إذا نسبة الرمل إلى الماء إلى الإسمنت في خلطة ٥ : ٣ : ٤ على التوالي فإذا كان وزن الخلطة ٢٤٠ كجم كم وزن الماء ؟

أ) ٢٠٠ كم　　ب) ٨٠ كم　　ج) ١٠٠ كم　　د) ٦٠كم

عنوان الدرس

المحددات وقاعدة كرامر

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إلقاء - توثيق

مفردات الدرس

فيما سبق:

درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًا.

عددي طرق حل نظام معادلتين خطيتين جبريا؟

والآن:

- أحسب المحدّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

مفردات الدرس

المحدِّدة
determinant

محدِّدة الدرجة الثانية
second-order determinant

محدِّدة الدرجة الثالثة
third-order determinant

قاعدة الأقطار
diagonal rule

مصفوفة المعاملات
coefficient matrix

قاعدة كرامر
Cramer's Rule

CREATED USING
BOWTOON

قال تعالى :(مَّثَلُ الَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِي كُلِّ سُنبُلَةٍ مِّائَةُ حَبَّةٍ ۗ وَاللَّهُ يُضَاعِفُ لِمَن يَشَاءُ ۗ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ) (261)

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدَّد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدِّدات لمعرفة مساحتها.

ما الطريقة التي تعرفينها لحساب مساحة المثلث ؟

لماذا يصعب استعمال الصيغة السابقة في هذه الحالة ؟

المحدِّدات: كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدِّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

محدِّدة الدرجة الثانية

التعبيراللفظي: يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرمـــوز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

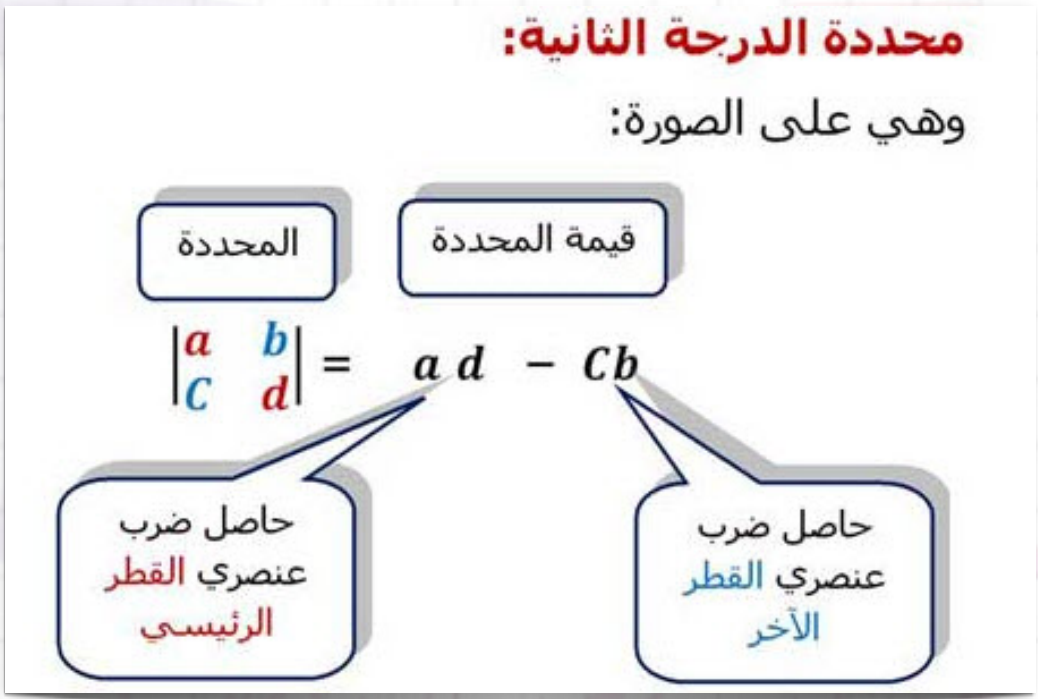
القطر الرئيس

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

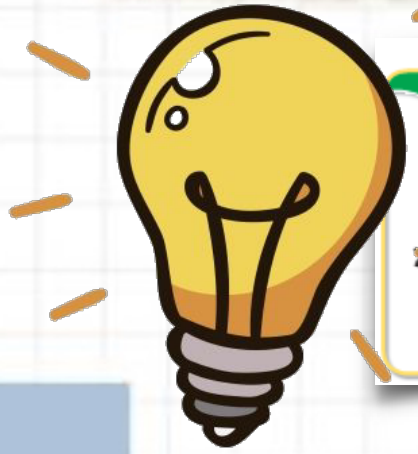
مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

محددة الدرجة الثانية:

وهي على الصورة:



المحددات من الدرجة الثانية



قراءة الرياضيات

المحدِّدات:

يرمز لمحدِّدة المصفوفة A بالرمز $|A|$

أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -11 & 4 \end{vmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

إستراتيجية الدقيقة الواحدة

تحقق من فهمك

(1A $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

(1B $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

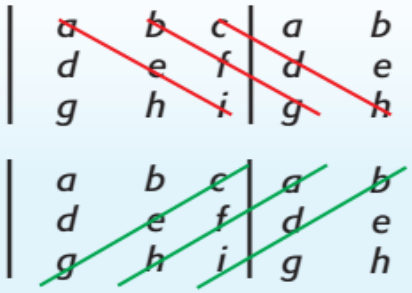
تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حساب محدِّدة المصفوفة 3×3

