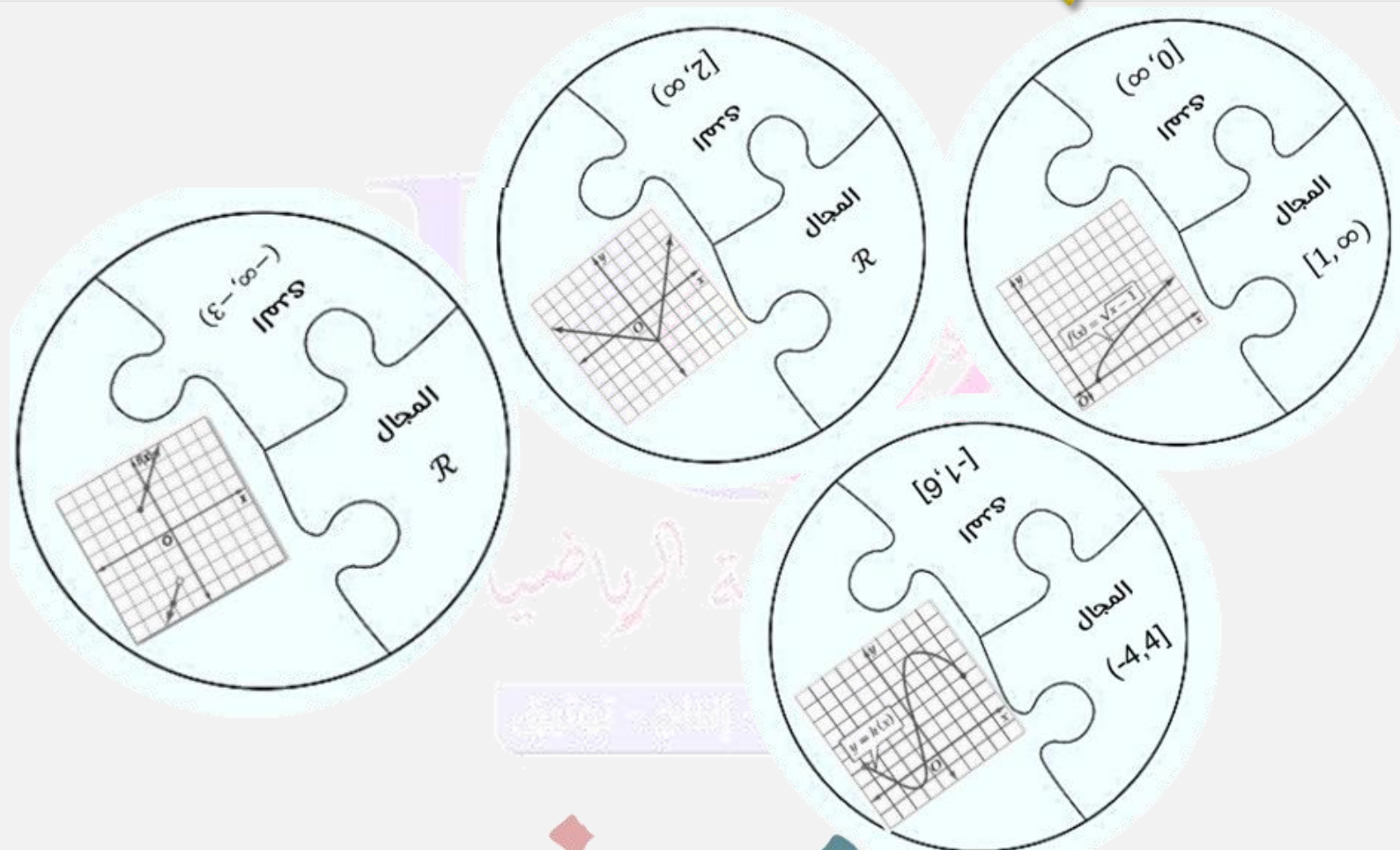
$$1 + 2 = 3$$

تبرير: بيّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

$$f(x) = \frac{x^5 + x^6}{x^5} \quad (39)$$

العب واستنتج

$$1 + 2 = 3$$



الرياضيات

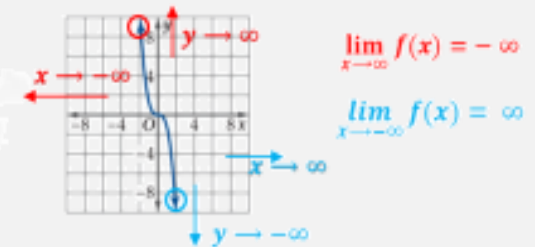
الرياضيات

تحليل الدالة بيانياً 2

هل الدالة لها دالة عكسية؟
إذا حققت اختبار الخط الأفقي



سلوك طرفي
التمثيل البياني



الدوال الزوجية والفردية

فردية

زوجية

إذا حققت العبارة: $f(-x) = -f(x)$

إذا حققت العبارة: $f(-x) = f(x)$

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشئي





القيم القصوى ومتوسط معدل التغير



فيما سبق : درست كيفية إيجاد قيم الدوال

والآن :

- استعمل التمثيل البياني لدالة لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ، ثابتة ، متناقصة ، زاحدد القيم العظمى والصغرى لها .
- أجد متوسط معدل التغير للدالة .

القيم القصوى
ومتوسط معدل
التغير

1-4 - توثيق

جدول التعلم



ماذا أعرف



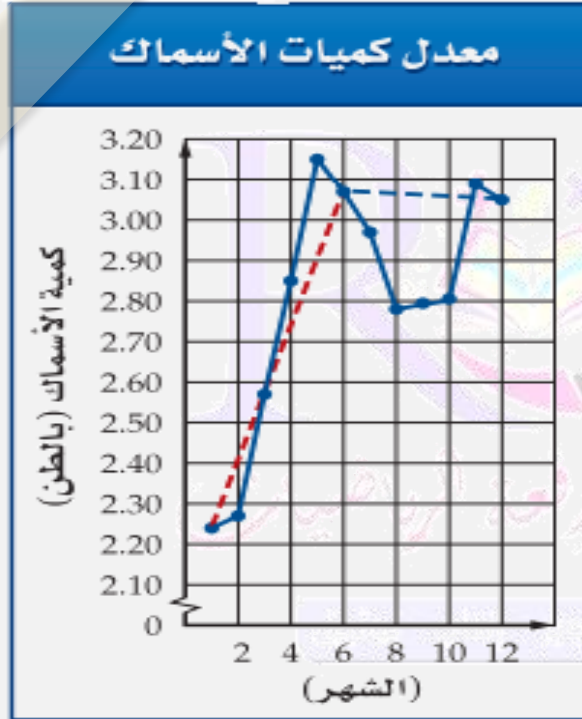
ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر



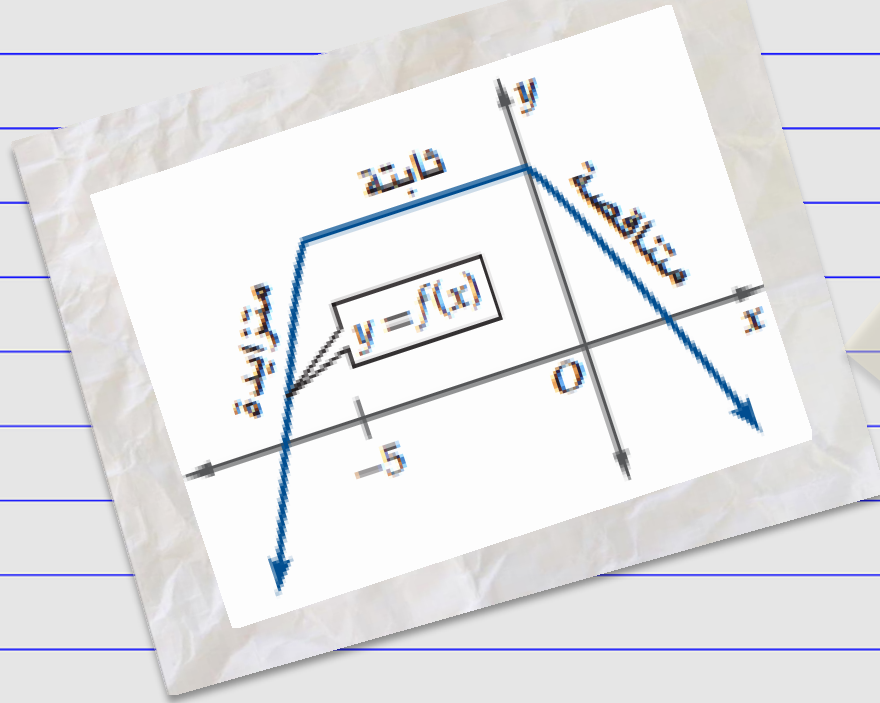
لماذا؟

يبين التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتاً تقريباً حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيراً تناقص قليلاً بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخططين المنقططين بالأحمر والأزرق أن معدل التغير في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تزايد أو تناقصت الدالة فيها أو تبقى ثابتة.



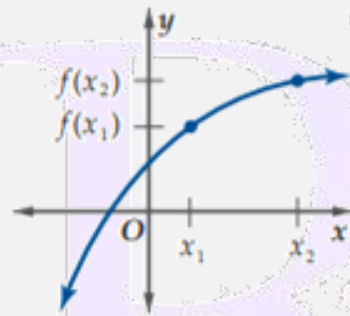
ففي الشكل المجاور، إذا تتبعنا منحنى الدالة $f(x)$ ، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $[-5, 0]$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

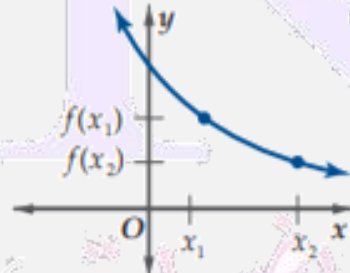
الدوال المتزايدة، المتناقصة، الثابتة



النموذج:

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

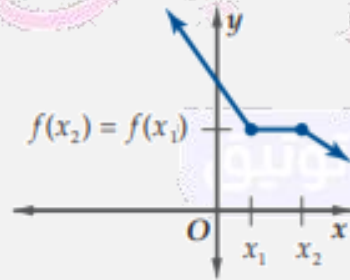
الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



النموذج:

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



النموذج:

التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

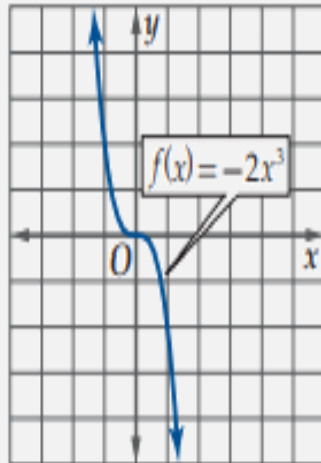
تنبيه!

فترات:

لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة، لذلك يستعمل القوسين () عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

مثال 1

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًا.



$$f(x) = -2x^3 \quad (a)$$

التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x ؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كون جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

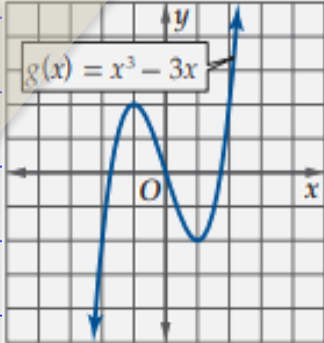
x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يوضح الجدول أنه عندما تزايد قيم x ، تنقص قيم $f(x)$ ؛ وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحديد التزايد
والتناقص

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 1



$$g(x) = x^3 - 3x \quad (b)$$

التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$ ، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ، ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$g(x)$	-1298	-702	-322	-110	-18	2

$:(-\infty, -1)$

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	-1.375	-2

$:(-1, 1)$

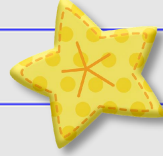
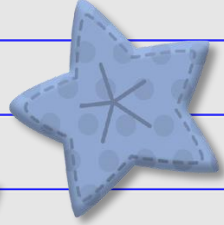
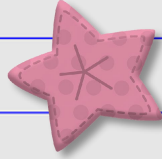
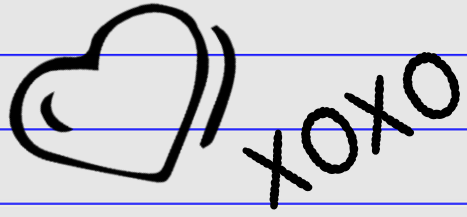
x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	-2	18	110	322	702	1298

$:(1, \infty)$

توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1 ، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1 ، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1 ، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

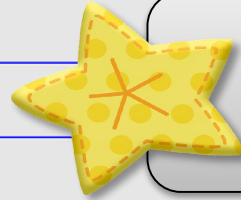
تحديد التزايد
والتناقص

تطوير - إنتاج - توثيق

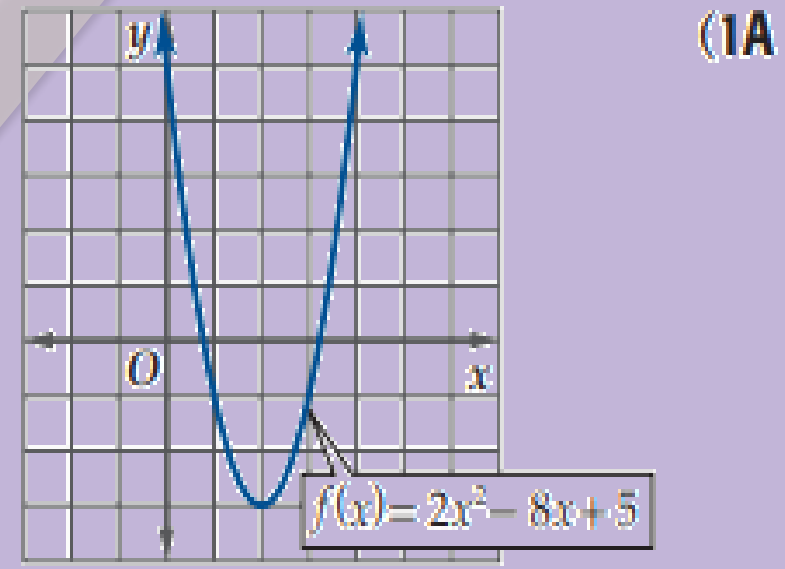
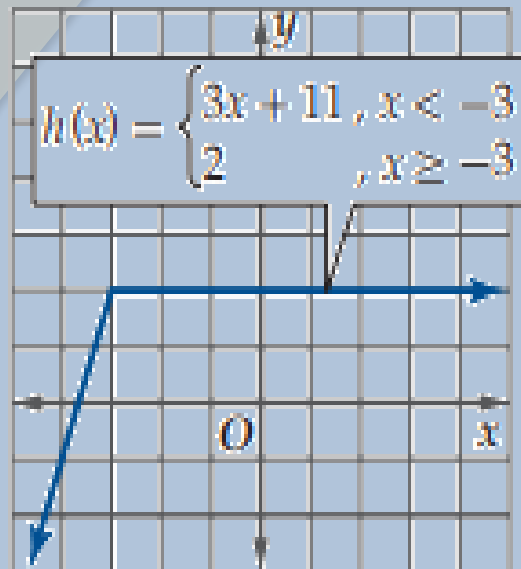


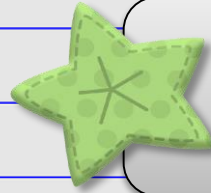
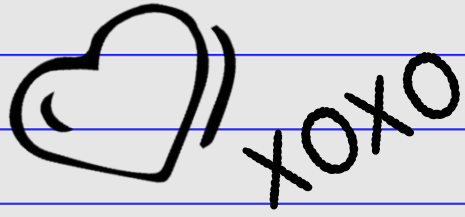
مقطع توضيحي





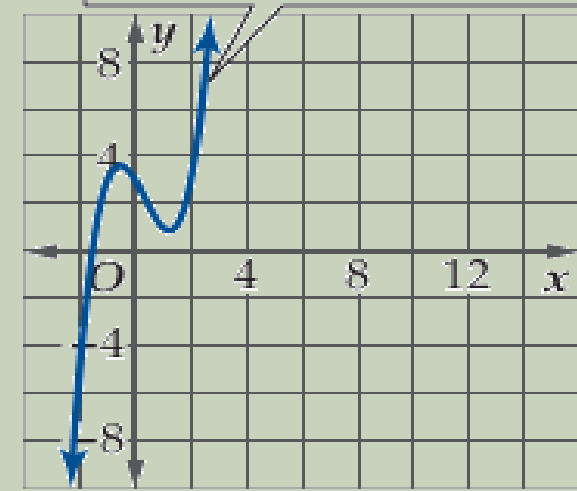
تحقق من فهمك





استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزز إجابتك عدديًا: (مثال 1)

(1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$



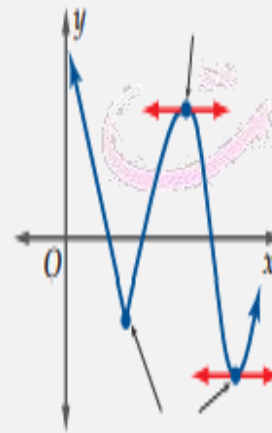
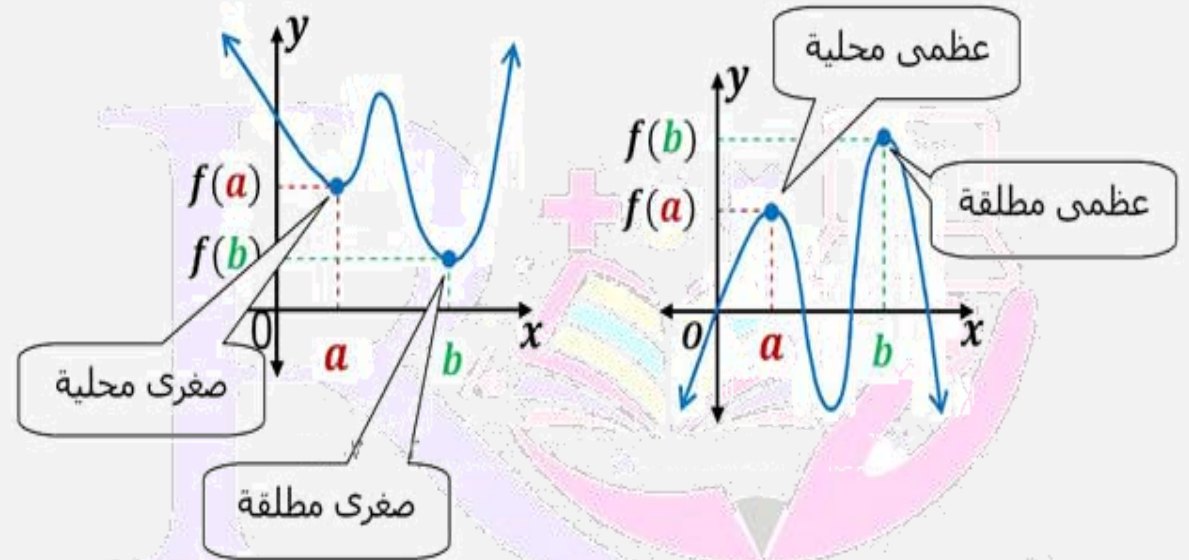
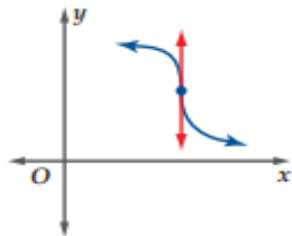
إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية،
يُستعمل مصطلح قيمة
قصوى محلية بدلاً من قيمة
عظمى محلية أو صغرى
محلية.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:

إذا كان ميل المماس لمنحنى
الدالة عند النقطة الحرجة
غير معرف كما في الشكل
أدناه، فإنه لا توجد للدالة
عند هذه النقطة قيمة
عظمى أو صغرى.



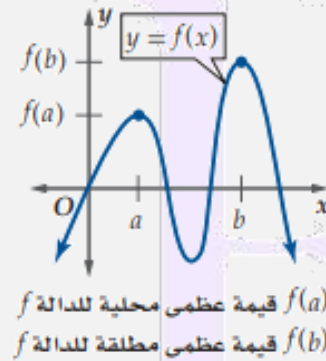
لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكون قمة أو قاعاً في
منحنى الدالة وتُسمى **نقاطاً حرجية**، ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما
أفقياً أو عمودياً (أي أن ميله صفر أو غير معرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل
ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (القيم القصوى).

مفهوم أساسي

القيم القصوى المحلية والمطلقة

النموذج:



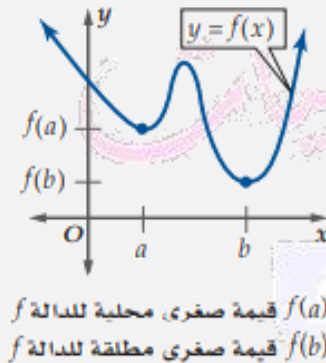
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُميت قيمة عظمى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُميت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



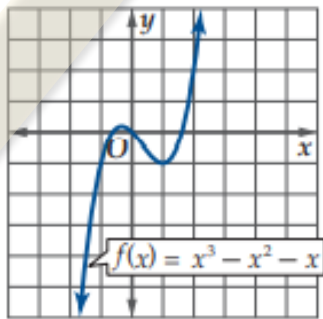
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُميت قيمة صغرى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُميت قيمة صغرى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

مثال 2



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.

التحليل بيانيًا:

يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$ ، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ ، ومقدارها -1. لاحظ كذلك أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًا:

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثم اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًا، والأخرى صغيرة جدًا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

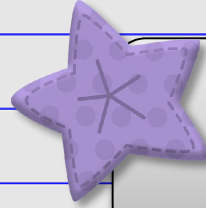
بما أن $f(-0.5) > f(0)$ و $f(-0.5) > f(-1)$ ، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(0.5)$ ، $f(1) < f(1.5)$ ، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ وبما أن $f(1) = -1$ ، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولًا.

وبما أن $f(100) > f(-0.5)$ ، $f(-100) < f(1)$ ، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

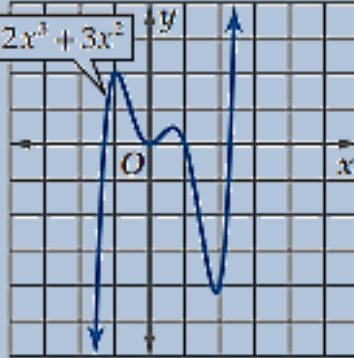
تقدير القيم القصوى
للدالة وتحديدها

تطوير - إنتاج - توثيق



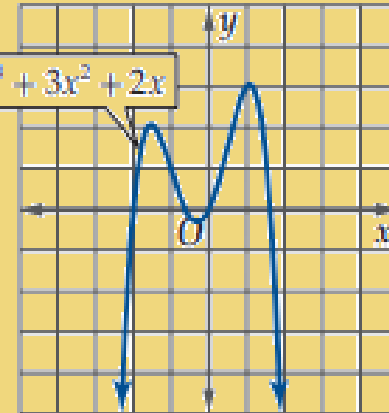
تفكر من نفسك

$$g(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2$$

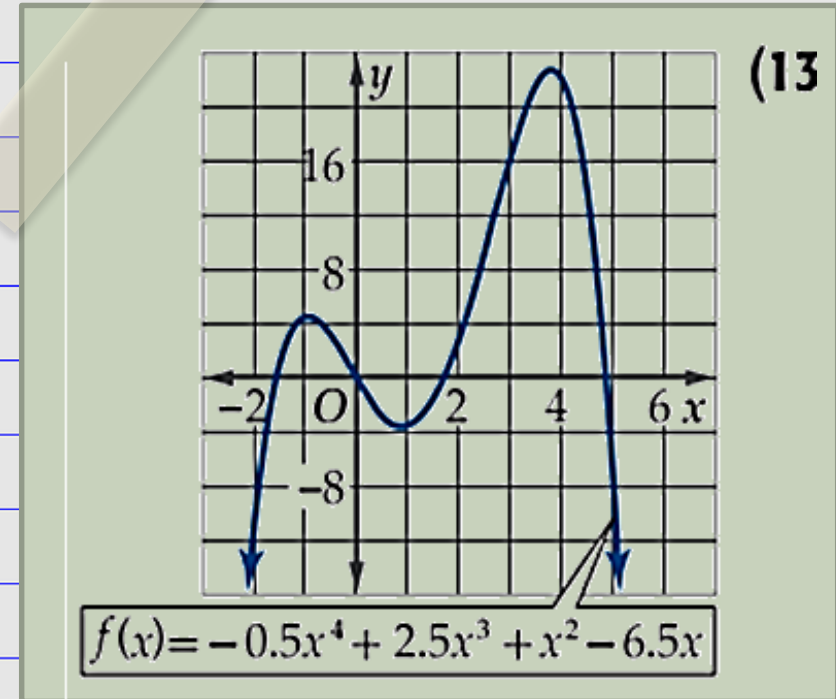


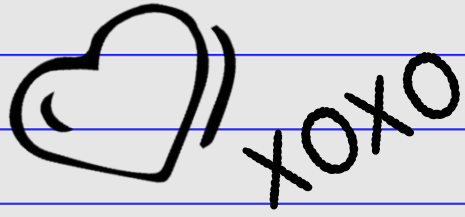
(2B)

$$f(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x$$



(2A)





تطوير



تطوير - إنتاج - توثيق

مسألة مفتوحة : مثل بياناً الدالة $f(x)$:

(42) متصلة

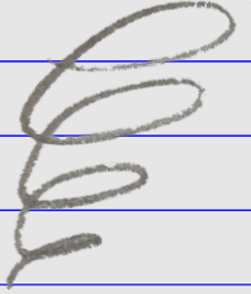
متزايدة على $(-\infty, 4)$

ثابتة على $[4, 8]$

متناقصة على $(8, \infty)$

$$f(5) = 3$$

مثال 3



الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

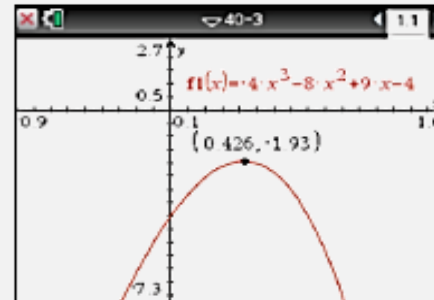
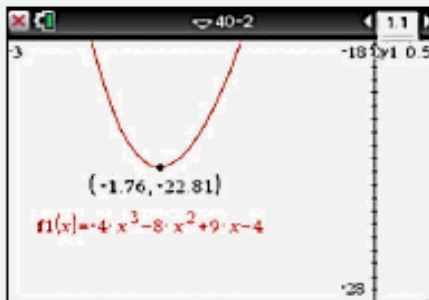


مثّل الدالة بيانيًا، واختَر التدرّيج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

بالضغط على المفاتيح: ، ثم اكتب الدالة واضغط

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$ ، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$ ، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اضغط على مفتاح ، ثم على **6: تحليل الرسم البياني**، واختَر منها **3: القيمة العظمى** أو **2: القيمة الصغرى**، ثم مرّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x = -1.76$ ، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$



استعمال الحاسبة
البيانية لتقدير القيم
القصوى

تطوير - إنتاج - توثيق

تفقق من فهمك

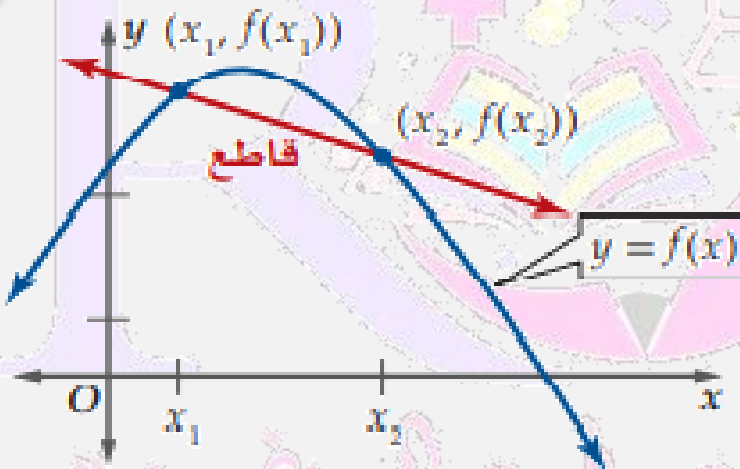
4 صناعة: يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5 \quad (3B)$$

$$h(x) = 7 - 5x - 6x^2 \quad (3A)$$

مفهوم أساسي

متوسط معدل التغير



التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، ويرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

تطوير - إنتاج - توثيق



مثال 5

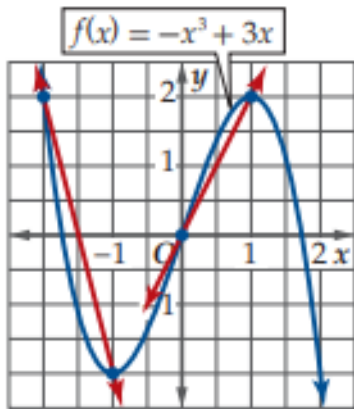
أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

(a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\begin{aligned} \text{عوض } -1 \text{ مكان } x_2, -2 \text{ مكان } x_1 & \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} \\ & = \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)} \\ & = \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4 \end{aligned}$$

بسط



الشكل 1.4.1

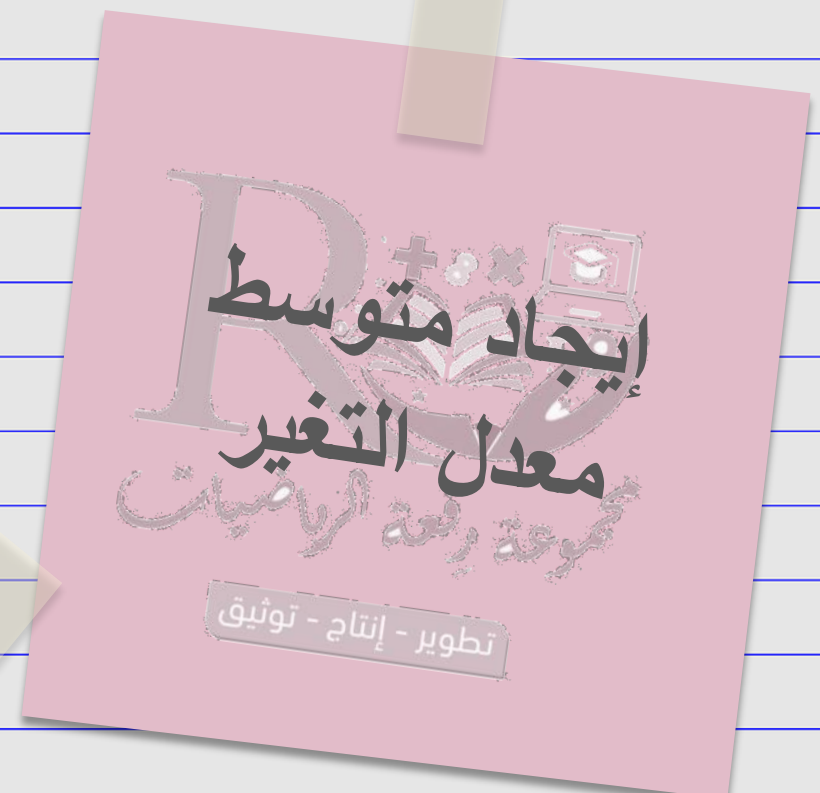
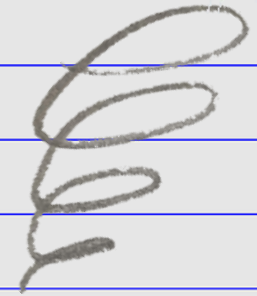
أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4 .

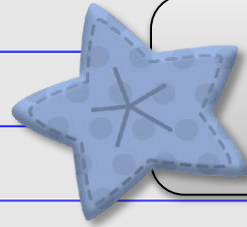
(b) $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{عوض } 1 \text{ مكان } x_2, 0 \text{ مكان } x_1 & \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \\ & = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2 \end{aligned}$$

عوض $f(0)$, $f(1)$ وبسط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2 .





نحقق من نفسك

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3] \quad (5B)$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3] \quad (5A)$$

مثال 6

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

(a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\begin{aligned} \text{عوض 2 مكان } t_2, 0 \text{ مكان } t_1 & \quad \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0} \\ & = \frac{64 - 0}{2} = 32 \end{aligned}$$

عوض $d(0)$ ، $d(2)$ ، وبسط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s. وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s.

(b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

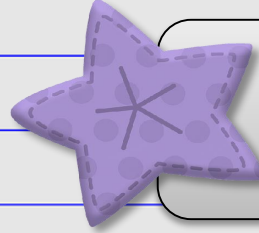
$$\begin{aligned} \text{عوض 4 مكان } t_2, 2 \text{ مكان } t_1 & \quad \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2} \\ & = \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec} \end{aligned}$$

عوض $d(2)$ ، $d(4)$ ، وبسط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيةين التاليتين هو 96 ft/s.

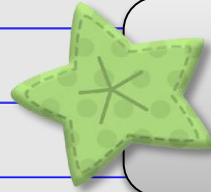
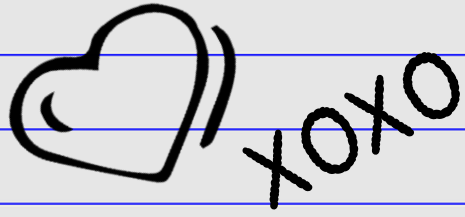
إيجاد السرعة
المتوسطة
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



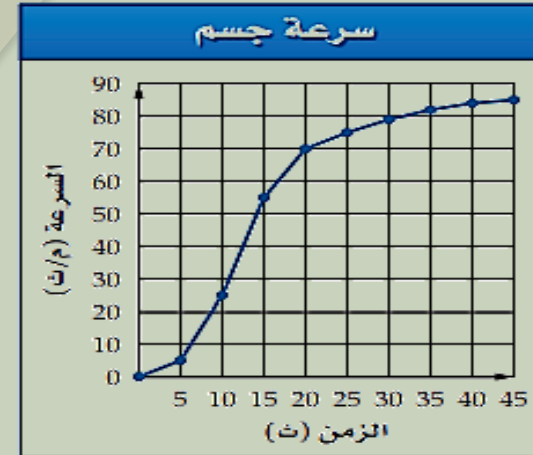
نتفق من فهمك

(6) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.



تدريب

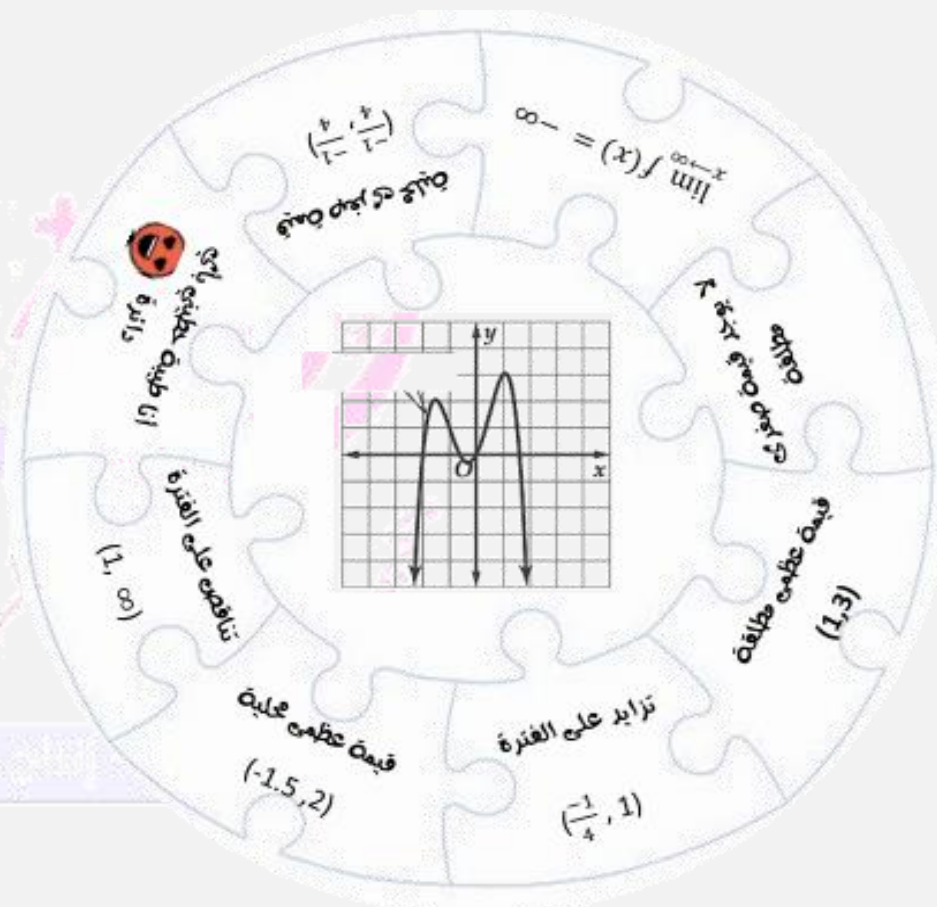
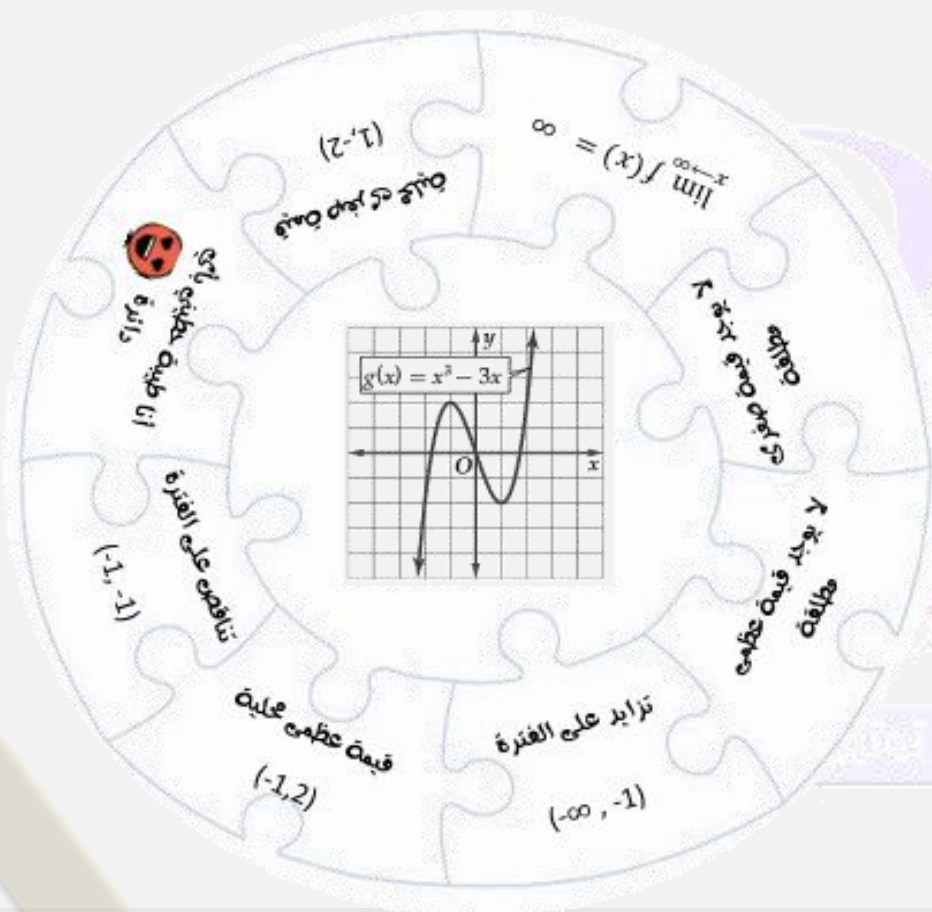
26) استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلّ من الفترات $[5, 15]$, $[15, 20]$, $[25, 45]$.

اللعب واستنتج

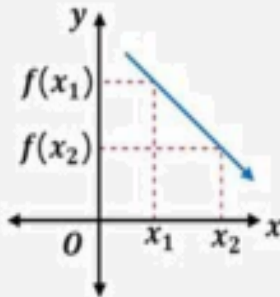
$$1 + 2 = 3$$



اطراد الدالة

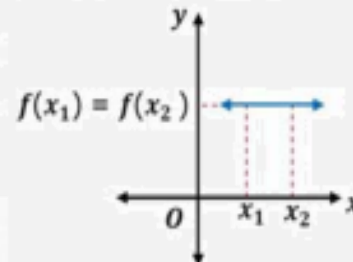
متناقصة

كلما زادت قيم x تنقص قيم $f(x)$
(كلما اتجهنا لليمين ينخفض المنحنى)



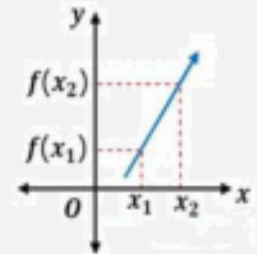
ثابتة

كلما زادت قيم x لا تتغير قيم $f(x)$
(كلما اتجهنا لليمين لا نخفض المنحنى ولا يرتفع)



متزايدة

كلما زادت قيم x تزداد قيم $f(x)$
(كلما اتجهنا لليمين يرتفع المنحنى)



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر





الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية

المفردات:

الدالة الرئيسة (الأم)
parent function
الدالة الثابتة
constant function
الدالة المحايدة
identity function
الدالة التربيعية
quadratic function
الدالة التكعيبية
cubic function
دالة الجذر التربيعي
square root function
دالة المقلوب
reciprocal function
دالة القيمة المطلقة
absolute value function
الدالة الدرجية
step function
دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function
التحويل الهندسي
transformation
الإزاحة (الانسحاب)
translation
الانعكاس
reflection
التمدد
dilation

فيما سبق :

درست التمثيلات البيانية
للدوال وتحليلها

والآن :

- أقوم بتعيين الدوال الرئيسية (الأم)
وأصفها ، وأمثلها بيانيا .
- أقوم بتعيين التحويلات الهندسية للدوال
الرئيسية ، وأمثلها بيانيا .

الدوال الرئيسية
(الأم) والتحويلات
الهندسية

تطوير - إنتاج - توثيق
1-5

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف

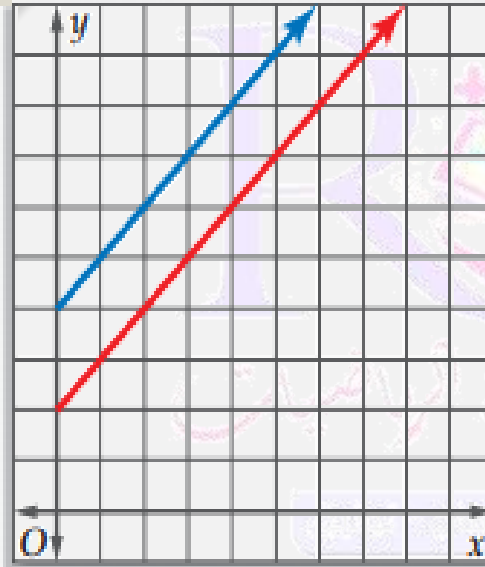


ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر

لماذا؟



استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. وبيّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعدها (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

الدوال الرئيسية (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرف الدالة الرئيسية (الأم) على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

أنواع الدوال الرئيسية الأهم

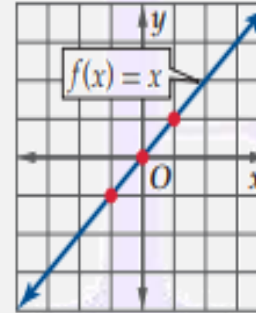
تطوير - إنتاج - توثيق



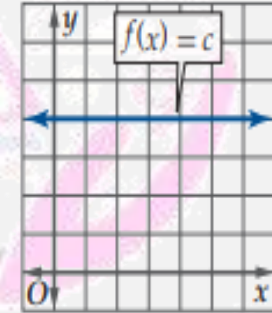
الدوال الرئيسية (الأهم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

مفهوم أساسي

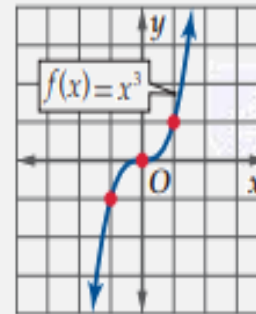
تمر الدالة المحايدة $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a) .



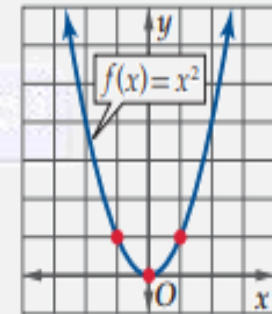
تكتب الدالة الثابتة على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثلُ بمستقيم أفقي.



الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



يأخذ منحنى الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



أنواع الدوال الرئيسية الأهم

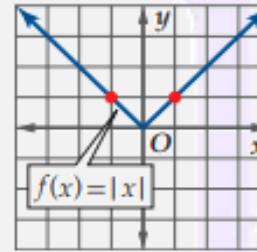
تطوير - إنتاج - توثيق



مفهوم أساسي

دالة القيمة المطلقة الرئيسية (الأهم)

النموذج



التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$ ، ويأخذ منحناها شكل الحرف V، وتعرّف على النحو الآتي:

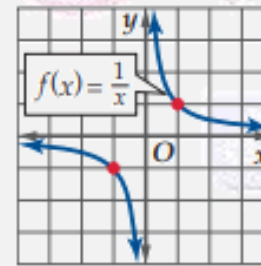
$$f(x) = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$

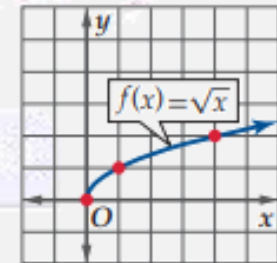
مفهوم أساسي

الدالة الرئيسية (الأهم) لكل من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب دالة المقلوب على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ ، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



تكتب دالة الجذر التربيعي على الصورة $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.



أنواع الدوال الرئيسية الأهم

تطوير - إنتاج - توثيق



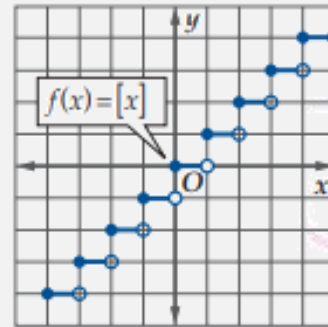
مفهوم أساسي

دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$ ، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $[-4] = -4, [-1.5] = -2, [\frac{1}{3}] = 0$

النموذج



منطوق تو ضيعي

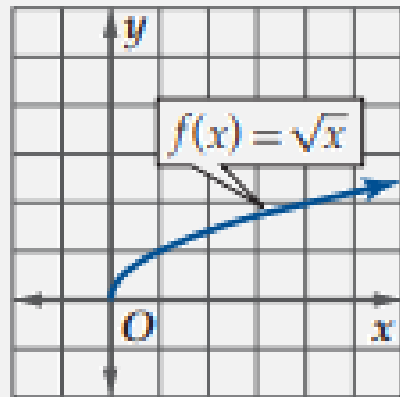


مثال 1

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

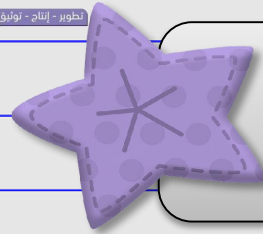
خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$ ، ومداه $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

وصف خصائص
الدالة الرئيسة
(الأم)
مجموعة روعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

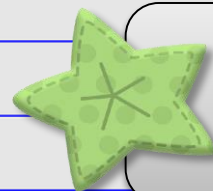


تحقق من نفسك

$$1 + 2 = 3$$

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

$$f(x) = |x| \quad (1)$$



تدريب

$$f(x) = x \quad (6)$$

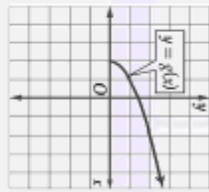
$$f(x) = x^2 \quad (4)$$

$$f(x) = [x] \quad (1)$$

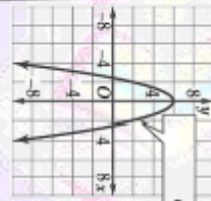
اللعب واستنتج

$$1 + 2 = 3$$

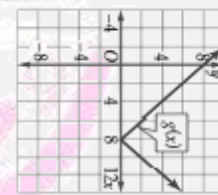
$$\sqrt{x+2}$$



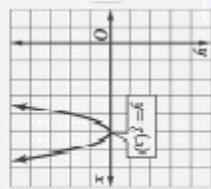
$$x^2 + 6$$



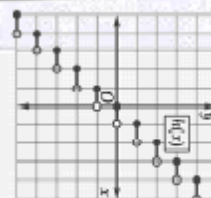
$$|x - 8|$$



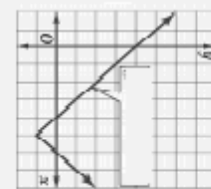
$$-(x - 5)^2$$



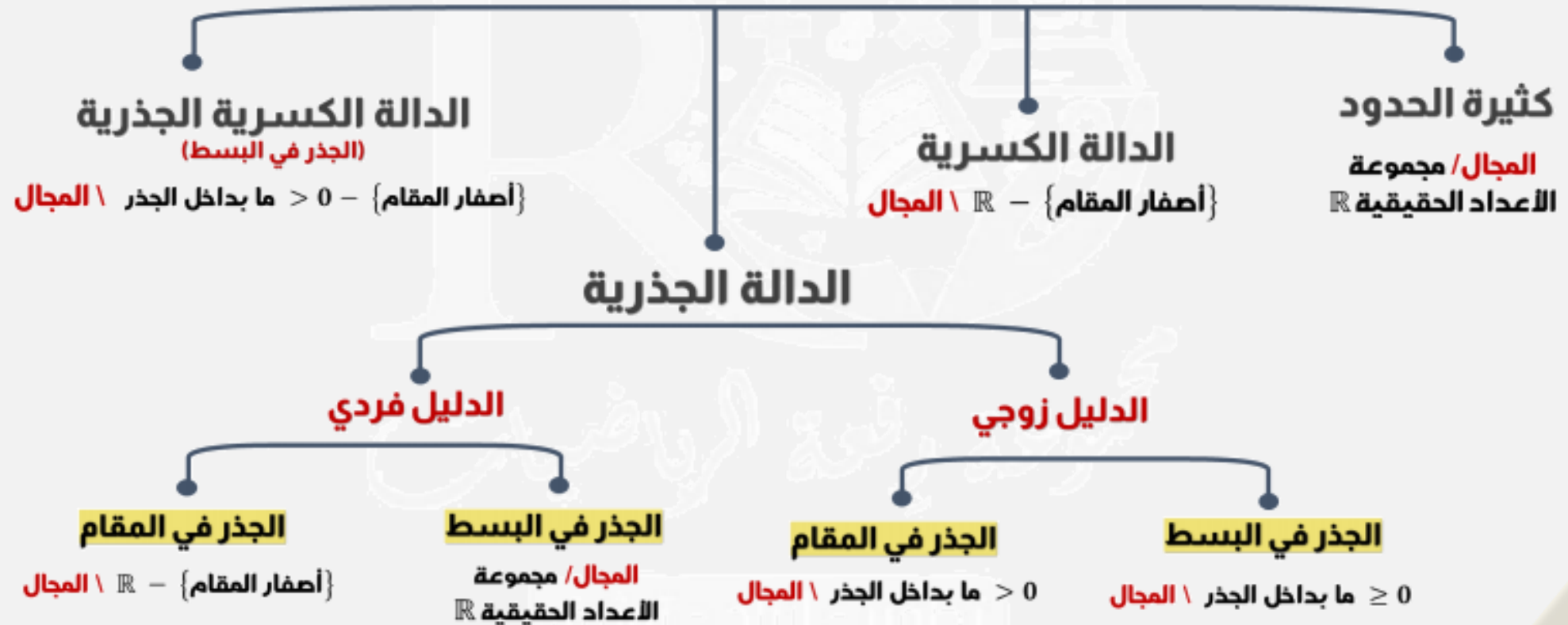
$$[x]$$



$$|x - 5| - 1$$



تحديد المجال جبرياً



التحويلات الهندسية

غير قياسية

تغير شكل المنحنى

القيمة المطلقة

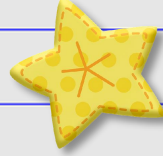
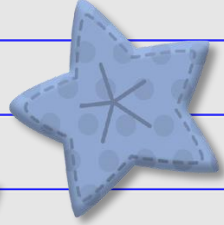
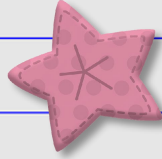
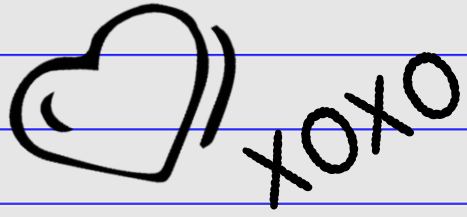
التمدد

قياسية

تغير موقع المنحنى فقط
(لا تغير شكله أو أبعاده)

الانعكاس

الانسحاب



مقطع توضيحي

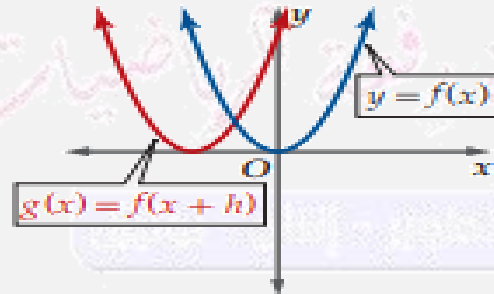
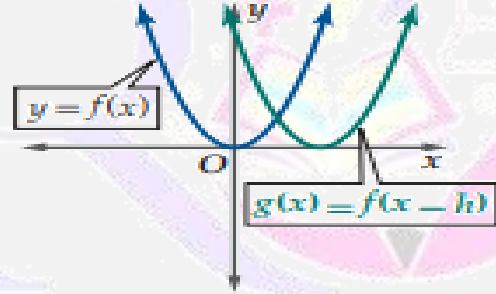


مفهوم أساسي

الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

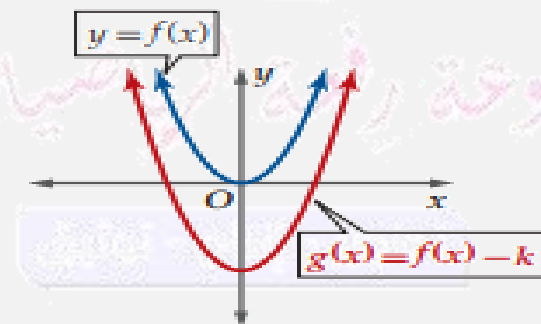
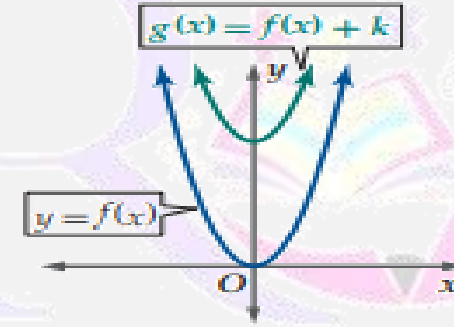
الانسحاب الأفقي

- منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاخًا:
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
 - $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



الانسحاب الرأسي

- منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاخًا:
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
 - $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



مثال 2

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

(a) $g(x) = |x| + 4$

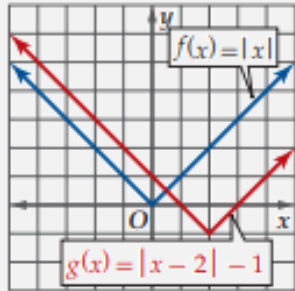
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$ ، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

(b) $g(x) = |x + 3|$

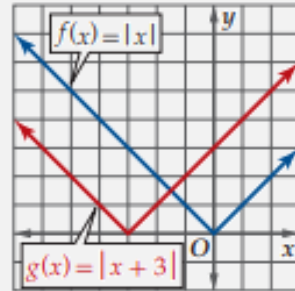
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$ ، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

(c) $g(x) = |x - 2| - 1$

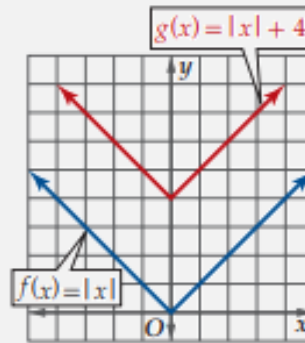
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$ ، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.4



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.2

انسحاب منحنى
الدالة

مجموعة رفعة الرياضيات

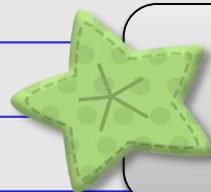
تطوير - إنتاج - توثيق

تفقق من نفسك

$$h(x) = (x + 2)^3 + 4 \quad (2C)$$

$$h(x) = 8 + x^3 \quad (2B)$$

$$h(x) = x^3 - 5 \quad (2A)$$



تدريبات

$$g(x) = \frac{1}{x} + 4 \quad (9)$$

$$g(x) = \sqrt{x-7} + 3 \quad (8)$$

$$g(x) = \sqrt{x-4} \quad (7)$$



تدريب

$$1 + 2 = 3$$

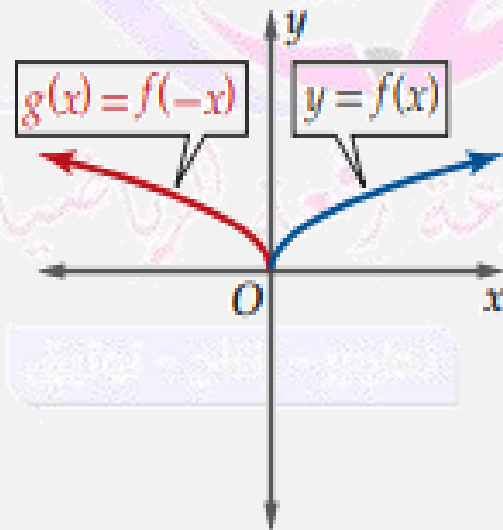
(52) **اكتشف الخطأ:** وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = \lfloor x + 4 \rfloor$. فقال محمد أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار وقال عبد الله إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى الأعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

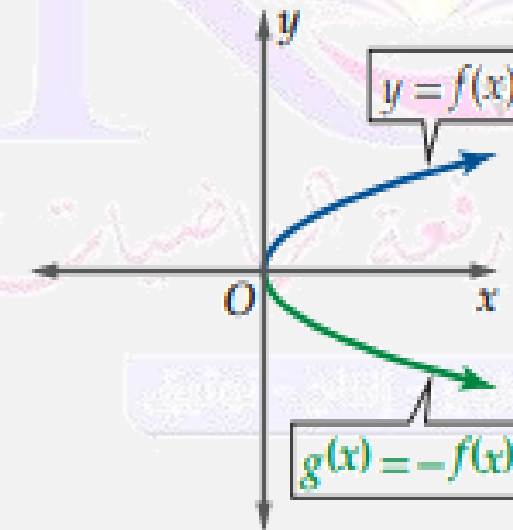
الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس
لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .

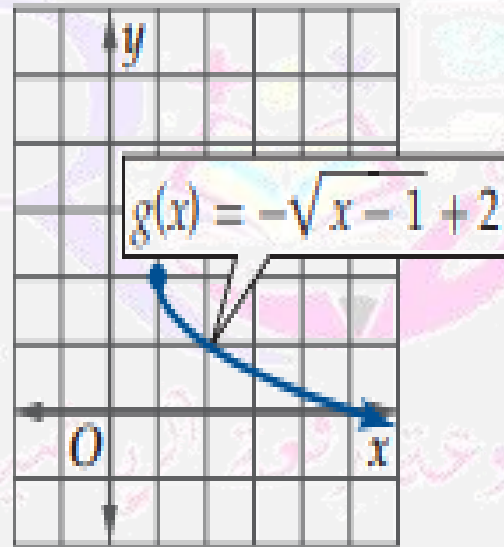


الانعكاس حول المحور x

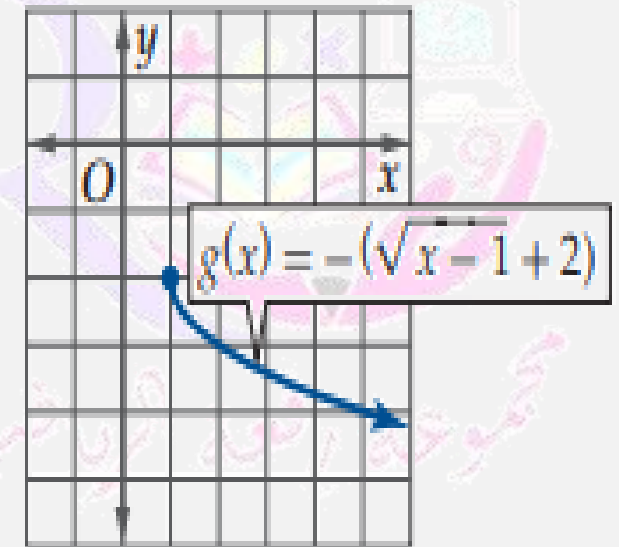
منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى
الدالة $f(x)$ حول المحور x .



كن دقيقاً عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلاً منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.



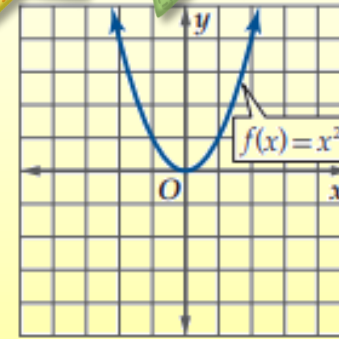
انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.



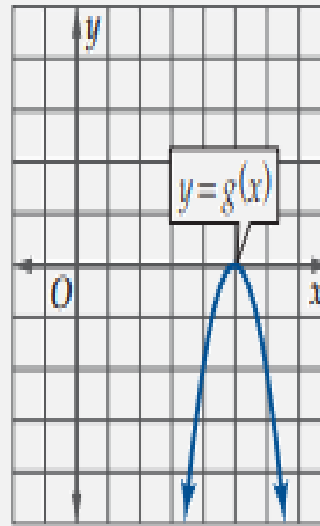
انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .

مثال 3

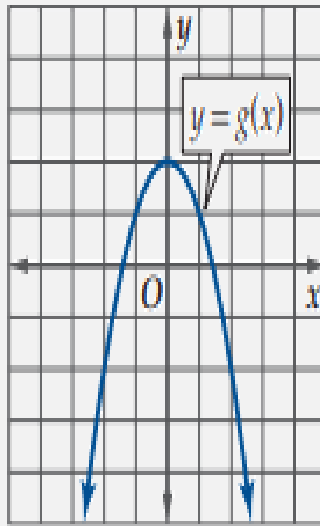
صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



الشكل 1.5.5



(a)



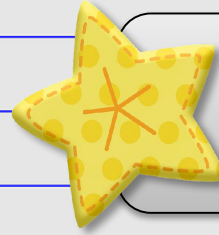
(b)

منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x ، أي أن $g(x) = -(x - 5)^2$.

منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

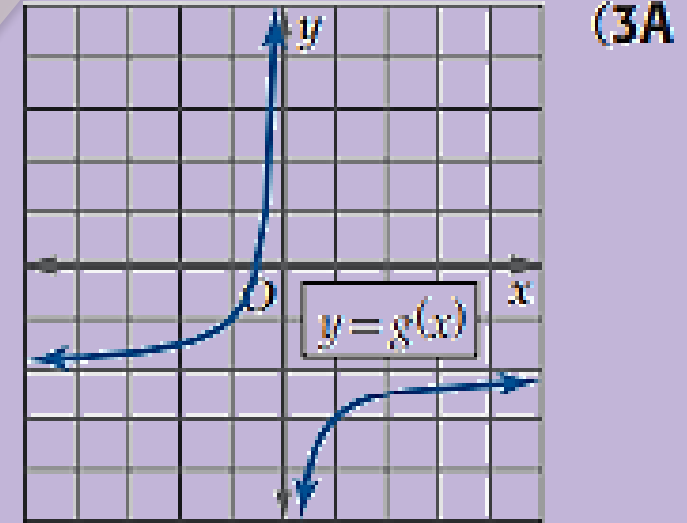
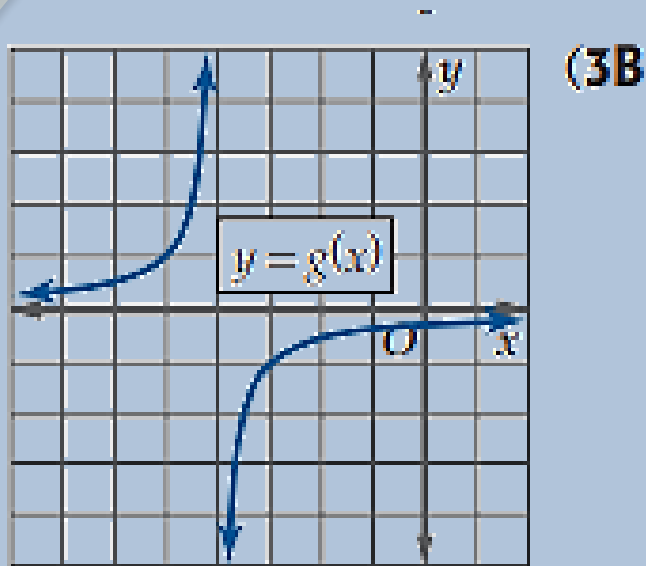
كتابة معادلات
التحويل

تطوير - إنتاج - توثيق



تفكر من تفكير

صف العلاقة بين منحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كل من السؤالين الآتيين :



$$1 + 2 = 3$$



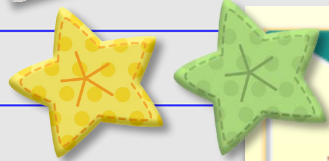
تدريب

اكتب الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين ومثلها في مستوى إحداثي واحد. (مثال 4)

$$g(x) = 3|x| - 4 \quad (15)$$

اكتب الدالة الناتجة من إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسية (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

(32) $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى الأعلى، و 7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معاملته 2.



إرشادات للدراسة

التمدد:

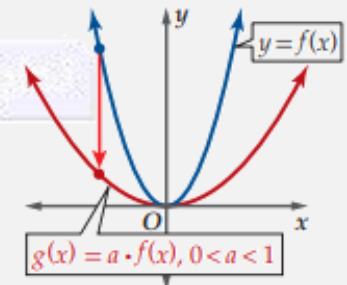
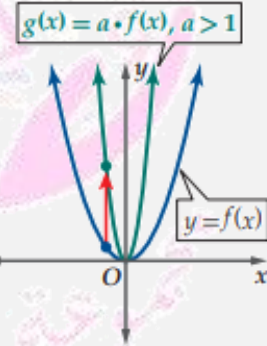
يظهر التمددان متشابهين أحياناً مثل التوسع الرأسي والتضييق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طُبّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

مفهوم أساسي التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً، فإن منحنى الدالة $g(x) = a f(x)$ هو:

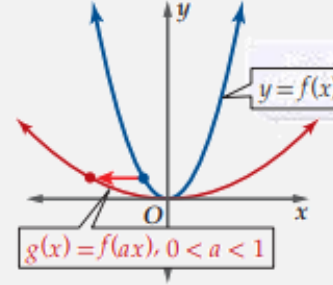
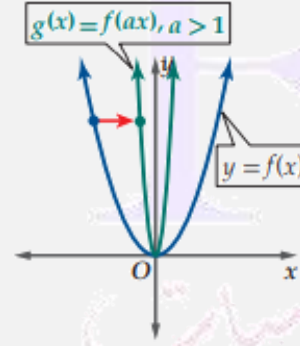
- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$.



التمدد الأفقي

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

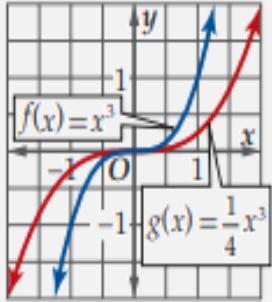
- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$.



مثال 4

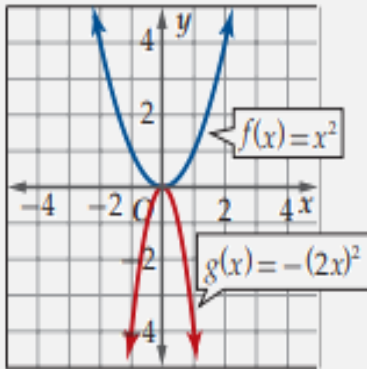
عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلها بيانًا في المستوى الإحداثي.

(a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$ ؛ لأن
 $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ و $0 < \frac{1}{4} < 1$.

(b) $g(x) = -(2x)^2$

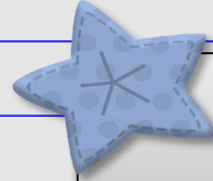


منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق أفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ أولاً؛ لأن
 $f(x) = x^2, f(2x) = (2x)^2$ و $1 < 2$ ، ثم انعكاس حول
المحور x ؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$

وصف التحويلات
الهندسية وتمثيلها

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



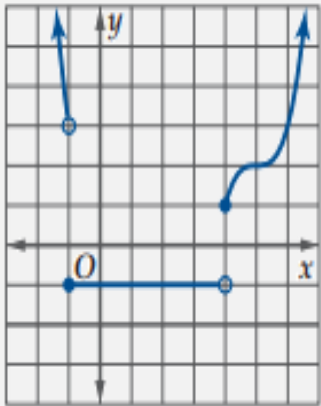
تفقد من نفسك

$$g(x) = \frac{5}{x} + 3 \quad (4B)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} [x] \quad (4A)$$

مثال 5

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 4 \\ (x-5)^3 + 2, & x \geq 4 \end{cases}$$



في الفترة $(-\infty, -1)$ ، أمثل الدالة $y = 3x^2$.

في الفترة $[-1, 4)$ ، أمثل الدالة الثابتة $y = -1$.

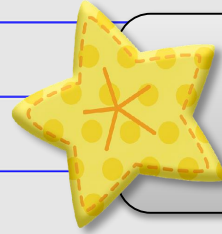
في الفترة $[4, \infty)$ أمثل الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطة عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.

تمثيل الدوال متعددة
التعريف بيانيا

مجموعة رعدة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

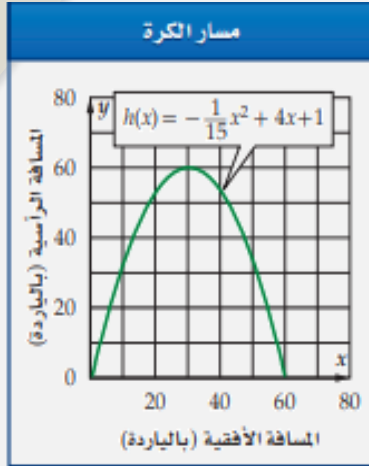


نتحقق من فهمك

$$h(x) = \begin{cases} (x+6)^2, & x < -5 \\ 7, & -5 \leq x \leq 2 \\ |4-x|, & x > 2 \end{cases} \quad (5B)$$

$$g(x) = \begin{cases} x-5, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{2}{x}, & x > 2 \end{cases} \quad (5A)$$

مثال 6



كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.

أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x - h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

$$h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1 \quad \text{الدالة الأصلية}$$

$$-\frac{1}{15}x^2 + 4x \quad \text{حلل} = -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$$

$$\text{أكمل المربع} = -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$$

$$\text{اكتب } x^2 - 60x + 900 \text{ على صورة مربع كامل ثم بسط} = -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61$$

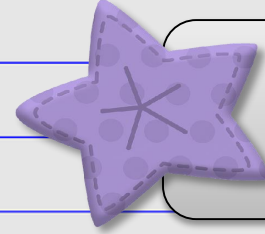
أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

التحويلات الهندسية
على الدوال

مجموعة رعدة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

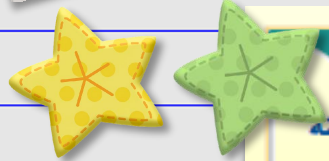
$$1 + 2 = 3$$



تفقق من فهمك

- (6) كهرباء: إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.
- (A) صنف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.
- (B) اكتب دالة تصنف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

التحويلات مع دوال القيمة المطلقة



إرشاد تقني

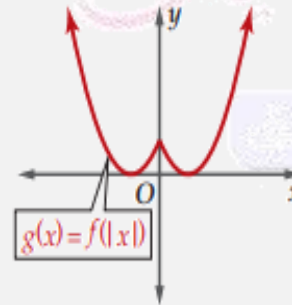
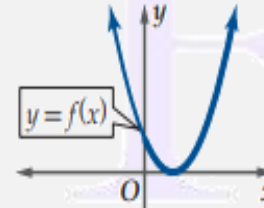
تحويلات القيمة المطلقة
يمكنك التحقق من أثر
التحويل الهندسي على
منحنى القيمة المطلقة
باستعمال الحاسبة البيانية.
ويمكنك أيضًا تمثيل كلا
الدالتين في المستوى
الإحداثي نفسه .

التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

مفهوم أساسي

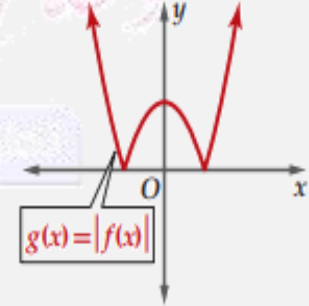
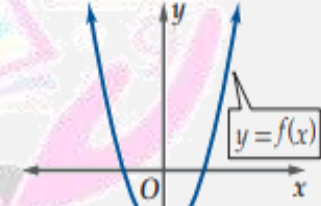
$$g(x) = f(|x|)$$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .



$$g(x) = |f(x)|$$

يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x .



مثال 7

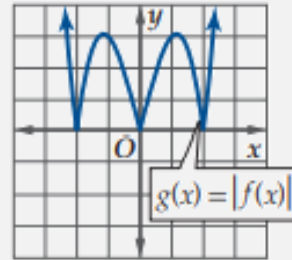
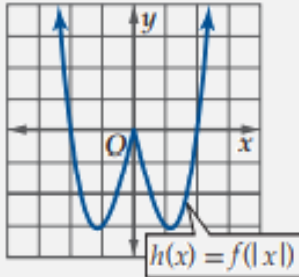
استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

(b) $h(x) = f(|x|)$

(a) $g(x) = |f(x)|$

ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y .

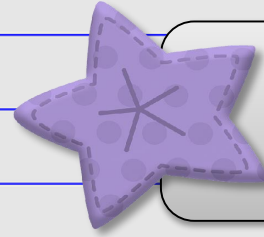
يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$ ؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



وصف التحويلات
الهندسية وتمثيلها

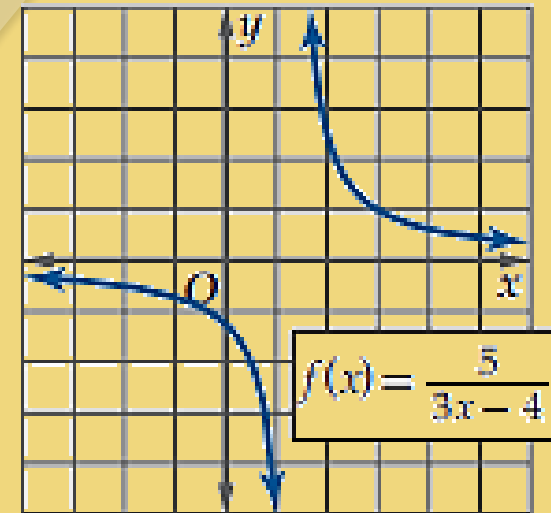
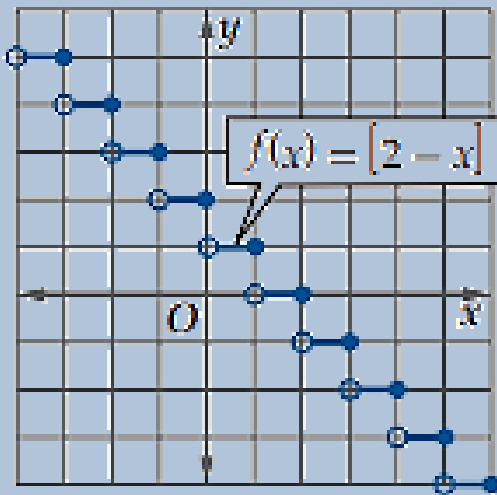
مجموعة رفعة الرياضيات

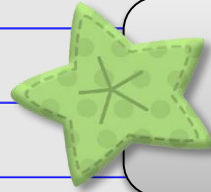
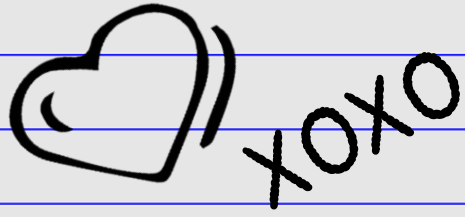
تطوير - إنتاج - توثيق



نتفق من فهمنا

استعمل منحني الدالة $f(x)$ في كل من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كل من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًا:





(67) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2 + 8}{2}$ ؟

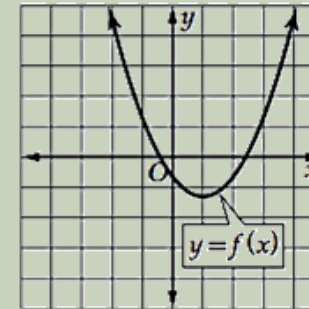
$\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$ A

$\{y \mid y \geq 4\}$ B

$\{y \mid y \geq 0\}$ C

$\{y \mid y \leq 0\}$ D

(66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟



$(0, \infty)$ A

$(-\infty, 1)$ B

$(-1, \infty)$ C

$(1, \infty)$ D

اللعب واستمتع

$$1 + 2 = 3$$

ما مجال الدالة $f(x) = \frac{-7}{x-5}$	كفووو	ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{3x-15}$
بدرج وة	هانت ما بقي شي	ما مجال الدالة $f(x) = x^3 - 9$
ما مجال الدالة $f(x) = \frac{8x+12}{x^2+5x+4}$	من جرك وصلنا	



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشئي

الواجب المنزلي





العمليات على الدوال وتركيب دالتين

The title is written in a large, stylized, dark red font with white stars. To the left of the text are three stars: a large purple one with a dashed outline and a smaller pink one below it. To the right is a yellow star with a dashed outline. In the background, there is a large, faint watermark logo featuring a book and the text 'مجموعة رفعة الرياضيات'.

المفردات:

تركيب الدالتين
composition of functions



تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق:
درست إيجاد قيم الدوال

والآن:

- أجري العمليات على الدول
- اجد تركيب الدوال



تطوير - إنتاج - توثيق

العمليات على
الدوال وتركيب
الدالتين

1-6 - توثيق

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم أكثر



لماذا؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432 هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتاباً.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثل السنة منذ 1425 هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

$$1 + 2 = 3$$

مفهوم أساسي العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطعان مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

$$\text{الجمع: } (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{الضرب: } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\text{الطرح: } (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{القسمة: } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g ، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مقطع توضيحي



مثال 1

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = 3x - 5$ فأوجد كلاً من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

(b) $(f - h)(x)$

$$\begin{aligned}(f - h)(x) &= f(x) - h(x) \\ &= (x^2 + 4x) - (3x - 5) \\ &= x^2 + 4x - 3x + 5 \\ &= x^2 + x + 5\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$ ،
لذا فإن مجال $(f - h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

(d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\begin{aligned}\left(\frac{h}{f}\right)(x) &= \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x - 5}{x^2 + 4x}\end{aligned}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$
ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة
 $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو
 $\{x \mid x \neq 0, x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$.

(a) $(f + g)(x)$

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x^2 + 4x) + (\sqrt{x+2}) \\ &= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}\end{aligned}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$ ، ومجال الدالة g
هو $[-2, \infty)$ ؛ لذا فإن مجال الدالة $(f + g)$
هو تقاطع مجالي f, g ، وهو $[-2, \infty)$.

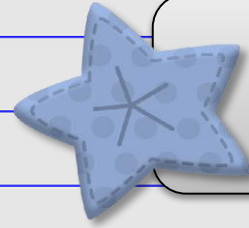
(c) $(f \cdot h)(x)$

$$\begin{aligned}(f \cdot h)(x) &= f(x) \cdot h(x) \\ &= (x^2 + 4x)(3x - 5) \\ &= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x \\ &= 3x^3 + 7x^2 - 20x\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$ ؛
لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

العمليات على
الدوال

تطوير - إنتاج - توثيق



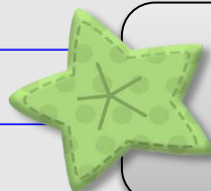
نتحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

$$f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x} \quad (1B)$$

$$f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad (1A)$$

$$1 + 2 = 3$$



تدريب

أوجد $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال

$$f(x) = x^2 + x \quad (4)$$

$$g(x) = 9x$$



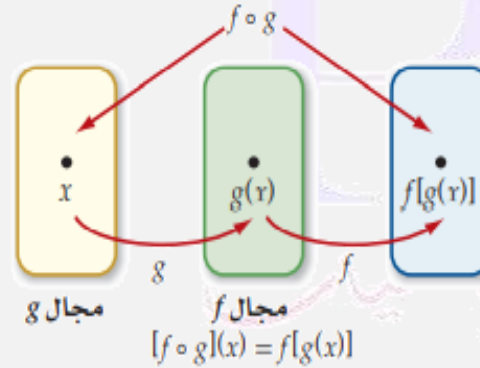
تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x - 3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$ ، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

مفهوم أساسي تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f .



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g ، حيث تُطبَّق الدالة g أولاً ثم الدالة f .

إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال
وتركيب دالتين،

يختلف تركيب الدوال عن
العمليات عليها، حيث يتم
دمج الدالتين معاً، وليس
مجرد إجراء عمليات مثل
الجمع أو الطرح أو الضرب
أو القسمة.

مثال 2

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 4$, فأوجد كلاً مما يأتي:

(a) $[f \circ g](x)$

تعريف $f \circ g$

$$g(x) = x - 4$$

عوّض $(x - 4)$ بدلاً من x في $f(x)$

بسّط

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= f(x - 4)$$

$$= (x - 4)^2 + 1$$

$$= x^2 - 8x + 16 + 1$$

$$= x^2 - 8x + 17$$

(b) $[g \circ f](x)$

تعريف $g \circ f$

$$f(x) = x^2 + 1$$

عوّض $(x^2 + 1)$ بدلاً من x في $g(x)$

بسّط

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$

$$= g(x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1) - 4$$

$$= x^2 - 3$$

(c) $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع a عندما $x = 2$.

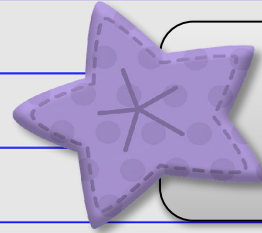
$$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$$

عوّض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$

تركيب دالتين

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



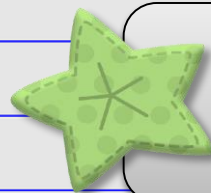
نحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

$$f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2 \quad (2B)$$

$$f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2 \quad (2A)$$





ترب

$$1 + 2 = 3$$

أوجد $[f \circ g](6)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية.

$$f(x) = 2x - 3 \quad (11)$$

$$g(x) = 4x - 8$$

مثال 3

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = x^2 - 9$$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$ التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$ ؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$ ، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ ، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.
نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] \quad \text{تعريف } f \circ g$$

$$= f(x^2 - 9)$$

$$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$$

عوض $(x^2 - 9)$ بدلاً من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرفة عندما $x^2 - 8 = 0$ ، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على

$$\text{الصورة } [f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8} \text{ ومجالها } \{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}.$$

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين

من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

إيجاد دالة التركيب
بوجود قيود على
المجال

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 3

(b) $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$ ، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$ ، ونطرح منها 2. لذا فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$. نجد الآن $[f \circ g](x)$:

تعريف $f \circ g$ $[f \circ g](x) = f[g(x)]$

$g(x) = \sqrt{x - 3}$ $= f(\sqrt{x - 3})$

عوّض $\sqrt{x - 3}$ بدلاً من x في $f(x)$ $= (\sqrt{x - 3})^2 - 2$

بسّط $= x - 3 - 2 = x - 5$

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$ ؛ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$ ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

إيجاد دالة التركيب
بوجود قيود على
المجال

تطوير - إنتاج - توثيق



تفكر من نفسك

$$f(x) = \frac{5}{x}, g(x) = x^2 + x \quad (3B)$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^2 - 1 \quad (3A)$$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h ، فإنك تجد دالتين (f, g) بحيث يكون تركيبهما هو h .

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق



مثال 4

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كل مما يأتي:

$$h(x) = 2x^2 + 20x + 50 \quad (a)$$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ تركيب للدالتين $f(x) = 2x^2, g(x) = x + 5$ ، وعندئذ:

$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

$$h(x) = \sqrt{-7x} + 9x \quad (b)$$

لاحظ أن الدالة h يمكن أن نكتب تركيب دالتين f, g حيث يمكن اختيار $g(x) = -7x$ ، وكتابة:

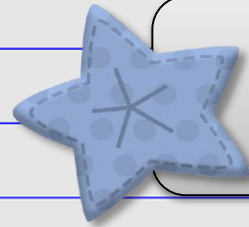
$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{7}, h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9}{7} \quad \text{وعندئذ:}$$

$$h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9}{7} = \sqrt{g(x)} - \frac{9}{7} = f(g(x)) = [f \circ g](x)$$

كتابة الدالة
تركيب دالتين

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



تحقق من فهمك

$$h(x) = \frac{1}{x+7} \quad (4B)$$

$$h(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (4A)$$

مثال 5

مؤشرات حركية: تُصمَّم إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعدها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

(a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L ، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية. حيث إن طول المستطيل يزداد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$. أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L(L + 40) = L^2 + 40L$ ، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$ ، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

(b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$$\begin{aligned} A \circ L &= A[L(t)] && \text{تعريف } A \circ L \\ &= A(20 + 15t) && L(t) = 20 + 15t \\ &= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t) && \text{عوض } (20 + 15t) \text{ بدلاً من } L \text{ في } A(L) \\ &= 225t^2 + 1200t + 1200 && \text{بسط} \end{aligned}$$

تمثل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن

(c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟

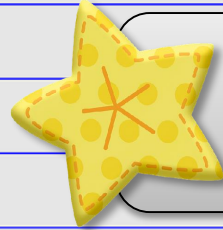
مساحة المستطيل الأصلي 20×60 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية عندما $3600 = 225t^2 + 1200t + 1200 = [A \circ L](t)$. وبحل المعادلة بالنسبة إلى t نجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. وبما أن الزمن السالب ليس جزءاً من مجال $L(t)$ ، وكذلك ليس جزءاً من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريباً.

على شكل تركيب
دالتين

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



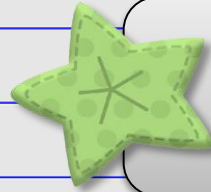
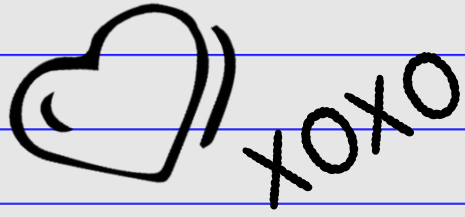
نتحقق من تفكيرك

(5) أعمال: أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

(5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

(5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

(5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.



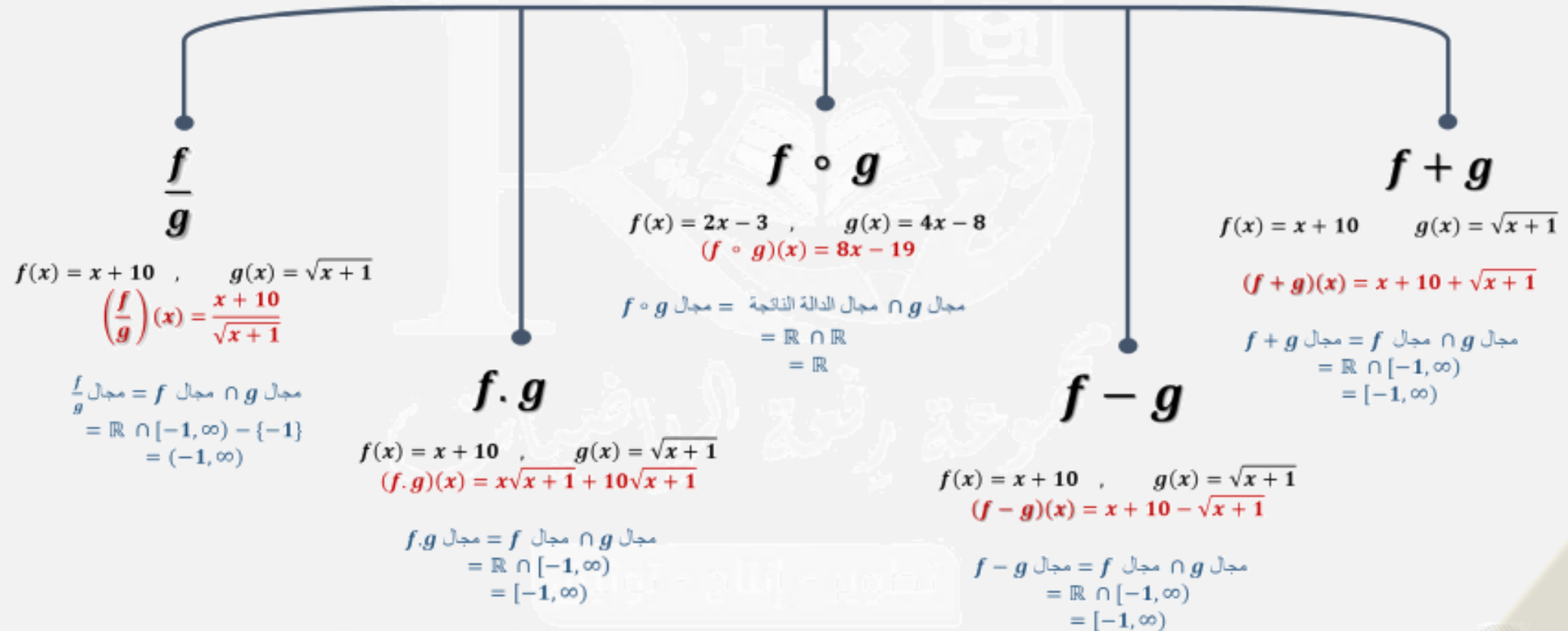
83) إذا كان $f(2)=3, g(3)=2, f(3)=4, g(2)=5$ فما قيمة $[f \circ g](3)$ ؟

- | | |
|-----|-----|
| 4 C | 2 A |
| 5 D | 3 B |

أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $x = I(x)$ في كل مما يأتي:

$$h(x) = \frac{8}{(x-5)^2} \quad (28)$$

العمليات على الدوال وتركيب دالتين



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنعم
أكثر





العلاقات والدوال العكسية

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشوري

Handwritten signature or mark.

المفردات:

العلاقة العكسية

inverse relation

الدالة العكسية

inverse function

الدالة المتباينة

one-to-one function

فيما سبق : درست إيجاد تركيب دالتين

والآن :

- أستعمل اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد ان كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا .
- أجد الدالة العكسية جبريا وبيانيا.

العلاقات والدوال العكسية 7-1

تطوير - إنتاج - توثيق



لماذا؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

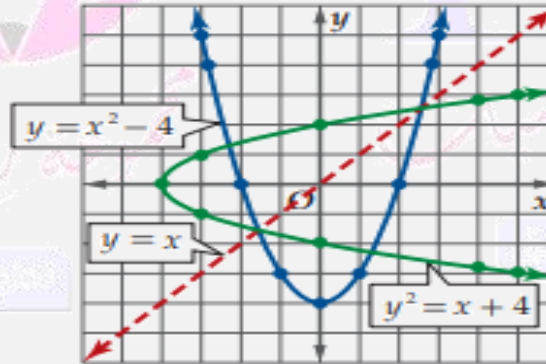
$$1 + 2 = 3$$

الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلا من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلاً

العلاقة العكسية

$$y^2 = x + 4 \text{ أو } x = y^2 - 4$$

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3



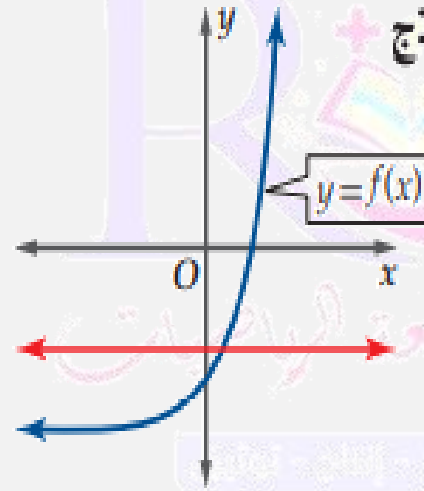
العلاقة

$$y = x^2 - 4$$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

مفهوم أساسي

اختبار الخط الأفقي



نموذج

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

مثال:

قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية،
يجب ألا يحدث لبس بين
رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$
ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$

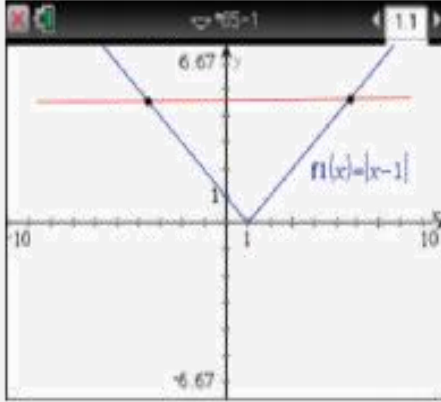


مثال 1

مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

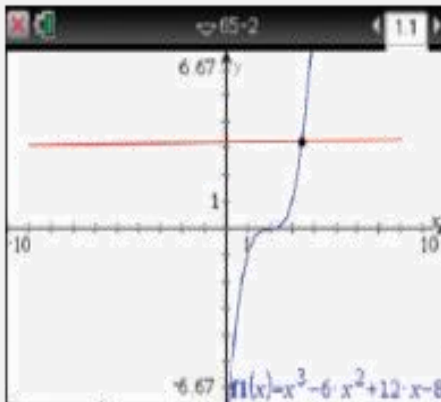
$$f(x) = |x - 1| \quad (a)$$

يوضح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.



$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \quad (b)$$

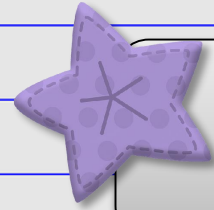
يوضح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.



تطبيق اختبار
الخط الأفقي

مجموعة رفعة الرياضيات

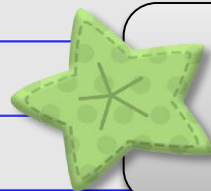
تطوير - إنتاج - توثيق



تحقق من فهمك

$$f(x) = x^2 + 5x - 7 \quad (1B)$$

$$h(x) = \frac{4}{x} \quad (1A)$$

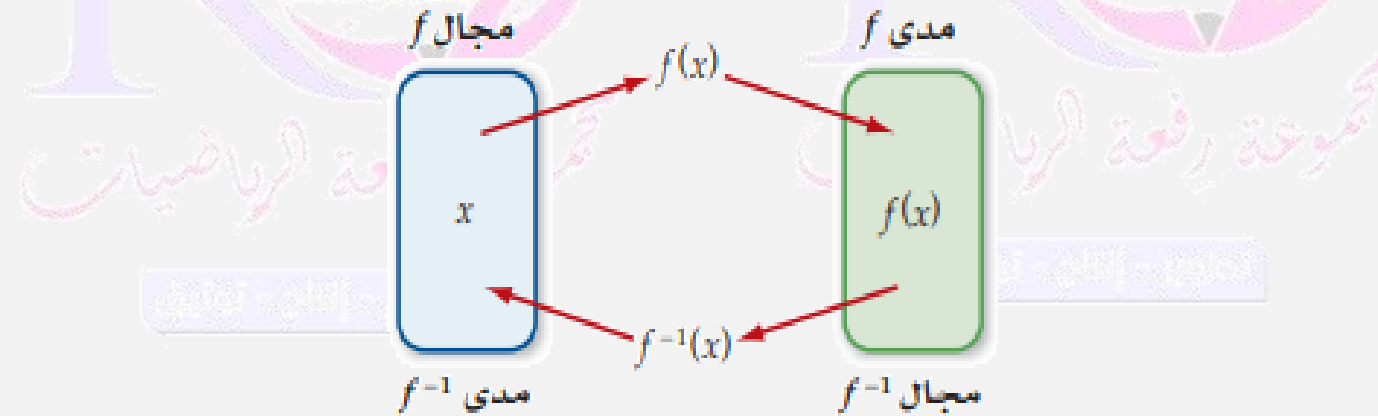


تدريب

$$1 + 2 = 3$$

$$y = \frac{8}{x+2} \quad (7)$$

إيجاد الدالة العكسية: إذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y . ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x .
إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساوياً لمدى f^{-1} ومدى f مساوياً لمجال f^{-1} .



مفهوم أساسي إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$ ، ثم بَدِّل موقعي x, y .

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y ، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1} . وبيِّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1} ، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1} .

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًا قد يكون دالة عكسية للدالة f ؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1} .

قراءة الرياضيات

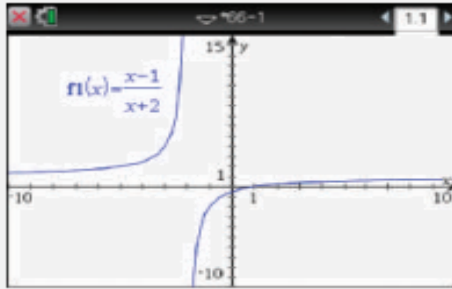
الدوال القابلة للعكس.

يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.

مثال 2

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$



يوضح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ ، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
والآن أوجد f^{-1} .

الدالة الأصلية

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

عوّض y بدلاً من $f(x)$

$$y = \frac{x-1}{x+2}$$

بدّل بين x ، y

$$x = \frac{y-1}{y+2}$$

اضرب الطرفين في $(y+2)$ ، ثم طبق خاصية التوزيع

$$xy + 2x = y - 1$$

ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد

$$xy - y = -2x - 1$$

خاصية التوزيع

$$y(x - 1) = -2x - 1$$

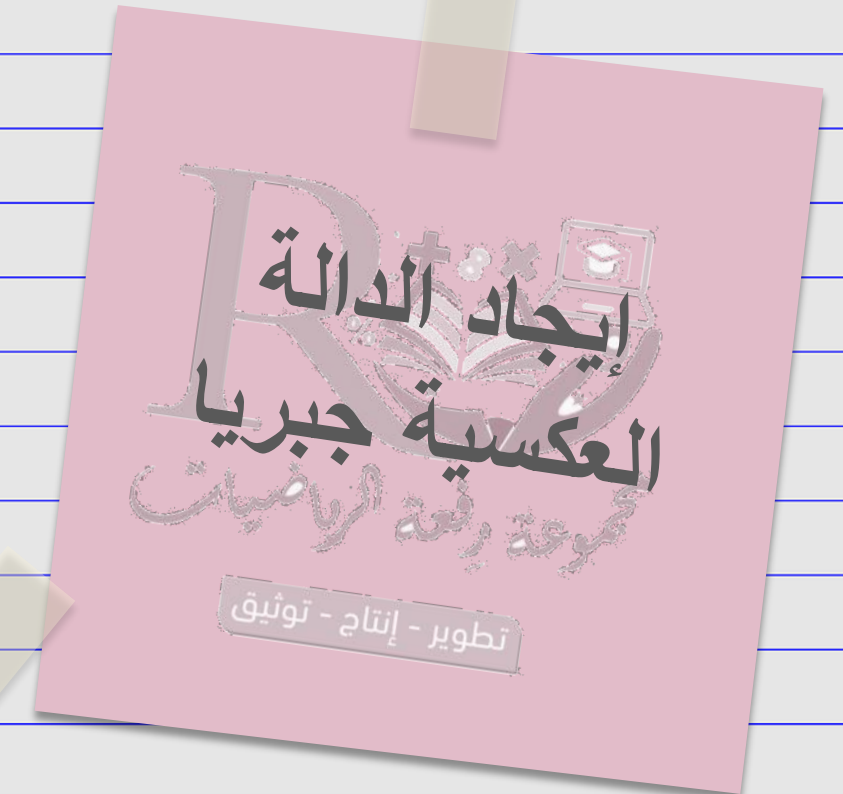
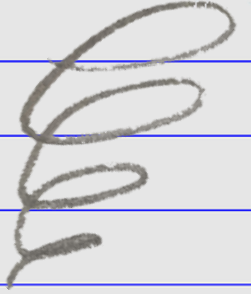
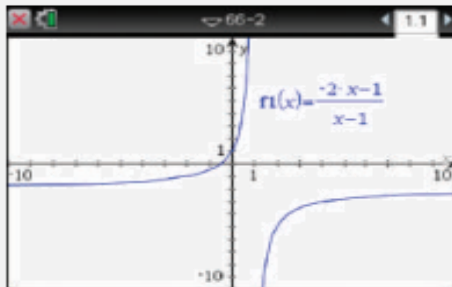
حل بالنسبة لـ y

$$y = \frac{-2x - 1}{x - 1}$$

عوّض $f^{-1}(x)$ بدلاً من y ، لاحظ أن $x \neq 1$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{x - 1}$$

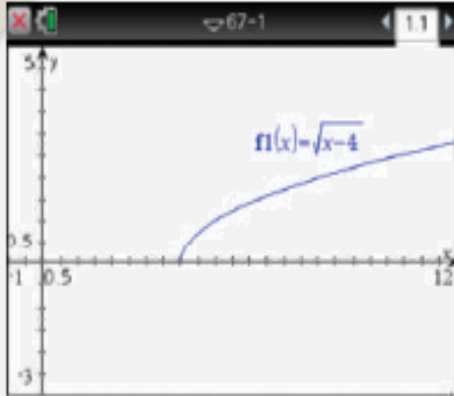
يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ، ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومداى f يساويان مدى ومجال f^{-1} على الترتيب.
لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1} .



مثال 2

$$f(x) = \sqrt{x-4} \quad (b)$$

يوضح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛
لذا فإن الدالة f متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو
 $[4, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1} .



$$\text{الدالة الأصلية} \quad f(x) = \sqrt{x-4}$$

$$\text{عوّض } y \text{ بدلاً من } f(x) \quad y = \sqrt{x-4}$$

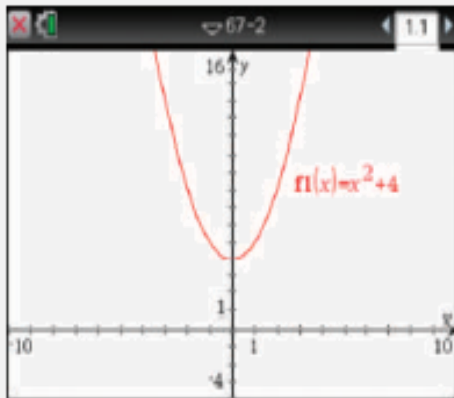
$$\text{بدّل بين } x \text{ و } y \quad x = \sqrt{y-4}$$

$$\text{رَبّع الطرفين} \quad x^2 = y - 4$$

$$\text{حل بالنسبة إلى } y \quad y = x^2 + 4$$

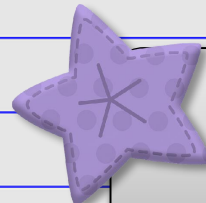
$$\text{عوّض } f^{-1}(x) \text{ بدلاً من } y \quad f^{-1}(x) = x^2 + 4$$

يظهر من التمثيل البياني المجاور أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$ ،
ومداها $[4, \infty)$. ومن ثم فإننا نفرض قيوداً على مجالها بحيث يكون
مساوياً لمدى f وهو $[0, \infty)$ ، ويبقى مداها $[4, \infty)$. والآن يصبح
مجال f ومداها مساويان لمدى f^{-1} ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن
 $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.



إيجاد الدالة
العكسية جبرياً
مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



تتحقق من نفسك

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 20} \quad (2C)$$

$$f(x) = \frac{x + 7}{x} \quad (2B)$$

$$f(x) = -16 + x^3 \quad (2A)$$

مفهوم أساسي

تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} ، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

$$\bullet f[f^{-1}(x)] = x \text{ لجميع قيم } x \text{ في مجال } f^{-1}(x).$$

$$\bullet f^{-1}[f(x)] = x \text{ لجميع قيم } x \text{ في مجال } f(x).$$

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعمل هذه الحقيقة للتحقق من أن كلاً من الدالتين دالة عكسية للأخرى.



مثال 3

أثبت جبريًا أن كلًا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ و $g[f(x)] = x$.

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right)$$

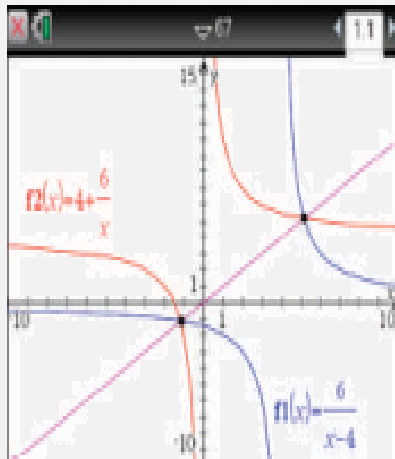
$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4$$

$$= x - 4 + 4 = x$$

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right)$$

$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right)} - 4$$

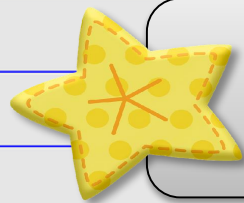
$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$



بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ ، فإن كلًا من الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث نتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

اثبات ان كل دالة
تمثل دالة عكسية
للأخرى

تطوير - إنتاج - توثيق



نحقق من فهمك

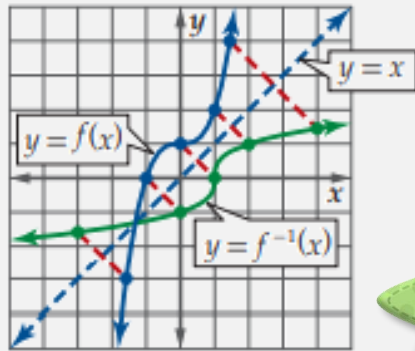
$$f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10} \quad (3B)$$

$$f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3} \quad (3A)$$

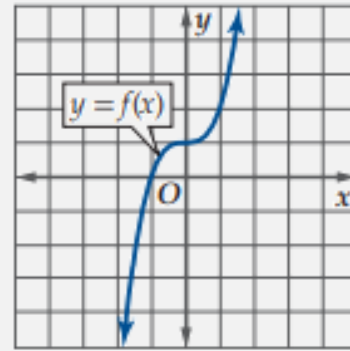
مثال 4

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتسهيل $f^{-1}(x)$.

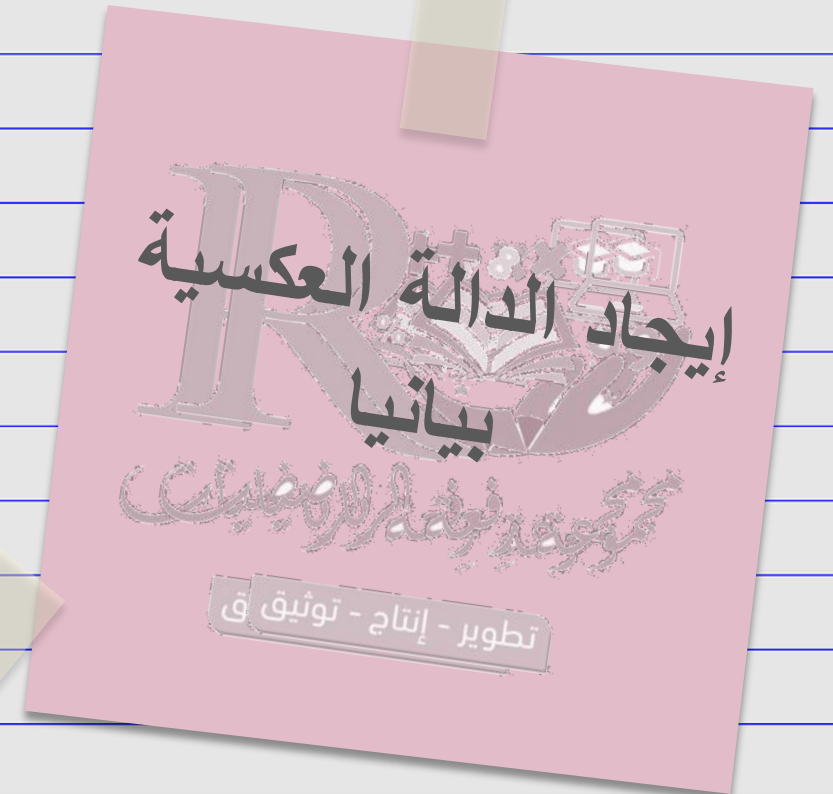
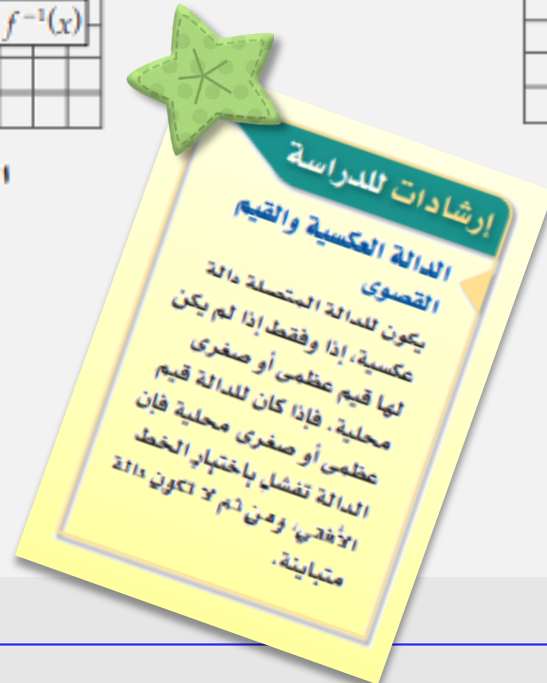
مثل بيانيًا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى تكسوة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).

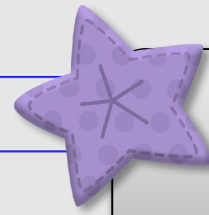


الشكل 1.7.4



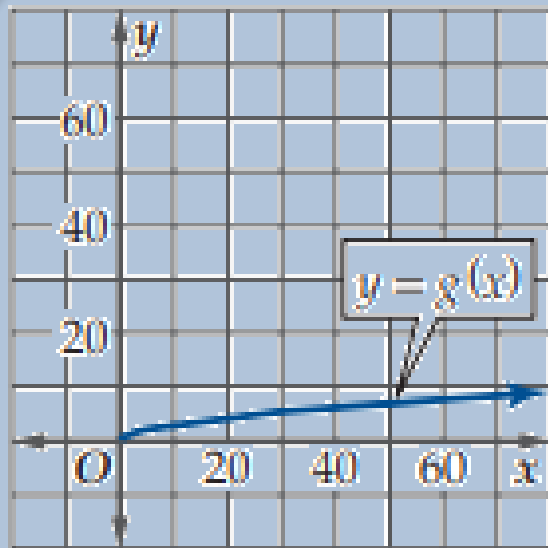
الشكل 1.7.3



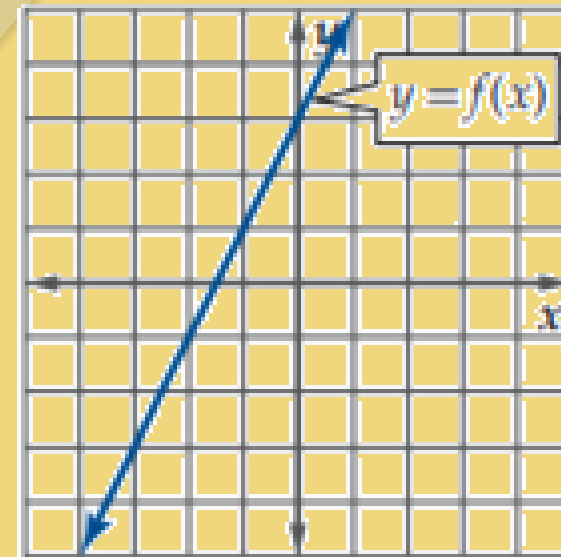


نتفق من نفسك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا:



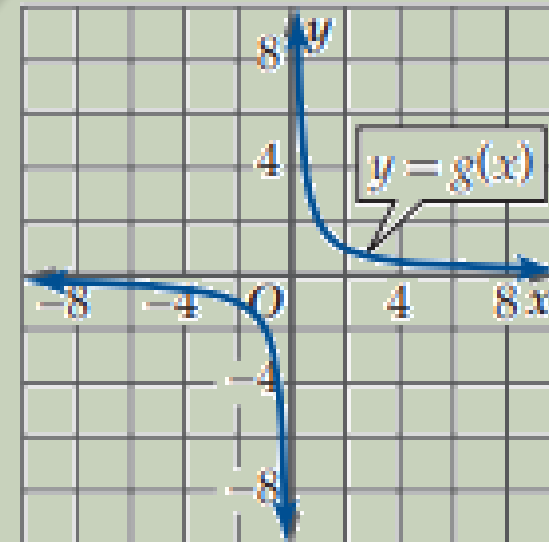
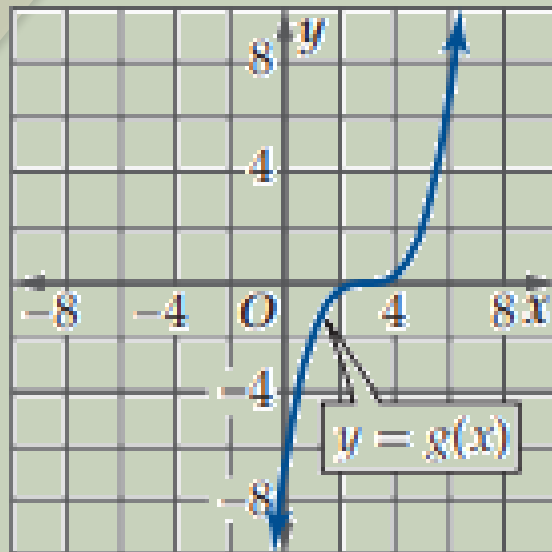
(4B)



(4A)



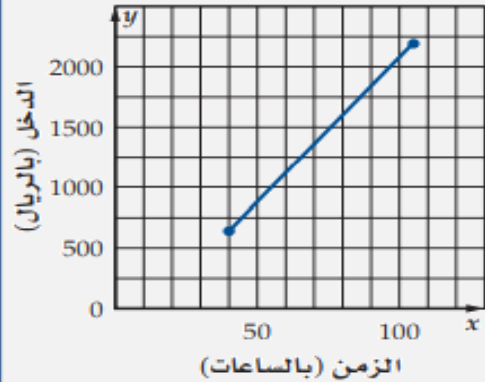
تدريبات



مثال 5

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالاً عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عدداً من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجراً إضافياً مقداره 24 ريالاً عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ 40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

الدخل الأسبوعي لعامل



(a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدتها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$ أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 24x - 320 & \text{الدالة الأصلية} \\ y &= 24x - 320 & \text{عوّض } y \text{ بدلاً من } f(x) \\ x &= 24y - 320 & \text{بدّل بين } x \text{ و } y \\ x + 320 &= 24y & \text{أضف 320 إلى الطرفين} \\ y &= \frac{x + 320}{24} & \text{حل بالنسبة إلى } y \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 320}{24} \quad \text{عوّض } f^{-1}(x) \text{ بدلاً من } y$$

(b) ماذا تمثل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

(c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى 105 ساعات؛ لذا فإن مجال $f(x)$ هو $[40, 105]$. وبما أن $f(40) = 640$ ، $f(105) = 2200$ ، فإن مدى $f(x)$ هو $[640, 2200]$ ، وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$.

(d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالاً.

$$f^{-1}(760) = \frac{760 + 320}{24} = 45 \quad \text{أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع.}$$

إرشادات للدراسة

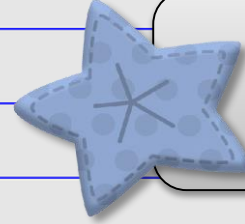
الدالة الخطية،

يمكنك الحكم بأن منحنى الدالة الخطية يحقق اختبار الخط الأفقي دون الحاجة إلى رسمه.

استعمال الدالة العكسية

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



تفكر من تفكير

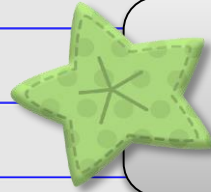
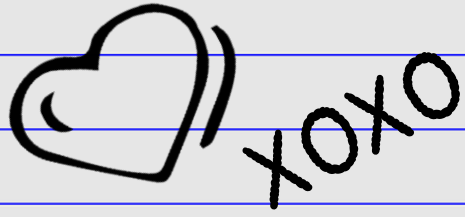
(5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصص منها 1800 ريال لتفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$ ، حيث x الراتب الشهري.

(5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجد لها.

(5B) ماذا تمثل كل من $f^{-1}(x)$ ، x في الدالة العكسية؟

(5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f^{-1}(x)$ ، $f(x)$ إن وجدت. وبرّر إجابتك.

(5D) إذا وفر أحمد 500 ريالاً في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.



(68) أي الدوال الآتية تمثل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x-5}{2}$ ؟

A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

(58) تبرير: هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، برّر إجابتك.

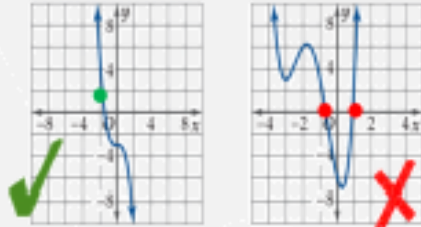
“يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية”

متى تكون الدالة متباينة

بيانياً

هل الدالة لها دالة عكسية؟

اختبار الخط الأفقي في
الرسم البياني لا يمر إلا
على نقطة واحدة



الأزواج المرتبة

عناصر المدى لا تتكرر

✓ $\{(-1,9), (2,13), (0,1)\}$
✗ $\{(5,4), (-5,2), (9,3), (-1,4)\}$

الجدول

عناصر المدى لا تتكرر

x	y
-3	4
1	-1
2	0

✓

x	y
0	5
-7	2
2	5

✗

المخطط السهمي

يصل لكل عنصر في المدى
سهم واحد فقط



المعادلات

إذا كانت كل قيمة x
ترتبط بقيمة واحدة y ،
ولا توجد قيمة y ترتبط
بأكثر من قيمة x

✗ $y = x^2 - 3$

✓ $y = x^3 - 3$

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشئي





ك

فيما سبق :
درست تمثيل دوال
كثيرات الحدود
وتحويلات بيانيا

والآن :

- أتعرف الدوال الأسية واللوغاريتمية
- أمثل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانيا.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

لماذا :

علوم: ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطا وثيقا .
ويظهر ذلك جليا في الفيزياء والكيمياء والأحياء،
وغيرها . وتحتاج هذه الفروع الى مهارات
رياضية عالية . وستتعلم في هذا الفصل جوانب
رياضية ذات صلة قوية بعلوم الحاسوب ،
والفيروسات والحشرات ، ونمو البكتيريا وانقسام
الخلايا ، وعلم الفلك والأعاصير ، والهزات
الأرضية .

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول
العلاقات والدوال ، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا
الفصل .

$$1 + 2 = 3$$



مراجعة المفردات :

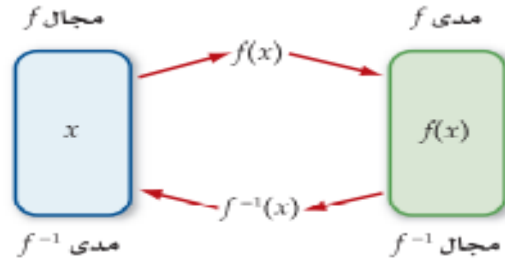
الدالة المتباينة (one-to-one function) :

هي دالة تحقق اختبار الخط الأفقي؛ أي لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.

الدالة العكسية (inverse function) :

تكون كل من الدالتين f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$f[f^{-1}(x)] = x, f^{-1}[f(x)] = x$$



سلوك طرفي التمثيل البياني (end behaviour) :

سلوك تمثيل $f(x)$ البياني عندما تقترب x من المالانهاية $(x \rightarrow +\infty)$ أو سالب مالانهاية $(x \rightarrow -\infty)$.

خط التقارب (asymptote) :

مستقيم يقترب منه تمثيل الدالة البياني.

المجال (domain) :

مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

المدى (range) :

مجموعة الإحداثيات y للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

الدالة (function) :

علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

الدالة المتصلة (continuous function) :

هي الدالة التي يخلو منحنائها من الانقطاعات أو الفجوات؛ أي يمكن تمرير القلم على منحنائها دون أن نضطر لرفعه.

بسط كل عبارة مما يأتي مفترضا أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفرا .

$$\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6} \quad (3)$$

$$(2xy^3z^2)^3 \quad (2)$$

$$a^4a^3a^5 \quad (1)$$

(5) **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. فإذا كانت كتلة جسم $7.5 \times 10^3 \text{ g}$ ، وحجمه $1.5 \times 10^3 \text{ cm}^3$ ، فما كثافته؟

$$\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2 \quad (4)$$

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي :

$$f(x) = -4x \quad (8)$$

$$f(x) = x - 3 \quad (7)$$

$$f(x) = 2x + 5 \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 4 \quad (11)$$

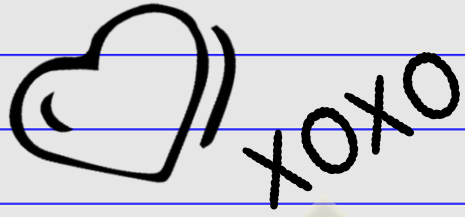
$$f(x) = \frac{x-1}{2} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x - 3 \quad (9)$$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 5 \quad (13) \\ g(x) &= 2x - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 6 \quad (12) \\ g(x) &= x + 6 \end{aligned}$$



(14) طعام: تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال. فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافاً إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$ ، موضحاً ماذا تعني.

مجموعة رفعة الرياضيات

نظور - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات

نظور - إنتاج - توثيق



تطوير - إنتاج - توزيع



$$1 + 2 = 3$$



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشوري

المفردات:

الدالة الأسية

exponential function

النمو الأسّي

exponential growth

عامل النمو

growth factor

الاضمحلال الأسّي

exponential decay

عامل الاضمحلال

decay factor

فيما سبق :

درست دوال كثيرات الحدود
وتمثيلها بيانيا .

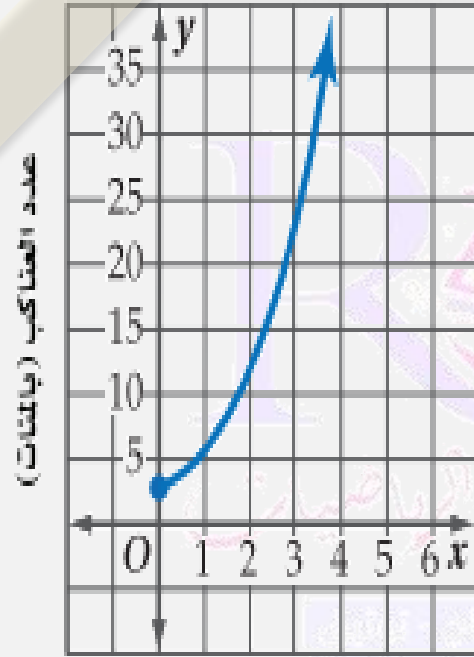
والآن :

- أتعرف الدالة الأسية .
- أمثل الدالة الأسية .
- أمثل دوال النمو الأسّي بيانيا .
- أمثل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيا .

الدوال الأسية

مجموعة رفعة الرياضيات
١-٢

تطوير - إنتاج - توثيق



السنوات منذ 2010

لماذا؟

قد تبدو عناكب الرتيلاء (Tarantulas) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.

لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًا، وليس تربيعيًا أيضًا، وإنما يمثل الدالة $y = 3(2)^x$ ، والتي هي مثال على الدالة الأسية.

تمثيل الدوال الأسية: الدالة الأسية هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

الدالة الأسية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة

$$y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$$

$$y = 2(3)^x$$

$$y = 4^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

أمثلة:

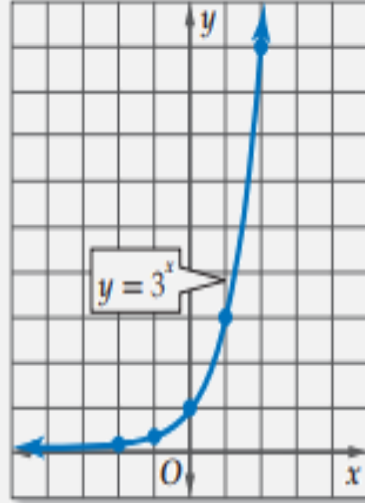


مثال ١

إرشادات للدراسة

الدالة $y = ab^x$:
تكون الدالة الأسية $y = ab^x$
معرفة لجميع قيم x التي
تحقق الشرط:
 $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$
وذلك لأنه:
• إذا كانت $b < 0$ فإن
 $y = ab^2$ تكون غير
معرفة عند بعض القيم،
فمثلاً تكون غير معرفة
عند $x = \frac{1}{2}$
• إذا كانت $b = 1$ فإن
الدالة تصبح على الصورة
 $y = a$ وهذه هي الدالة
الثابتة.

(a) مثل الدالة $y = 3^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداها.



x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9

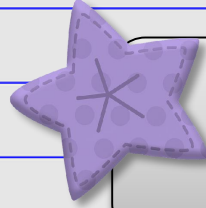
عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0, 1)$ ، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y ، حيث $y = 3^x$ ، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$ ، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

تمثيل الدالة الأسية
عندما
 $a > 0, b > 1$

تطوير - إنتاج - توثيق

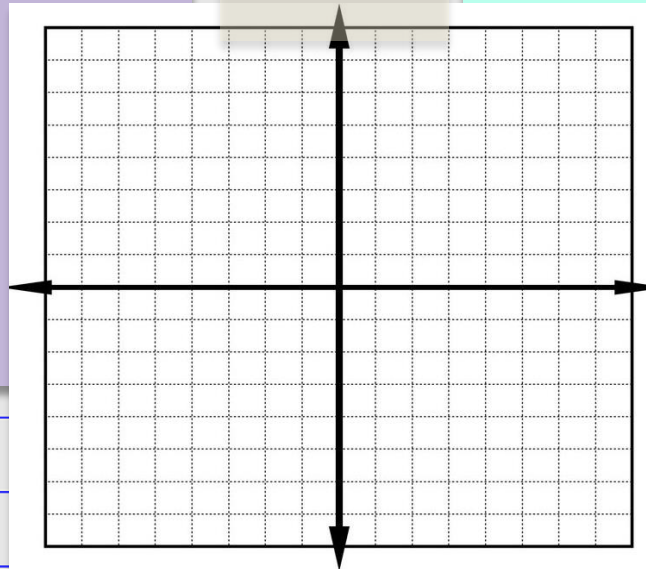


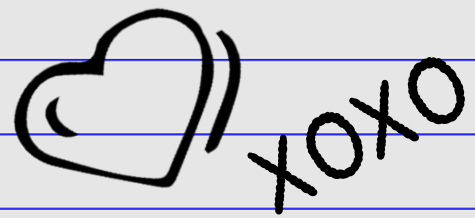
نتحقق من فهمك

(1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$

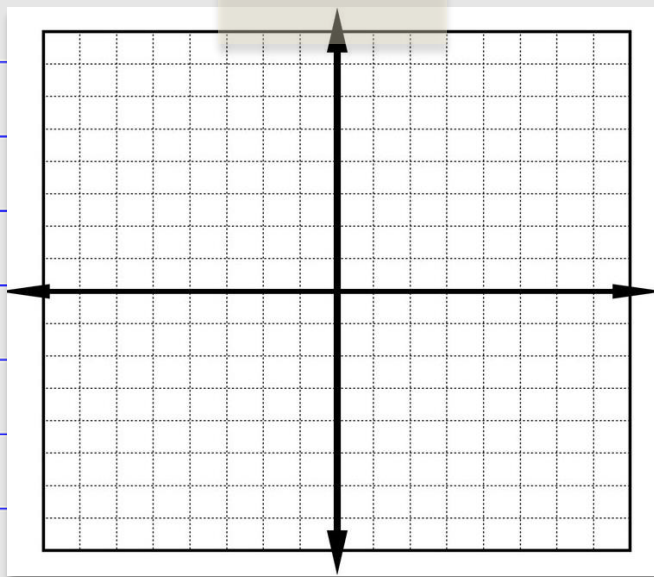
(1A) مثل الدالة $y = 7^x$ بيانياً،

وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداها.





تدريب



(1) $y = 2^x$, $2^{1.5}$

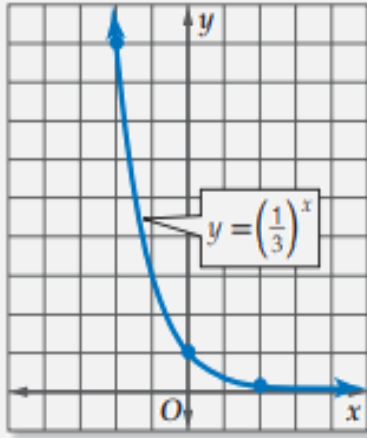
مثال ٢

(a) مثل الدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.

إرشادات للدراسة

$$a < 0$$

إذا كانت قيمة a سالبة، فإن
منحنى الدالة ينعكس حول
المحور x .



x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$

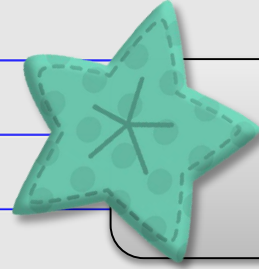
عين الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0, 1)$ ، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداهما جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

عندما $x = -1.5$ ، فإن قيمة $y \approx 5.2$ ، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5} \approx 5.19615$).

تمثيل الدالة الأسية
عندما
 $0 < b < 1, a > 0$

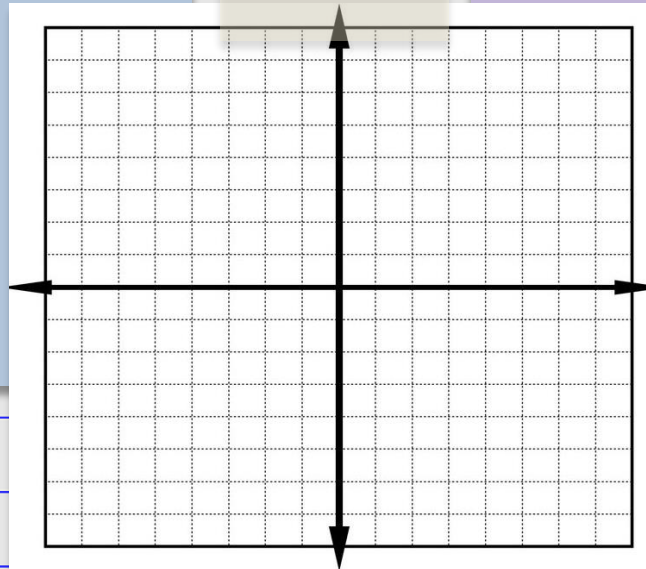
تطوير - إنتاج - توثيق



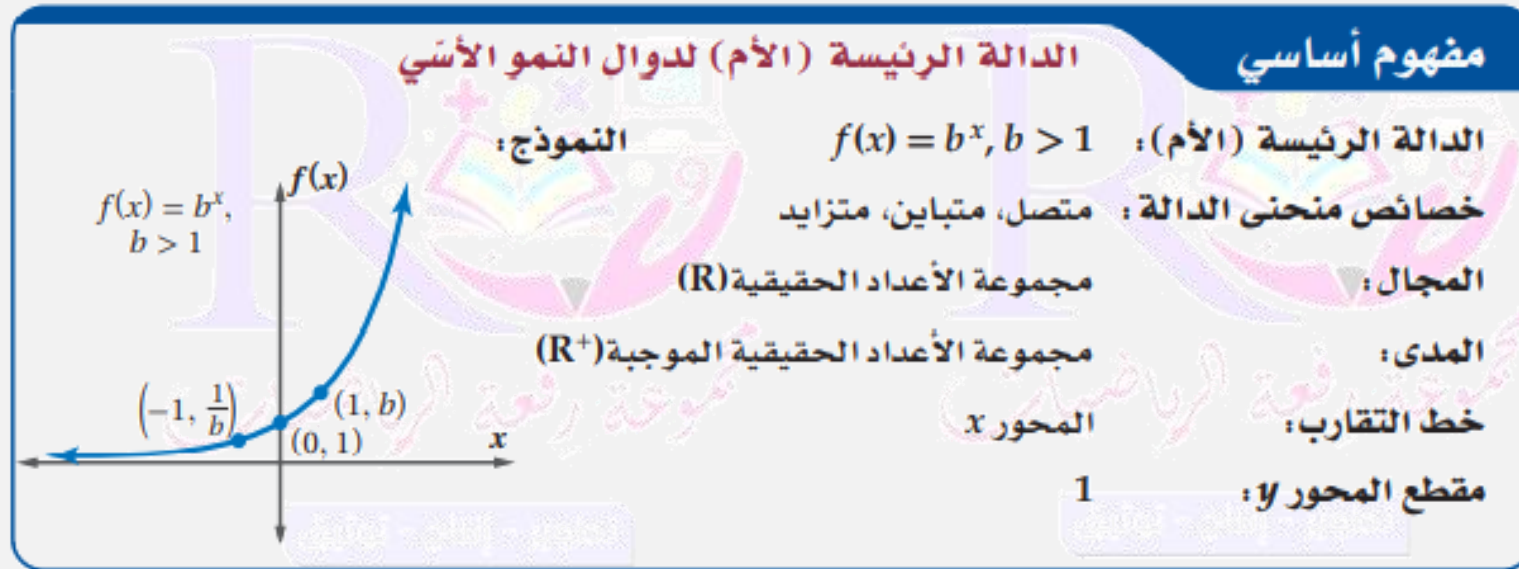
تتحقق من فهمك

(2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{2})^{-2.5}$ ذلك.

(2A) مثل الدالة $y = (\frac{1}{2})^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y وحدّد مجال الدالة ومداها.



النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسية $f(x) = b^x$ ، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**، فالدالة $y = 3^x$ الواردة في المثال 1 هي دالة نمو أسّي.



يمكنك تمثيل دوال النمو الأسّي بيانياً بنفس طريقة تمثيل الدوال الأسية، كما يمكنك الاستفادة من النقاط: $(-1, \frac{1}{b})$, $(0, 1)$, $(1, b)$

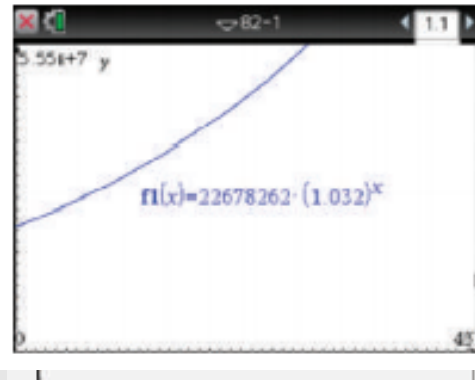
لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x . ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسّي $A(t) = a(1+r)^t$ ، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(r+1)$ ويُسمى **عامل النمو**.

وتستعمل دوال النمو الأسّي عادة لتمثيل النمو السكاني.

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٣

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431-1425 3.2% تقريباً. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ، فأوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.



(a) أوجد دالة النمو الأسّي مستعملًا $a = 22678262$, $r = 0.032$

$$y = 22678262 (1.032)^t$$

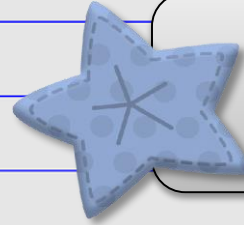
(b) مثل الدالة بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتحصل على الشكل المجاور.

تمثيل دوال النمو
الأسّي بيانياً

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



تفقد من نفسك

(3) ثقافة مالية: يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنوياً، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430 هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.

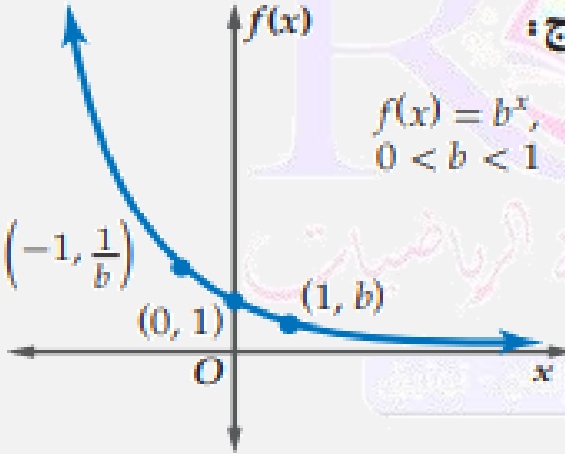


لتطوير - إنتاج - توثيق



لتطوير - إنتاج - توثيق

الاضمحلال الأسي: تُسمى الدالة الأسية $f(x) = b^x$ ، حيث $0 < b < 1$ دالة الاضمحلال الأسي، فالدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ الواردة في المثال 2 هي دالة اضمحلال أسي.

مفهوم أساسي	الدالة الرئيسية (الأم)	النموذج:
الدالة الرئيسية (الأم): $f(x) = b^x, 0 < b < 1$	التمثيل:	
خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)	
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R ⁺)	
المدى:		
خط التقارب:	المحور x	
مقطع المحور y:	1	

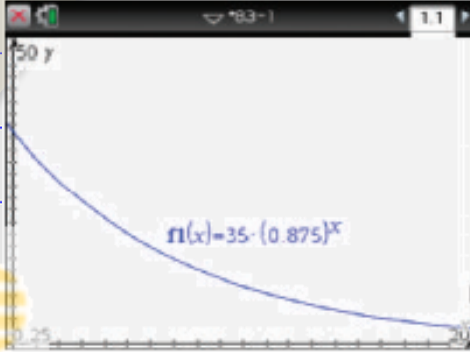
يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانياً بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x ، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1 - r)^t$ ، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$ ، ويُسمى عامل الاضمحلال. وتستخدم دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.

المحور - الثاني - الثاني

مثال ٤

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافيين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريبًا من كمية الكافيين من أجسامهم في الساعة.



(a) أوجد دالة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

$$\begin{aligned} y &= a(1 - r)^t \\ &= 35(1 - 0.125)^t \\ &= 35(0.875)^t \end{aligned}$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

(b) قدر كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

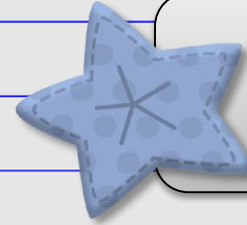
المعادلة من الفرع a	$y = 35(0.875)^t$
عوض 3 بدلًا من الزمن t	$= 35(0.875)^3$
استعمل الحاسبة	≈ 23.45

سيبقى في جسم هذا الشخص 23.45mg من الكافيين تقريبًا بعد 3 ساعات.

تمثيل دوال
الإضمحلال الأسّي
بيانيًا

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



تتفق من نفسك

(4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على 68mg من الكافيين. أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوباً من الشاي الأسود، ومثلها بيانياً مستعملاً الحاسبة البيانية، ثم قُدِّر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

مجموعة رفعة الرياضيات

مجموعة رفعة الرياضيات

لتطوير - إنتاج - توثيق

لتطوير - إنتاج - توثيق

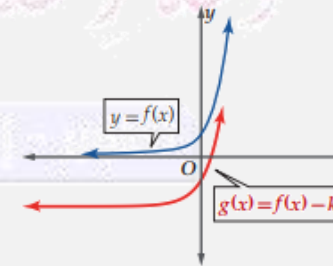
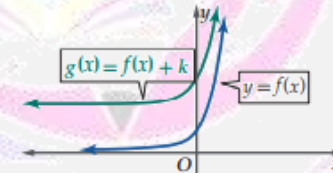
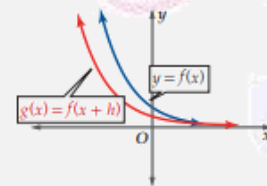
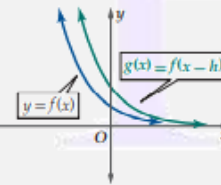
التحويلات الهندسية: تؤثر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكل من دالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي كما هو الحال في باقي الدوال، وستقتصر دراستنا على بعض التحويلات الهندسية لهاتين الدالتين.

مفهوم أساسي

الانسحاب الرأسى والانسحاب الأفقى

الانسحاب الرأسى

- منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
 - $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



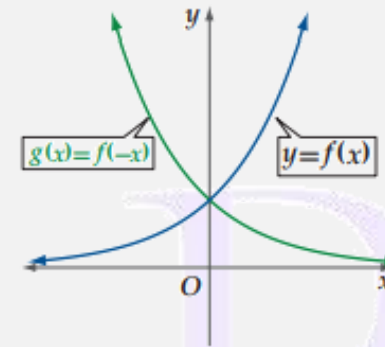


إرشادات للدراسة

الاضمحلال الأسي،
تأكد من عدم الخلط بين
تصديق التمثيلات البيانية،
حيث $|a| < 1$. والاضمحلال
الأسي، حيث $0 < b < 1$

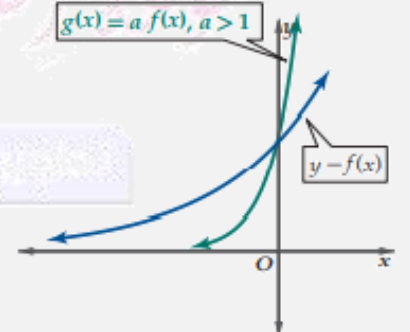
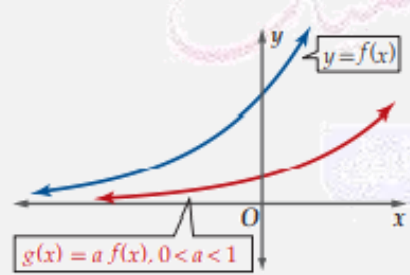
مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحور y !
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى
الدالة $f(x)$ حول المحور y .



مفهوم أساسي

التمدد الرأسي
إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a f(x)$ هو:
توسيع رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$.
تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$.



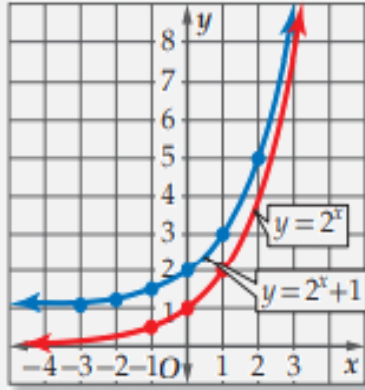


مثال ٥

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها، ومداه:

(a) $y = 2^x + 1$

حدد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2 > 1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(-1, \frac{1}{2})$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 2)$ أي النقاط $(-1, \frac{1}{b})$ ، $(0, 1)$ ، $(1, b)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$ ، بما أن $k = 1$ فإن المعادلة $y = 2^x + 1$ تمثل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبلاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x + 1$ يكون كما هو موضح أدناه.



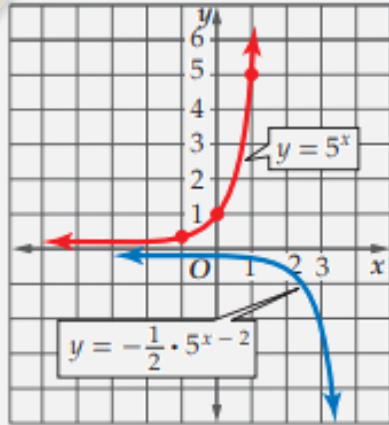
x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3} + 1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} + 1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} + 1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^0 + 1$	2
1	$2^1 + 1$	3
2	$2^2 + 1$	5

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$

تحويلات التمثيلات
البيانية لدوال النمو
مجموعة روعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٥



$$(b) \quad y = -\frac{1}{2} \cdot 5^x - 2$$

- حدّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5 > 1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(-1, \frac{1}{5})$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 5)$ وأي النقاط البياني للدالة $y = 5^x$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل
- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسياً.
 - $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
 - $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي للتمثيل البياني.
- المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$

تحويلات التمثيلات
البيانية لدوال النمو
مجموعة الأسية

تطوير - إنتاج - توثيق

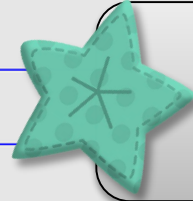


إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني
مجال الدالتين في المثال 5
هو مجموعة الأعداد
الحقيقية (R). تذكر أن
سلوك طرفي التمثيل البياني
هو سلوك التمثيل البياني
مع اقتراب x من مالا نهاية أو
سالب مالا نهاية. نلاحظ في
المثال (5a) أنه مع اقتراب x
من مالا نهاية، تقترب y من
مالا نهاية أيضاً، وأما عندما
تقترب x من سالب مالا نهاية،
فإن y تقترب من 1. وفي
المثال (5b) عندما تقترب x
من مالا نهاية فإن y تقترب
من سالب مالا نهاية، وأما
عندما تقترب x من سالب
مالا نهاية، فإن y تنصرب من
الصففر.

إرشادات للدراسة

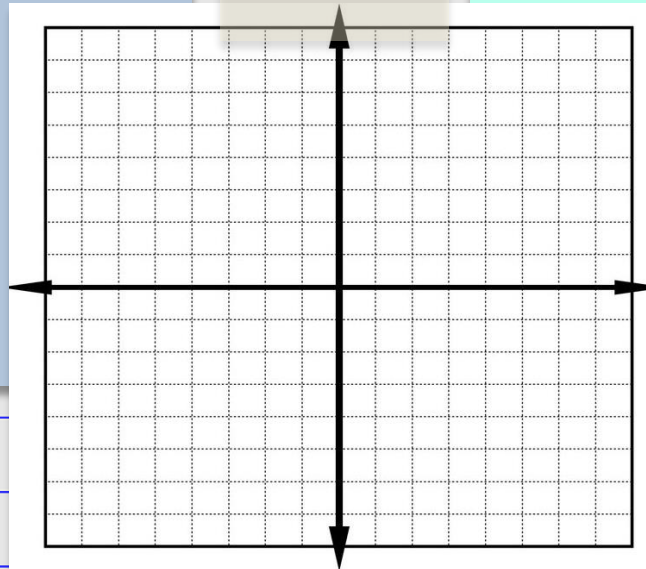
تمثيل تحويلات الدالة
الأسية بيانياً،
يمكن استعمال إحدى
الطريقتين الآتيتين: لتمثيل
تحويلات دوال النمو الأسّي
والاضحلال الأسّي بيانياً:
- استعمال التحويلات
الهندسية للدالة الأم.
وتعزيز ذلك بجدول لقيم
الدالة عندما لا تكون
التحويلات الهندسية
كافية وواضحة: لمزيد
من الدقة، كما في المثال
5A
- استعمال التحويلات
الهندسية للدالة الأم
فقط، كما في المثالين
5B, 6

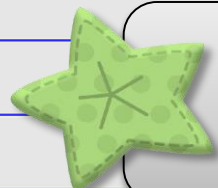


تفكر من نفسك

$$y = 0.1(6)^x - 3 \quad (5B)$$

$$y = 2^x + 3 - 5 \quad (5A)$$



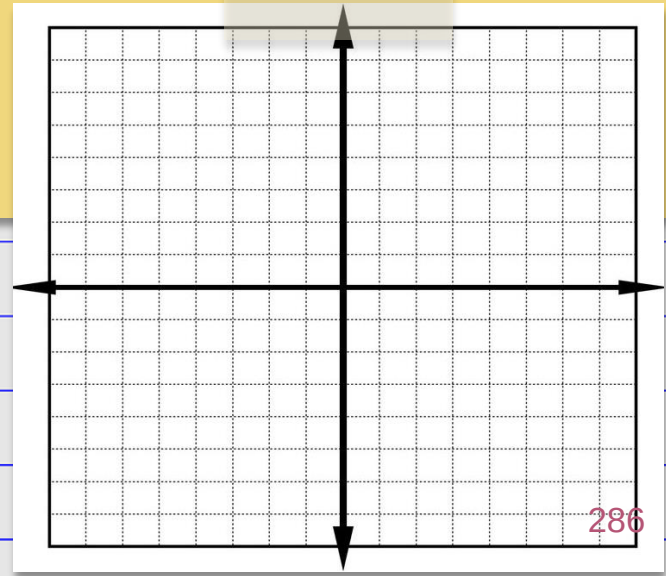


تدريب

$$f(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} \right)^{x+2} + 9 \quad (18)$$

$$f(x) = 3^{x-2} + 4 \quad (10)$$

$$f(x) = 2(3)^x \quad (7)$$



مثال ٦

مثل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانياً، وحدد مجالها ومدنها.

حدد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$ ؛ فالدالة دالة اضمحلال أسي، لذا

استعمل النقاط $(-1, 4)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, \frac{1}{4})$

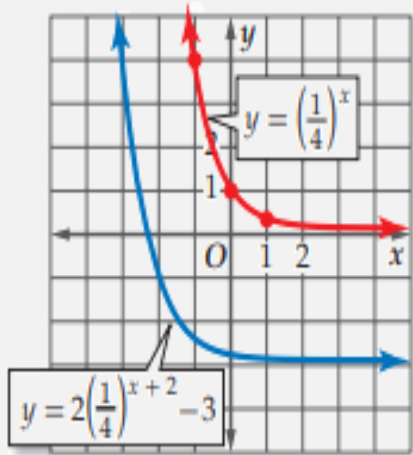
والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

• $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسياً.

• $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.

• $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3.



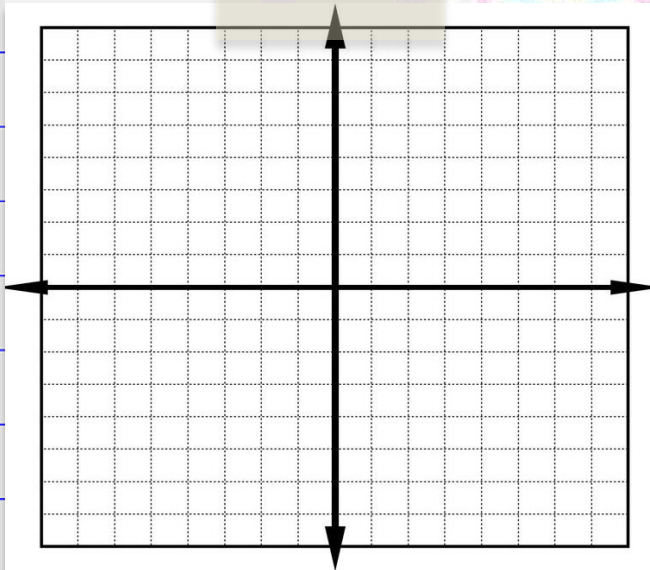
تمثيل تحويلات دوال
الاضمحلال الأسي
بيانياً

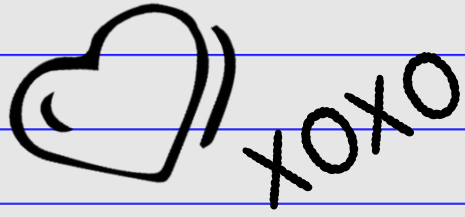
تطوير - إنتاج - توثيق



تدريب

$$y = \frac{3}{8} \left(\frac{5}{6} \right)^{x-1} + 1 \quad (6)$$



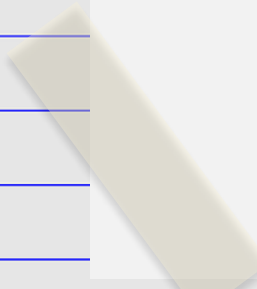


(40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ ؟

- | | |
|-----|-----|
| 1 C | 3 A |
| 0 D | 2 B |

(29) تبرير: حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. وضح إجابتك.

(a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y .



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر





$$1 + 2 = 3$$



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر

المفردات:

المعادلة الأسية
exponential equation
الربح المركب
compound interest
المتباينة الأسية
exponential inequality

فيما سبق : درست الدوال الأسية بيانيا

والآن :

- أحل معادلات أسية
- أحل متباينات أسية
- أحل مسائل تتضمن نموا أسيا
وأضحلال أسيا .

حل المعادلات والمتباينات الأسية

تطوير - إنتاج - توثيق
٢-٢



لماذا؟

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1435 هـ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

$$1 + 2 = 3$$

حل المعادلات الأسية: تظهر المتغيرات في المعادلة الأسية في موقع الأسس.

مفهوم أساسي خاصية المساواة للدوال الأسية

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0, b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$. وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$.



مقطع توضيحي



مثال ١

حل كل معادلة مما يأتي:

$$(a) \quad 2^x = 8^3$$

$$2^x = 8^3$$

$$2^x = (2^3)^3$$

$$2^x = 2^9$$

$$x = 9$$

المعادلة الأصلية

$$8 = 2^3$$

خاصية قوة القوة

خاصية المساواة للدوال الأسية

$$(b) \quad 9^{2x-1} = 3^{6x}$$

$$9^{2x-1} = 3^{6x}$$

$$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$$

$$3^{4x-2} = 3^{6x}$$

$$4x - 2 = 6x$$

$$-2 = 2x$$

$$-1 = x$$

المعادلة الأصلية

$$9 = 3^2$$

خاصية قوة القوة

خاصية المساواة للدوال الأسية

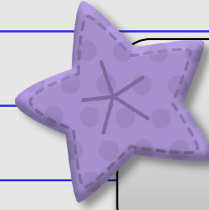
ب طرح $4x$ من كلا الطرفين

بقسمة كلا الطرفين على 2

حل المعادلات
الأسية

مجموعة رعدة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من فهمك

$$5^{5x} = 125^{x+2} \quad (1B)$$

$$4^{2n-1} = 64 \quad (1A)$$



تدريب

$$8^{2y+4} = 16^{y+1} \quad (10)$$

$$16^{2y-3} = 4^{y+1} \quad (4)$$

$$8^{4x+2} = 64 \quad (1)$$

مثال ٢

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

(a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه تقريبًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.
في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a .

الدالة الأسية

$$y = ab^x$$

بالتعويض عن x بالعدد 0، وعن y بالعدد 7500

$$7500 = ab^0$$

$$b^0 = 1$$

$$7500 = a$$

وعندما $x = 4$ ، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b .

بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500

$$23000 = 7500 \cdot b^4$$

بقسمة كلا الطرفين على 7500

$$3.067 \approx b^4$$

بإيجاد الجذر الرابع للطرفين

$$\sqrt[4]{3.067} \approx b$$

باستعمال الحاسبة

$$1.323 \approx b$$

الدالة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y = 7500(1.323)^x$.

(b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية

$$y = 7500(1.323)^x$$

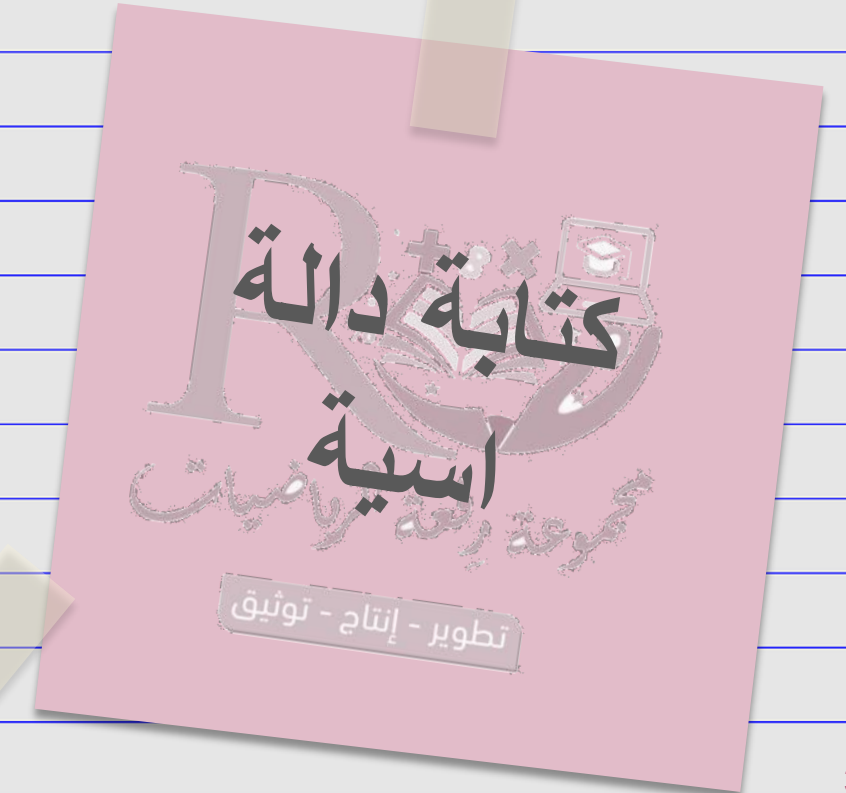
بالتعويض عن x بالعدد 12

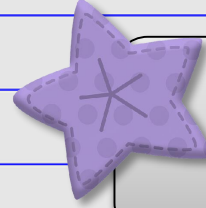
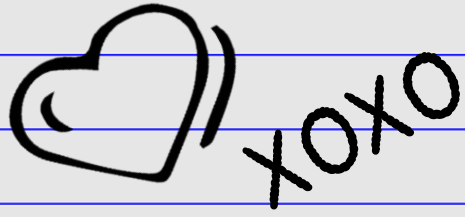
$$= 7500(1.323)^{12}$$

باستعمال الحاسبة

$$\approx 215664$$

سيكون هنالك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.



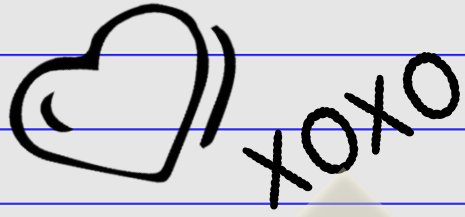


تفق من نفسك

(2) إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1436 هـ، وفي عام 1440 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1436 هـ.

(2A) مفترضاً أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقرباً الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

(2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المعادة التصنيع عام 1481 هـ؟



تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن الربح المركب؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافاً إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق



مثال ٣

مال: استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4.2%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟
افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

خطط: بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب.

$$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$$

حل: صيغة الربح المركب $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15 \quad = 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$$

$$\approx 46888.66$$

تحقق: مثل المعادلة المناظرة بيانيًا

$$f(x) = 25000(1.0035)^{12x} \quad \text{ثم أوجد قيمة } y \text{ عندما } x = 15$$

15 على الرسم بالضغط على مفتاح ثم اختر

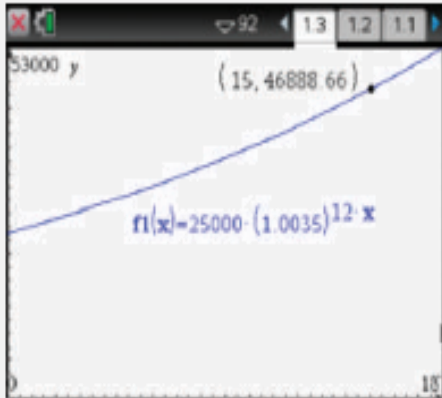
8: الهندسة واختر منها 1: النقاط والمستقيمات

ومنها 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على الرسم البياني

لتحدد نقطة يظهر الزوج المرتب الذي يمثلها.

اضغط ثم حدّد الإحداثي x للنقطة واكتب 15، سيظهر

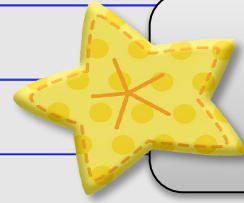
الإحداثي y المقابل 46888.66، إذن الإجابة صحيحة.



الربح المركب

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



نحقق من فهمك

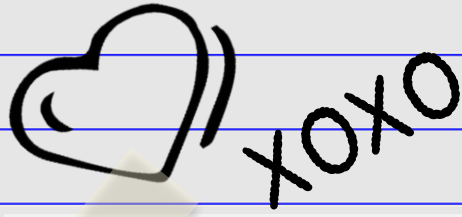
3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعاً ربحاً سنوياً نسبته 12%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهرياً. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات مقرباً الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



حل المتباينات الأسية: المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي

خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.
مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مفهوم أساسي

خاصية التباين لدالة الاضمحلال

التعبير اللفظي: إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.
مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ ، وإذا كان $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$



مثال ٤

حل المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$$16^{2x-3} < 8$$

$$(2^4)^{2x-3} < 2^3$$

$$2^{8x-12} < 2^3$$

$$8x - 12 < 3$$

$$8x < 15$$

$$x < \frac{15}{8}$$

المتباينة الأصلية

$$16 = 2^4, 8 = 2^3$$

خاصية قوة القوة

خاصية التباين لدالة النمو

بجمع 12 للطرفين

بقسمة الطرفين على 8

إرشادات للدراسة

دالتا النمو والاضحلال

الأسّي،

لاحظ أن خاصية التباين

لدالة النمو تبين أن هذه

الدالة متزايدة على مجالها،

وأن خاصية التباين لدالة

الاضمحلال تبين أن هذه

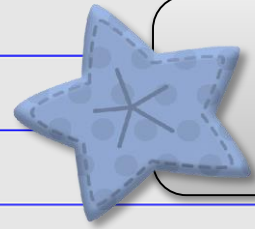
الدالة متناقصة على

مجالها.

حل المتباينات
الأسية

مجموعة رعدة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من فهمك

$$2^{x+2} > \frac{1}{32} \quad (4B)$$

$$3^{2x-1} \geq \frac{1}{243} \quad (4A)$$

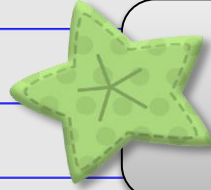


تدريب

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6} \quad (20)$$

$$10^{5b+2} > 1000 \quad (18)$$

$$625 > 5^{a+8} \quad (17)$$



تدريب

$$1 + 2 = 3$$

(38) برهان: أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^x + 1 = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر



تطوير - إنتاج - توزيع



$$1 + 2 = 3$$

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشئي

المضردات:

اللوغاريتم

logarithm

الدالة اللوغاريتمية

logarithmic function

تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق :
درست إيجاد الدالة العكسية
لدالة .

والآن :

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية
- أمثل دوال لوغاريتمية بيانيا .

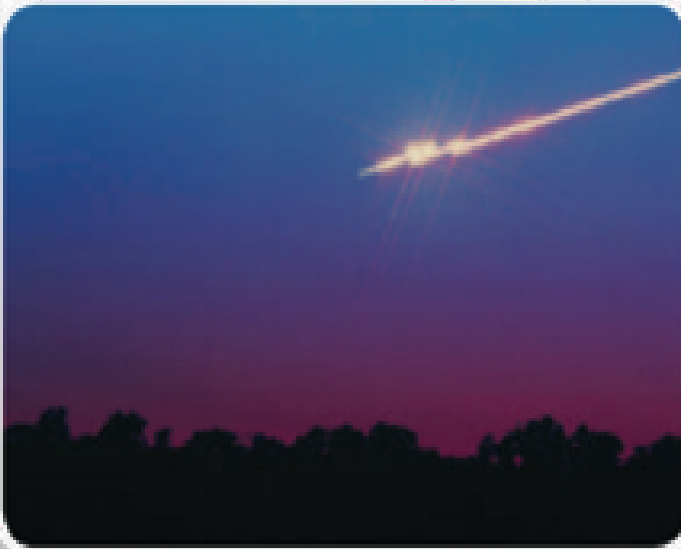


تطوير - إنتاج - توثيق

اللوغاريتمات
والدوال
اللوغاريتمية

٢-٣ - توثيق

لماذا؟

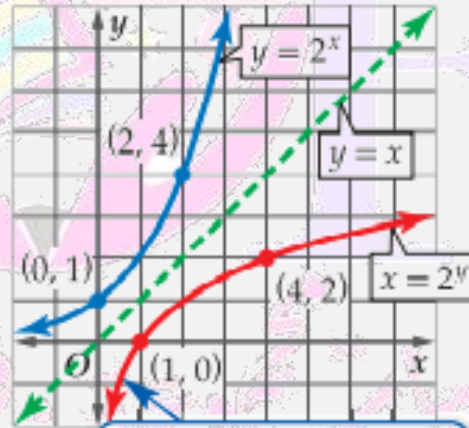


يُرجَّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال والعبارات اللوغاريتمية : يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانياً من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.



تقترب قيم x من الصفر
مع تناقص قيم y

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان b, x عددين موجبين، حيث $b \neq 1$ ، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$ ، ويُعرّف على أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \leftrightarrow 3^y = 27$



مثال ١

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

$$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \quad (b)$$

$$\log_2 8 = 3 \quad (a)$$

$$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$$

$$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$$

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية،
وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

التحويل من الصورة
اللوغاريتمية الى
الصورة الأسية

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٢

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 \quad (b)$$

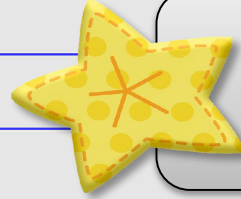
$$15^3 = 3375 \quad (a)$$

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$$

التحويل من الصورة
الأسية الى الصورة
اللوغاريتمية

تطوير - إنتاج - توثيق

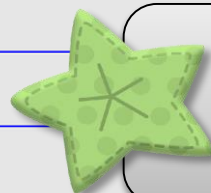


نحقق من فهمك

$$125^{\frac{1}{3}} = 5 \quad (2B)$$

$$\log_3 729 = 6 \quad (1B)$$

$$\log_4 16 = 2 \quad (1A)$$



تدريب

$$9^{-1} = \frac{1}{9} \quad (11)$$

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3 \quad (6)$$

مثال ٣

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

(a) $\log_{16} 4$

بفرضي أن العبارة اللوغاريتمية
تساوي y $\log_{16} 4 = y$

تعريف اللوغاريتم $4 = 16^y$

$4^1 = 4^{2y}$ $16 = 4^2$

$1 = 2y$

$\frac{1}{2} = y$

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

(b) $\log_7 \frac{1}{49}$

بفرضي أن العبارة اللوغاريتمية
تساوي y $\log_7 \frac{1}{49} = y$

تعريف اللوغاريتم $\frac{1}{49} = 7^y$

$7^{-2} = 7^y$ $\frac{1}{49} = 7^{-2}$

$-2 = y$

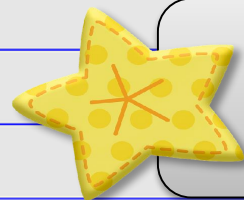
لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

خاصية المساواة للدوال الأسية

اقسم كلا الطرفين على 2

خاصية المساواة للدوال الأسية

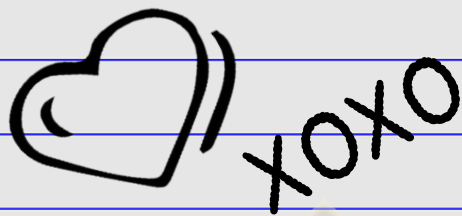
إيجاد قيمة عبارة
لوغاريتمية
مجموعة رعدة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من فهمك

$$\log_{\frac{1}{2}} 256 \quad (3B)$$

$$\log_3 81 \quad (3A)$$



مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0, b \neq 1$ ، x عدد حقيقي، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

إرشادات للدراسة

الأسس الصفري

$$\frac{0.06 + 0.07 + 0.08 + 0.09}{0.05 + 0.06 + 0.07 + 0.08} = \frac{0.3}{0.25} = 1.2$$

$$b^0 = 1$$

• $\log_b 0$ غير معرف لأن

$b^r \neq 0$ لأي قيمة لـ x .

مثال ٤

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

(a) $\log_5 125$

$$\log_5 125 = \log_5 5^3$$

$$= 3$$

(b) $\log_{10} 0.001$

$$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$$

$$= -3$$

$$5^3 = 125$$

$$\log_b b^x = x$$

$$\log_b b^x = x$$

(c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$$

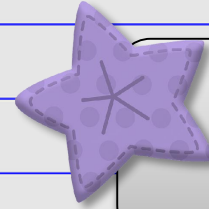
$$b^{\log_b x} = x$$

(d) $\log_{10} (-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرف فقط عندما $x > 0$ ،
فإن $\log_{10} (-5)$ غير معرف في مجموعة الأعداد
الحقيقية.

استعمال الخصائص
الأساسية
لللوغاريتمات

تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من فهمك

$$3^{\log_3 1} \quad (4B)$$

$$\log_9 81 \quad (4A)$$



تدريب

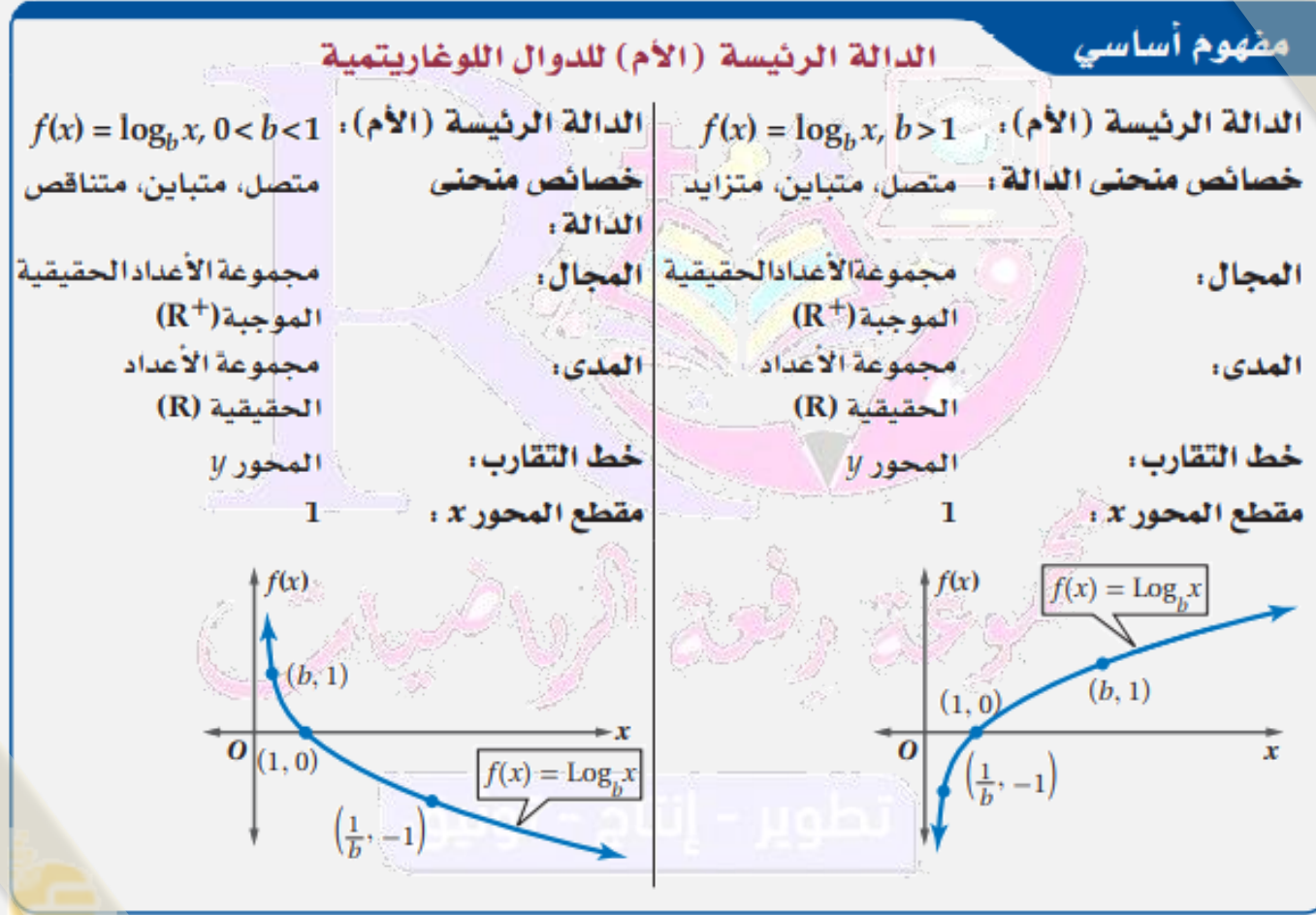
$$\log_{121} 11 \quad (26)$$

$$\log_{32} 2 \quad (27)$$

$$\log_{27} 3 \quad (26)$$

مقطع توضيحي





مثال ٥

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

$$f(x) = \log_5 x \quad (a)$$

الخطوة 1: حدّد الأساس.

$$b = 5$$

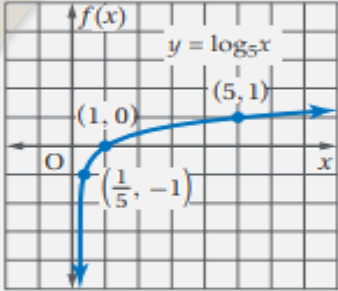
الخطوة 2: حدد نقاطاً على التمثيل البياني .

بما أن $5 > 1$ ، فاستعمل النقاط

$$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$$

أي النقاط $\left(\frac{1}{5}, -1\right), (1, 0), (5, 1)$.

الخطوة 3: مثل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.



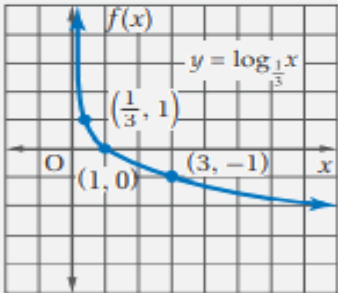
$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \quad (b)$$

الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $\left(\frac{1}{3}, 1\right), (1, 0), (3, -1)$

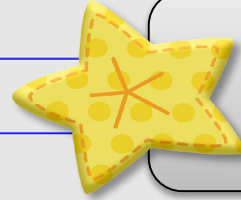
الخطوة 3: ارسم المنحنى.



تمثيل اللوغاريتمات
بيانياً

مجموعة رتبة الرياضيات

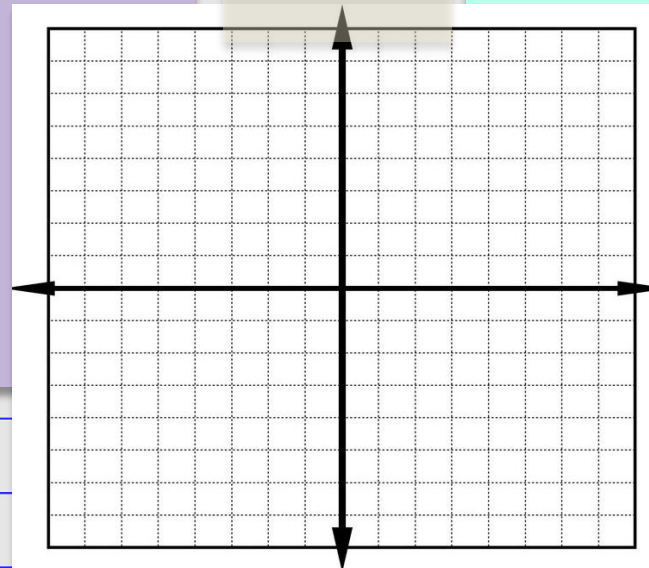
تطوير - إنتاج - توثيق



تحقق من فهمك

$$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x \quad (5B)$$

$$f(x) = \log_2 x \quad (5A)$$



$$1 + 2 = 3$$

وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

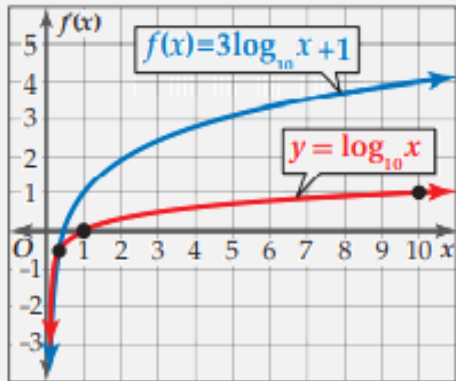
شهادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل
البياني
لاحظ في المثال 6a أنه
مع اقتراب x من موجب
مالاتهاية فإن $f(x)$ تقترب
إلى موجب مالاتهاية أيضًا.

مثال ٦

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

(a) $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$



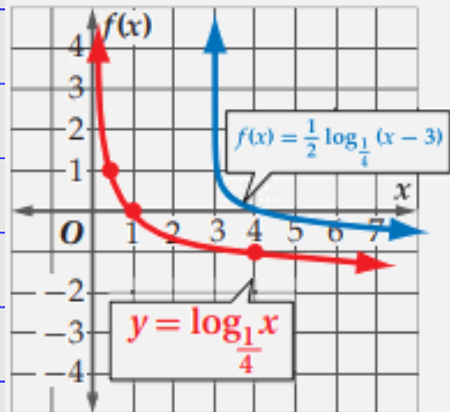
حدّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10 > 1$ فاستعمل النقاط $(1, 0)$, $(\frac{1}{10}, -1)$, أي النقاط $(10, 1)$ $(\frac{1}{10}, -1)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسياً.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.

(b) $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x - 3)$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

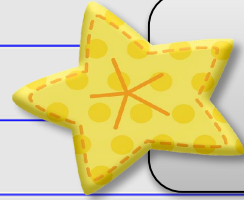
- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسياً.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.



تمثيل الدوال
اللوغاريتمية بيانياً

مجموعة رفعة الرياضيات

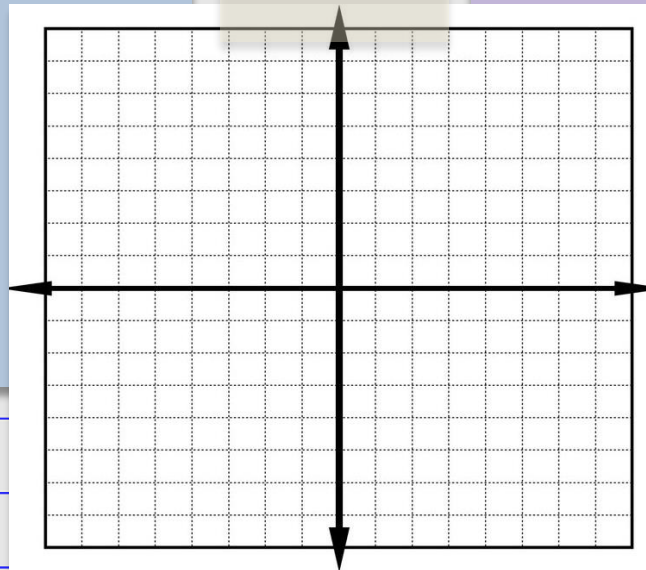
تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من فهمك

$$f(x) = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5 \quad (6B)$$

$$f(x) = 2 \log_3 (x - 2) \quad (6A)$$



مثال ٧

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعاود شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أي أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$ ، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

(a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$$\begin{aligned} y &= 10^{x-1} && \text{الدالة الأصلية} \\ &= 10^{9.2-1} && \text{عوض 9.2 بدلاً من } x \\ &= 10^{8.2} && \text{بسّط} \\ &= 158489319.2 && \text{استعمل الحاسبة} \end{aligned}$$

(b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$ ، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

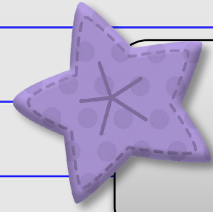
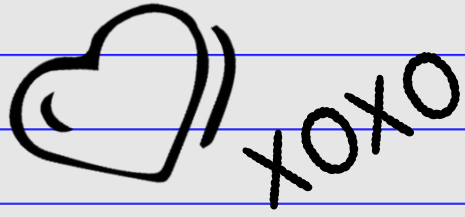
بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$$\begin{aligned} y &= 10^{x-1} && \text{المعادلة الأصلية} \\ x &= 10^{y-1} && \text{بدل بين } x \text{ و } y \text{ وحل بالنسبة لـ } y \\ y-1 &= \log_{10} x && \text{تعريف اللوغاريتمات} \\ y &= \log_{10} x + 1 && \text{أضف العدد 1 لكلا الطرفين} \end{aligned}$$

إيجاد الدوال العكسية
للدوال الأسية

مجموعة رعدة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



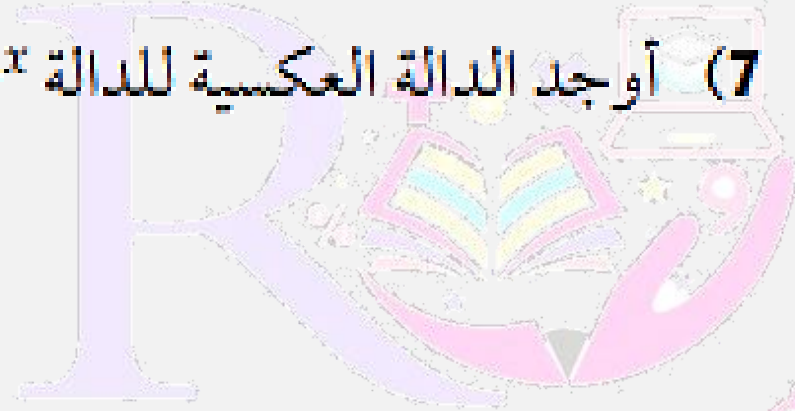
نفتق من فضلك



مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

(7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.



مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



تدريب

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$ ؟

- A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{4}{3}$ D 2

49) اكتشف المختلف: حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$$\log_4 16$$

$$\log_2 16$$

$$\log_2 4$$

$$\log_3 9$$

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر



تطوير - إنتاج - توزيع



$$1 + 2 = 3$$

خصائص اللوغاريتمات

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر



فيما سبق :
فيما سبق درست إيجاد قيم
عبارات لوغاريتمية .

والآن :

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية .
- أبسط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات .



**خصائص
اللوغاريتمات**

مجموعة ٢-٤ الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8



لماذا؟

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدرج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعدية. ويُعد هذا المقياس مثالاً آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $pH = -\log_{10} [H^+]$ ، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$pH_{\text{القهوة}} - pH_{\text{الماء النقي}} = -\log_{10} [H^+]_{\text{القهوة}} + \log_{10} [H^+]_{\text{الماء النقي}}$$

$$pH_{\text{القهوة}} - pH_{\text{الماء النقي}} = \log_{10} \frac{[H^+]_{\text{القهوة}}}{[H^+]_{\text{الماء النقي}}}$$

وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي

ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{[H^+]_{\text{القهوة}}}{[H^+]_{\text{الماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

مقطع توضيحي



خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

مثال ١

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3 \quad \log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_4 4^3 + \log_4 3$$

الخصائص الأساسية لللوغاريتمات

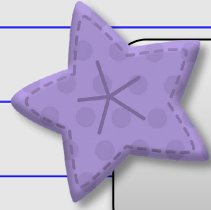
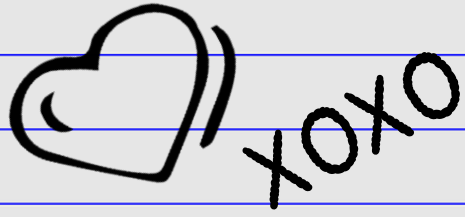
$$= 3 + \log_4 3$$

$$\log_4 3 \approx 0.7925$$

$$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$$

استعمال خاصية
الضرب في
اللوغاريتمات

تطوير - إنتاج - توثيق



نفتق من فضلك

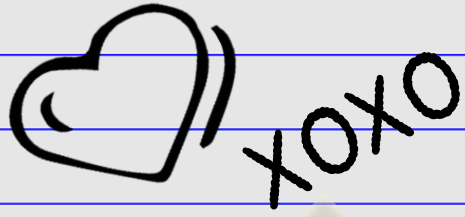
(1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.



تطوير - إنتاج - توزيع



تطوير - إنتاج - توزيع



مفهوم أساسي

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحاً منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مثال ٢

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$$7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5} \quad \log_6 7.2 = \log_6 \left(\frac{36}{5} \right)$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

الخصائص الأساسية لللوغاريتمات

$$\log_6 5 \approx 0.8982$$

$$= \log_6 6^2 - \log_6 5$$

$$= 2 - 0.8982$$

$$= 1.1018$$

استعمال خاصية
القسمة في
اللوغاريتمات

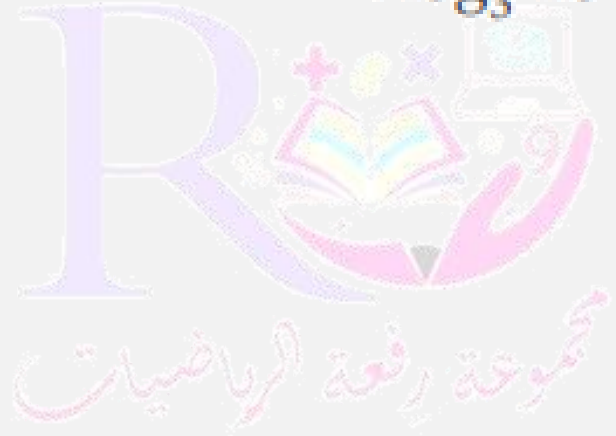
تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$

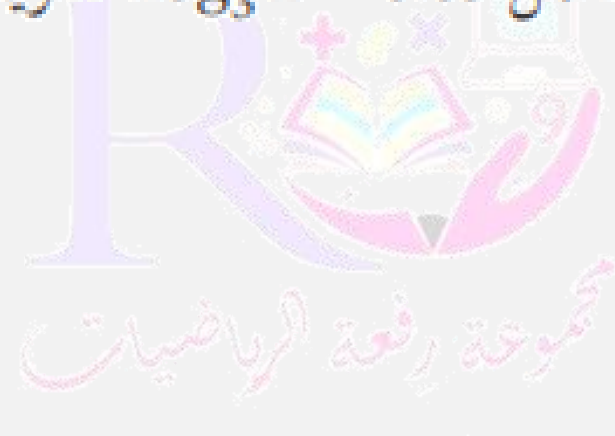


نتحقق من نفسك

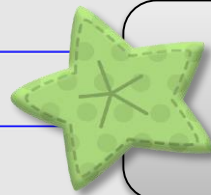
(1) استعمال $\log_3 2 \approx 0.63$ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.



لتطوير - إنتاج - توثيق



لتطوير - إنتاج - توثيق



تدريب

$$\log_4 0.6 \quad (4)$$

$$\log_4 15 \quad (1)$$

مثال ٣

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حل:

المعادلة الأصلية

$$\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

$$\text{pH} = 4.2$$

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$$

$$\log_{10} 1 = 0$$

$$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$$

بسّط

$$4.2 = -\log_{10} [H^+]$$

اضرب كلا الطرفين في -1

$$-4.2 = \log_{10} [H^+]$$

تعريف اللوغاريتم

$$10^{-4.2} = [H^+]$$

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

$$\text{pH} = 4.2$$

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

تحقق:

$$[H^+] = 10^{-4.2}$$

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

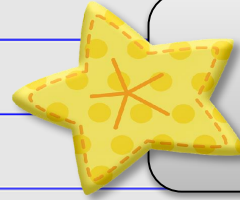
$$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$$

$$4.2 = 4.2 \quad \checkmark$$

استعمال خاصية
القسمة في
اللوغاريتمات

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



نتفق من نفسك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .



لتطوير - إنتاج - توثيق



لتطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللغظلي، لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$ ، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال، $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

مثال ٤

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$$5^2 = 25 \quad \log_2 25 = \log_2 5^2$$

خاصية لوغاريتم القوة

$$= 2 \log_2 5$$

$$\log_2 5 = 2.3219$$

$$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$$

إرشادات للدراسة

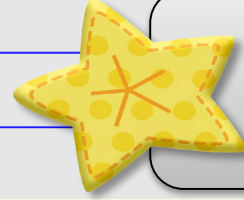
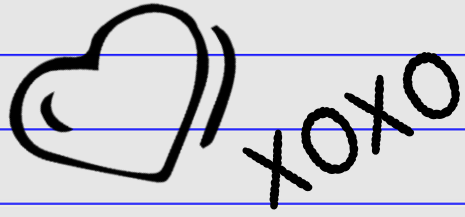
التحقق من الإجابة

يمكنك التحقق من إجابة
مثال 4 بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$
مستعملًا الحاسبة والإجابة
التي ستحصل عليها هي
25 تقريبًا، ولكون
 $\log_2 25 \approx 4.6438$
فهذا يعني أن $25 \approx 2^{4.6438}$.

استعمال خاصية
لوغاريتم القوة

مجموعة رعدة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



نفتق من نفسك

(4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرب قيمة $\log_3 49$.



تطوير - إنتاج - توثيق



تطوير - إنتاج - توثيق



تدريب

إذا كان , $\log_3 5 \approx 1.465$, $\log_5 7 \approx 1.2091$, $\log_6 8 \approx 1.1606$, $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي : (مثال 4)

$$\log_5 49 \quad (13)$$

$$\log_3 25 \quad (12)$$

مقطع توضيحي



مثال ٥

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4.

$$\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}} \quad \log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$$

$$4^3 = 64 \quad = \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$$

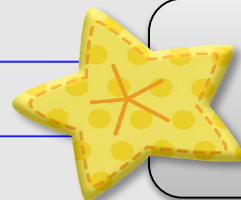
$$\text{خاصية قوة القوة} \quad = \log_4 4^{\frac{3}{5}}$$

$$\text{خاصية لوغاريتم القوة} \quad = \frac{3}{5} \log_4 4$$

$$\log_b b = 1 \quad = \frac{3}{5} (1) = \frac{3}{5}$$

تبسيط العبارات
اللوغاريتمية
مجموعة رعدة الرياضيات

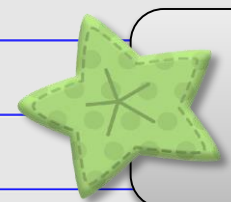
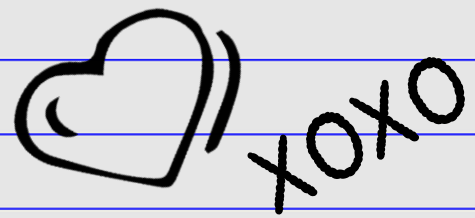
تطوير - إنتاج - توثيق



نحقق من فهمك

$$\log_7 \sqrt[6]{49} \quad (5B)$$

$$\log_6 \sqrt[5]{36} \quad (5A)$$



تدريب

$$\log_2 \sqrt[5]{32} \quad (19)$$

$$\log_5 \sqrt[4]{25} \quad (18)$$

مثال ٦

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

$$\log_2 12x^5y^{-2} \quad (a)$$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

خاصية لوغاريتم القوة

$$\begin{aligned} \log_2 12x^5y^{-2} &= \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2} \\ &= \log_2 12 + 5 \log_2 x - 2 \log_2 y \end{aligned}$$

$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} \quad (b)$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

خاصية لوغاريتم القوة

$$\begin{aligned} \log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} &= \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2} \\ &= 2 \log_2 a - 3 \log_2 b - 2 \log_2 c \end{aligned}$$

$$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} \quad (c)$$

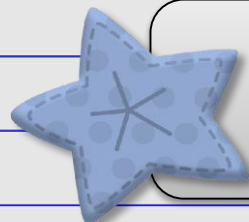
خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$\sqrt[5]{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{5}}$$

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} &= \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x} \\ &= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}} \\ &= \log_3 (x-1) - \frac{1}{5} \log_3 (3-2x) \end{aligned}$$

كتابة العبارات
اللوغاريتمية
بالصورة المطولة

تطوير - إنتاج - توثيق



تخقق من نفسك

$$\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1} \quad (6C)$$

$$\log_6 5x^3 y^7 z^{0.5} \quad (6B)$$

$$\log_{13} 6a^3 bc^4 \quad (6A)$$

مثال ٧

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$$(a) \quad 4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x + 6)$$

$$\text{خاصية لوغاريتم القوة} \quad 4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x + 6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x + 6)^{\frac{1}{3}}$$

$$(x + 6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x + 6}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x + 6}$$

$$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x + 6}}$$

بإنتاج المقام

$$= \log_3 \frac{x^4 \sqrt[3]{(x + 6)^2}}{x + 6}$$

$$(b) \quad 0.5 \log_7 (x + 2) + 6 \log_7 2x$$

$$\text{خاصية لوغاريتم القوة} \quad 0.5 \log_7 (x + 2) + 6 \log_7 2x = \log_7 (x + 2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$$

$$(x + 2)^{0.5} = \sqrt{x + 2}, 2^6 = 64$$

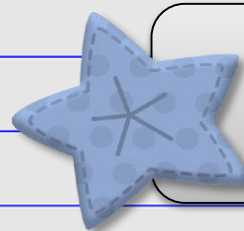
خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_7 \sqrt{x + 2} + \log_7 64 x^6$$

$$= \log_7 64 x^6 \sqrt{x + 2}$$

كتابة العبارات
اللوغاريتمية
بالصورة المختصرة

تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من فهمك

$$\log_3 (2x - 1) - \frac{1}{4} \log_3 (x + 1) \quad (7B)$$

$$-5 \log_2 (x + 1) + 3 \log_2 (6x) \quad (7A)$$

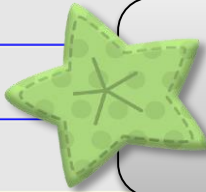


تدريب

$$3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 (6 - x) \quad (30)$$

$$\log_9 6x^3y^5z \quad (24)$$

$$1 + 2 = 3$$



تدريب

64) ما قيمة $2 \log_5 3 - \log_5 8 - 2 \log_5 12$ ؟

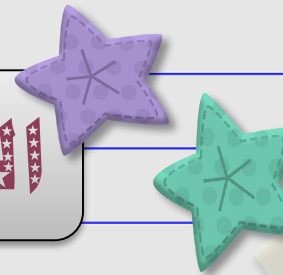
A $\log_5 2$

B $\log_5 0.5$

C $\log_5 3$

D 1

العب واستنتج



$$\log_x 27 = 3$$

$$x = 3$$

$$\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$$

$$2\log_5 x = \log_5 4$$

$$x = 2$$

$$\log_{10} 100$$

$$\log_3 3x + \log_3 2 = \log_3 36$$

$$x = 6$$

$$\log_2 64$$

$$\log_4 (x + 10) > \log_4 (2x + 1)$$

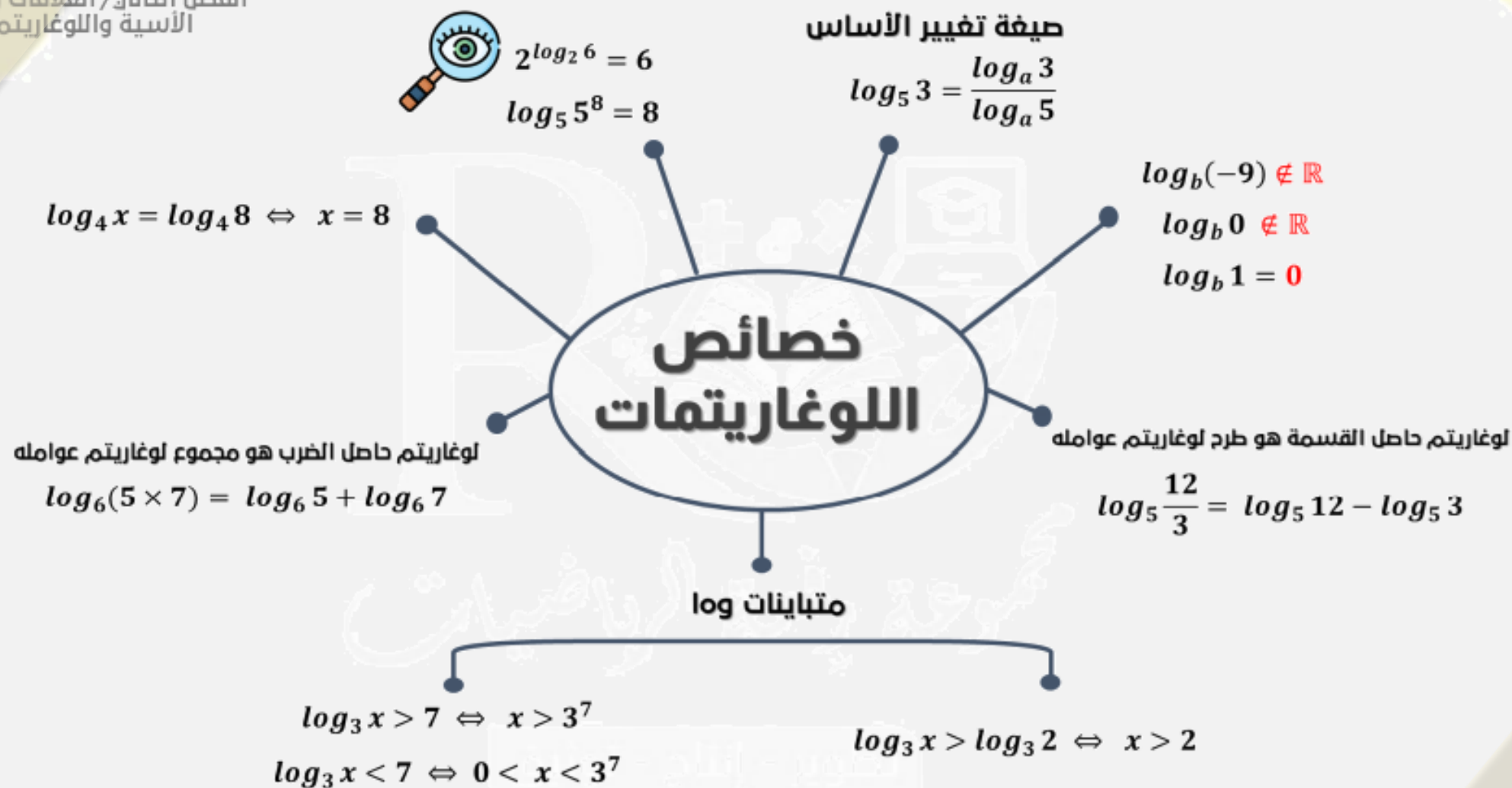
$$x < 9$$

$$\log_{27} x < \frac{2}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x > 16$$

$$x > 4$$

$$\log_2 x > 2$$



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشوري



تطوير - إنتاج - توزيع



$$1 + 2 = 3$$

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشوري

المفردات:

المعادلة اللوغاريتمية

logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية

logarithmic inequality

مجموعة روضة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق:

درست إيجاد قيمة عبارات
لوغاريتمية.

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية
- أحل متباينات لوغاريتمية

R
مجموعة روضة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

حل المعادلات
والمتباينات
اللوغاريتمية

تطوير - إنتاج - توثيق
٥-٢

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من F-0 إلى F-6 بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وبحسب طول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة F-6 هي فئة أشد الأعاصير تدميراً.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.

القدرة التدميرية	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	مقياس F
تكسر الأغصان	40-72	F-0 ضعيف
اهتزاز	73-112	F-1 متوسط
تصدع الجدران	113-157	F-2 قوي
اقتلاع الأشجار	158-206	F-3 شديد
تطاير السيارات	207-260	F-4 مدمر
تطاير الجبوت	261-318	F-5 هائل
لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً	319-379	F-6 لا يتصور



مثال ١

حلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

المعادلة الأصلية

$$\log_{36} x = \frac{3}{2}$$

تعريف اللوغاريتم

$$x = 36^{\frac{3}{2}}$$

$$36 = 6^2$$

خاصية قوة القوة

$$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$x = 6^3 = 216$$

التحقق: عوض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

المعادلة الأصلية

$$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$

عوض 216 بدلاً من x

$$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$

حلّ

$$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$

خاصيتا ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة

$$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$

بسّط

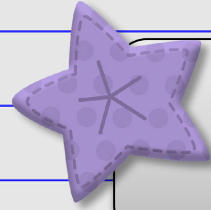
$$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$$

الحل صحيح

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \checkmark$$

حل معادلات
باستعمال تعريف
اللوغاريتم

تطوير - إنتاج - توثيق

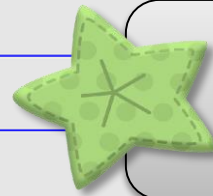


تحقق من نفسك

$$\log_{16} x = \frac{5}{2} \quad (1B)$$

$$\log_9 x = \frac{3}{2} \quad (1A)$$

$$1 + 2 = 3$$

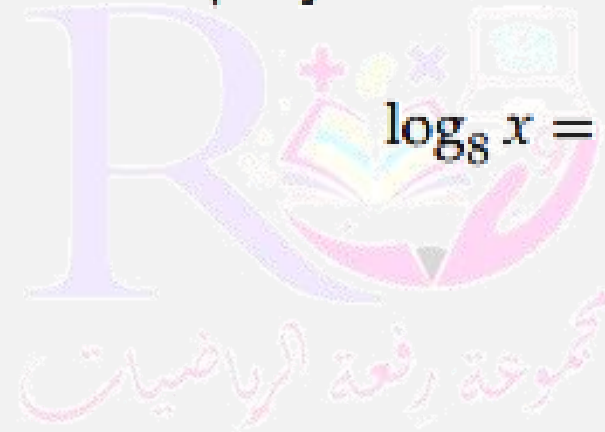


تدريب

حلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 1)



لتطوير - إنتاج - توثيق



لتطوير - إنتاج - توثيق

$$\log_8 x = \frac{4}{3} \quad (1)$$

مثال ٢

حلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

- 4 D 2 C -1 B -2 A

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.
حل فقرة الاختبار:

المعادلة الأصلية

$$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$x^2 - 4 = 3x$$

اطرح $3x$ من كلا الطرفين

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

حلّ إلى العوامل

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x - 4 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 1 = 0$$

حلّ كل معادلة

$$x = 4 \quad \text{أو} \quad x = -1$$

التحقق: عوض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$$x = 4$$

$$x = -1$$

$$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$$

$$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$$

$$\log_2 12 = \log_2 12 \quad \checkmark$$

$$\log_2 (-3) = \log_2 (-3) \quad \times$$

بما أن $\log_2 (-3)$ غير معرف، فالإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

إرشادات للدراسة

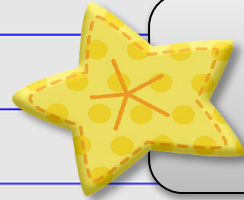
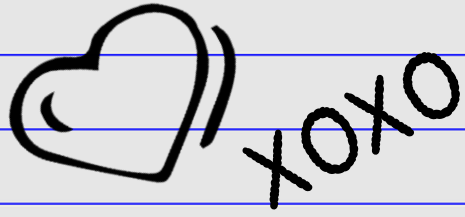
التعويض

اختصاراً للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

مثال على اختبار

مجموعة رعدة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



تفكر من نفسك

(2) حل المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

15 D

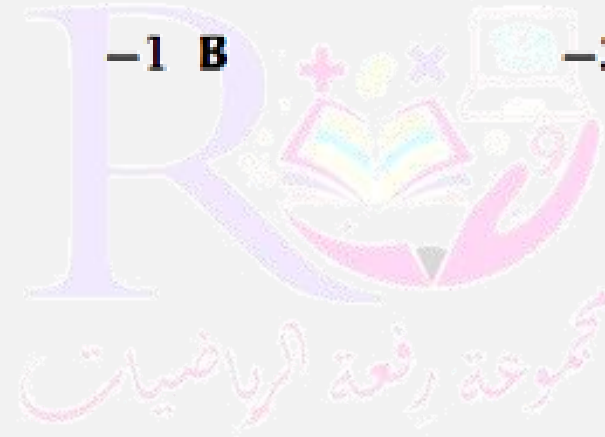
5 C

-1 B

-3 A



نظور - إنعام - نواليف



نظور - إنعام - نواليف

مثال ٣

حلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

المعادلة الأصلية

$$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$\log_6 x (x - 9) = 2$$

تعريف اللوغاريتم

$$x(x - 9) = 6^2$$

بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين

$$x^2 - 9x - 36 = 0$$

حلّ

$$(x - 12)(x + 3) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x - 12 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 3 = 0$$

حل كل معادلة

$$x = 12 \quad \quad \quad x = -3$$

$$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$$

$$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2 \quad \text{التحقق:}$$

$$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$$

بما أن $\log_6 (-12)$ و $\log_6 (-3)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

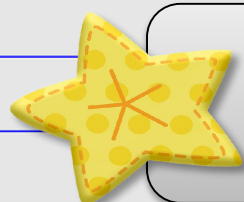
$$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 = 2 \quad \checkmark$$

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

حل معادلات
باستعمال خاصية
الضرب في
اللوغاريتمات

تطوير - إنتاج - توثيق



نتحقق من فهمك

$$\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2 \quad (3B)$$

$$2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3 \quad (3A)$$



$$3 \log_2 x = \log_2 8 \quad (10)$$

$$5 \log_2 x = \log_2 32 \quad (9)$$

مقطع توضيحي



حل المتباينات اللوغاريتمية : المتباينة اللوغاريتمية هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$, $b > 1$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

تتحقق هذه الخاصية أيضاً إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\geq$, $\leq$

مثال ٤

أوجد مجموعة حلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

المتباينة الأساسية

$$\log_3 x > 4$$

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$$x > 3^4$$

بسط

$$x > 81$$

إذن مجموعة الحل هي $\{x | x > 81, x \in \mathbb{R}\}$



التحقق: عرّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$$x = 243$$

$$\log_3 243 \stackrel{?}{>} 4$$

$$5 > 4 \quad \checkmark$$

$$x = 9$$

$$\log_3 9 \stackrel{?}{>} 4$$

$$2 > 4 \quad \times$$

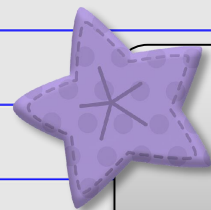
إذن الحل صحيح.

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية ،
عند حل متباينة لوغاريتمية
يستثنى قيم المتغير التي
لا يكون اللوغاريتم عندها
معرفاً.

حل متباينات تتضمن
عبارة لوغاريتمية
واحدة

تطوير - إنتاج - توثيق



تتحقق من فهمك

$$\log_2 x < 4 \quad (4B)$$

$$\log_4 x \geq 3 \quad (4A)$$

$$1 + 2 = 3$$

مفهوم أساسي

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
 $x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضاً إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\geq$ ، $\leq$.

مثال ٥

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

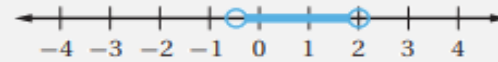
$$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1) \quad \text{المتباينة الأساسية}$$

$$x + 3 > 2x + 1 \quad \text{خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية}$$

$$2 > x \quad \text{اطرح } x + 1 \text{ من كلا الطرفين}$$

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ أو $x \leq -3$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$

إذن مجموعة الحل هي $\left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x < 2, x \in \mathbb{R} \right\}$.



التحقق: عوض بعدد يقع في الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$ ، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$.

$$x = 3$$

$$\log_4 (3+3) \stackrel{?}{>} \log_4 (2 \times 3 + 1)$$

$$\log_4 6 \stackrel{?}{>} \log_4 7$$

$$\log_4 6 > \log_4 7 \quad \times$$

الدالة اللوغاريتمية
متزايدة عندما تكون
قيمة الأساس أكبر من 1

$$x = 1$$

$$\log_4 (1+3) \stackrel{?}{>} \log_4 (2+1)$$

$$\log_4 4 \stackrel{?}{>} \log_4 3$$

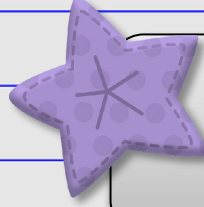
$$\log_4 4 > \log_4 3 \quad \checkmark$$

الدالة اللوغاريتمية
متزايدة عندما تكون
قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

حل متباينات تتضمن
عبارتين
لوغاريتميتين لهما
الأساس نفسه

$$1 + 2 = 3$$



نتحقق من فهمك

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.



لتطوير - إنتاج - توثيق



لتطوير - إنتاج - توثيق

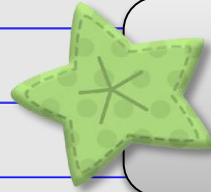
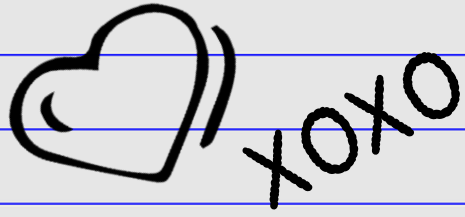


تدريب

$$1 + 2 = 3$$

$$\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3) \quad (23)$$

$$\log_6 x < -3 \quad (19)$$



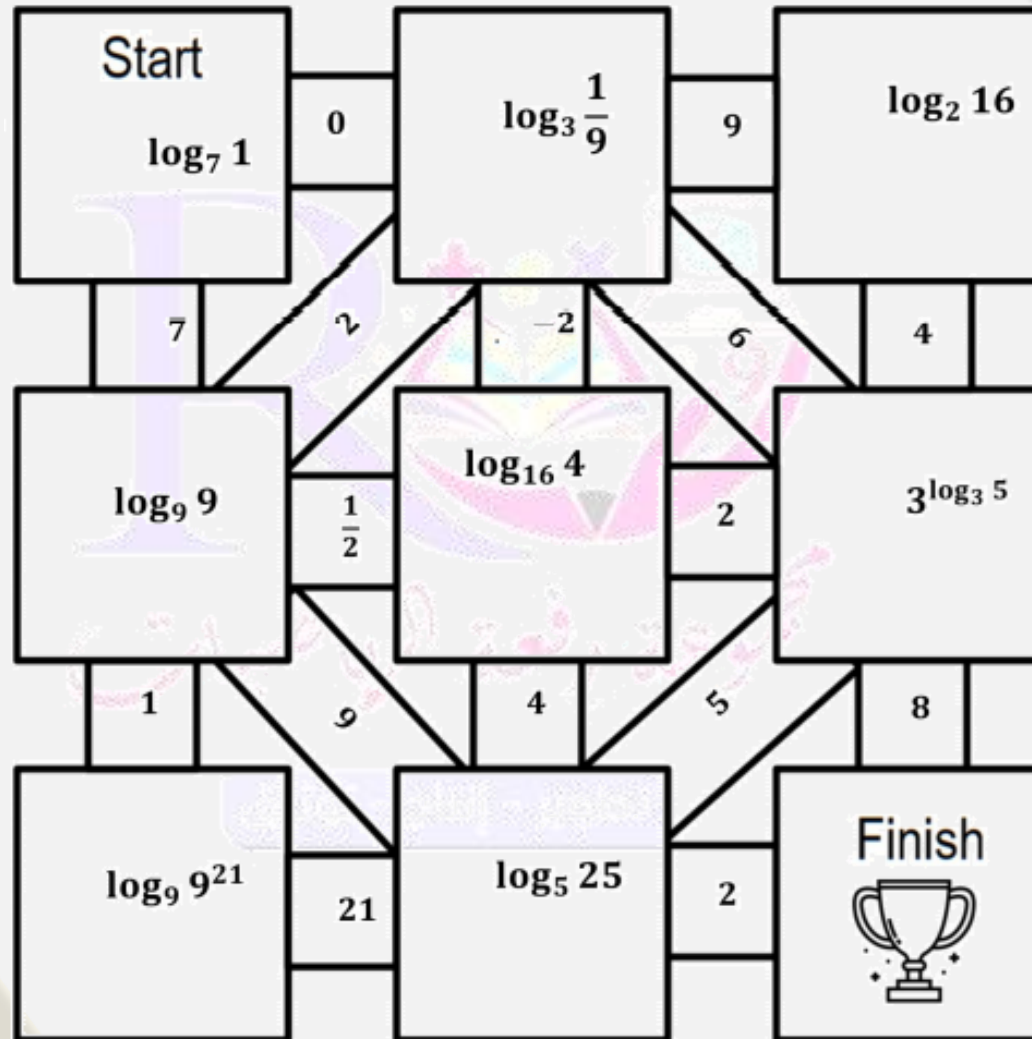
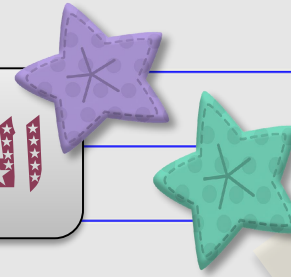
51) أي مما يأتي يمثل حلاً للمعادلة $\log_4 x - \log_4 (x - 1) = \frac{1}{2}$ ؟

- | | |
|---|----------------|
| A | $-\frac{1}{2}$ |
| B | $\frac{1}{2}$ |
| C | -2 |
| D | 2 |

33) تحدّ: أوجد قيمة

$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$

العب واستنتج



حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية

معادلة لوغاريتمية

log في طرفين
من المعادلة

حذف log من الطرفين
ثم حل المعادلة

$$\log_8(2x + 1) = \log_8 21$$

$$2x + 1 = 21$$

$$2x = 21 - 1$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

log في طرف
واحد من المعادلة

تحويلها إلى معادلة
أسية ، ثم حل المعادلة

$$\log_x 81 = 4$$

$$x^4 = 81$$

$$x^4 = 3^4$$

$$x = 4$$

معادلة أسية

الأساس $\neq$ الأساس

بأخذ log للطرفين
ثم حل المعادلة

$$4^x = 17$$

$$\log 4^x = \log 17$$

$$x \log 4 = \log 17$$

$$x = \frac{\log 17}{\log 4} \approx 2.04$$

الأساس = الأساس

الأس = الأس

$$2^{x-5} = 64$$

$$2^{x-5} = 2^6$$

$$x - 5 = 6$$

$$x = 6 + 5$$

$$x = 11$$

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أكثر



تطوير - إنتاج - توزيع



$$1 + 2 = 3$$



جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشوري

المفردات:

اللوغاريتم العشري
common logarithm

صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

فيما سبق:

درست تبسيط عبارات
لوغاريتمية وحل معادلات
لوغاريتمية باستعمال
خصائص اللوغاريتمات

والآن:

- أحل معادلات ومتباينات أسية
باستعمال اللوغاريتمات
العشرية
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية
باستعمال صيغة تغيير الأساس



تطوير - إنتاج - توثيق

اللوغاريتمات
العشرية

مجموعة روعة الرياضيات
٢-٦

تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جداً	10^8 عظيمة
التأثير في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقة.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضراراً أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضراراً بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى 100 mi^2 .	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جداً في مناطق شاسعة جداً تصل إلى مئات الأميال.
الصور								

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلاً تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.



$$1 + 2 = 3$$

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة " $y = \log_{10} x$ " تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 اللوغاريتمات العشرية، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًا، ويستعمل المفتاح **LOG** لإيجاد قيمته.

مثال ١

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: $\boxed{\text{LOG}} \boxed{5} \boxed{\text{ENTER}}$ تجد أن:

$$\log 5 \approx 0.6990$$

(b) $\log 0.3$

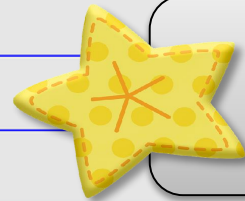
اضغط على المفاتيح: $\boxed{\text{LOG}} \boxed{0.3} \boxed{\text{ENTER}}$ تجد أن:

$$\log 0.3 \approx -0.5229$$

إيجاد قيمة
اللوغاريتم العشري

مجموعة رغبة الرياضيات

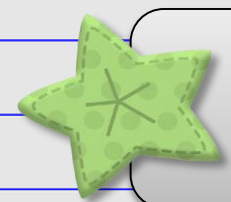
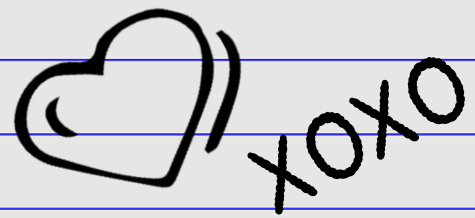
تطوير - إنتاج - توثيق



تتحقق من فهمك

$$\log 0.5 \text{ (1B)}$$

$$\log 7 \text{ (1A)}$$



تدريب

$$\log_{3.2} 6$$

$$\log_{11} 5$$

مثال ٢

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$ ، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$ ؟

$$L = 10 \log \frac{I}{m} \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

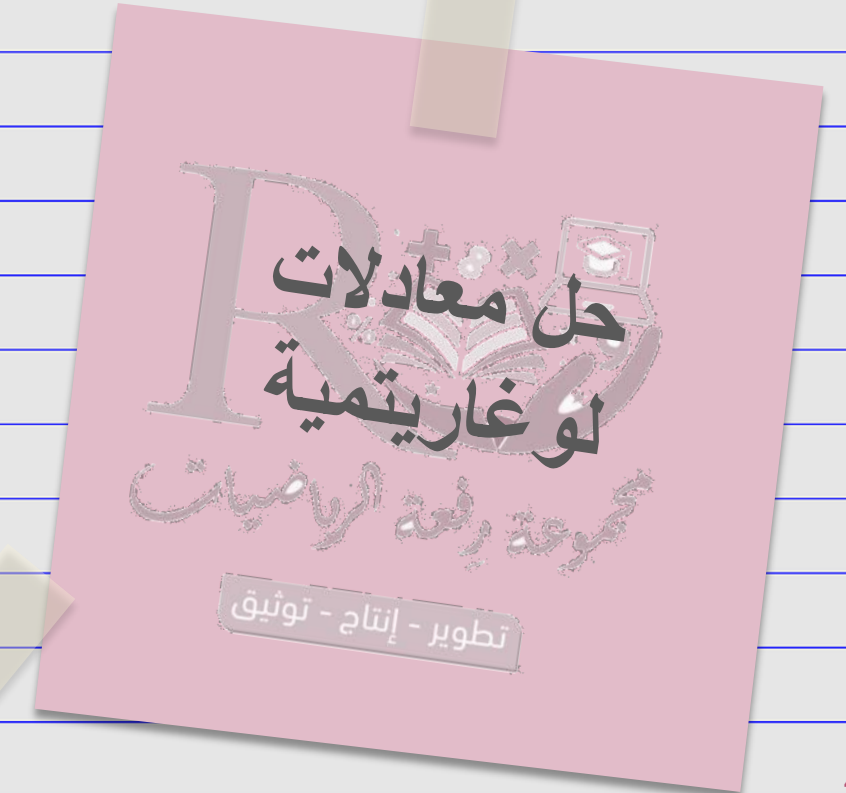
$$66.6 = 10 \log \frac{I}{1} \quad L = 66.6, m = 1$$

$$6.66 = \log I \quad \text{اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط}$$

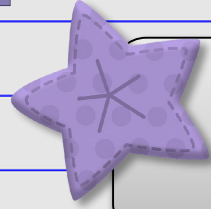
$$I = 10^{6.66} \quad \text{الصورة الأسية}$$

$$I \approx 4570882 \quad \text{استعمل الحاسبة}$$

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.



$$1 + 2 = 3$$



نتفق من فضلك

(2) **هزات أرضية:** ترتبط كمية الطاقة E مقاسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

إرشادات للدراسة

وحدة الجول:

تذكر أن الجول هو وحدة
قياس الطاقة، وكذلك الإيرج،
حيث $1 \text{ إيرج} = 4^{-7} \text{ جول}$

مقطع توضيحي



مثال ٣

حلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

المعادلة الأصلية

$$4^x = 19$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\log 4^x = \log 19$$

خاصية لوغاريتم القوة

$$x \log 4 = \log 19$$

اقسم كلا الطرفين على $\log 4$

$$x = \frac{\log 19}{\log 4}$$

استعمل الحاسبة

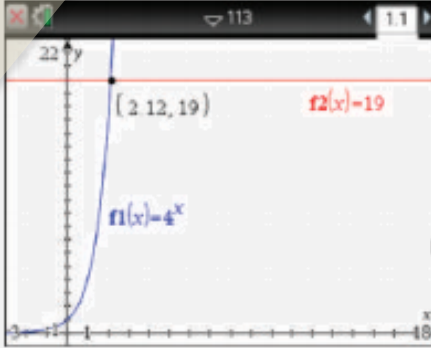
$$x \approx 2.1240$$

الحل هو 2.1240 تقريبًا .

حل معادلات أسية
باستعمال اللوغاريتم
العشري

تطوير - إنتاج - توثيق

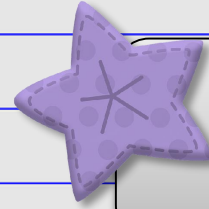
مثال ٣



تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانياً باستعمال ميزة نقاط التقاطع في الحاسبة البيانية TI-nspire. مثل المعادلة $f1(x) = 4^x$ والمستقيم $f2(x) = 19$ بيانياً على الشاشة نفسها. ثم أوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين بالضغط على مفتاح **menu**، ثم اختر **6: تحليل الرسم البياني** واختر منها **4: نقاط التقاطع**، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرك المؤشر مروراً بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2, 12, 19)$. الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبرياً. ✓

حل معادلات أسية
باستعمال اللوغاريتم
العشري

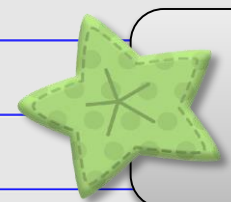
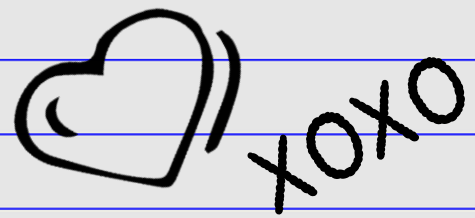
تطوير - إنتاج - توثيق



تدقق من فهمك

$$6^x = 42 \quad (3B)$$

$$3^x = 15 \quad (3A)$$



تدريب

$$15^{x^2} = 110 \quad (18)$$

$$9^b - 1 = 7^b \quad (17)$$

مثال ٤

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$ ، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

المتباينة الأصلية

$$3^{5y} < 7^{y-2}$$

خاصية المتباين للدوال اللوغاريتمية

$$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$$

خاصية لوغاريتم القوة

$$5y \log 3 < (y-2) \log 7$$

خاصية التوزيع

$$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$$

اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين

$$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$$

خاصية التوزيع

$$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$$

اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$

$$y < \frac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$$

استعمل الحاسبة

$$\{y \mid y < -1.0972, y \in \mathbb{R}\}$$

التحقق: اختبر $y = -2$

المتباينة الأصلية

$$3^{5y} < 7^{y-2}$$

$$y = -2$$

$$3^{5(-2)} \geq 7^{(-2)-2}$$

بسّط

$$3^{-10} \geq 7^{-4}$$

خاصية الأس السالب

$$\frac{1}{59049} < \frac{1}{2401} \quad \checkmark$$

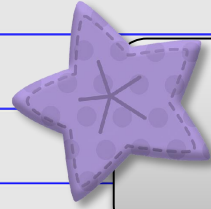
إرشادات للدراسة

حل المتباينات

تذكر أن تعكس اتجاه رمز
التباين عند ضرب كلا طرفي
المتباينة في عدد سالب
أو قسمتهما عليه. وبما أن
 $5 \log 3 - \log 7 > 0$
فلا يعكس اتجاه رمز التباين.

حل متباينات أسية
باستعمال اللوغاريتم
المعشري

تطوير - إنتاج - توثيق

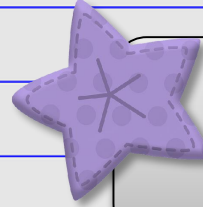


تتحقق من فهمك

$$4^y < 5^{2y+1} \quad (4B)$$

$$3^{2x} \geq 6^{x+1} \quad (4A)$$

$$1 + 2 = 3$$



نتحقق من فهمك



لتطوير - إنتاج - توثيق

$$5^{4n} > 33 \quad (20)$$

مجموعة رفعة الرياضيات

لتطوير - إنتاج - توثيق

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة a, b, n ، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

← لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b
← لوغاريتم الأساس القديم للأساس b

مثال:

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

تعريف اللوغاريتم

$$a^x = n$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\log_b a^x = \log_b n$$

خاصية لوغاريتم القوة

$$x \log_b a = \log_b n$$

اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$

$$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$$x = \log_a n$$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

مثال ٥

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$$

صيغة تغيير الأساس

$$\approx 2.7268$$

استعمل الحاسبة



تاريخ الرياضيات

الخوارزمي

هو أبو عبدالله محمد بن موسى
الخوارزمي (٨٤٨م-٧٨٠م) يُلقب
بأبي الجبر، وهو عالم عربي، أسس
علم الجبر ووضع أسسه وابتكر
حساب اللوغاريتمات.

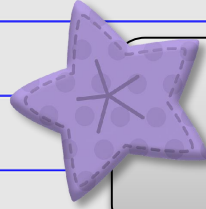


استعمال صيغة تغيير
الأساس

مجموعة رتبة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$

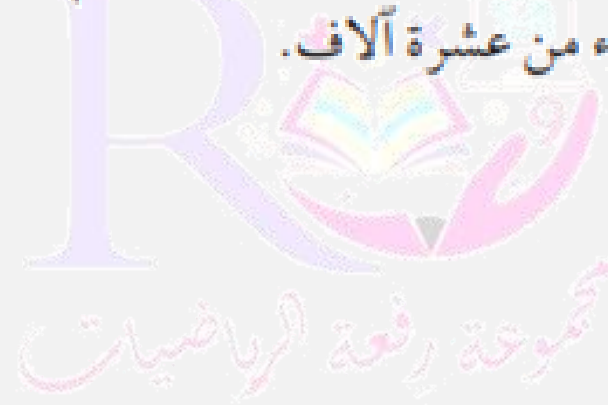


تفقق من نفسك

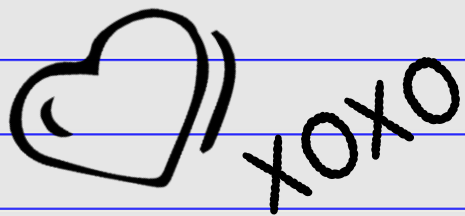
(5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.



لتطوير - إنتاج - توثيق



لتطوير - إنتاج - توثيق



تدريب

$$\log_2 16 \quad (27)$$

$$\log_3 7 \quad (26)$$

مثال ٦

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثنائي R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملاً صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$$R = \log_2 n$$

$$n = 240 \quad = \log_2 240$$

$$\text{صيغة تغيير الأساس} \quad = \frac{\log 240}{\log 2}$$

$$\text{بسّط} \quad \approx 7.9$$

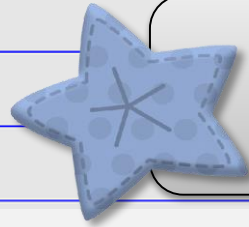
الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة يساوي 7.9 ثوانٍ تقريباً.

استعمال صيغة تغيير
الأساس

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



تفقق من نفسك

(6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160 خطوة.



مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

جدول التعلم



ماذا أعرف



ماذا أريد أن
أعرف



ماذا تعلمت



كيف أنظم
أشوري





الفصل الثالث (المتطابقات والمعادلات المثلثية)

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية،
وتمثيلاتُها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحل معادلات مثلثية.

إلكترونيات: تستعمل

الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

التهيئة



مراجعة المفردات :

الدالة الدورية (periodic function)

هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

النسبة المثلثية (trigonometric ratio)

نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا

(trigonometric functions of general angles)

لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x}, x \neq 0 & \csc \theta &= \frac{r}{y}, y \neq 0 \\ \sec \theta &= \frac{r}{x}, x \neq 0 & \cot \theta &= \frac{x}{y}, y \neq 0\end{aligned}$$



الحل الدخيل (extraneous solution)

الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle)

زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y .

الزاوية المرجعية (reference angle)

إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x ، ويمكن استعمالها لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ .

دايرة الوحدة (unit circle)

هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.



التهيئة

حلل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تاماً وإذا كان ذلك أي ممكن فأكتب " أولية "

$$5x^2 - 20 \quad (2)$$

$$-16a^2 + 4a \quad (1)$$

$$2y^2 - y - 15 \quad (4)$$

$$4x^2 - x + 6 \quad (3)$$

التهيئة



حل كلًا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل :

$$x^2 + 2x - 35 = 0 \quad (7)$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad (9)$$

$$x^2 + 6x = 0 \quad (6)$$

$$x^2 - 9 = 0 \quad (8)$$

(5) **هندسة :** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي : $(x^2 + 6x + 8) \text{ cm}^2$. إذا كان طول القطعة : $(x + 4) \text{ cm}$ ، فما عرضها؟

التهيئة



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي :

(12) $\cos 225^\circ$

(11) $\sin 45^\circ$

(14) $\sin 120^\circ$

(13) $\tan 150^\circ$



x ft

$(x + 1)$ ft

(10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض 42 ft^2 ، وبعديه عددان صحيحان ، فأوجد قيمة x الممكنة.

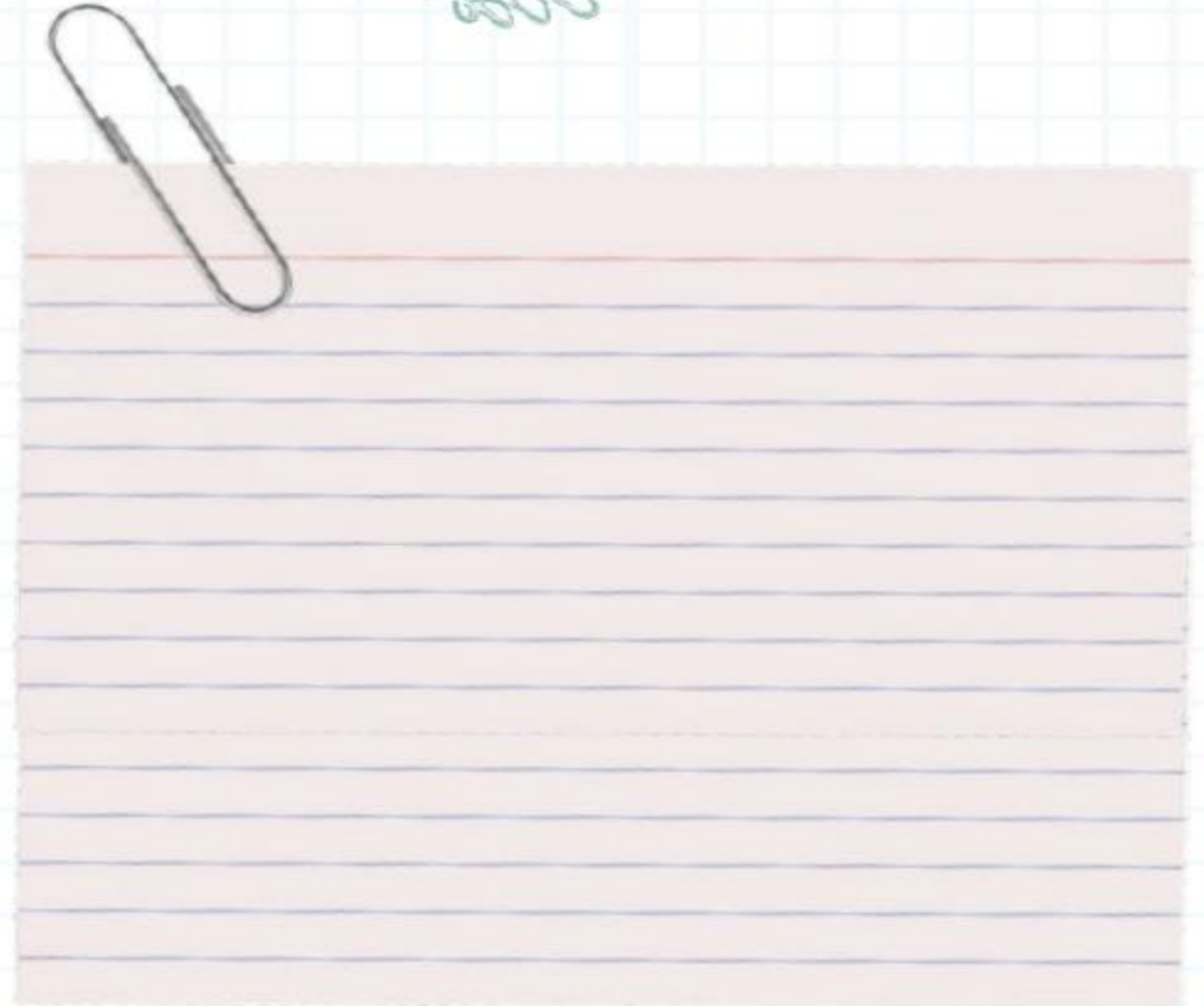
التهيئة

15) قصر المصمك: يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



التهيئة

الواجب المنزلي



3-1 المتطابقات المثلثية

المفردات :

المتطابقة
identity
المتطابقة المثلثية
trigonometric identity
المتطابقات النسبية
quotient identities
متطابقات المقلوب
reciprocal identities
متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities
متطابقات الزاويتين
المتتامتين
cofunction identities
متطابقات الدوال الزوجية
والدوال الفردية
odd-even identities

الآن :

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

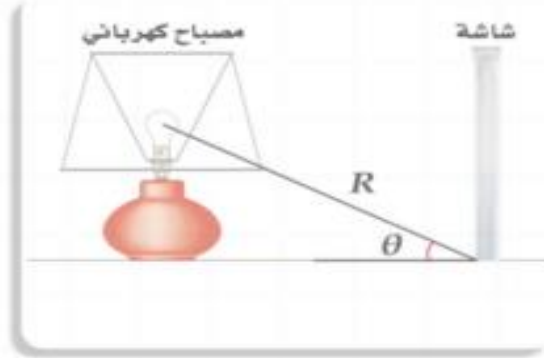
فيما سبق :

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

جدول التعلم

	ماذا أعرف
	ماذا أريد أن أعرف
	ماذا تعلمت
	كيف أتعلم أكثر

3-1 المتطابقات المثلثية



لماذا؟
تُسمى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$ ، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.

المتطابقات المثلثية الأساسية : تكون المعادلة متطابقة إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلاً:
 $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x ، والمتطابقة المثلثية هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثلاً مضاداً يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

3-1 المتطابقات المثلثية

مقطع توضيحي

3-1 المتطابقات المثلثية

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين
المتتامتين،

يمكن كتابة متطابقات
الزاويتين المتتامتين
بالدرجات كما يلي:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

المتطابقات المثلثية الأساسية

مفهوم أساسي

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

المتطابقات النسبية:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$$

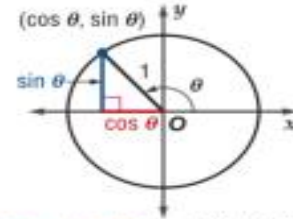
متطابقات المقلوب:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$$



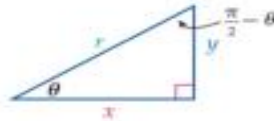
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

متطابقات فيثاغورس:



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

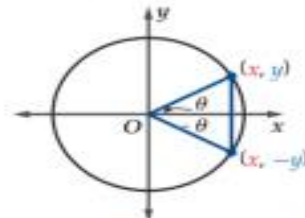
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$$

متطابقات الزاويتين
المتتامتين:



$$\sin \theta = y$$

$$\cos \theta = x$$

$$\sin(-\theta) = -y$$

$$\cos(-\theta) = x$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

متطابقات الدوال الزوجية
والدوال الفردية:

3-1 المتطابقات المثلثية



مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

(a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{4}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{متطابقات فيثاغورس}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \quad \text{اطرح } \sin^2 \theta \text{ من كلا الطرفين}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \quad \text{عوّض } \frac{1}{4} \text{ بدلا من } \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{16} \quad \text{أوجد مربع العدد } \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{15}{16} \quad \text{اطرح}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين}$$

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos \theta$ تكون سالبة، ولذلك فإن $\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1} \frac{1}{4}$

$$\sin^{-1} \frac{1}{4} \approx 14.48^\circ \quad \text{استعمل الحاسبة}$$

لأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، فإن $\theta \approx 180^\circ - 14.48^\circ = 165.52^\circ$

الخطوة 2: أوجد $\cos \theta$

عوّض عن θ بـ 165.52°

$$\cos 165.52^\circ \approx -0.97$$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$$-\frac{\sqrt{15}}{4} \approx -0.97$$

$$\checkmark -0.968 \approx -0.97$$

(b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc \theta$ إذا كان $\cot \theta = -\frac{3}{5}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta \quad \text{متطابقات فيثاغورس}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2 \theta \quad \text{عوّض } -\frac{3}{5} \text{ بدلا من } \cot \theta$$

$$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2 \theta \quad \text{أوجد مربع العدد } -\frac{3}{5}$$

$$\frac{34}{25} = \csc^2 \theta \quad \frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$$

$$\pm \frac{\sqrt{34}}{5} = \csc \theta \quad \text{خذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc \theta$ سالبة، ولذلك $\csc \theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$

3-1 المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

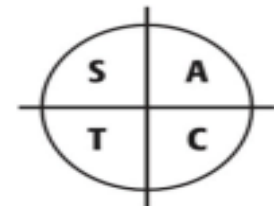
- (1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$.
(1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec \theta$ إذا كان $\sin \theta = -\frac{2}{7}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

إرشادات للدراسة

الأرباع،

يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1, 2, 3, 4.

الدالة	+	-
$\sin \theta$	1, 2	3, 4
$\csc \theta$	1, 2	3, 4
$\cos \theta$	1, 4	2, 3
$\sec \theta$	1, 4	2, 3
$\tan \theta$	1, 3	2, 4
$\cot \theta$	1, 3	2, 4



A all functions
S sine
T tangent
C cosine

تدرب

(3) إذا كان $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ،

(2) إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ، $\csc \theta$



مقطع توضيحي

تبسيط العبارات المثلثية



إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية
عند تبسيط العبارات المثلثية
يكون من الأسهل عادة أن
تُكتب حدود العبارة جميعها
بدلالة: الجيب ($\sin \theta$) و/أو
بدلالة جيب التمام ($\cos \theta$).

تبسيط العبارات المثلثية: تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

تبسيط العبارة المثلثية

مثال 2

بسط العبارة: $\frac{\sin \theta \csc \theta}{\cot \theta}$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\frac{\sin \theta \csc \theta}{\cot \theta} = \frac{\cancel{\sin \theta} \frac{1}{\cancel{\sin \theta}}}{\frac{1}{\tan \theta}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan \theta}}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{\tan \theta}{1} = \tan \theta$$

3-1 المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

$$\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) \quad (2B)$$

$$\frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} \quad (2A)$$

3-1 المتطابقات المثلثية

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

(a) حل المعادلة $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لـ E .

المعادلة الأصلية

اضرب كلا الطرفين في E

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

اضرب كلا الطرفين في $\cos \theta$

(b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$ ؟ فسّر إجابتك.

المعادلة الأصلية

اضرب كلا الطرفين في E

اقسم كلا الطرفين على R^2

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

بسّط

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$ تبسّط إلى: $E = \frac{I \sin \theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة

في الفرع (a) تكتب على الصورة: $E = \frac{I \cos \theta}{R^2}$.



تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدتهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوها الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبدالله اليتاني، والزرقلّي ، ونصير الدين الطوسي.

3-1 المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau = Fr \sin \theta$. أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

3-1 المتطابقات المثلثية

مسائل مهارات التفكير العليا

(25) **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلاً، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

(32) **اكتشف الخطأ:** بسّط كل من علاء وسامي المقدار $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

سامي

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{1}$$

$$= \sin^2 \theta$$

علاء

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \tan^2 \theta + 1$$

$$= \sec^2 \theta$$

3-1 المتطابقات المثلثية

تدريب على اختبار

40 إذا كان $\sin x = m$ و $0^\circ < x < 90^\circ$ ، فما قيمة $\tan x$ ؟

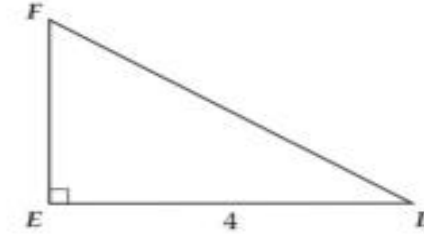
A $\frac{1}{m^2}$

B $\frac{m \sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\frac{1-m^2}{m}$

D $\frac{m}{1-m^2}$

39 في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D = 0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$ ؟



C 3.2

A 5

D 10

B 4

3-1 المتطابقات المثلثية



(3 - 1) المتطابقات المثلثية

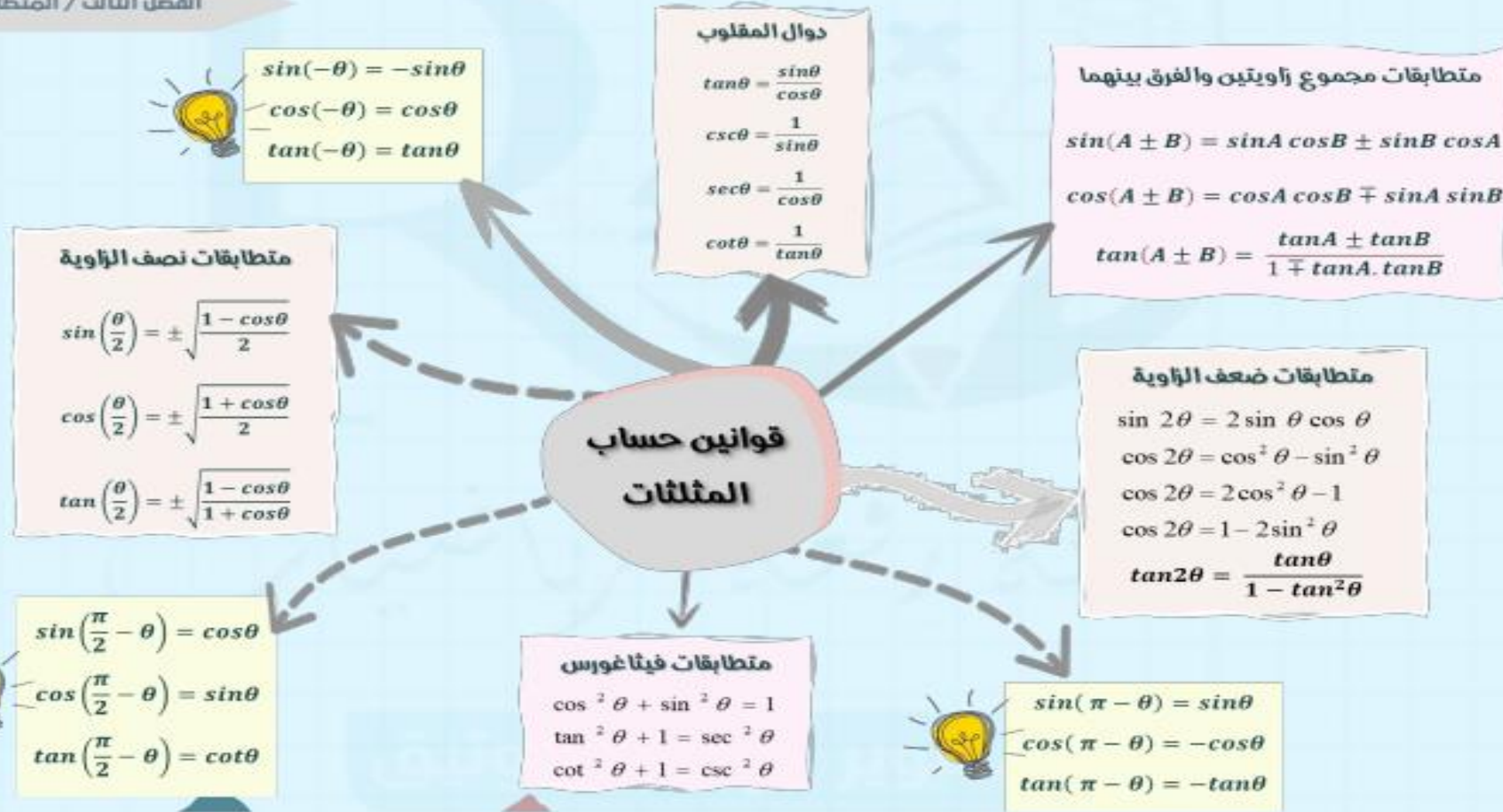
اسم الطالب : الشعبة :

اختر الإجابة الصحيحة:

1	إذا كانت $270^\circ < \theta < 360^\circ$, $\cos \theta = \frac{5}{13}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$ تساوي :						
	A	$\frac{13}{12}$	B	$-\frac{12}{13}$	C	$\frac{12}{13}$	D
2	تبسيط العبارة $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$:						
	A	$\sin \theta \cos \theta$	B	$\cos^2 \theta$	C	$\sin^2 \theta$	D
3	إذا كانت $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $\cot \theta = 2$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\tan \theta$ تساوي :						
	A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{4}$	C	$-\frac{1}{2}$	D

خريطة مفاهيم

الفصل الثالث / المتطابقات المثلثية



ورقة عمل

Puzzle قوانين الدوال المثلثية

$$\frac{\tan \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$\frac{\cot \theta}{\frac{1}{\tan \theta}}$$

$$\frac{\sec \theta}{\frac{1}{\cos \theta}}$$

$$\frac{\csc \theta}{\frac{1}{\sin \theta}}$$

$$\frac{1 + \cot^2 \theta}{\csc^2 \theta}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos \theta}$$

$$\frac{\tan^2 \theta + 1}{\sec^2 \theta}$$

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1}$$

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :



3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.
(الدرس 1-3)

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية



لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R ، لاحظ أن جسمه لا يكون عمودياً على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin \theta = \frac{v^2}{gR} \cos \theta$ ، حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$. هل تختلف هاتان المعادلتان كلياً عن بعضهما بعضاً، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

مفهوم أساسي

بسّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً.

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية



إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها



3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 1

إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta \quad \text{أثبت صحة المتطابقة}$$

الطرف الأيسر

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta}$$

اضرب كلا من البسط والمقام في $1 + \cos \theta$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta$$

$$= \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$= \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

اقسم كلا من البسط والمقام على $\sin^2 \theta$

$$= 1 + \cos \theta \quad \checkmark$$

الطرف الأيمن

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات
أن الطرف الأيسر يساوي
الطرف الأيمن في المثال
رقم (1).

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

$$(1) \cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$$

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

$$\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1 \quad (1)$$

$$\cot \theta (\cot \theta + \tan \theta) = \csc^2 \theta \quad (2)$$

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية



إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات
كي تتحقق من صحة حلّك
اختر قيمة لـ θ . وعوّض
بها في البديل المختار، ثم
قارنها بإجابتك عند تعويض
قيمة θ في العبارة الأصلية.

عند حلّ أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، لا بد من تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$ ؟

$\cot^2 \theta$ C

$\cot \theta$ A

$\csc^2 \theta$ D

$\csc \theta$ B

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمن إما $\cot \theta$ أو $\csc \theta$. لذا
اعمل على أن تستبدل بالدوال دوالً مثلثية أخرى.

حلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

اضرب

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

اقلب المقام واضربه باليسار

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

اضرب

$$= \cot \theta \cdot \cot \theta$$

$$= \cot^2 \theta$$

الجواب هو C.

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2 \theta (\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)$ ؟

$\cos^2 \theta$ C

$\cot^2 \theta$ A

$\sin^2 \theta$ D

$\tan^2 \theta$ B

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تدرب وحل المسائل

11 اختيار من متعدد: أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta}$ ؟
(مثال 2)

$\sin^2 \theta$ A $\cos^2 \theta$ C

$\tan^2 \theta$ B $\csc^2 \theta$ D

2-3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّ أو اضرب كلّاً من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب ، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos \theta \cot \theta = \csc \theta - \sin \theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

اضرب

$$\begin{aligned} \cos \theta \cot \theta &= \cos \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

اطرح

$$\begin{aligned} \csc \theta - \sin \theta &= \frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta \\ &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تنبيه!

تبسيط الطرفين

تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عملية التحقق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

$$\text{3) } \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$$

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

$$\sec \theta - \tan \theta = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (12)$$

$$\frac{1 + \tan \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \sec \theta \quad (13)$$

$$\sec \theta \csc \theta = \tan \theta + \cot \theta \quad (14)$$

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مسائل مهارات التفكير العليا

55) اختيار من متعدد: أي مما يأتي لا يكافئ $\cos \theta$ ،
حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟

$\cot \theta \sin \theta$ C

$\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ A

$\tan \theta \csc \theta$ D

$\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$ B

44) اكتشف المختلف: حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات
الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$



تطوير - إنتاج - توثيق

2-3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية



تطوير - إنتاج - توثيق

(2 - 3) إثبات صحة المتطابقات المثلثية

اسم الطالب: الشعبة:

اختر الإجابة الصحيحة:							
1	المتطابقة $1 + \sec^2\theta \sin^2\theta$ تكافئ:						
	A	$\sec^2\theta$	B	$\cot^2\theta$	C	$\tan^2\theta$	D
2	أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$:						
	A	$\tan^2\theta$	B	$\cos^2\theta$	C	$\sin^2\theta$	D
3	قيمة العبارة $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$:						
	A	1	B	2	C	-2	D
أكمل الفراغات التالية:							
1	$\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta = \dots\dots\dots$						
2	$(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = \dots\dots\dots$						

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :



3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

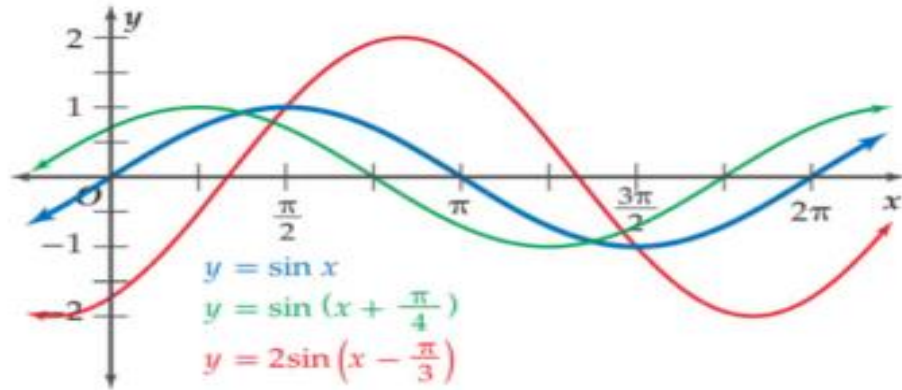
فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوال
المثلثية للزوايا. (مهارة
سابقة)

والآن:

- أجد قيم الجيب،
وجيب التمام باستعمال
المتطابقات المثلثية
لمجموع زاويتين والفرق
بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات
المثلثية باستعمال
متطابقات المجموع
والفرق.

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما



لماذا؟

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟

تُسبب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلاً. ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.

متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمن جمع الزاويتين $x, \frac{\pi}{4}$. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزاويا محدّدة. فمثلاً يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$ من خلال إيجاد: $\sin(60^\circ - 45^\circ)$.

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما



3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما



مفهوم أساسي

متطابقات المجموع والفرق

متطابقات الفرق

- $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

متطابقات المجموع

- $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

إرشادات للدراسة

كُون قائمة:

كُون قائمة بقياسات
الزوايا الناتجة عن جمع أو
طرح زاويتين من الزوايا
الخاصة بين 0° , 360° ,
حيث تستطيع إيجاد
النسب المثلثية لكثير
منها باستعمال متطابقات
المجموع والفرق. استعمل
هذه القائمة مرجعاً لك.

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما



إيجاد القيم المثلثية

مثال 1

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(a) $\sin 105^\circ$

بما أن مجموع الزاويتين 45° و 60° يساوي 105° ، وكلّ منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105^\circ$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ \quad \sin 105^\circ = \sin (60^\circ + 45^\circ)$$

متطابقة المجموع

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

عوض

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

بسّط

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(b) $\cos (-120^\circ)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما -120° ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$-120^\circ = 60^\circ - 180^\circ \quad \cos (-120^\circ) = \cos (60^\circ - 180^\circ)$$

متطابقة الفرق

$$= \cos 60^\circ \cos 180^\circ + \sin 60^\circ \sin 180^\circ$$

عوض

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$$

بسّط

$$= -\frac{1}{2}$$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تحقق من فهمك

$$\cos(-15^\circ) \quad (1B)$$

$$\sin 15^\circ \quad (1A)$$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \quad (a)$$

الطرف الأيسر

متطابقة الفرق

عوض

بسّط

$$\cos(90^\circ - \theta)$$

$$= \cos 90^\circ \cos \theta + \sin 90^\circ \sin \theta$$

$$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$$

$$= \sin \theta \quad \checkmark$$

$$= \text{الطرف الأيمن}$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \quad (b)$$

الطرف الأيسر

متطابقة المجموع

عوض

بسّط

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin \theta \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \sin \theta \cdot 0 + \cos \theta \cdot 1$$

$$= \cos \theta \quad \checkmark$$

$$= \text{الطرف الأيمن}$$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تحقق من فهمك

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \quad (3B)$$

$$\sin (90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad (3A)$$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\cos \frac{\pi}{12} \quad (4)$$

$$\cos 75^\circ \quad (3)$$

$$\cos 105^\circ \quad (2)$$

$$\cos 165^\circ \quad (1)$$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

$$\sin (90^\circ + \theta) = \cos \theta \quad (10)$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right) = -\sin \theta \quad (11)$$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

مسائل مهارات التفكير العليا

(29) **تبرير:** بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تدريب على اختبار

(43)

ما القيمة الدقيقة للعبارة:

$$\sin(60^\circ + \theta) \cos \theta - \cos(60^\circ + \theta) \sin \theta$$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ C

$\frac{1}{2}$ A

$\sqrt{3}$ D

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ B

(44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان $\cos \theta + 0.3 = 0$ ،
حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot \theta$.

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

(3 - 3) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

اسم الطالب : الشعبة :

اختر الإجابة الصحيحة:

القيمة الدقيقة لـ $\cos 165^\circ$:							
A	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	C	$-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	D	$-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$
القيمة الدقيقة لـ $\sin(-210^\circ)$:							
A	$\frac{1}{2}$	B	$-\frac{1}{2}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3 $-\tan(\theta + \frac{\pi}{2})$							
A	$-\csc \theta$	B	$\csc \theta$	C	$\cot \theta$	D	$-\cot \theta$
أكمل الفراغات التالية :							
1	القيمة الدقيقة لـ $\tan 195^\circ$						
2	 $-\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$						

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :



3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

لماذا؟



تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v ، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D ، وأقصى ارتفاع H :

$$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta, H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$$
 حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ .

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية : من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta & \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin(A + B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ ، أو $\sin 2\theta$ ، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos(A + B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ ، أو $\cos 2\theta$.

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مقطع توضيحي 💡

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 1

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$.
حيث إن $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ، فإننا نجد $\cos \theta$ أولاً.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ لإيجاد $\cos \theta$.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3} \text{ عوض}$$

ربع ثم اطرح

خذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ وبما أن } \theta \text{ تقع في الربع الأول، فإن } \cos \theta \text{ موجب أي } \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

متطابقة ضعف الزاوية

$$\sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

اضرب

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.



3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 2

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي علمًا بأن $0^\circ < \theta < 90^\circ$: $\sin \theta = \frac{2}{3}$

(a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\sin \theta$, $\cos \theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

متطابقة ضعف الزاوية

$$\sin \theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي علمًا بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$: $\cos \theta = -\frac{1}{3}$

$\tan 2\theta$ (2B)

$\cos 2\theta$ (2A)

3-4 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية : من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة ؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مفهوم أساسي

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

في إيجاد جيب نصف الزاوية

θ أو $\sin \frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن

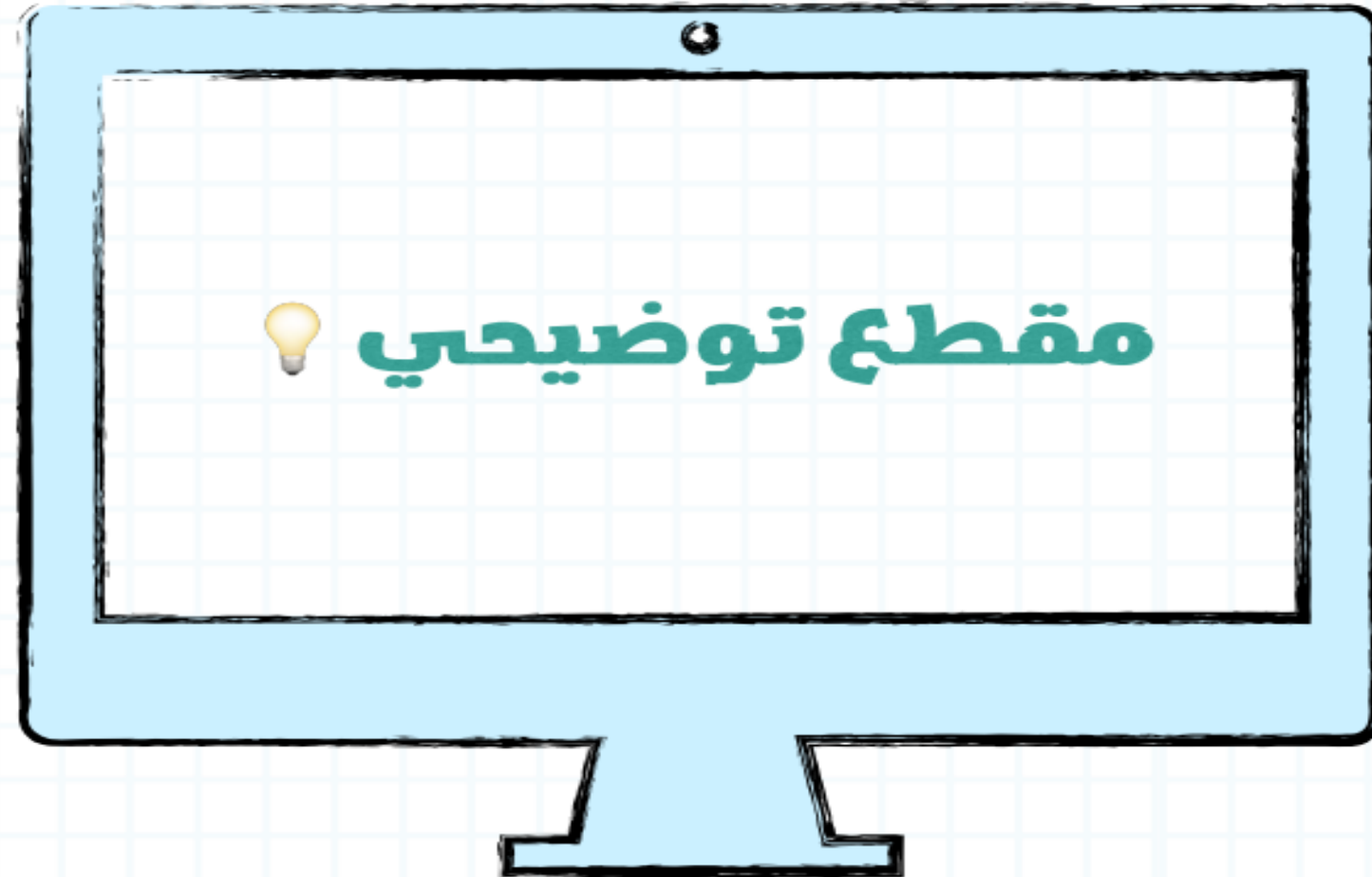
استعمال المتطابقة

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

في إيجاد جيب تمام نصف

الزاوية θ أو $\cos \frac{\theta}{2}$.

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها



3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مثال 3

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

(a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ، تقع في الربع الثالث.

استعمل متطابقة فيثاغورس

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

اطرح

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

بما أن θ تقع في الربع الثالث ، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

متطابقة نصف الزاوية

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

بسّط

بإنتاج المقام

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

بما أن θ تقع بين 180° و 270° ، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين 90° و 135° . إذن ، $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تحقق من فهمك

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة

أول خطوة في الحل، هي
تحديد الربع الذي يقع فيه
ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$.
وعندها تستطيع أن تحدد
الإشارة.

(3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علماً بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، تقع في الربع الثاني.

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها



تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

إثبات صحة المتطابقات

مثال 5

$$\text{أثبت صحة المتطابقة } \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$$

الطرف الأيمن

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

اضرب كلا من البسط والمقام في $\sin \theta$

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = 1 \text{ اضرب في}$$

اضرب

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta, 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$$

$$\frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$$

$$= \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 1}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 1}$$

$$= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \cos \theta \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \checkmark$$

الطرف الأيسر

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تحقق من فهمك

$$(5) \quad 4 \cos^2 x - \sin^2 2x = 4 \cos^4 x$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من
 $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 1-3)
 $\sin \theta = \frac{1}{4} ; 0^\circ < \theta < 90^\circ$ (1)

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\sin \frac{\pi}{8} \quad (8)$$

$$\cos 15^\circ \quad (9)$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مسائل مهارات التفكير العليا

(27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ :
 $\sin 15^\circ$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برّر إجابتك.

للعيد

$$\begin{aligned}\sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \sin(45 - 30) &= \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4}}{4}\end{aligned}$$

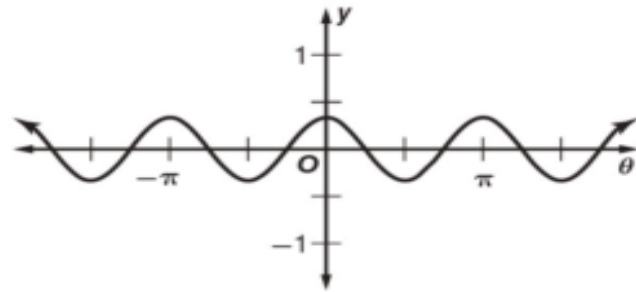
سلمان

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \sin \frac{30}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} \\ &= 0.5\end{aligned}$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تدريب على اختبار

(44) معادلة الدالة الممثلة بيانياً في الشكل أدناه هي :



$y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$ C

$y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$ D

$y = 3 \cos 2\theta$ A

$y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$ B

(43) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $0 < \theta < 90^\circ$.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ C

$\sqrt{3}$ D

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ A

$\sqrt{3} - 2$ B

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

(3 - 4) المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

اسم الطالب : الشعبة :

اختر الإجابة الصحيحة:

1	إذا كانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\sin \theta = \frac{4}{5}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ تساوي :	A	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	B	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	C	$\frac{-7}{25}$	D	$\frac{-24}{25}$
2	إذا كان $270^\circ < \theta < 360^\circ$, $\cos \theta = \frac{3}{5}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ هي :	A	$\frac{-2\sqrt{5}}{5}$	B	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	C	$\frac{-7}{25}$	D	$\frac{-24}{25}$
3	$-\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$	A	$\sin \theta$	B	$\tan \theta$	C	$\cos \theta$	D	$\cot \theta$
1	إذا كان $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\tan \theta = \frac{-8}{15}$ فإن قيمة $\sin \frac{\theta}{2}$								
2	إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin \theta = \frac{-15}{17}$ فإن قيمة $\cos 2\theta$								

أكمل الفراغات التالية :

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :



3-5 حل المعادلات المثلثية

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المقترحات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

فيما سبق:

درست المتطابقات المثلثية.
(الدروس من 2-3 إلى 4-3)

3-5 حل المعادلات المثلثية



لماذا؟

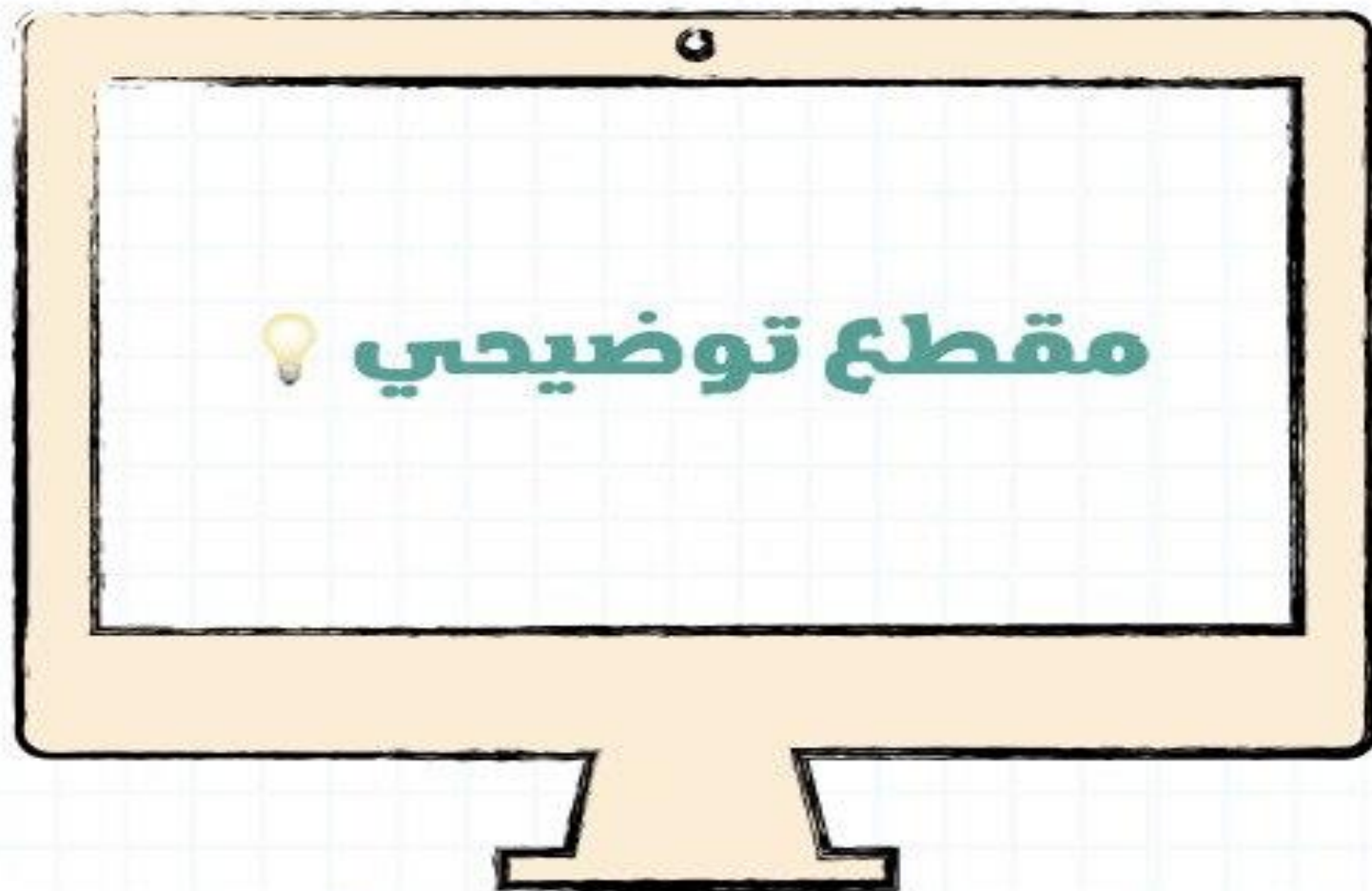
عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$$

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل المعادلات المثلثية التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

3-5 حل المعادلات المثلثية



3-5 حل المعادلات المثلثية



إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية
حل معادلة مثلثية يعني
إيجاد قيم المتغير جميعها
التي تحقق المعادلة.

مثال 1

حل المعادلات على فترة معطاة

حل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين:

$$(a) \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0, \text{ إذا كانت } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ.$$

المعادلة الأصلية

$$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$$

حلل بأخذ عامل مشترك

$$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

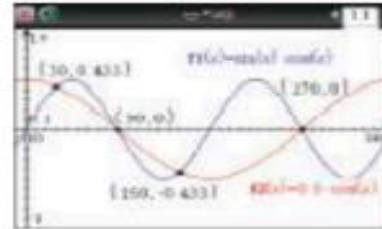
$$\sin \theta - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{أو} \quad \cos \theta = 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \theta = 90^\circ \text{ أو } 270^\circ$$

$$\theta = 30^\circ \text{ أو } 150^\circ$$

الحلول هي $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ فقط؛ لأن $0 \leq \theta \leq 180^\circ$

الزاوية المرجعية للزاوية 150° هي 30°



التحقق

يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من:
 $y = \sin \theta \cos \theta$, $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين 0° و 180° فقط.

$$(b) 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0, \text{ إذا كان } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

المعادلة الأصلية

$$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$$

حلل

$$(\sin \theta - 2)(2 \sin \theta + 1) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$\sin \theta - 2 = 0 \quad \text{أو} \quad 2 \sin \theta + 1 = 0$$

$$\sin \theta = 2$$

$$2 \sin \theta = -1$$

$\sin \theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin \theta$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

لذلك يكون للمعادلة حلان هما: $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

3-5 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

(1A) حل المعادلة $\cos x \sin x = 3 \cos x$ ، إذا كانت $0 \leq x \leq 2\pi$

(1B) حل المعادلة $4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta = 0$ إذا كانت $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

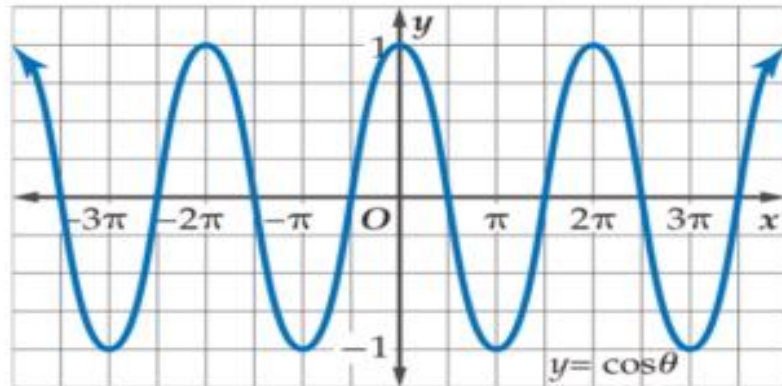
3-5 حل المعادلات المثلثية

تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغير في الفترة $[0, 2\pi]$ بالراديان، أو $[0^\circ, 360^\circ]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

مثال 2

حل المعادلة $\cos \theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.



$$\cos \theta + 1 = 0$$

$$\cos \theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos \theta$ لإيجاد حلول المعادلة $\cos \theta = -1$.

الحلول هي $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ وكذلك $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$ ، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π . طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π . لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$ ؛ حيث k أي عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العلاقة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافاً لها مضاعفات 2π ، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

3-5 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

(2B) حل المعادلة $2 \sin \theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

(2A) حل المعادلة $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$

3-5 حل المعادلات المثلثية

الحلول الدخيلة : بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل . فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos \theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos \theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولاً دخيلة.

إذا لم تتمكن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلاً إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

3-5 حل المعادلات المثلثية



3-5 حل المعادلات المثلثية



مثال 4

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حل المعادلة: $\sin \theta = 1 + \cos \theta$ إذا كان $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = (1 + \cos \theta)^2$$

$$1 - \cos^2 \theta = 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$0 = 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$0 = 2 \cos \theta (1 + \cos \theta)$$

$$\text{أو } 1 + \cos \theta = 0$$

$$\text{أو } \cos \theta = -1$$

$$\text{أو } \theta = 180^\circ$$

$$2 \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ, 270^\circ$$

التحقق:

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin 180^\circ \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180^\circ$$

$$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin 90^\circ \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90^\circ$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin 270^\circ \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270^\circ$$

$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$

$$-1 \neq 1 \quad \times$$

إذن 270° حلًا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90^\circ, 180^\circ$.

3-5 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

$$\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta \quad (4)$$

3-5 حل المعادلات المثلثية



تطوير - إنتاج - توثيق

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك.
ابحث عن زوج من الحلول
الفرق بينهما هو π تمامًا.
واكتب حلولك بأبسط
طريقة.

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حلّ المعادلة $2 \sec^2 \theta - \tan^4 \theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

المعادلة الأصلية

$$2 \sec^2 \theta - \tan^4 \theta = -1$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$2(1 + \tan^2 \theta) - \tan^4 \theta = -1$$

خاصية التوزيع

$$2 + 2 \tan^2 \theta - \tan^4 \theta = -1$$

اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$$\tan^4 \theta - 2 \tan^2 \theta - 3 = 0$$

حلّ

$$(\tan^2 \theta - 3)(\tan^2 \theta + 1) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$\tan^2 \theta - 3 = 0 \quad \text{أو} \quad \tan^2 \theta + 1 = 0$$

$$\tan^2 \theta + 1 = 0 \quad \text{أولاً:}$$

$$\tan^2 \theta = -1$$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2 \theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

$$\tan^2 \theta - 3 = 0 \quad \text{ثانيًا:}$$

$$\tan^2 \theta = 3$$

$$\tan \theta = \pm \sqrt{3}$$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي: $\theta = 60^\circ + 180^\circ k, \theta = 120^\circ + 180^\circ k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60^\circ + 180^\circ k, 120^\circ + 180^\circ k$.

التحقق، $\theta = 60^\circ + 180^\circ k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة
الظل هو π ، وهذا يبرر كتابة
الحلول في الصورة:
 $\theta = 60^\circ + 180^\circ k$
 $\theta = 120^\circ + 180^\circ k$

3-5 حل المعادلات المثلثية



مقطع توضيحي
للزوايا الشهيرة

3-5 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

$$\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0 \quad (5B)$$

$$\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0 \quad (5A)$$

3-5 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها

$$\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 0 ; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (1)$$

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1 ; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (2)$$

3-5 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان:

$$2 \cos^2 \theta = 1 \quad (6)$$

$$4 \sin^2 \theta - 1 = 0 \quad (5)$$

3-5 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

$$\sin^2 \theta - \sin \theta = 0 \quad (9) \quad \cos 2\theta - \sin^2 \theta + 2 = 0 \quad (10)$$

3-5 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي:

$$(14) \sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0 \text{ لجميع قيم } \theta \text{ إذا كان قياس } \theta \text{ بالدرجات.}$$

3-5 حل المعادلات المثلثية

تدرب وحل المسائل

(15) $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

(16) $\tan \theta = 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

3-5 حل المعادلات المثلثية

مسائل مهارات التفكير العليا

(31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$ ، $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برّر إجابتك.

ليلى

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin \theta \\ -\sin \theta &= -\sin \theta \\ 2 \cos \theta &= 0 \\ \cos \theta &= 0 \\ \theta &= 90^\circ, 270^\circ \end{aligned}$$

هلا

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin \theta \\ \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \\ 2 \cos \theta &= 1 \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= 60^\circ, 300^\circ \end{aligned}$$

3-5 حل المعادلات المثلثية

تدريب على اختبار

(48) ما حل المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0^\circ < x < 360^\circ$ ؟

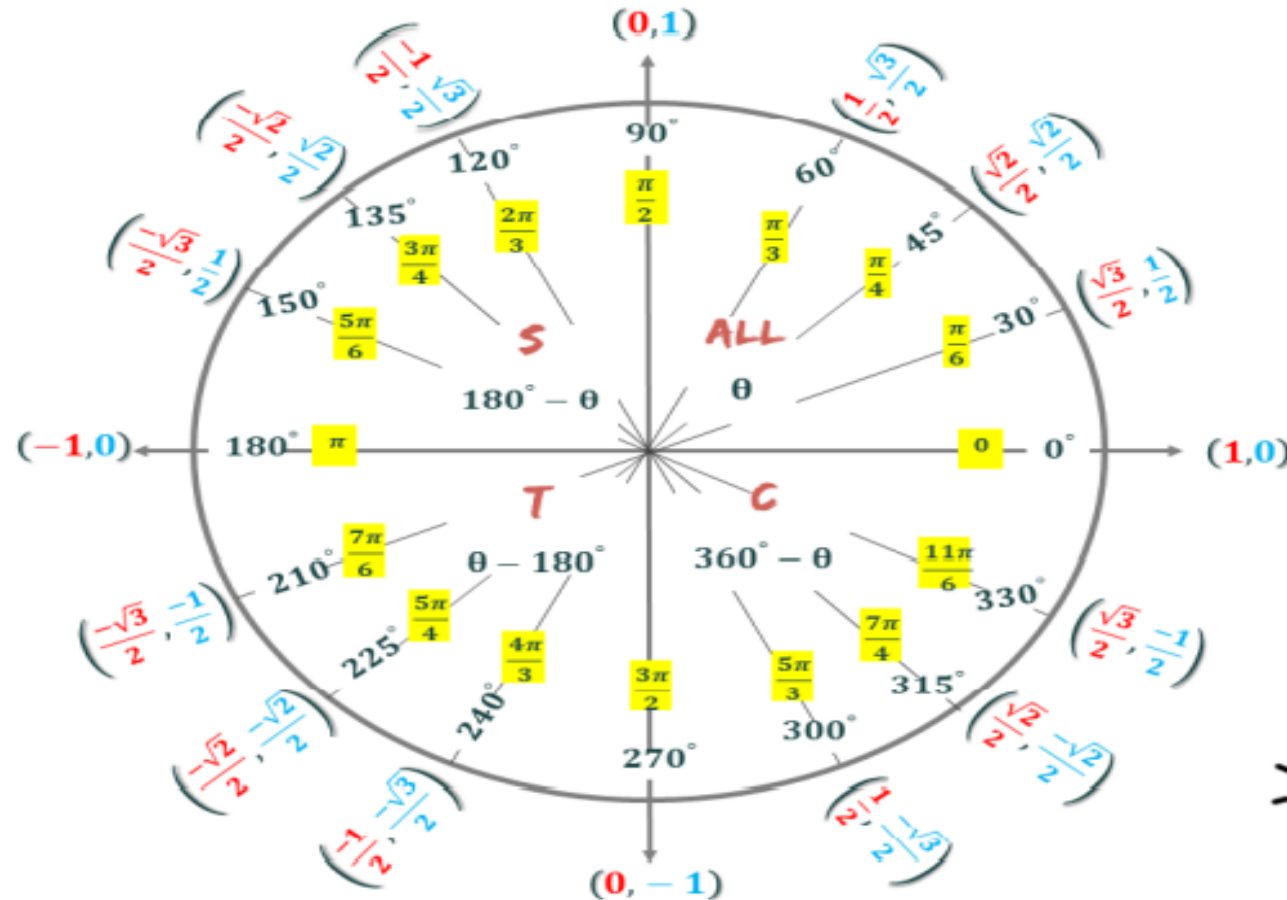
A 150° أو 30° **C** 330° أو 210°

B 120° أو 60° **D** 300° أو 240°

(47) أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة $\sin \theta + \cos \theta \tan^2 \theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ **B** $\frac{7\pi}{4}$ **C** 2π **D** $\frac{3\pi}{4}$

ملخص



دائرة الوحدة



اكتشف كلمة السر

اكتشف كلمة السر

$$\tan(-\theta) \quad \mathbf{G}$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ , } 2\sin\theta \cos\theta = \sin\theta \quad \mathbf{I}$$

$$(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta) \quad \mathbf{A}$$

$$\sin\theta \sec\theta \cot\theta \quad \mathbf{U}$$

$$\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta} \quad \mathbf{E}$$

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \mathbf{I}$$

$$\cos 75^\circ \quad \mathbf{S}$$

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ , } 3\sin^2\theta - \sin\theta = 0 \quad \mathbf{N}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4} \quad 270^\circ < \theta < 360^\circ \text{ إذا كان } \cos\theta \text{ ما قيمة } \mathbf{M}$$

الآن ضع الحرف المقابل للناتج لتكتشف كلمة السر

45°	$\sin^2\theta$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$

-1	$\cos\theta$	90°	60°	1	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

كلمة السر

IAM GENIUS

3-5 حل المعادلات المثلثية



(3 - 5) حل المعادلات المثلثية

اسم الطالب : الشعبة :

اختر الإجابة الصحيحة:

1	إذا كانت $0^\circ < \theta < 360^\circ$ ، $-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta$ فإن حل المعادلة هو :							
	A	180°	B	30°,150°	C	60°,180°	D	30°
2	حل المعادلة $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$ لجميع قيم θ :							
	A	$\frac{\pi}{2} + \pi k$	B	$\frac{\pi}{3} + \pi k$	C	$\frac{2\pi}{3} + \pi k$	D	$\frac{\pi}{5} + \pi k$
أكمل الفراغات التالية :								
1	إذا كان قياس θ با الراديان فإن حل المعادلة $2\cos^2\theta = 1$							
2	إذا كان قياس θ بالدرجات فإن حل المعادلة $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$							

جدول التعلم

	ماذا أعرف
	ماذا أريد أن أعرف
	ماذا تعلمت
	كيف أتعلم أكثر

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الثمراني عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :



الفصل الرابع القطوع المخروطية

فيما سبق:

درست تمثيل الدالة التربيعية
(والتي تمثل قطعاً مكافئاً)،
ودالة المقلوب (والتي تمثل
قطعاً زائداً). **الدرس (3-5)**

والآن:

- أحلّ معادلات القطوع
المكافئة، والدوائر،
والقطوع الناقصة،
والقطوع الزائدة، وأمثلةها
بيانياً.
- أكتب معادلات القطوع
المكافئة، والدوائر،
والقطوع الناقصة،
والقطوع الزائدة.
- حدد أنواع القطوع
المخروطية باستعمال
معادلاتها.
- أحلّ مسائل تتضمن حركة
المقذوفات.

لماذا؟



فضاء: القطوع

المخروطية شائعة الاستعمال
في مجالات الفضاء:
إذ تستعمل معادلات الدوائر
في وصف مدارات حركة
السفن الفضائية والأقمار
الصناعية حول الأرض. كما
أن الكواكب تسير في مسارات
بيضاوية الشكل تشبه القطوع
الناقصة، أما المذنبات، فتسير
في اتجاه أحد جزئي القطع
الزائد، مما يساعد على التنبؤ
بزمان ظهورها لاحقاً.

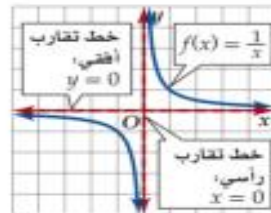
التهيئة للفصل الرابع

مراجعة المفردات

محور التماثل (axis of symmetry)،
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

إكمال المربع (completing the square)،
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$ ، اتبع الخطوات التالية:
(1) أوجد نصف معامل x : أي نصف b .
(2) رتب الناتج في الخطوة (1).
(3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

خط التقارب (asymptote)،
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations)،
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line)،
يكون المستقيم مماساً لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities)،
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
 $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
 $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$



التهيئة للفصل الرابع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

$f(x) = 2x^2 - 12x + 3$ (4) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$ (3)

$f(x) = x^2 + 2x + 6$ (2) $f(x) = x^2 - 2x - 12$ (1)



تطوير - إنتاج - توزيع

التهيئة للفصل الرابع

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

$$f(x) = 3x^2 - 8x - 3 \quad (11) \quad f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \quad (10)$$

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 9 \quad (9) \quad f(x) = 2x^2 - 5x + 3 \quad (8)$$

التهيئة للفصل الرابع

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 11 \quad (13) \quad f(x) = 4x^2 - 3x - 7 \quad (12)$$

التهيئة للفصل الرابع

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

$$x^2 - 18x \quad (15)$$

$$x^2 + 8x \quad (14)$$



تطوير - إنتاج - توثيق

التهيئة للفصل الرابع

مثل كل دالة مما يأتي بيانًا:

$$f(x) = \frac{1}{2x + 1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{1}{(x + 2)} \quad (16)$$

التهيئة للفصل الرابع

الواجب المنزلي



1-4 القطوع المكافئة

فيما سبق:

درست الدوال التربيعية
وتحليلها وتمثيلها بيانياً.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أحل معادلات قطع مكافئة، وأمثلها بيانياً.
- أكتب معادلات قطع مكافئة.

المفردات

القطع المخروطي

conic section

المحل الهندسي

locus

القطع المكافئ

parabola

البؤرة

focus

الدليل

directrix

محور التماثل

axis of symmetry

الرأس

vertex

الوتر البؤري

latus rectum

1-4 القطوع المكافئة

لماذا؟

استعمل العلماء حديثاً تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطوعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

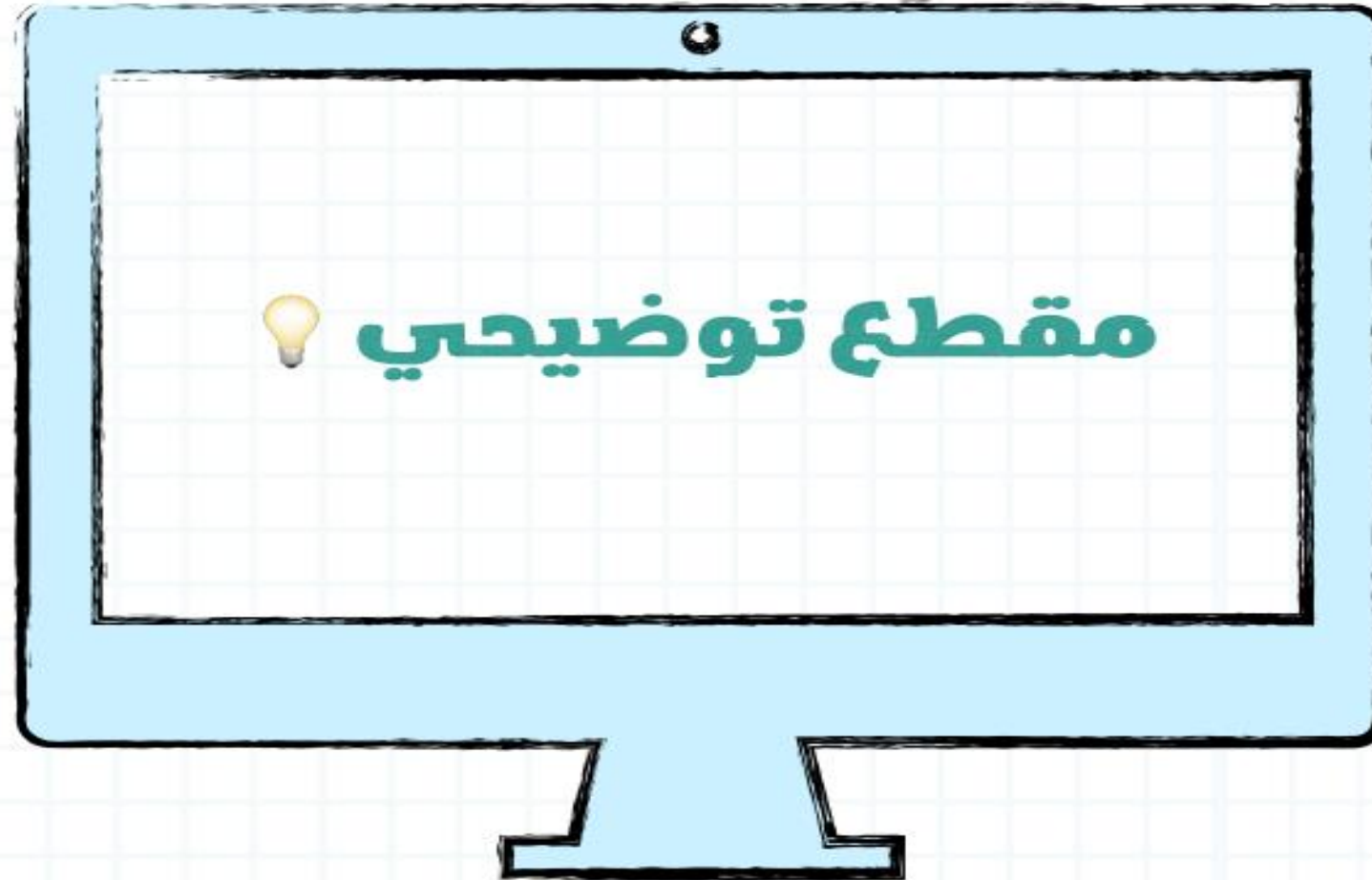


القطوع المخروطية: القطوع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما. بحيث لا يمر المستوى بالرأس. والقطوع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.

أسئلة تعزيز : 1- مالون الزئبق ؟

- 2- لماذا يعد الزئبق بديلاً جيداً عن المرآة الاعتيادية أو المعدن المصقول ؟
- 3- لماذا يعد القطع المكافئ الشكل المثالي لمرآة التلسكوب ؟

1-4 القطوع المكافئة



مقطع توضيحي



1-4 القطوع المكافئة



القطع الزائد



القطع المكافئ



القطع الناقص



الدائرة

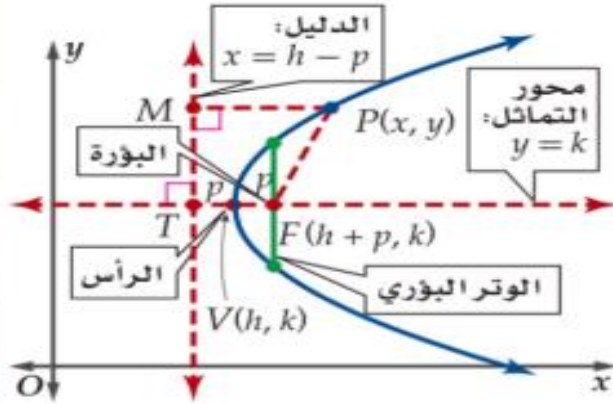
الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

1-4 القطوع المكافئة

إرشادات للدراسة

القطع

كلمة قطع هي مفرد كلمة
قطوع، وتعني في اللغة الجزء
قال تعالى: ﴿فَأَنزِلْ بِأَمْرِكَ
يَقْطَعُ مِنَ النَّارِ...﴾ [الحجر: 65]



تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانياً:

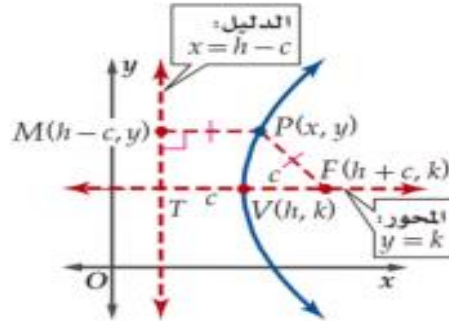
المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة (تسمى البؤرة) مساوياً دائماً لبُعدها عن مستقيم معلوم (يسمى الدليل).

والقطع المكافئ متمائل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم محور التماثل. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل الرأس. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل بالوتر البؤري، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

درست سابقاً الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ والتي يمثل منحناها قطعاً مكافئاً مفتوحاً إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحاً أفقياً (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسياً (إلى أعلى أو إلى أسفل).

1-4 القطوع المكافئة



افترض أن نقطة $P(x, y)$ على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h + c, k)$ ، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.

نعلم من تعريف القطع المكافئ أن $PF = PM$ وبما أن M واقعة على الدليل، فإن إحداثي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

قانون المسافة بين نقطتين

$$\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} = \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - y)^2}$$

ربع الطرفين

$$[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2 = [x - (h - c)]^2 + 0^2$$

فك الأقواس

$$x^2 - 2x(h + c) + (h + c)^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2x(h - c) + (h - c)^2$$

فك الأقواس

$$x^2 - 2xh - 2xc + h^2 + 2hc + c^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2xh + 2xc + h^2 - 2hc + c^2$$

بسّط

$$(y - k)^2 = 4xc - 4hc$$

حلّ

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

أي أن معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y - k)^2 = 4c(x - h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$. وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

1-4 القطوع المكافئة

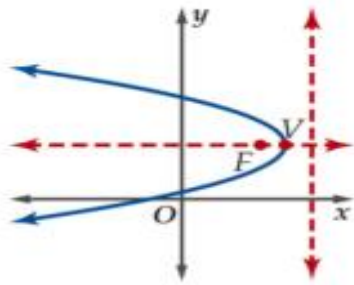
قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع
ستلاحظ في هذا الدرس
أن منحنيات القطع المكافئ
مفتوحة رأسياً (إلى أعلى
أو إلى أسفل)، أو أفقياً (إلى
اليمين أو اليسار).

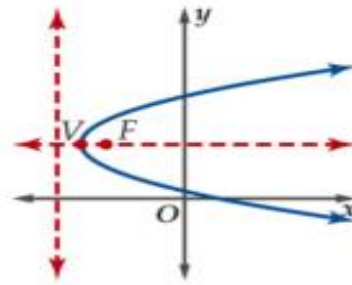
مفهوم أساسي

خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية: $(y - k)^2 = 4c(x - h)$



$$c < 0$$



$$c > 0$$

المنحنى مفتوح أفقياً

$$(h, k)$$

$$(h + c, k)$$

$$y = k$$

$$x = h - c$$

$$|4c|$$

الاتجاه:

الرأس:

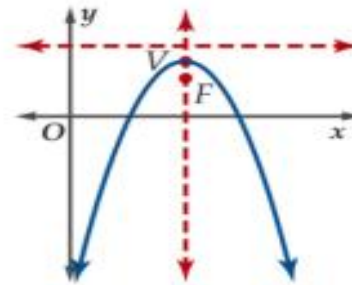
البؤرة:

معادلة محور التماثل:

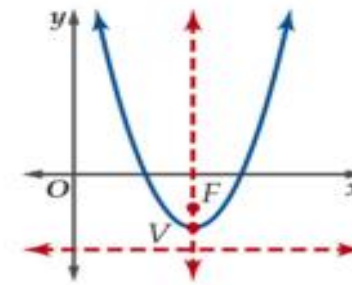
معادلة الدليل:

طول الوتر البؤري:

المعادلة في الصورة القياسية: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$



$$c < 0$$



$$c > 0$$

المنحنى مفتوح رأسياً

$$(h, k)$$

$$(h, k + c)$$

$$x = h$$

$$y = k - c$$

$$|4c|$$

الاتجاه:

الرأس:

البؤرة:

معادلة محور التماثل:

معادلة الدليل:

طول الوتر البؤري:

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل.

1-4 القطوع المكافئة

مثال 1

تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانياً

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y + 5)^2 = -12(x - 2)$ ، ثمّ مثلّ منحناه بيانياً.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ ؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

$$x = h - c$$

$$x = 5$$

الدليل:

$$(h, k)$$

$$(2, -5)$$

الرأس:

$$y = k$$

$$y = -5$$

محور التماثل:

$$(h + c, k)$$

$$(-1, -5)$$

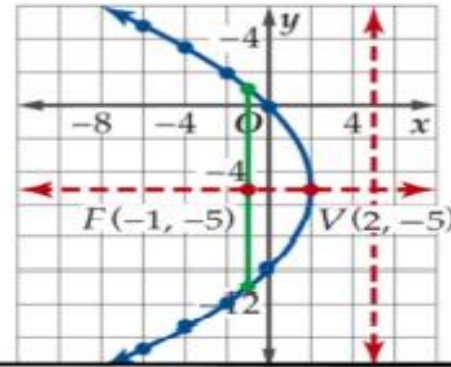
البؤرة:

$$|4c|$$

$$12$$

طول الوتر البؤري:

عيّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلاً حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ

يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:

— مفتوحاً إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c > 0$.

— مفتوحاً إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c < 0$.

— مفتوحاً إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c > 0$.

— مفتوحاً إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c < 0$.

1-4 القطوع المكافئة

تحقق من فهمك :

$$2(x + 6) = (y + 1)^2 \quad (1B)$$

إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري
لرسم الوتر البؤري في
المثال 1، ارسم قطعة
مستقيمة طولها 12 وحدة،
وتمر بالبؤرة التي تقع في
منتصفها، وتكون عمودية
على محور التماثل.

$$8(y + 3) = (x - 4)^2 \quad (1A)$$

1-4 القطوع المكافئة

خصائص القطع المكافئ

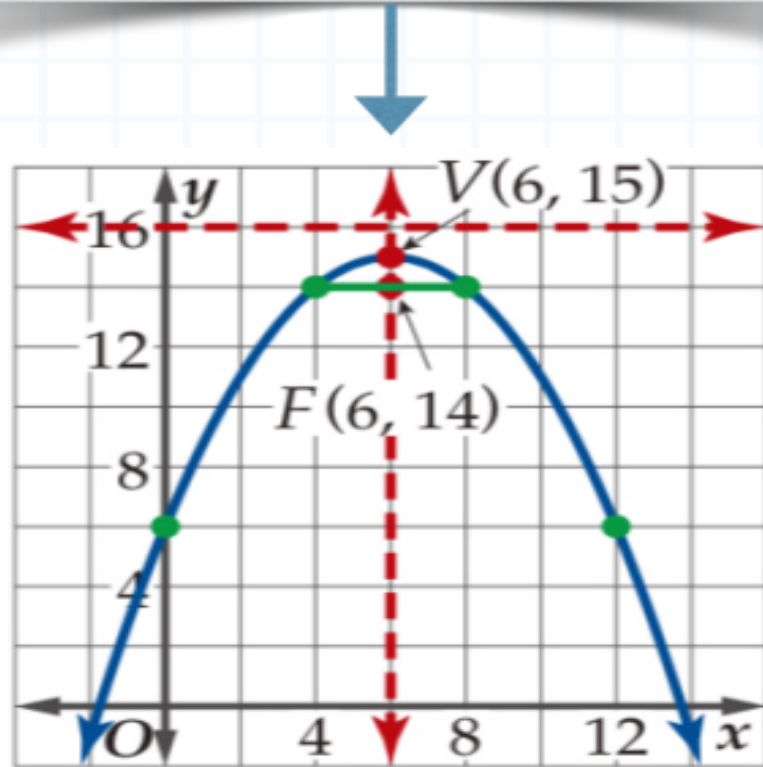
مثال 2 من واقع الحياة

(2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $(y - 6)x^2 = 44.8$ ، حيث $-5 \leq x \leq 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

1-4 القطوع المكافئة

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحياناً إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية

عيّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد ماراً بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلاً حول محور التماثل.



مثال 3

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدّد خصائص القطع المكافئ، ومثل منحناه بيانيًا.

المعادلة الأصلية

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$$

أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملاً مشتركاً من حدود x

$$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$$

أكمل المربع

$$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$$

$$-\frac{1}{4}(-36) = 9$$

$$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$$

حدّد

$$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$$

$$-4(y - 15) = (x - 6)^2 \quad \text{اطرح 15 من الطرفين، ثم اضرب في العدد (-4)}$$

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x ، و $c = -1$ ، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحديد خصائصه.

$$y = k - c$$

$$y = 16$$

الدليل:

$$(h, k)$$

$$(6, 15)$$

الرأس:

$$x = h$$

$$x = 6$$

محور التماثل:

$$(h, k + c)$$

$$(6, 14)$$

البؤرة:

$$|4c|$$

$$4$$

طول الوتر البؤري:



4-1 القطوع المكافئة

تحقق من فهمك :

$$3y^2 + 6y + 15 = 12x \quad (3B)$$

$$x^2 - 4y + 3 = 7 \quad (3A)$$

1-4 القطوع المكافئة

معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

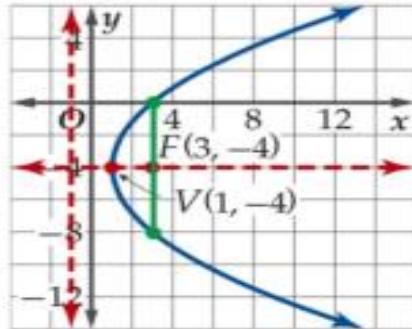
مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًا:

(a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y ، فإن المنحنى مفتوح أفقيًا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$ ، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .



الصورة القياسية

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$c = 2, h = 1, k = -4 \quad [y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$$

بسط

$$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$$

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثل بيانيًا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًا بنهائتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x ، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

1-4 القطوع المكافئة

إرشادات للدراسة

الدليل

يقع الدليل في الاتجاه
المعاكس لاتجاه منحنى
القطع المكافئ.

(b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$$y = k - c \quad \text{معادلة الدليل}$$

$$1 = 4 - c \quad y = 1, k = 4$$

$$-3 = -c \quad \text{اطرح 4 من الطرفين.}$$

$$3 = c \quad \text{اقسم كلا الطرفين على -1.}$$

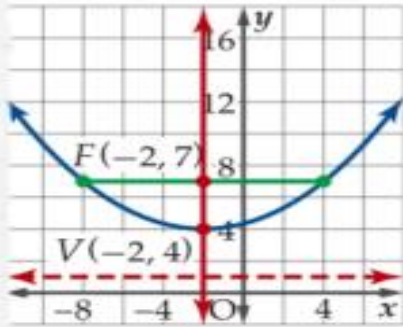
عوّض قيم c, k, h في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$$(x - h)^2 = 4c(y - k) \quad \text{الصورة القياسية}$$

$$h = -2, k = 4, c = 3 \quad [x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$$

$$(x + 2)^2 = 12(y - 4) \quad \text{بسّط}$$

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times 3| = 12$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



1-4 القطوع المكافئة

(c) البؤرة (2, 1) والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة (2, 5).

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$ ؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة (2, 5) لتجد c .

$$\text{الصورة القياسية} \quad (y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5 \quad (5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$$

$$\text{بسّط} \quad 16 = 4c(c)$$

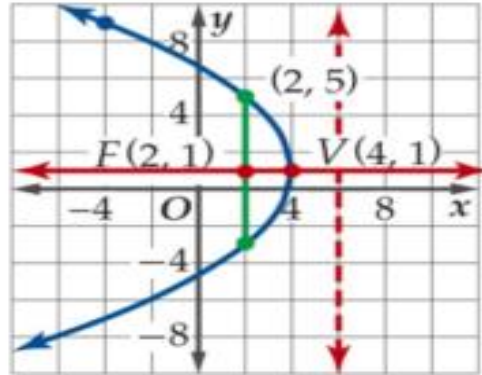
$$\text{بسّط} \quad 4 = c^2$$

$$\text{خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين} \quad \pm 2 = c$$

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو (4, 1).

$$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$$

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times (-2)| = 8$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



1-4 القطوع المكافئة



مقطع توضيحي

1-4 القطوع المكافئة

تحقق من فهمك :

4B الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

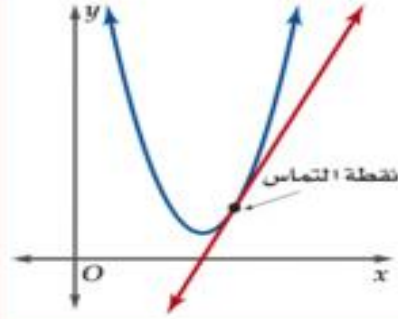
4A البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

1-4 القطوع المكافئة

4C البؤرة $(-4, -3)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D البؤرة $(5, -1)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

1-4 القطوع المكافئة



يمكن رسم مماس لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقاً كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.

إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى

القطع المكافئ عند الرأس

— إذا كان المنحنى مفتوحاً أفقياً، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي:
 $x = h$

— إذا كان المنحنى مفتوحاً رأسياً، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي:
 $y = k$

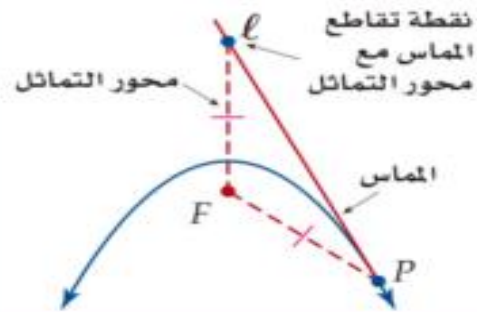
مفهوم أساسي

مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.

- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



1-4 القطوع المكافئة

مثال 5

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

المنحنى مفتوح أفقياً.

المعادلة الأصلية

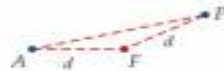
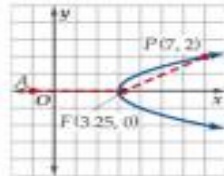
$$x = y^2 + 3$$

الصورة القياسية

$$1(x - 3) = (y - 0)^2$$

بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$ ، والبؤرة $(3.25, 0)$.

الخطوة الثانية: أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين.



حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$$

$$= 4.25$$

الخطوة الثالثة: أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل) بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25، والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة: أوجد معادلة المماس.

تقع القطعتان P و A على مماس منحنى القطع المكافئ.

$$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$$

$$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$$

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1

خطوات الحل :

1-4 القطوع المكافئة

تحقق من فهمك

5A $(y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

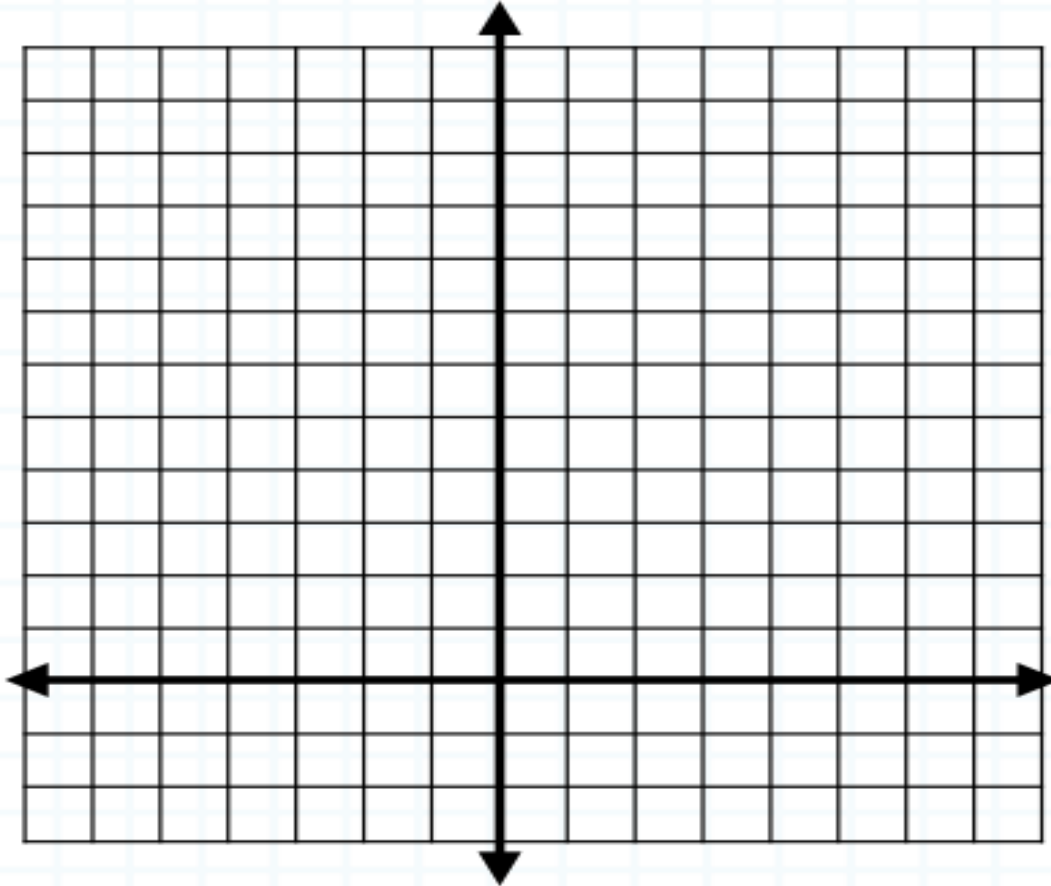
1-4 القطوع المكافئة

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا: (مثال 1)

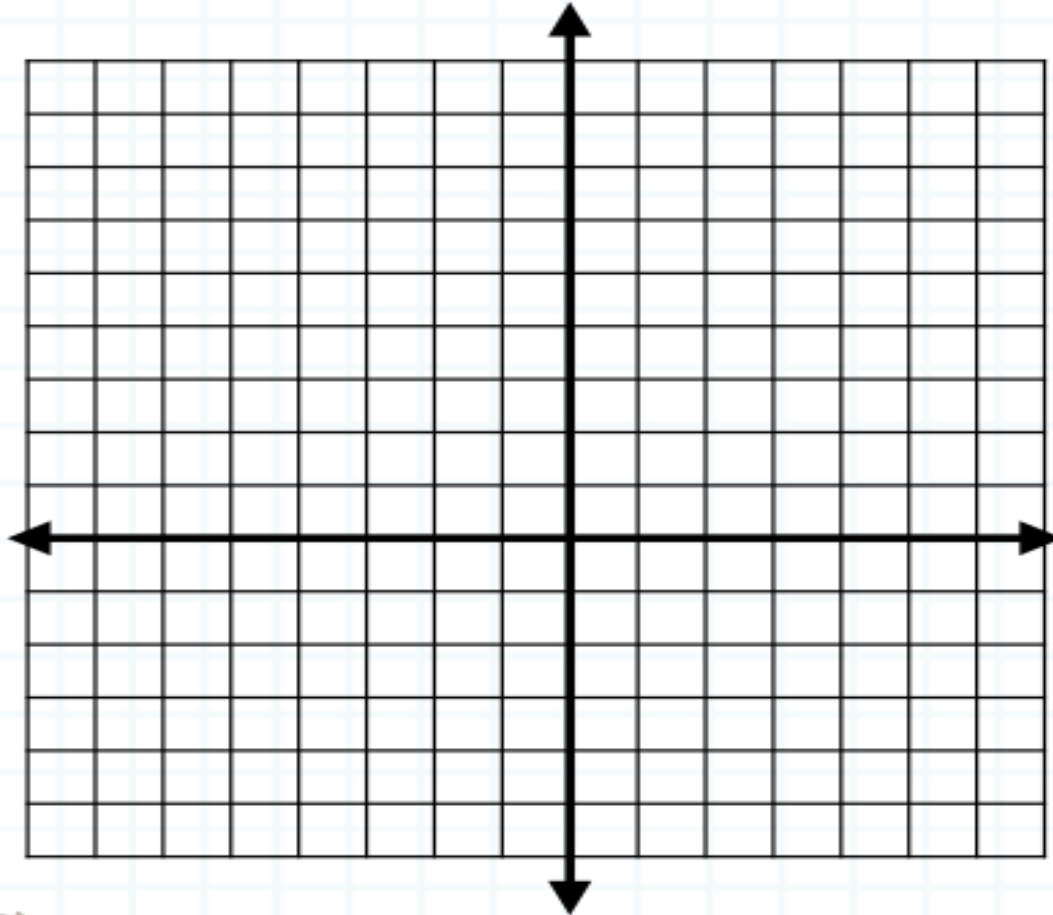
تدرب وحل المسائل

$$(1) (x - 3)^2 = 12(y - 7)$$

	الرأس
	البؤرة
	الدليل
	محور التماثل
	طول الوتر البؤري



1-4 القطوع المكافئة



$$(y - 4)^2 = 20(x + 2) \quad (3)$$

	الرأس
	البؤرة
	الدليل
	محور التماثل
	طول الوتر البؤري

4-1 القطوع المكافئة

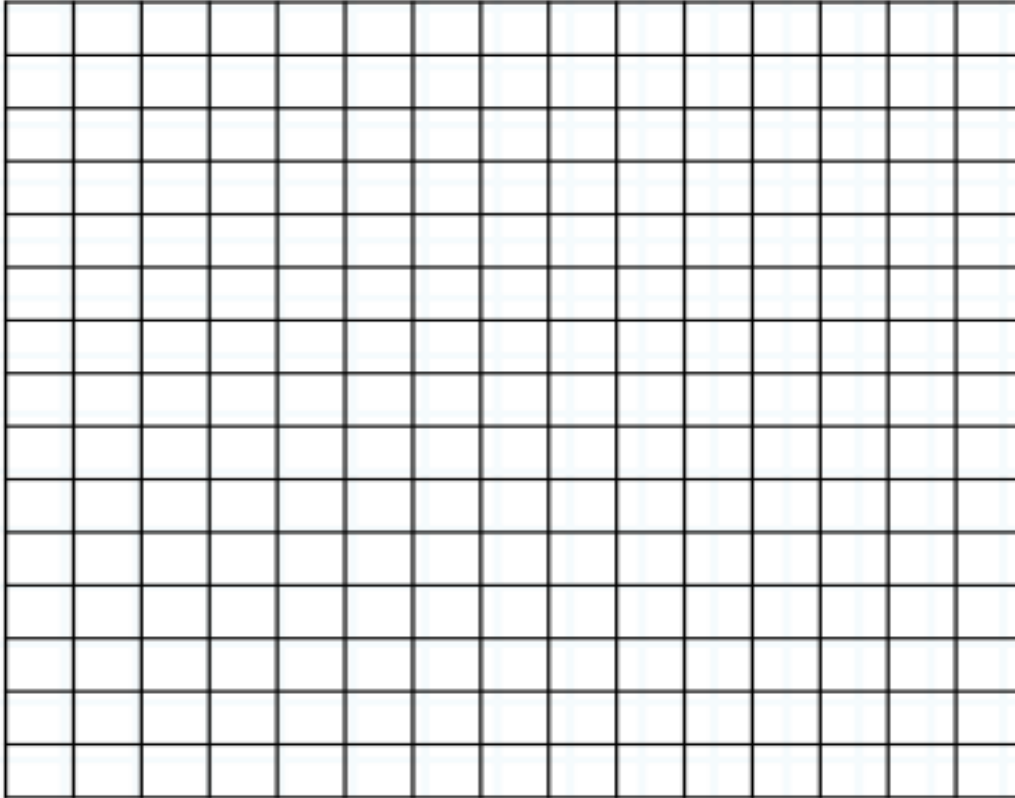
اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدد خصائصه ومثلّ منحناه بيانياً: (مثال 3)

$$x^2 - 17 = 8y + 39 \quad (9)$$

الرأس	
البؤرة	
الدليل	
محور التماثل	
طول الوتر البؤري	

4-1 القطوع المكافئة

$$x^2 - 17 = 8y + 39 \quad (9)$$



1-4 القطوع المكافئة

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:
(مثال 4)

- 15) البؤرة $(-9, -7)$ والرأس $(-9, -4)$.
- 16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

1-4 القطوع المكافئة

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة:
(مثال 5)

$$(24) \quad (x + 7)^2 = -\frac{1}{2}(y - 3); (-5, -5)$$



4-1 القطوع المكافئة

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

(29) المعادلة هي $y^2 = -8(x - 6)$

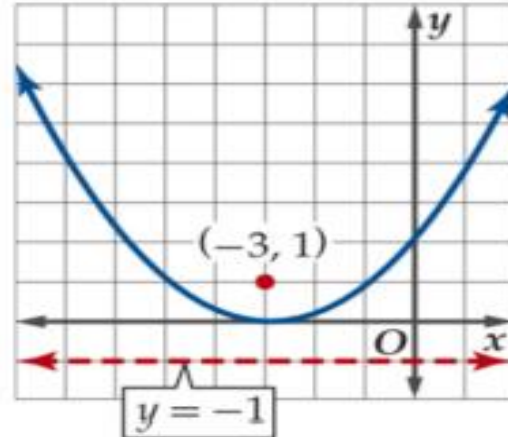
(28) الدليل $y = 4$ و $c = -2$

1-4 القطوع المكافئة

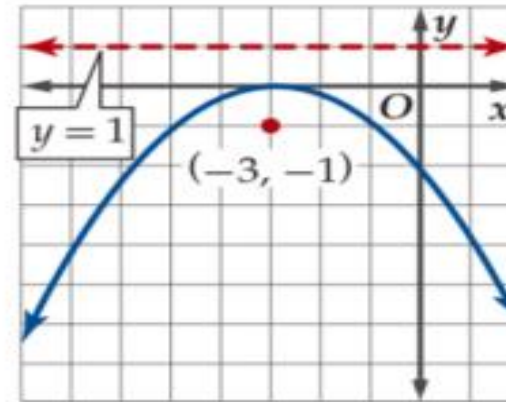
مسائل مهارات التفكير العليا

(36) **اكتشف الخطأ:** مثلت صفيّة وميمونة المنحني $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانياً كما هو موضح أدناه. فأَي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

ميمونة

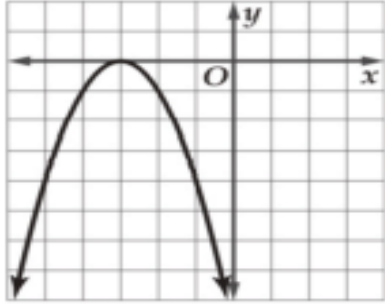


صفيّة



4-1 القطوع المكافئة

تدريب على اختبار



(50) ما الدالة الرئيسية (الأم) للدالة الموضحة منحناها جانبياً؟

- A $y = x$
- B $y = |x|$
- C $y = \sqrt{x}$
- D $y = x^2$

(49) إذا كان x عدداً موجباً، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

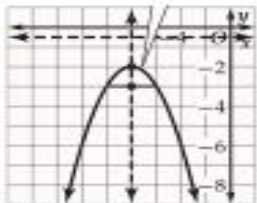
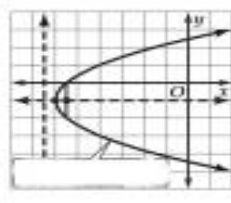
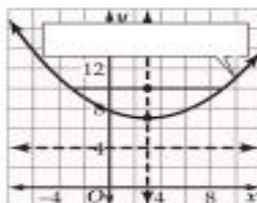
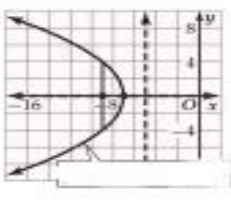
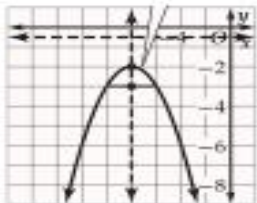
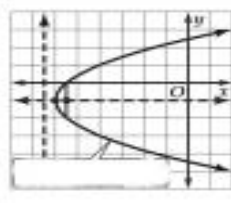
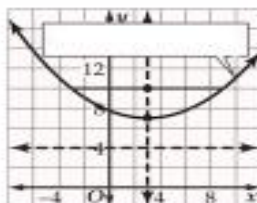
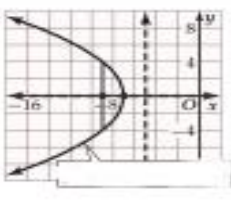
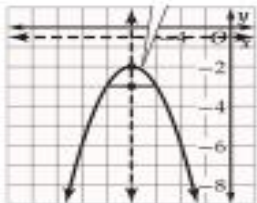
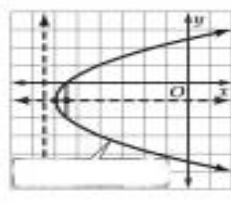
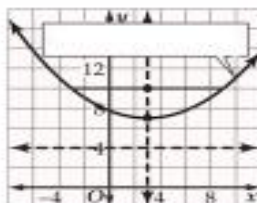
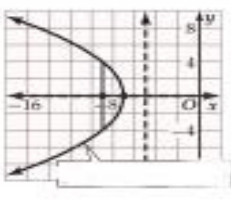
- A $x^{-\frac{1}{4}}$
- B $\sqrt{x^3}$
- C $x^{\frac{3}{4}}$
- D $\sqrt{x^5}$

1-4 القطوع المكافئة

(4 - 1) القطوع المكافئة

اسم الطالب : الشعبة :

اختر الإجابة الصحيحة:

1	التمثيل البياني الصحيح للقطع المكافئ الذي معادلته $(x - 3)^2 = 12(y - 7)$:		A
			B
			C
			D
2	معادلة قطع المكافئ التي تحقق الخصائص (البؤرة $(-9, -7)$ ، الرأس $(-9, -4)$) هي :		A
			B
			C
			D
3	إذا كان دليل القطع المكافئ $y = 4$ و $c = -2$ فإن فتحة القطع المكافئ :		A
			B
			C
			D
	أكمل الفراغات التالية :		
1	بؤرة القطع المكافئ $(y + 5)^2 = 24(x - 1)$		
2	معادلة محور التماثل للقطع المكافئ $-40(x + 4) = (y - 9)^2$		



الكلمة المفقودة للقطع المكافئ

1-4 القطوع المكافئة

ما هي الكلمة المفقودة

ر	هـ	ا	ل	ب	ؤ	ر	هـ	ا
ن	ا	د	ي	م	ي	ن	ا	س
م	ت	س	م	ك	ف	ا	ي	ف
ا	ل	د	ل	ي	ل	ب	ع	ل
ق	ط	ع	م	خ	ر	و	ط	ي



(1) القطع المكافئ الذي معادلته $(y + 4)^2 = 12(x - 6)$ يكون مفتوح ناحية :

(2) الشكل الناتج عن تقاطع مستوي ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس . كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر بالرأس .

(3) النقطة $(4, 1)$ تمثل للقطع المكافئ الذي معادلته $(x - 4)^2 = 8(y + 3)$.

(4) المعادلة $(y - 3)^2 = 20(x - 1)$ تمثل معادلة قطع

(5) النقطة $(7, 5)$ تمثل القطع المكافئ الذي معادلته $(x - 7)^2 = 4(y - 5)$.

(6) اتجاه فتحة القطع المكافئ الذي معادلته $(x - 17)^2 = -4(y + 5)$ إلى

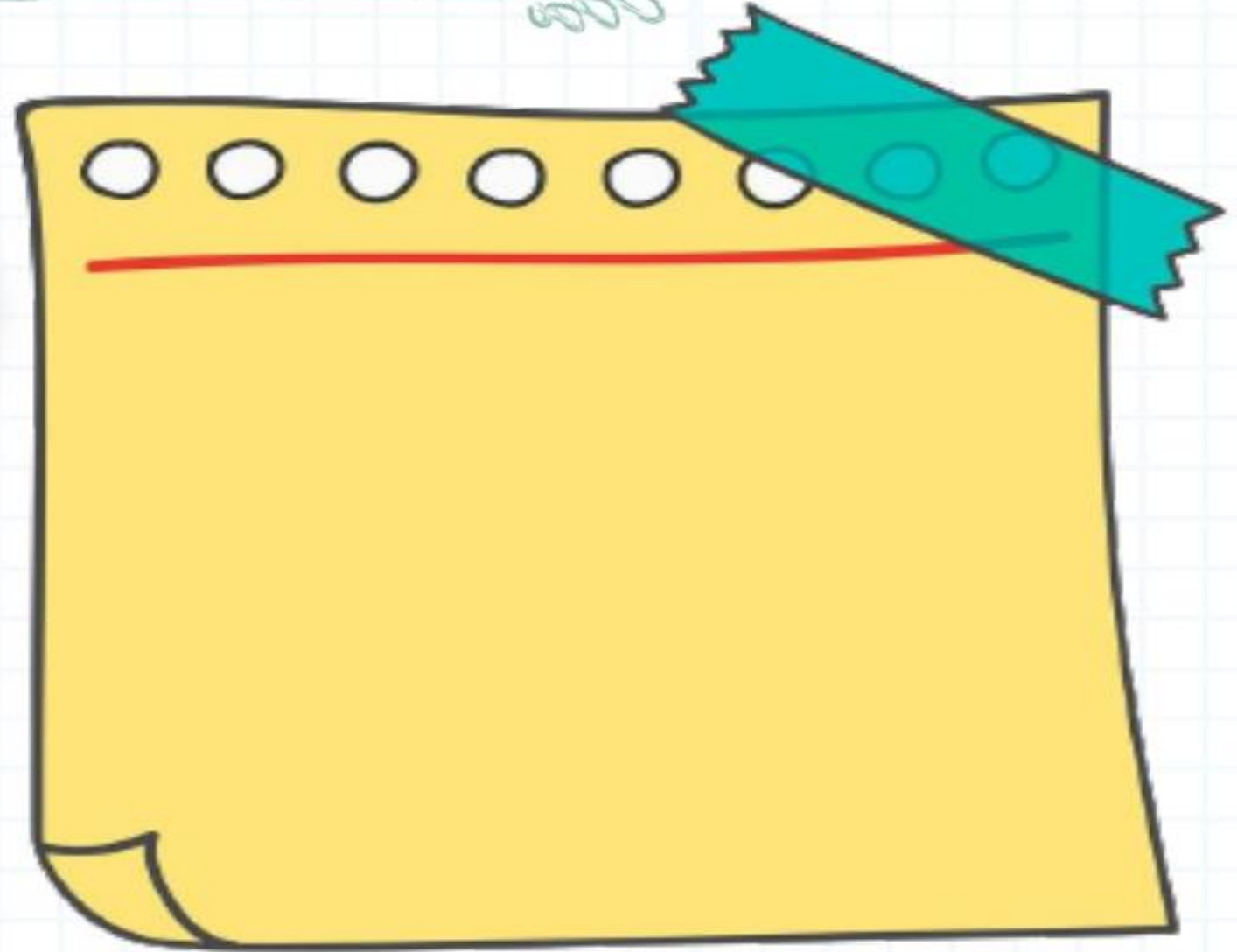
(7) $x = 2$ تمثل معادلة للقطع المكافئ الذي معادلته $(y + 1)^2 = 16(x - 6)$

١	يمتد
٢	قطع مخروطي
٣	اليدوية
٤	مكافئ
٥	رأس
٦	أسفل
٧	الدليل

الكلمة المفقودة أنت مبدعة

1-4 القطوع المكافئة

الواجب المنزلي



1-4 القطوع المكافئة

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :





تطوير - إنتاج - توثيق

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

فيما سبق:

درست تحليل القطوع
المكافئة وتمثيلها بيانياً.
(الدرس 1-4)

والآن:

- أحلّ معادلات القطوع
الناقصة والدوائر،
وأمثلهما بيانياً.
- أكتب معادلات القطوع
الناقصة والدوائر.

المفردات:

القطع الناقص

ellipse

البؤرتان

foci

المحور الأكبر

major axis

المركز

center

المحور الأصغر

minor axis

الرأسان

vertices

الرأسان المرافقان

co-vertices

الاختلاف المركزي

eccentricity

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

لماذا؟

يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليلجيًا يسمى قطعًا ناقصًا.

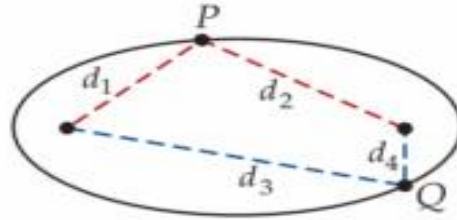
أسئلة التعزيز :

1. مما يتكون نظامنا الشمسي؟
2. هل تبقى الأرض على بعد ثابت من الشمس؟
3. ما المقصود بان الشمس في البؤرة ؟



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًا: القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان البؤرتين، وعمليًا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البؤرتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ ، وهذا مقدار ثابت.

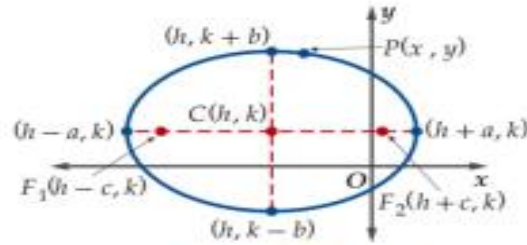


تُسمى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمى نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



نظير - إكليل - توشق

2-4 القطوع الناقصة والدوائر



تعريف القطع الناقص

صيغة المسافة

خاصية التوزيع ثم التجميع

اطرح

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع
مجموع (أو الفرق) بين حدين

بسط

اقسم كلا الطرفين على 4

ربّع الطرفين

خاصية التوزيع

بسط

$a^2 - c^2 = b^2$

اقسم الطرفين على a^2b^2

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ، حيث $a > b$ ، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a - \sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2}$$

$$(x - h)^2 - 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} + (x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2$$

$$4a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} = 4a^2 + 4c(x - h)$$

$$a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} = a^2 + c(x - h)$$

$$a^2[(x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2] = a^4 + 2a^2c(x - h) + c^2(x - h)^2$$

$$a^2(x - h)^2 + 2a^2c(x - h) + a^2c^2 + a^2(y - k)^2 = a^4 + 2a^2c(x - h) + c^2(x - h)^2$$

$$a^2(x - h)^2 - c^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

💡 مقطع توضيحي

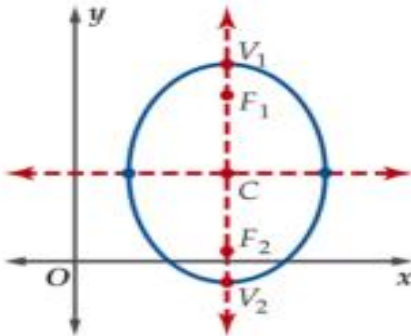
2-4 القطوع الناقصة والدوائر

مفهوم أساسي

خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



الاتجاه : المحور الأكبر رأسي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

الرأسان : $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان : $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر : $x = h$ وطوله $2a$

المحور الأصغر : $y = k$ وطوله $2b$

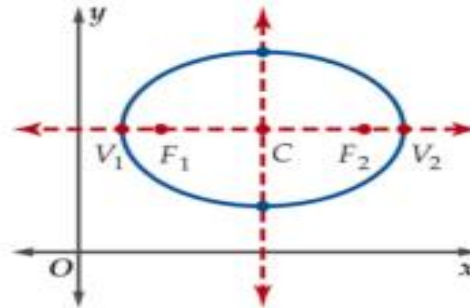
العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

طول البعد البؤري : $2C$

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه : المحور الأكبر أفقي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h \pm c, k)$

الرأسان : $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان : $(h, k \pm b)$

المحور الأكبر : $y = k$ وطوله $2a$

المحور الأصغر : $x = h$ وطوله $2b$

العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

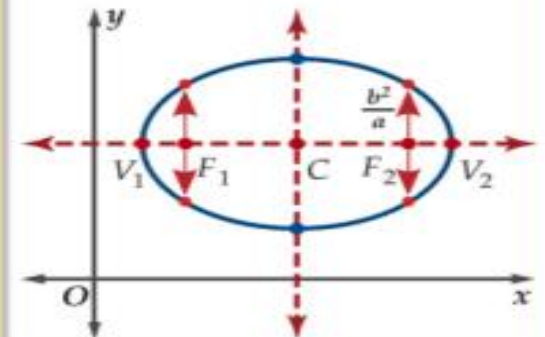
طول البعد البؤري : $2C$

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى
البعد البؤري.

لرسم القطع الناقص نعين
نقاطًا مساعدة وهي التي تبعد
مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من
البؤرتين.



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x - h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y - k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

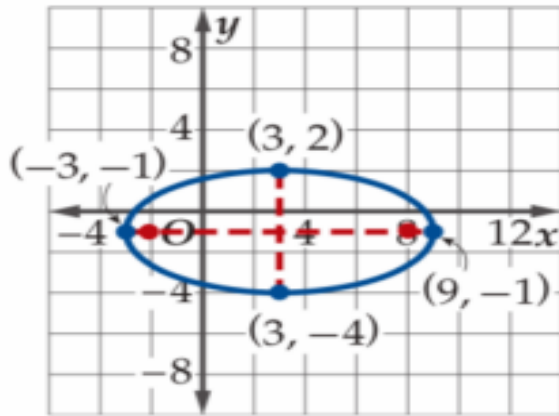
حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًا:

$$(a) \frac{(x - 3)^2}{36} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث

$$h = 3, k = -1, a = \sqrt{36} = 6, b = \sqrt{9} = 3, c = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.



$(x - h)^2$ مقسومًا على a^2

أفقي

الاتجاه:

(h, k)

$(3, -1)$

المركز:

$(h \pm c, k)$

$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$

البؤرتان:

$(h \pm a, k)$

$(-3, -1)$ و $(9, -1)$

الرأسان:

$(h, k \pm b)$

$(3, 2)$ و $(3, -4)$

الرأسان المرافقان:

$y = k$ ، طول المحور الأكبر $2a$

$y = -1$ ، وطوله 12

المحور الأكبر:

$x = h$ ، طول المحور الأصغر $2b$

$x = 3$ ، وطوله 6

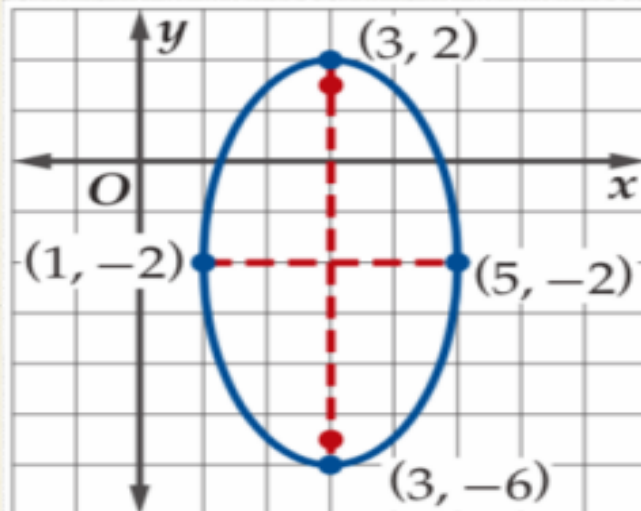
المحور الأصغر:

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلاً حول المحورين الأكبر والأصغر.



تطوير - إعداد - توثيق

2-4 القطوع الناقصة والدوائر



$$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0 \quad (b)$$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

المعادلة الأصلية

$$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$$

جمع الحدود المتشابهة

$$(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$$

حلل

$$4(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = -24$$

كامل المربعين

$$4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -24 + 4(9) + 4$$

حلل وبسط

$$4(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

اقسم الطرفين على 16

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$$

المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

$$(y - k)^2 \text{ مقسوماً على } a^2$$

رأسي

الاتجاه:

$$(h, k)$$

$$(3, -2)$$

المركز:

$$(h, k \pm c)$$

$$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$$

البؤرتان:

$$(h, k \pm a)$$

$$(3, 2) \text{ و } (3, -6)$$

الرأسان:

$$(h \pm b, k)$$

$$(1, -2) \text{ و } (5, -2)$$

الرأسان المرافقان:

$$x = h, \text{ طول المحور الأكبر } 2a$$

$$x = 3, \text{ وطوله } 8$$

المحور الأكبر:

$$y = k, \text{ طول المحور الأصغر } 2b$$

$$y = -2, \text{ وطوله } 4$$

المحور الأصغر:

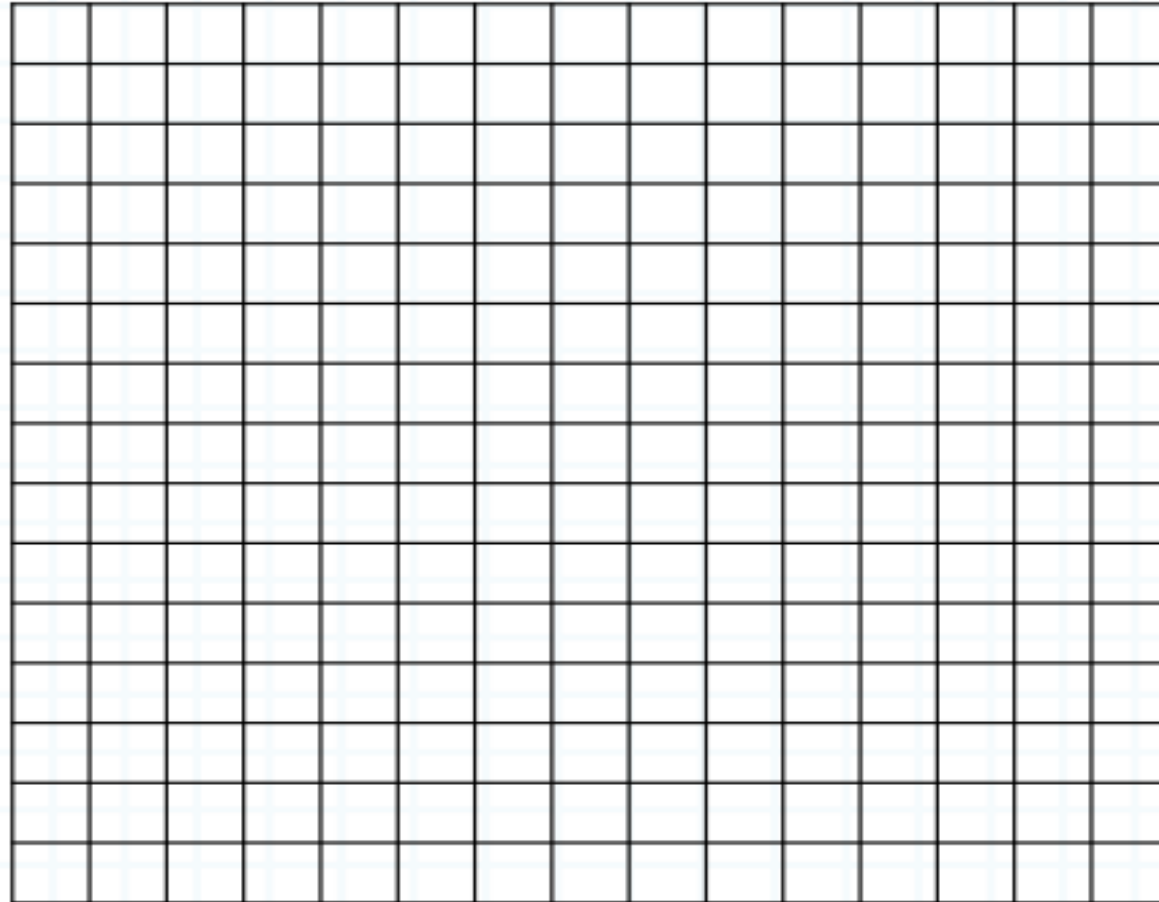
عين المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلاً حول المحورين الأكبر والأصغر.



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثمّ مثلّ منحناه بيانيّاً:

تحقق من فهمك



$$\frac{(x - 6)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1 \quad (1A)$$

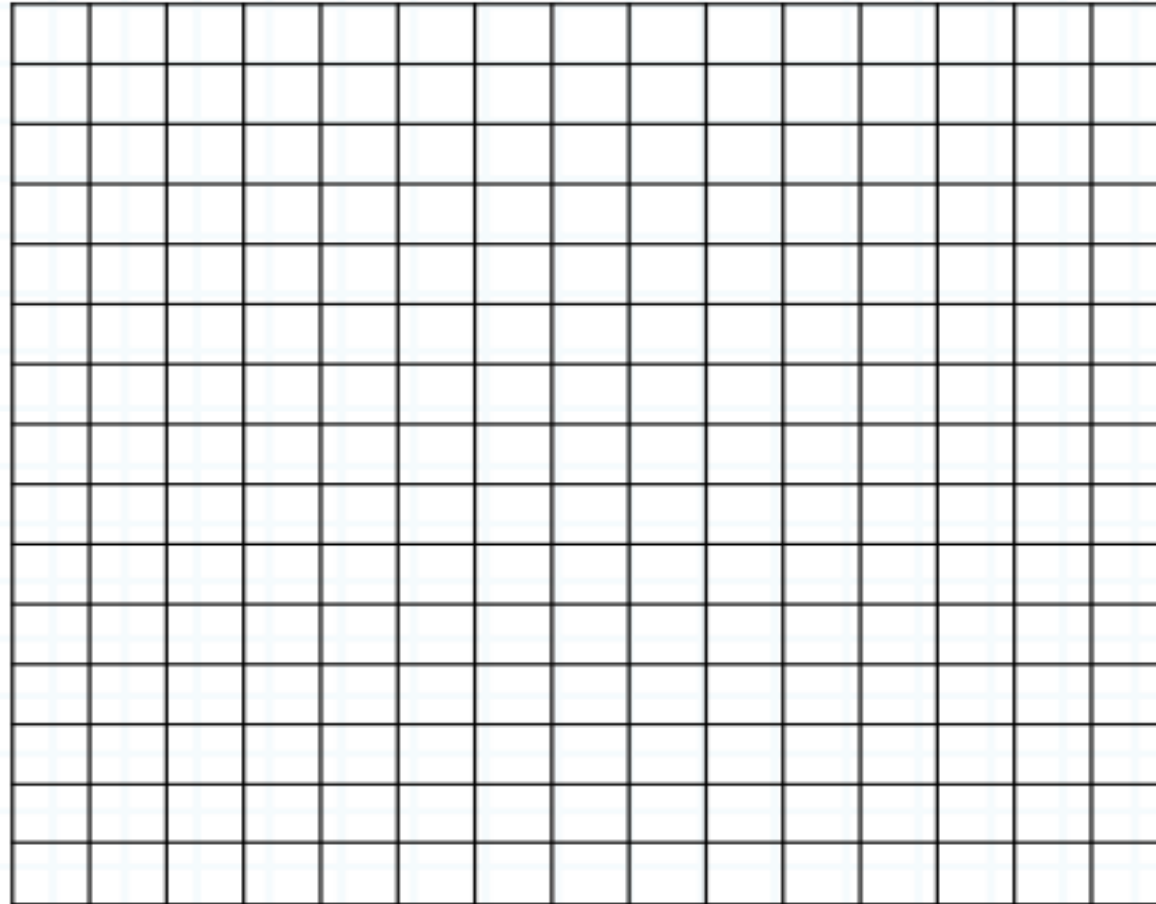
	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	الرأسان
	المحور الأكبر
	المحور الأصغر



4-2 القطوع الناقصة والدوائر

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0 \quad (1B)$$

2-4 القطوع الناقصة والدوائر



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	الرأسان
	المحور الأكبر
	المحور الأصغر

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا علمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:
(a) الرأسان $(-6, 2)$ ، $(-6, -8)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$ ، $(-3, -3)$.
استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a ، b .

نصف طول المحور الأصغر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$$

نصف طول المحور الأكبر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر.

$$(h, k) = \left(\frac{-6 + (-6)}{2}, \frac{2 + (-8)}{2} \right) \\ = (-6, -3)$$

صيغة نقطة المنتصف
بسط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$$

والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1.

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

مقطع توضيحي



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تحقق من فهمك

2A البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

2B الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

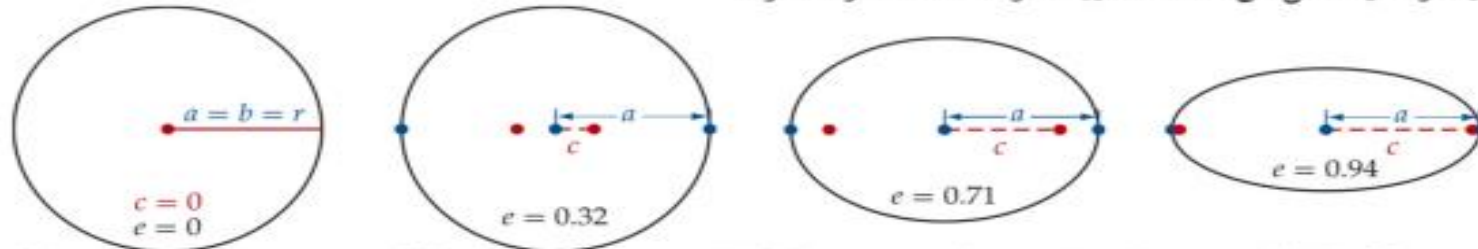
الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . وتقع هذه القيمة دائماً بين 0 و 1، وتحدد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

الاختلاف المركزي

مفهوم أساسي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

تمثل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن c من قيمتي e, c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a, b مساوية لطول نصف قطر الدائرة.



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
أولاً: نحدد قيمة c .

العلاقة بين a, b, c

$$a^2 = 100, b^2 = 9$$

بسّط

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 100 - 9$$

$$c = \sqrt{91}$$

نستعمل قيمتي a, c لنجد الاختلاف المركزي.

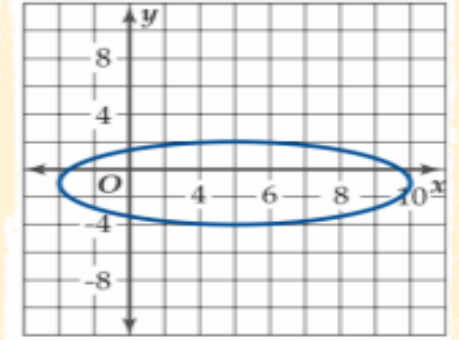
صيغة الاختلاف المركزي

$$a = 10, c = \sqrt{91}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريباً، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعاً كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3



4-2 القطوع الناقصة والدوائر

تحقق من فهمك

$$\frac{(x - 4)^2}{19} + \frac{(y + 7)^2}{17} = 1 \quad (3B)$$

$$\frac{x^2}{18} + \frac{(y + 8)^2}{48} = 1 \quad (3A)$$

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

مثال 4 من واقع الحياة

استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثل المقطع العرضي المنصف للعين مارةً بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريباً، فما الارتفاع التقريبي لها؟

استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

تعريف الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

$$e = 0.28, a = 12.5 \quad 0.28 = \frac{c}{12.5}$$

اضرب $c = 3.5$

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

العلاقة بين a, b, c $c^2 = a^2 - b^2$

$$c = 3.5, a = 12.5 \quad 3.5^2 = 12.5^2 - b^2$$

بسّط $b = 12$

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$ ، ويساوي 24 mm تقريباً.



مهنّة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

معادلة القطع الناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$a = b$ عندما $e = 0$ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

اضرب كلا الطرفين في a^2 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

a نصف قطر الدائرة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

مفهوم أساسي

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8.

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(h, k) = (-1, 2), r = \frac{8}{2} = 4$$

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

بسط

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تحقق من فهمك

5B المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10

5A المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

مثال 6

كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$, $(7, 6)$.
الخطوة 1: أوجد المركز.

$$\begin{aligned} (h, k) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف} \\ (x_1, y_1) &= (7, 6), (x_2, y_2) = (-1, -8) \\ &= \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + (-8)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2} \right) \quad \text{اجمع} \\ &= (3, -1) \quad \text{بسّط} \end{aligned}$$

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة بين نقطتين} \\ (x_1, y_1) &= (7, 6), (x_2, y_2) = (3, -1) \\ &= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} \quad \text{اطرح} \\ &= \sqrt{65} \quad \text{بسّط} \end{aligned}$$

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2 = 65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 65$.



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

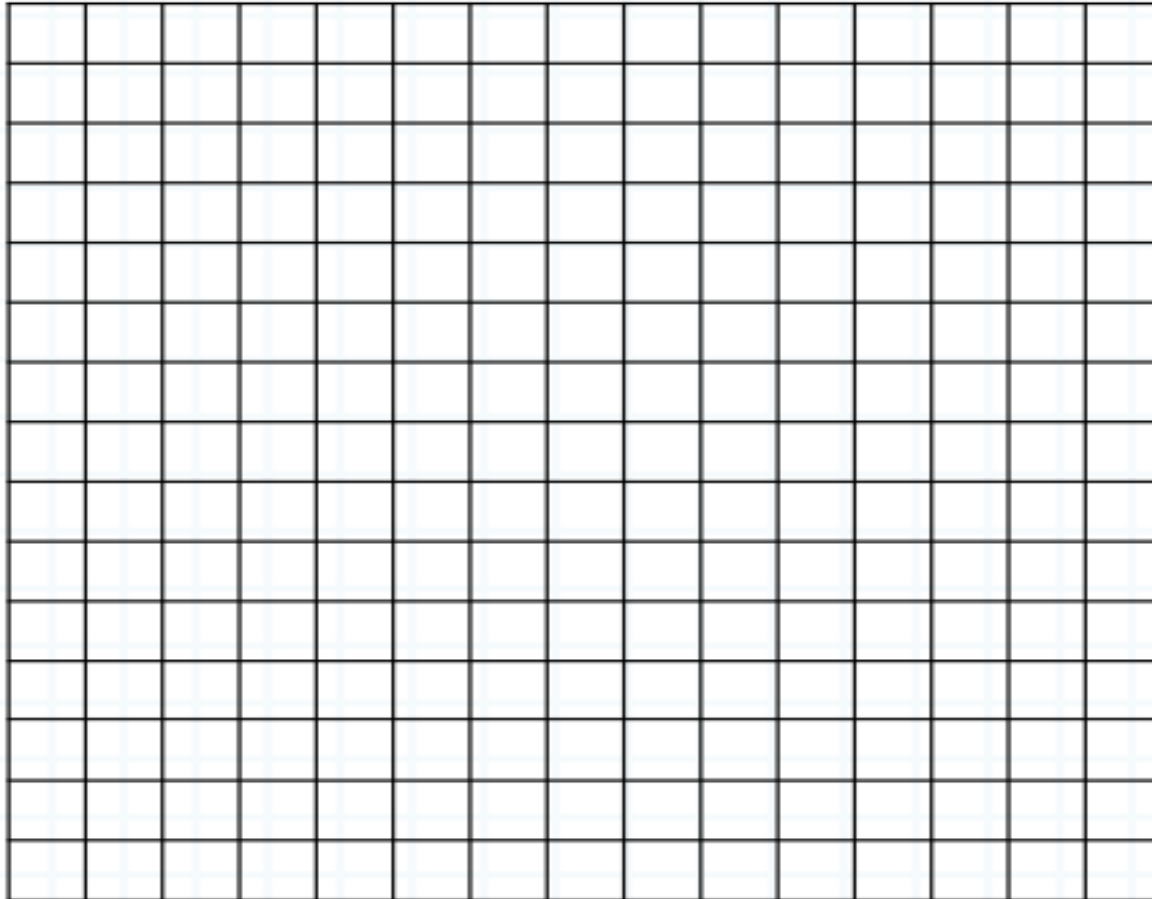
تحقق من فهمك

6 أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًا:

تدرب وحل المسائل



$$(1) \quad \frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$

	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	الرأسان
	المحور الأكبر
	المحور الأصغر



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تدرب وحل المسائل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(6) الرأسان $(4, -9)$, $(4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

(5) الرأسان $(13, -3)$, $(-7, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3)$, $(-5, -3)$

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تدرب وحل المسائل

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي:

$$\frac{(x + 5)^2}{72} + \frac{(y - 3)^2}{54} = 1 \quad (10)$$

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تدرب وحل المسائل

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي.

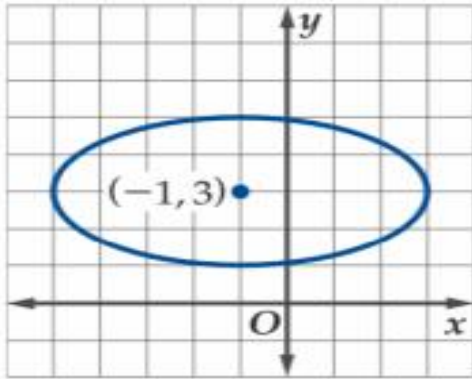
15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

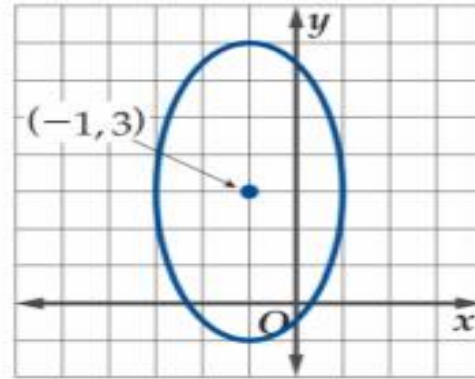
مسائل مهارات التفكير العليا

(37) **اكتشف الخطأ:** مثل خالد وياسر بياناً القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$ ، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

ياسر



خالد



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تدريب على اختبار

(54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعاد اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

$$\begin{array}{ll} \frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1 & \text{C} \\ \frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1 & \text{A} \\ \frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1 & \text{D} \\ \frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1 & \text{B} \end{array}$$

(53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

$$\begin{array}{llll} 2\sqrt{34} & \text{D} & 10 & \text{C} & 8 & \text{B} & 6 & \text{A} \end{array}$$

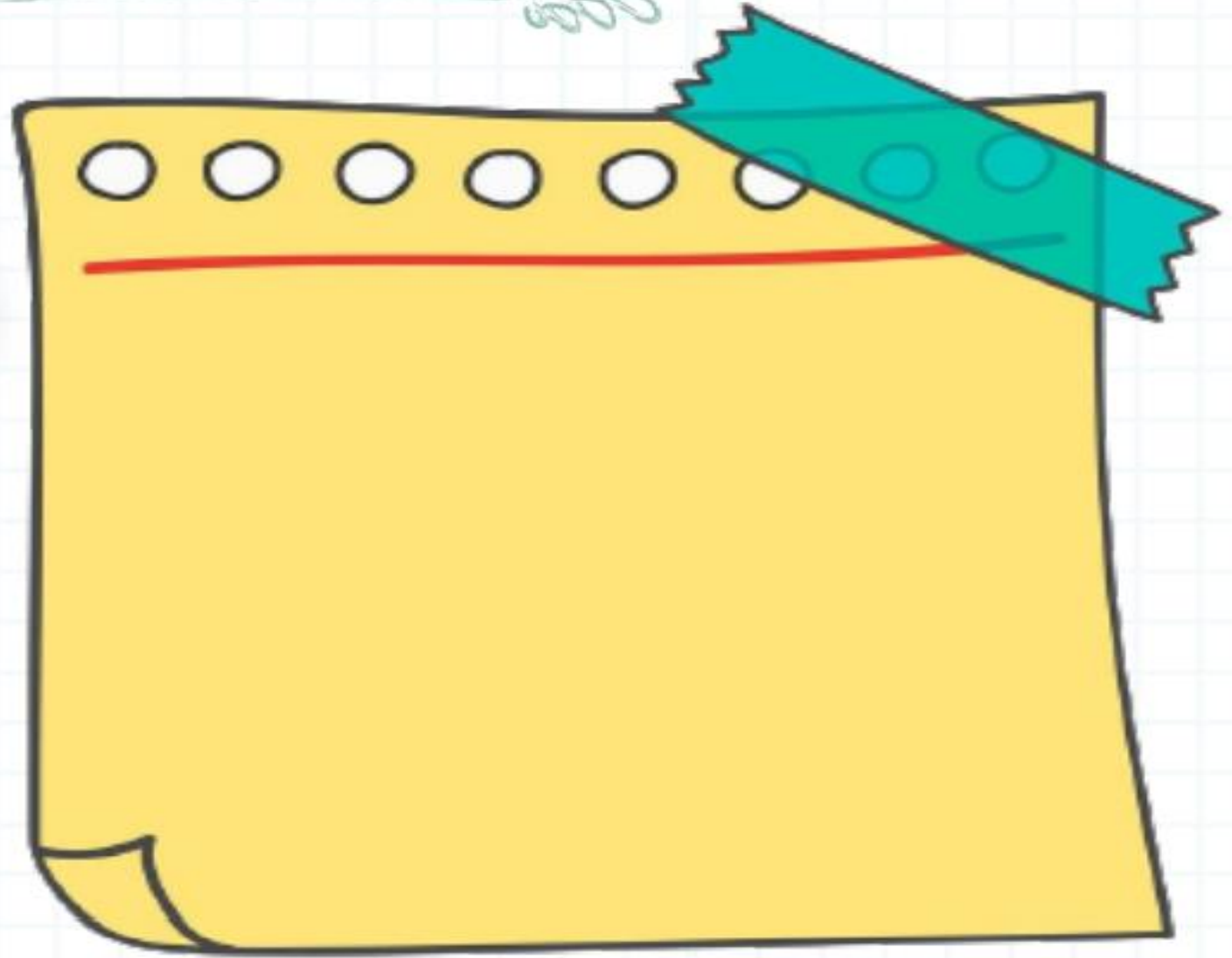
2-4 القطوع الناقصة والدوائر

اختر الإجابة الصحيحة:

1	التمثيل البياني الصحيح للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$:	A		B		C		D	
2	معادلة القطع الناقص التي تحقق الخصائص (الرأسان $(-7, -3)$, $(13, -3)$ والبؤرتان $(-5, -3)$, $(11, -3)$) هي :	A	$\frac{(x+3)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$	B	$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{100} = 1$	C	$\frac{(x+3)^2}{100} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$	D	$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$
3	الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$:	A	0.2	B	0.5	C	0.7	D	0.9
أكمل الفراغات التالية :									
1	طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$	2	معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص (المركز $(3,0)$ ونصف القطر 2)						

2-4 القطوع الناقصة والدوائر

الواجب المنزلي



2-4 القطوع الناقصة والدوائر

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :



3-4 القطوع الزائدة

فيما سبق:

درست تحليل القطوع
الناقصة والدوائر
وتمثيل منحنياتها بيانياً.
(الدرس 2-4)

والآن:

- أحل معادلات القطوع الزائدة، وأمثلها بيانياً.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد

hyperbola

البؤرتان

foci

المركز

center

الرأسان

vertices

المحور القاطع

transverse axis

المحور المرافق

conjugate axis

3-4 القطوع الزائدة

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقص؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرة واحدة فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلاً، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجياً مفتوحاً من إحدى جهتيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانية، ومثل هذه المسارات تُسمى قطوعاً زائدة.

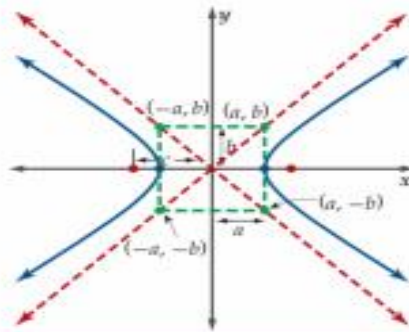


ما وجه الاختلاف الرئيس بين القطع الزائد والقطوع المخروطية الأخرى؟

أي من القطوع المخروطية التي درستها يمثل دالة؟

3-4 القطوع الزائدة

لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عما هي القطع الناقص، ففي القطع الزائد
 $c^2 = a^2 + b^2$ ، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.

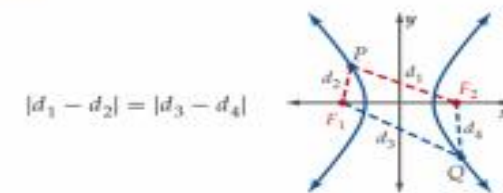


إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما $2b$ ، ويمس القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما $2a$ ، ويمر كل من القطريين المحمولين على خطي التقارب $2c$.

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً: القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتين تسميان (البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً.



يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، ومركز القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، وأساس القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.



للقطع الزائد محوراً تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.

3-4 القطوع الزائدة

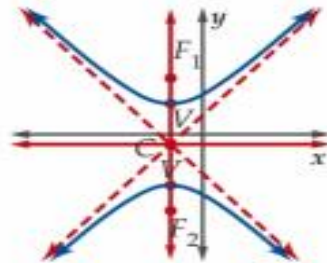
المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

خصائص القطع الزائد

مفهوم أساسي

المعادلة في الصورة القياسية:

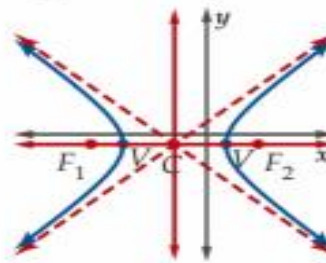
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



- الاتجاه: المحور القاطع رأسي
- المركز: (h, k)
- الرأسان: $(h, k \pm a)$
- البؤرتان: $(h, k \pm c)$
- المحور القاطع: $x = h$ وطوله $2a$
- المحور المرافق: $y = k$ وطوله $2b$
- خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$
- العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



- الاتجاه: المحور القاطع أفقي
- المركز: (h, k)
- الرأسان: $(h \pm a, k)$
- البؤرتان: $(h \pm c, k)$
- المحور القاطع: $y = k$ وطوله $2a$
- المحور المرافق: $x = h$ وطوله $2b$
- خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
- العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- طول البعد البؤري: $2C$

3-4 القطوع الزائدة



مقطع توضيحي



نظور - إلقاء - توشيح

3-4 القطوع الزائدة

مثال 1

تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16}$ ، ثمّ مثلّ منحناه بيانيًا.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9 + 16} = 5$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x

الاتجاه: أفقي

$$(h, k)$$

$$(-1, -2)$$

المركز:

$$(h \pm a, k)$$

$$(2, -2), (-4, -2)$$

الرأسان:

$$(h \pm c, k)$$

$$(4, -2), (-6, -2)$$

البؤرتان:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h) \quad y + 2 = \frac{4}{3}(x + 1), \quad y + 2 = -\frac{4}{3}(x + 1)$$

خطا التقارب:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}, \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$$

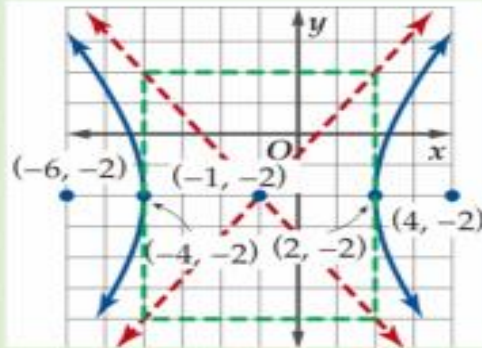
تنبيه!

عندما تمثّل منحنى القطع الزائد بيانيًا تذكر أن المنحنى سيقترّب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

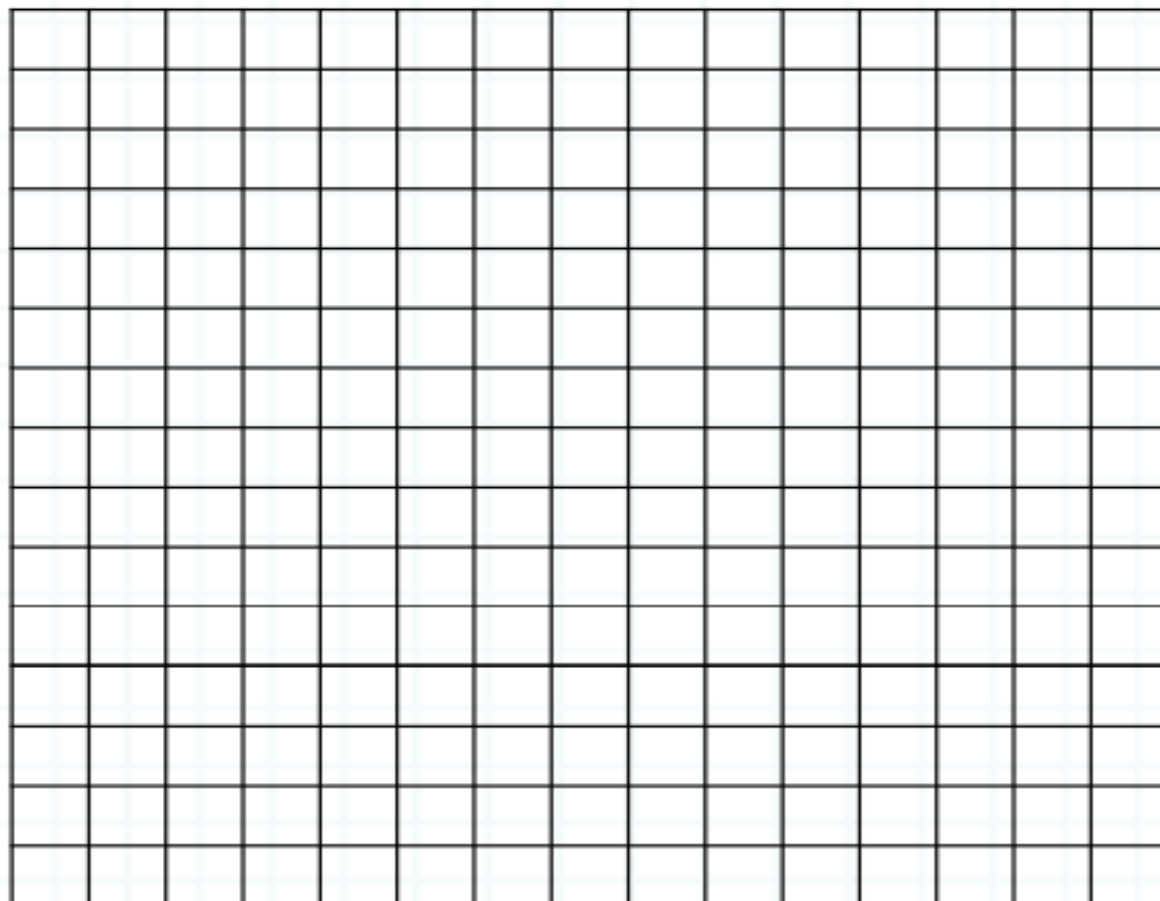
إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y ، فإن اتجاه القطع رأسي.



عيّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$ ، والبعد الآخر $2b = 8$ ، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثمّ مثلّ القطع الزائد بيانيًا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

3-4 القطوع الزائدة

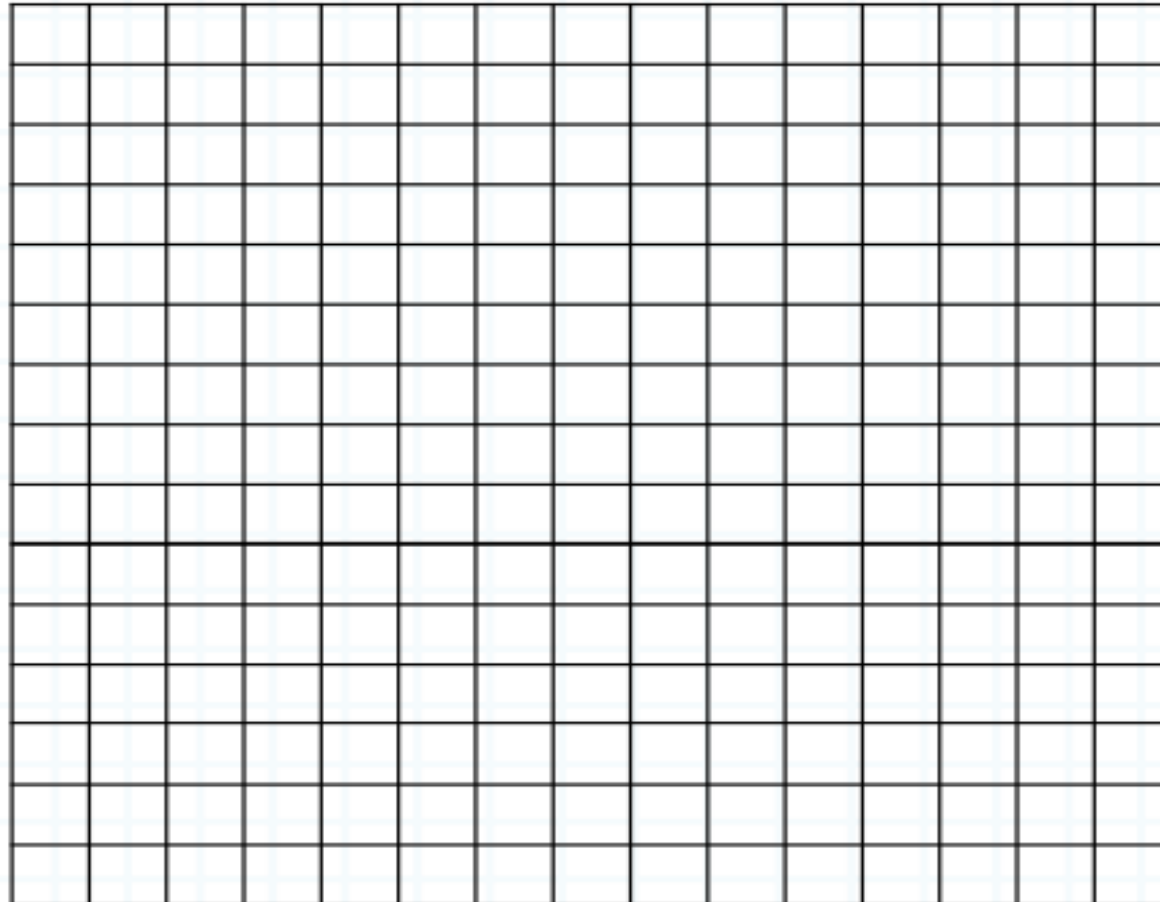
تحقق من فهمك



$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \quad (1A)$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب

3-4 القطوع الزائدة



$$\frac{(y + 4)^2}{64} - \frac{(x + 1)^2}{81} = 1 \quad (1B)$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب

3-4 القطوع الزائدة

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

مثال 2

كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدّد خصائصه ومثّل منحناه بيانيًا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

المعادلة الأصلية $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$

جمع الحدود المتشابهة $(25y^2 + 100y) + (-16x^2 + 96x) = 444$

حلّل $25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$

أكمل المربع $25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$

حلّل ووسّع $25(y + 2)^2 - 16(x - 3)^2 = 400$

اقسم كلا الطرفين على 400 $\frac{(y + 2)^2}{16} - \frac{(x - 3)^2}{25} = 1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16 + 25} \approx 6.4$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائماً عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1.

3-4 القطوع الزائدة



تطوير - إنتاج - توثيق



الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)

كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولونيوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طُوّر هذا الكتاب مشاهير كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

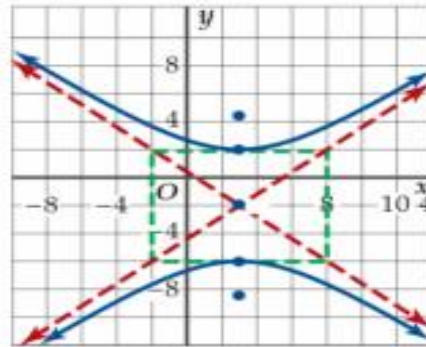
المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .

$$(h, k)$$

$$(h, k \pm a)$$

$$(h, k \pm c)$$

خطا التقارب: $y - (-2) = \frac{4}{5}(x - 3)$, $y - (-2) = -\frac{4}{5}(x - 3)$
 $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$
 $y = \frac{4}{5}x - \frac{22}{5}$, $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$



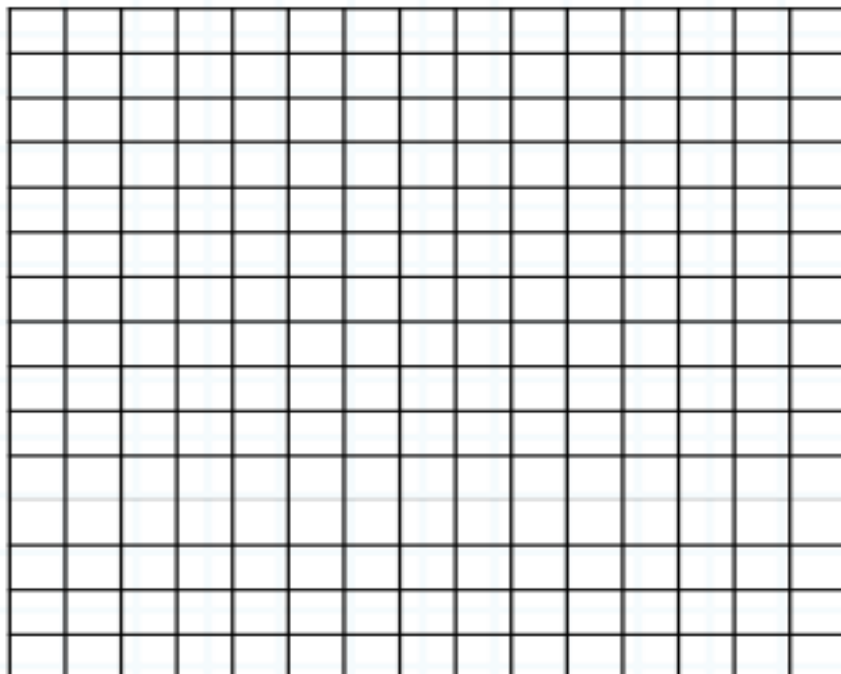
عَيّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعْدَيْه $2a = 8$ ، والبعد الآخر $2b = 10$ ، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَي التقارب $2c = 12.8$ ، ثم مثل القطع الزائد بيانيًا، بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

3-4 القطوع الزائدة

تحقق من فهمك

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68 \quad (2A)$$

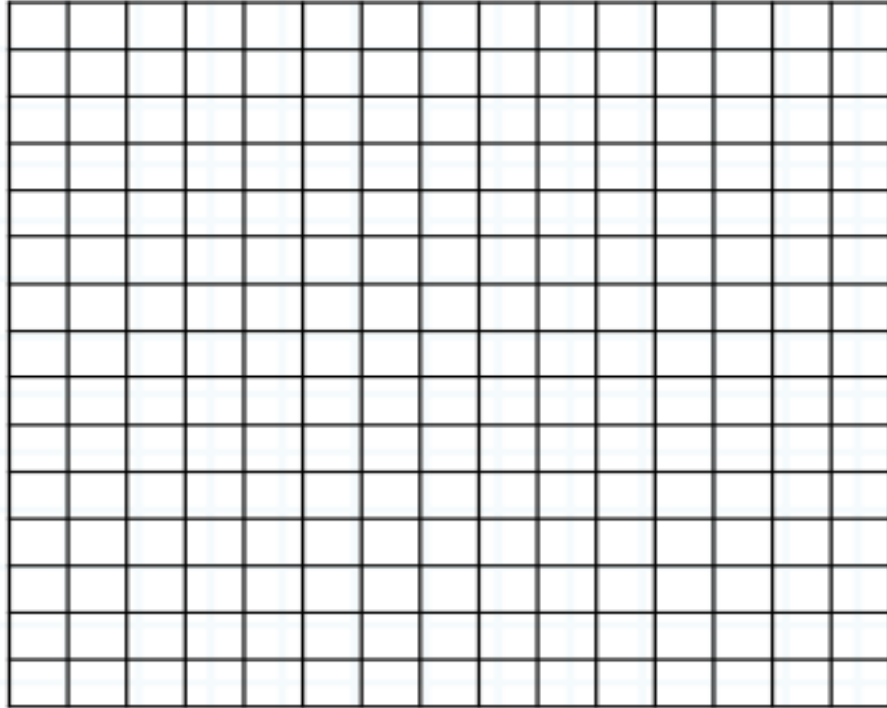
	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب



3-4 القطوع الزائدة

$$2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0 \quad (2B)$$

الاتجاه	
المركز	
الرأسان	
البؤرتان	
خطا التقارب	



3-4 القطوع الزائدة

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا علم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

(a) الرأسان $(-3, 2)$ ، $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$ ، $(-3, -7)$.

بما أن إحداثي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a ، b ، c .

المركز: $(-3, -2) = \left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2} \right)$
نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

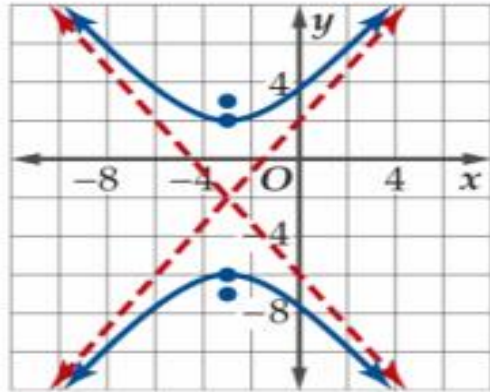
$$a = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (-6 - (-2))^2} = 4 \quad \text{المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز}$$

$$c = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (3 - (-2))^2} = 5 \quad \text{المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad b = 3$$

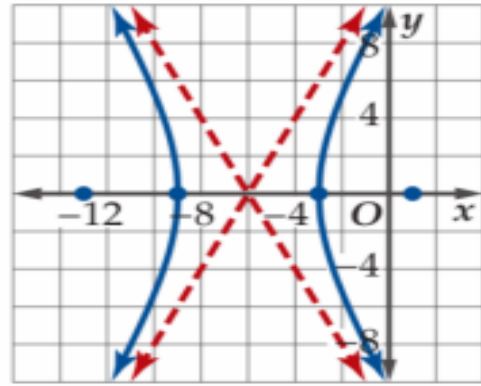
بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1 \quad \text{انظر الشكل 4.3.1.}$$



الشكل 4.3.1

3-4 القطوع الزائدة



الشكل 4.3.2

(b) الرأسان $(-9, 0)$ ، $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = -2x + 12$ ، $y = 2x - 12$.

بما أن إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (-6, 0)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

المسافة بين أي من الرأسين والمركز $a = 3$

ميل خطي التقارب: $\pm \frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

الميل الموجب لخط التقارب $\frac{b}{a} = 2$

$a = 3$ $\frac{b}{3} = 2$

بسط $b = 6$

بما أن المحور القاطع أفقي، فإن a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. انظر الشكل 4.3.2.

3-4 القطوع الزائدة

تحقق من فهمك

3B البؤرتان $(2, -2)$ ، $(12, -2)$ ، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ ، $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

3A الرأسان $(3, 6)$ ، $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3-4 القطوع الزائدة

مثال 4

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$
حدّد أولاً قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{العلاقة بين } a, b, c$$

$$c^2 = 48 + 36 \quad a^2 = 48, b^2 = 36$$

$$c = \sqrt{84} \quad \text{بسّط}$$

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{صيغة الاختلاف المركزي}$$

$$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}} \quad a = \sqrt{48}, c = \sqrt{84}$$

$$\approx 1.32 \quad \text{بسّط}$$

3-4 القطوع الزائدة

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

$$\frac{(y - 2)^2}{15} - \frac{(x + 9)^2}{75} = 1 \quad (4B)$$

$$\frac{(x + 8)^2}{64} - \frac{(y - 4)^2}{80} = 1 \quad (4A)$$

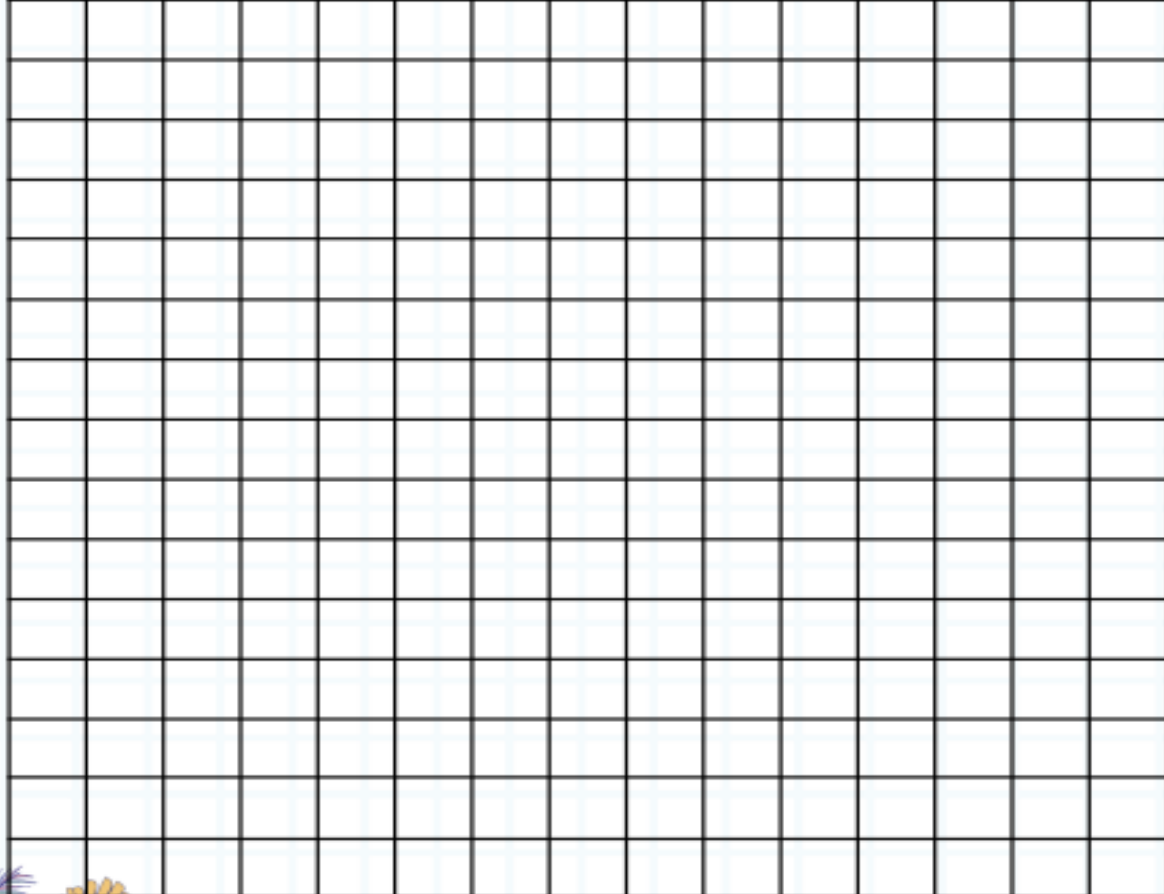
3-4 القطوع الزائدة

تدرب وحل المسائل

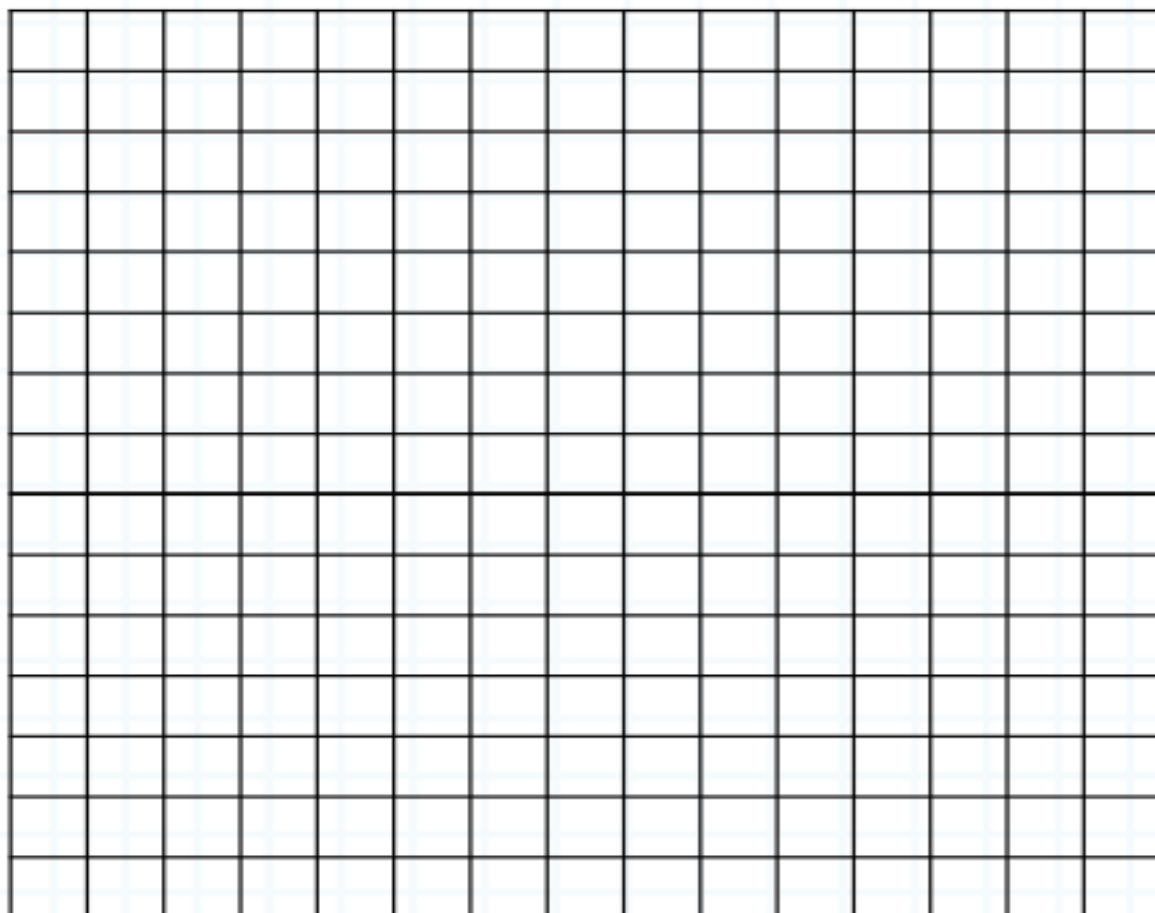
حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل
منحناه بيانياً: (مثال 1)

$$(1) \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب



3-4 القطوع الزائدة



$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1 \quad (2)$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خطا التقارب

3-4 القطوع الزائدة

تدرب وحل المسائل

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثل منحناه بيانيًا: (مثال 2)

$$(8) \quad x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$$

	الاتجاه
	المركز
	الرأسان
	البؤرتان
	خط التقارب

3-4 القطوع الزائدة

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:
(مثال 3)

(14) الرأسان $(-5, 5)$ ، $(7, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5)$ ، $(11, 5)$.

(13) البؤرتان $(-1, -7)$ ، $(-1, 9)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.



تطوير - إعداد - توثيق

3-4 القطوع الزائدة

$$\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1 \quad (21)$$

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:
(مثال 4)

3-4 القطوع الزائدة

تدريب على اختبار

(48) سؤال ذو إجابة قصيرة، أوجد معادلتني خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1}$.

(47) مراجعة: يمثل منحنى $1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2$ قطعًا زائدًا. ما معادلتنا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

3-4 القطوع الزائدة

اختر الإجابة الصحيحة:

1 التمثيل البياني الصحيح للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$ ، A B C D	2 معادلة القطع الزائد التي تحقق الخصائص (البؤرتان $(-1, 9), (-1, -7)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة) هي : A $\frac{(y+1)^2}{15} - \frac{(x-1)^2}{49} = 1$ B $\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$ C $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1$ D $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+5)^2}{64} = 1$
3 الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$ ، A 0.2 B 4.67 C 2.34 D 1.52	أكمل الفراغات التالية : 1 خطا التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$ 2 رأسا القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$ 1 2



تطوير - إعداد - تدقيق

قصصات القطع الناقص والزايد

3-4 القطوع الزائدة

ضعي القصصات باطنان
المناسب لها



$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$$

يكون رأساه هما:

إحداثيات مركز القطع الناقص

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

إحداثيات البؤرتان للقطع الزائد

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

يكون رأساه طرفاها هما:

(0, 3)

(4, -2)

(3, 2)

(6, -3)

(0, -3)

(3, -4)

(6, -2)

إحداثيات مركز القطع الناقص

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

إحداثيات البؤرتان للقطع الزائد

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

إحداثيات مركز القطع الناقص

$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

إحداثيات البؤرتان للقطع الزائد

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

إحداثيات مركز القطع الناقص

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

إحداثيات البؤرتان للقطع الزائد

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

إحداثيات مركز القطع الناقص

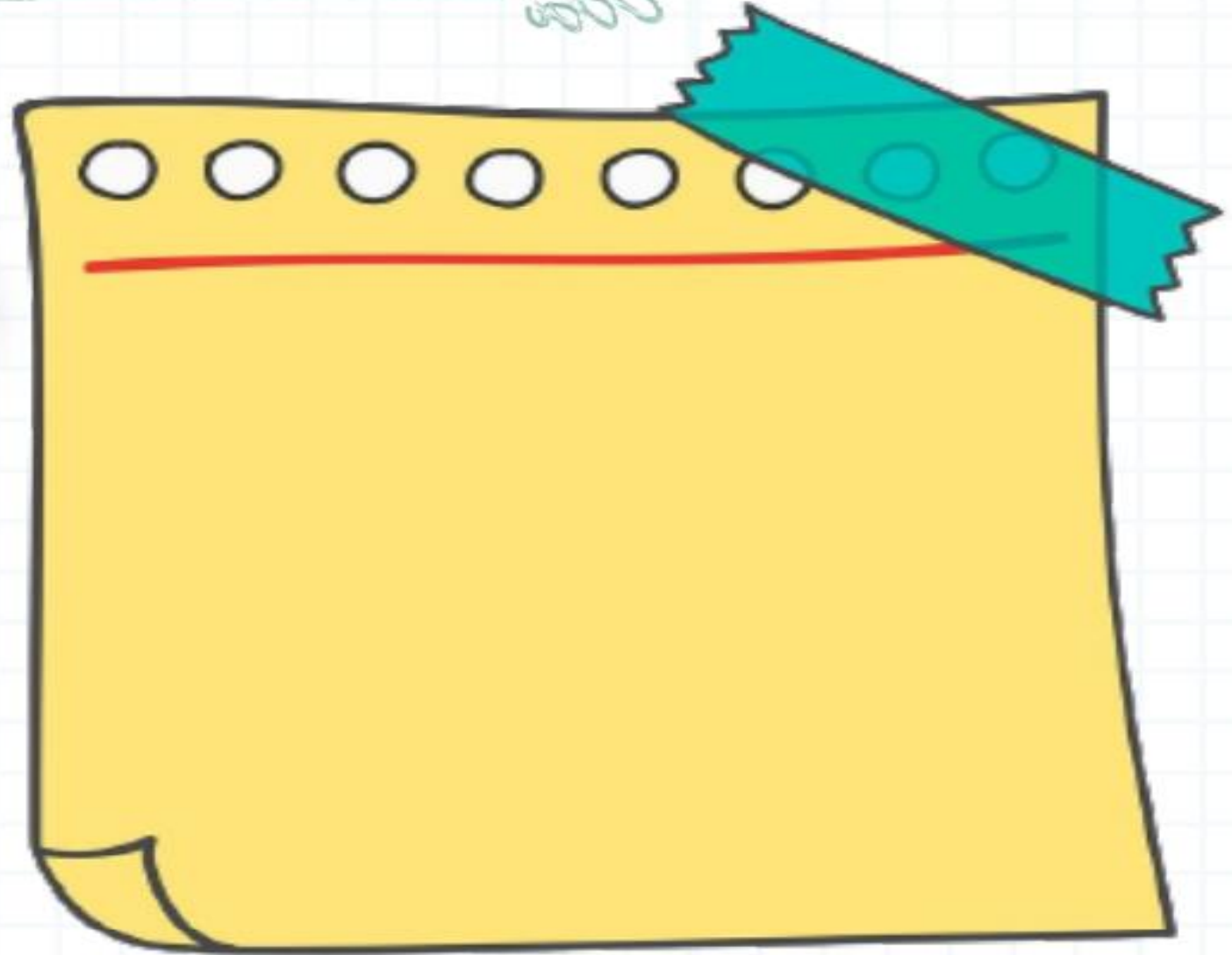
$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

إحداثيات البؤرتان للقطع الزائد

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

القطوع الناقصة والدوائر

الواجب المنزلي



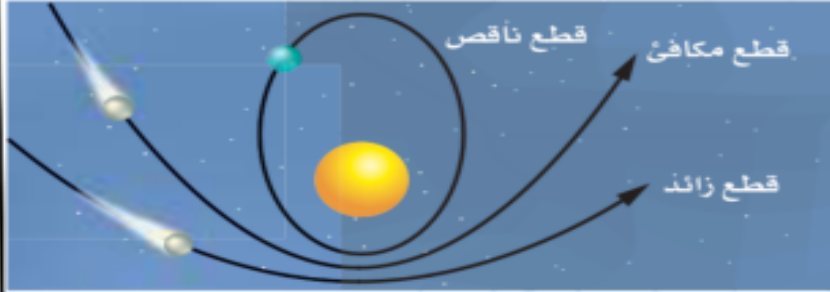
3-4 القطوع الزائدة

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية



لماذا؟

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثل مركز الشمس بؤرة للقطع.

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة:
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفاراً. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

فيما سبق:

درست كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.
(الدروس من 1-4 إلى 3-4)

والآن:

■ أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

مثال 1

كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلاً من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله:

$$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0 \quad (a)$$

المعادلة الأصلية $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$

حلّ وبسط $16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$

مربع كامل $16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$

اقسم كل حدّ على 400 $\frac{(x - 4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

$$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0 \quad (b)$$

المعادلة الأصلية $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$

جمع الحدود المتشابهة $(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$

أكمل المربع $(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$

حلّ وبسط $(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$

اقسم كلا الطرفين على 16 $\frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

تحقق من فهمك

1 اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة:
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

المميز	نوع القطع المخروطي
$B^2 - 4AC = 0$	قطع مكافئ
$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$	قطع ناقص
$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$	دائرة
$B^2 - 4AC > 0$	قطع زائد

مراجعة المفردات

المميز

تذكر أن مميز المعادلة
التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$
هو $b^2 - 4ac$.

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

مثال 2

تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

$$(a) \quad y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$$

$$A = 4, B = -3, C = 1$$

$$\text{المميز يساوي } (-3)^2 - 4(4)(1) = -7.$$

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$ ، فإن المعادلة تمثّل قطعاً ناقصاً.

$$(b) \quad 3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$$

$$A = 3, B = 2, C = -5$$

$$\text{المميز يساوي } 2^2 - 4(3)(-5) = 64.$$

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

$$(c) \quad 4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$$

$$A = 0, B = 0, C = 4$$

$$\text{المميز يساوي } 0^2 - 4(0)(4) = 0.$$

ولأن المميز يساوي صفراً، فإن المعادلة تمثّل قطع مكافئ.



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

تحقق من فهمك

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

$$3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0 \quad (2C)$$

$$3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0 \quad (2B)$$

$$8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0 \quad (2A)$$





4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله. (مثال 1)

$$(1) \quad x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$$



تطوير - إعداد - توثيق

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية



$$(5) \quad 4x^2 - 5y = 9x - 12$$

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

مسائل مهارات التفكير العليا

(23) **اكتب:** اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها.

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

تدريب على اختبار

(32) اختيار من متعدد: ما المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$ ، ويمر بالنقطة $(0, 6)$ ؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

(31) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

اختر الإجابة الصحيحة:

1	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $4x^2 - 5y = 9x - 12$:	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D	دائرة
2	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$:	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D	دائرة
3	نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $16xy + 8x^2 - 10y^2 - 18x + 8y = 13$	A	قطع مكافئ	B	قطع زائد	C	قطع ناقص	D	دائرة
أكمل الفراغات التالية :									
1	المعادلة $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$ على الصورة القياسية								
2	نوع القطع المخروطي $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$								

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

تدريب على اختبار

(31) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثّل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

(32) اختيار من متعدد: ما المعادلة التي تمثّل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$ ، ويمر بالنقطة $(0, 6)$ ؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :



المراجع

- مع سلسلة رفعة لأوراق العمل رياضيات 5
- إعداد الأستاذة : جواهر العنزي
- لعبة وخريطة في الرياضيات
- إعداد الأستاذة : هدى الغفيص
- رياضيات 5
- قناة الأستاذة ابتسام الطاهري
- youtube.com/playlist?list=PL8ed4UGEvzzfXiXAqAe6sYcHuasoTAN42

تقر بـحمـد الله ونوفيقه