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار



خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

تحقق من فهمك

(2A

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(2B

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

تستعمل المحدِّدات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

مفهوم أساسي

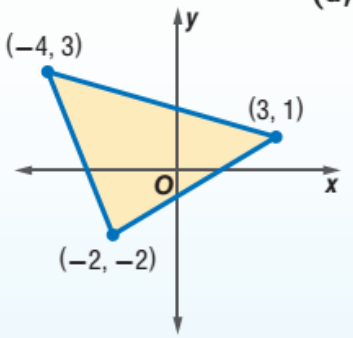
مساحة المثلث

أضف إلى مطويتك

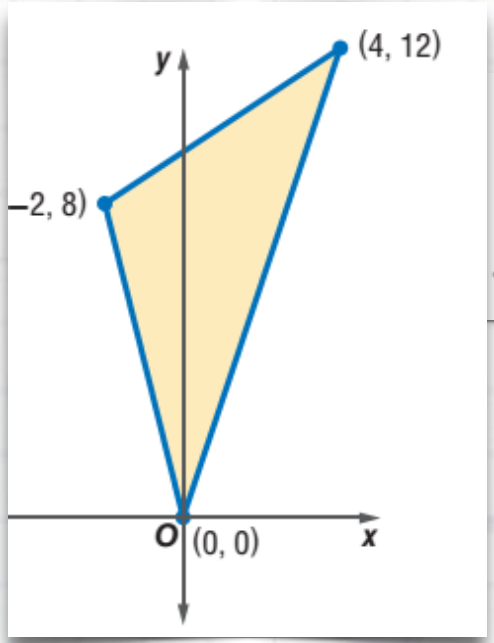
التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$



عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحدِّدات لإيجاد مساحة الإقليم.

إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

تحقق من فهمك

3) **خرائط:** يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: (11, 9), (6, 4), (3, 15)، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة 0.5km. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إلقاء - توثيق

النقاط $D(-6,2), E(3,5), F(8,-7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$، احسب مساحة هذا المثلث:

A 54.5 وحدة مربعة.

B 58 وحدة مربعة.

C 60 وحدة مربعة.

D 61.5 وحدة مربعة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

إرشادات للدراسة

المحدِّدات

تستعمل المحدِّدات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

قاعدة كرامر

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من معادلتين خطيتين.

$$ax + by = m$$
$$fx + gy = n$$

مصفوفة المعاملات

$$C = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$$

$C \neq 0$

للنظام حل وحيد

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{C}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{C}$$

المستقيمات متقاطعان

$C = 0$

ليس للنظام حل ∅

$$\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix} \neq 0$$

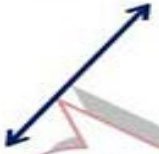
$$\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix} \neq 0$$

المستقيمات متوازيين

للنظام عدد لانهائي من الحلول

$$\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix} = 0$$



المستقيمات منطبقين

أحمد صالح الديني
www.d-math.com

تحقق من فهمك

(4A

$$7x + 3y = 37$$
$$-5x - 7y = -41$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(4B

$$8x - 5y = 70$$
$$9x + 7y = 3$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إلقاء - توثيق

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(5A $3x + 5y + 2z = -7$

$-4x + 3y - 5z = -19$

$5x + 4y - 7z = -15$

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

استراتيجية الجيسكو

تحقق من فهمك

(5B

$$6x + 5y + 2z = -1$$
$$-x + 3y + 7z = 12$$
$$5x - 7y - 3z = -52$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

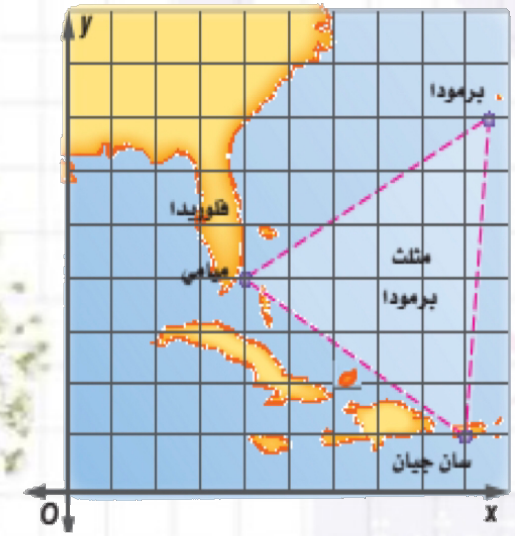
5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

11) **جغرافيا:** استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:

a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.



33) **مسألة مفتوحة :** أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

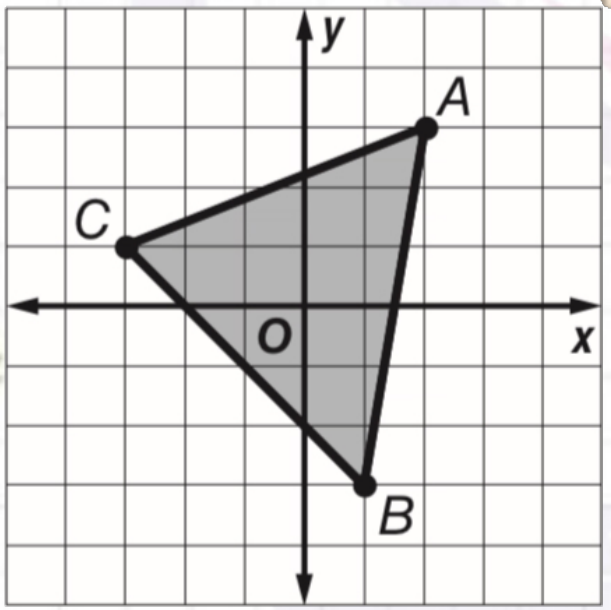
a) المحدِّدة تساوي صفرًا.

b) المحدِّدة تساوي 25

c) جميع العناصر أعداد سالبة والمحدِّدة تساوي 32−

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توزيع

36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة