تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

فيما سبق:

درست الدوال وكيفية إيجاد قيمها. (الدرس 1–1)

والآن:

- أستعملُ التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y، وأصفارها.
- أستكشف تماثل منحنيات الدوال، وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المفردات:

الأصفار

zeros

الجذور

roots

التماثل حول مستقيم

line symmetry

التماثل حول نقطة

point symmetry

الدالة الزوجية

even function

الدالة الفردية

odd function

قدرات

اوجد متوسط الحساب لـ الاعداد من مضاعفات السبعة المحصورة بين ١٥ – ٥٠ ؟

٣٥ ٣٢.٥ ٢١ ١٤

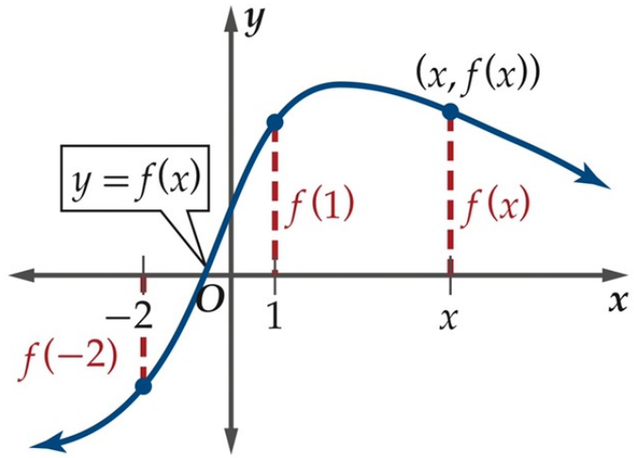
لماذا

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلًا يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1440 – 1433) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07 \ , \ 1 \le x \le 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1433هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

تحليل التمثيل البياني للدالة: التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ ، حيث x أحد عناصر مجال f. وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. ومن ثم تكون القيمة المطلقة لقيمة الدالة مساويةً طول العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة، كما هو موضح في الشكل المجاور.



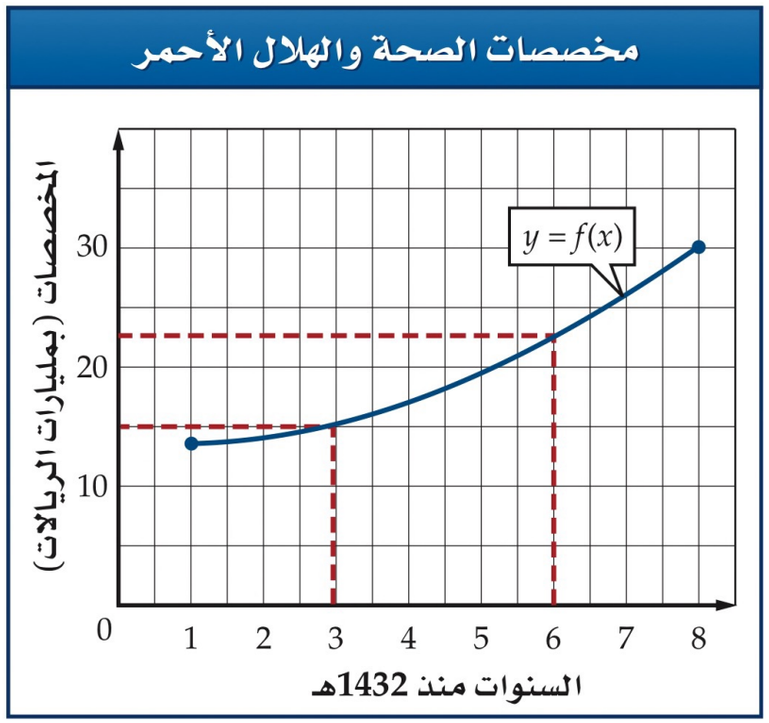
يُستعملُ التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

تقدير قيم الدوال

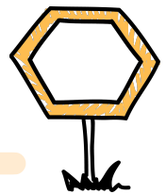
مثال

مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:

a) قدّر قيمة المخصصات سنة 1438 هـ ، ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا.



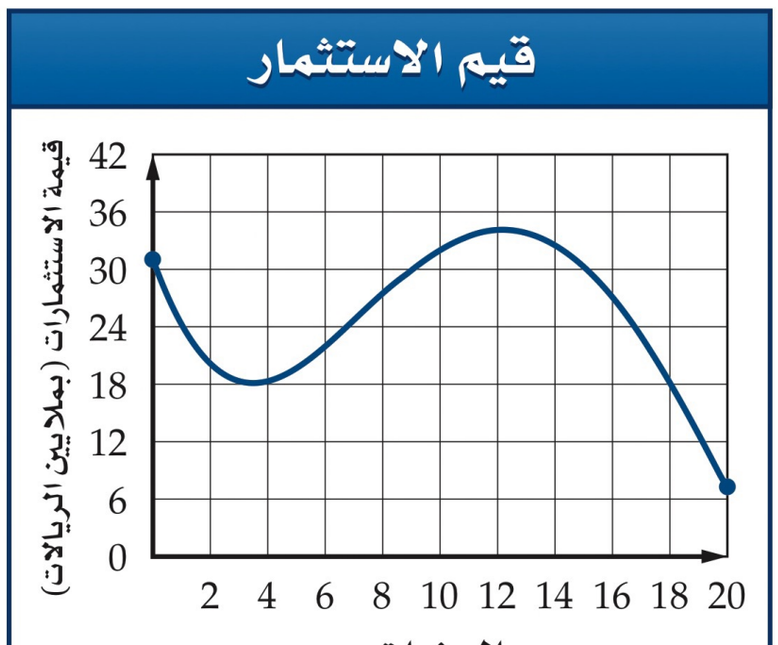
b) قدّر السنة التى كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا.



تحقق من فهمك

1) استثمار: تمثل الدالة: $0 \le d \le 20, v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31$ تقديرًا لاستثمارات أحد رجال الأعمال في السوق المحلية؛ حيث $v(d)$ قيمة الاستثمارات بملايين الريالات في السنة d.

1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة الاستثمارات في السنة العاشرة. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.



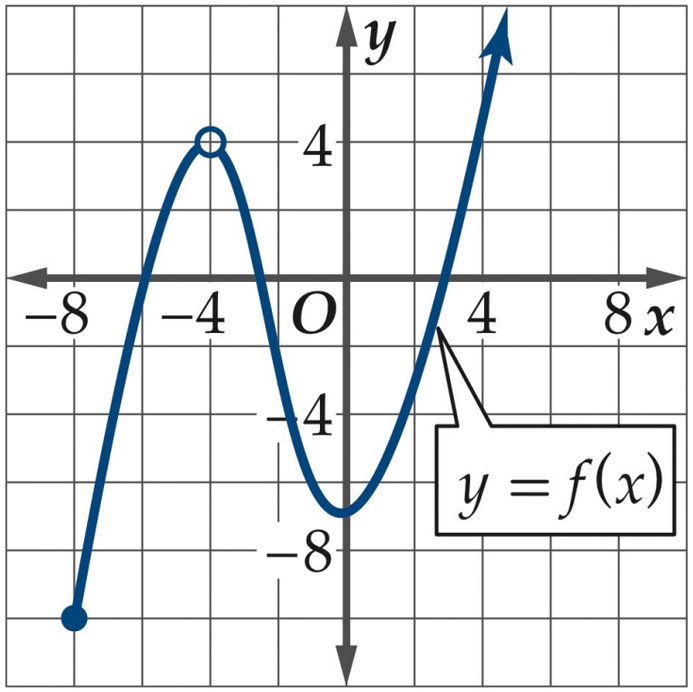
1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد السنوات التي بلغت فيها قيمة الاستثمارات 30 مليون ريال. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

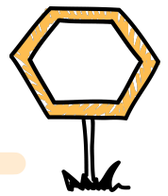
لا يقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها. حيث يُعدُّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدِّد بنقطة أو دائرة.

إيجاد المجال والمدى

مثال

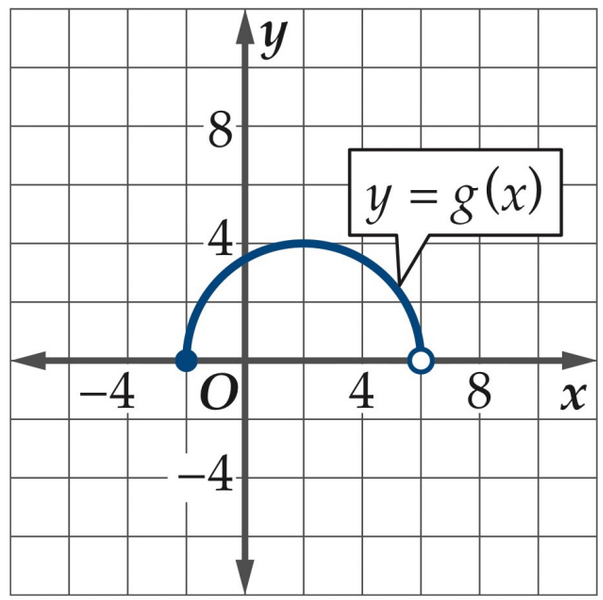
أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .



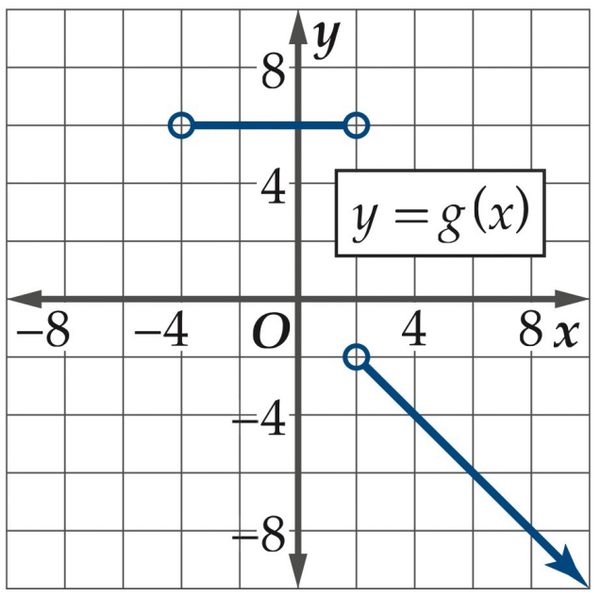


تحقق من فهمك

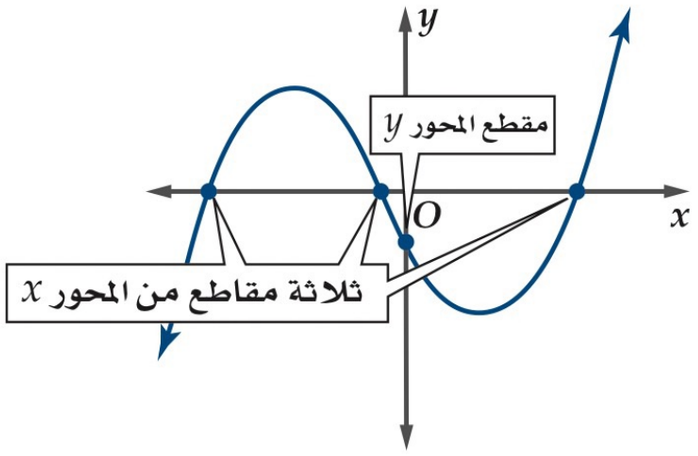
(2A



(2B



النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.



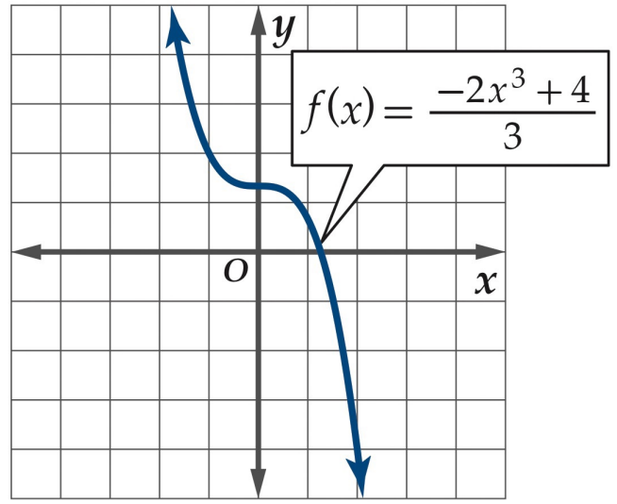
ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نوجد $f(0)$.

إيجاد المقطع y

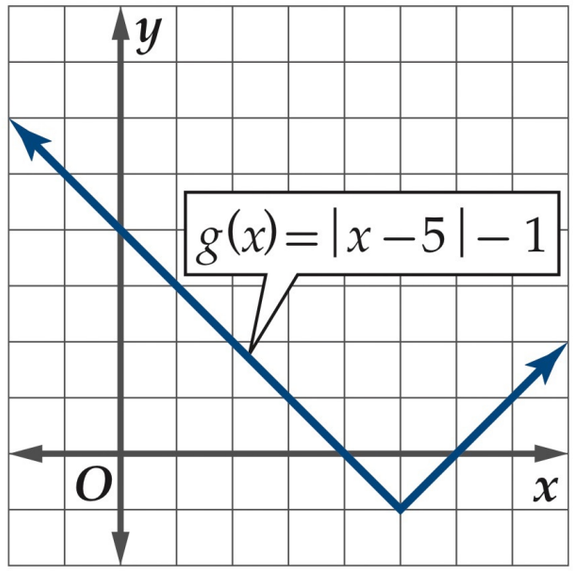
مثال

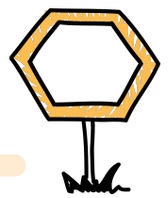
استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:

(a



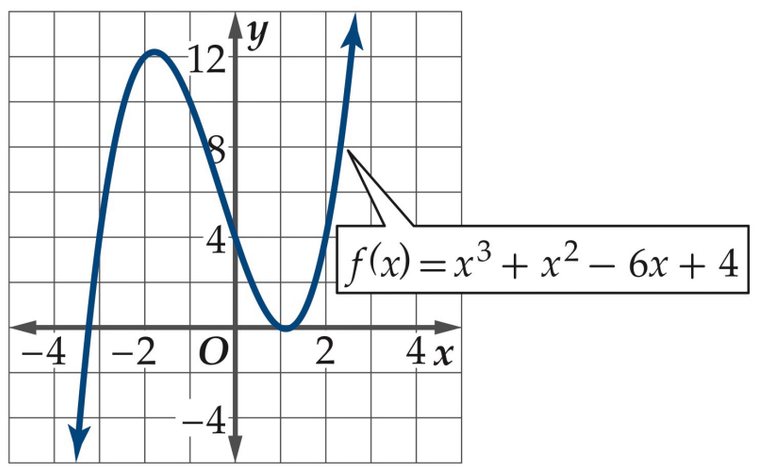
(b



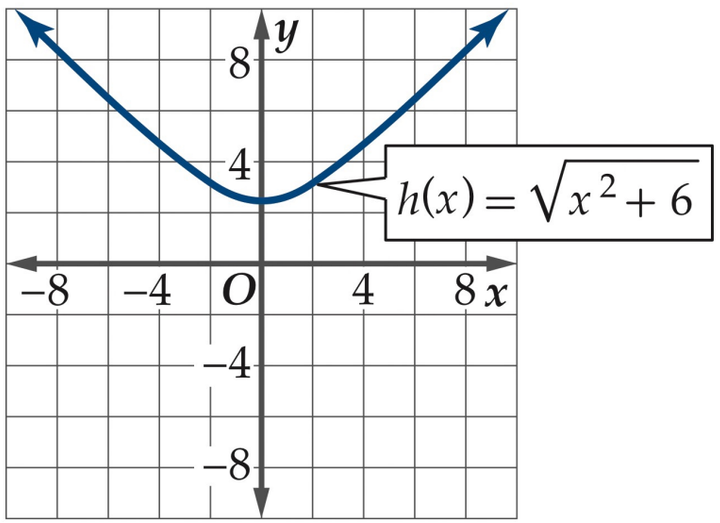


تحقق من فهمك

(3A



(3B

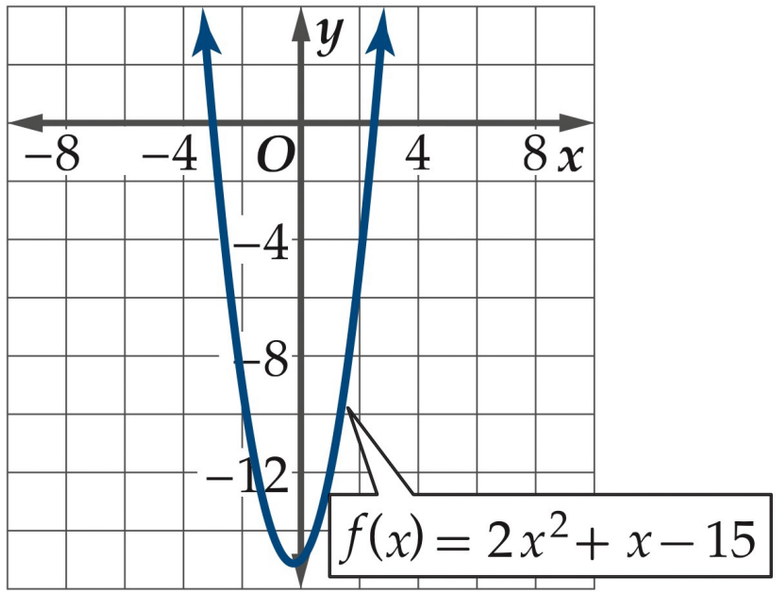


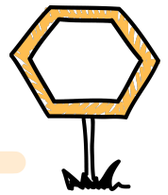
تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x)=0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

إيجاد الأصفار

مثال

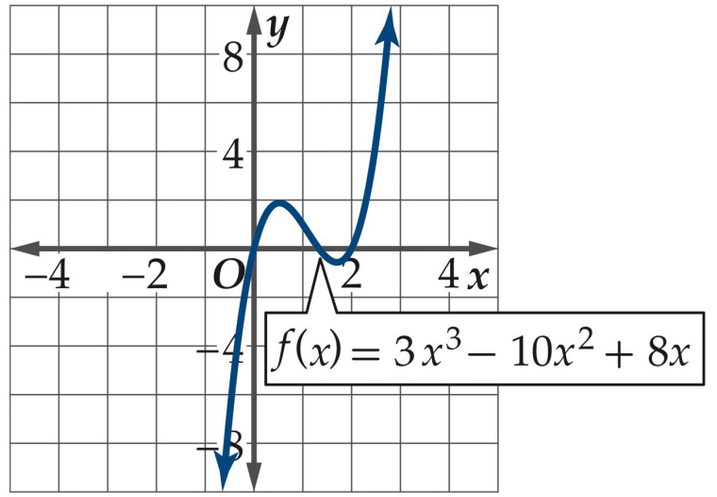
استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.



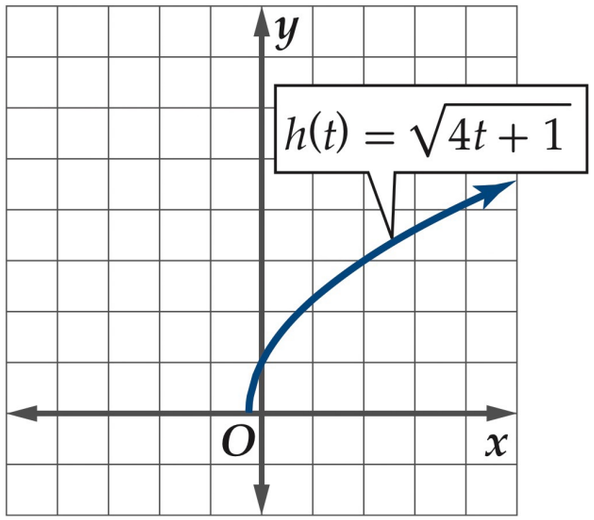


تحقق من فهمك

(4A



(4B

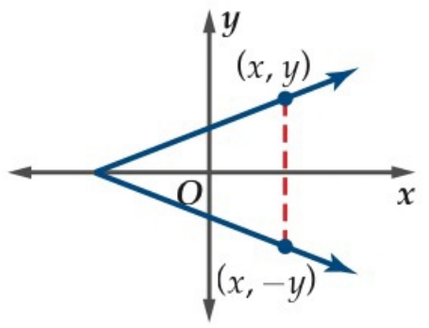
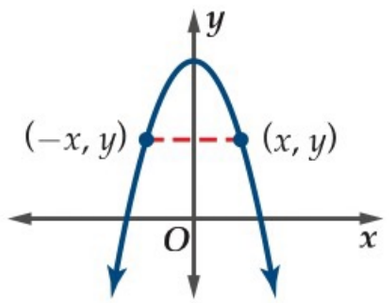
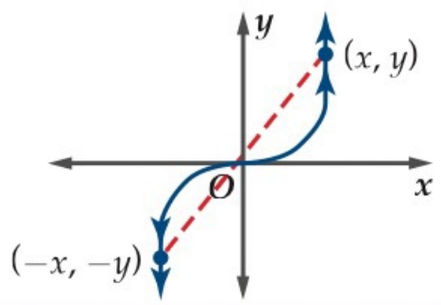


إرشادات للدراسة

تماثل العلاقات والدوال:
يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

التماثل: يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها $180°$ حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأهم أنواع التماثل:

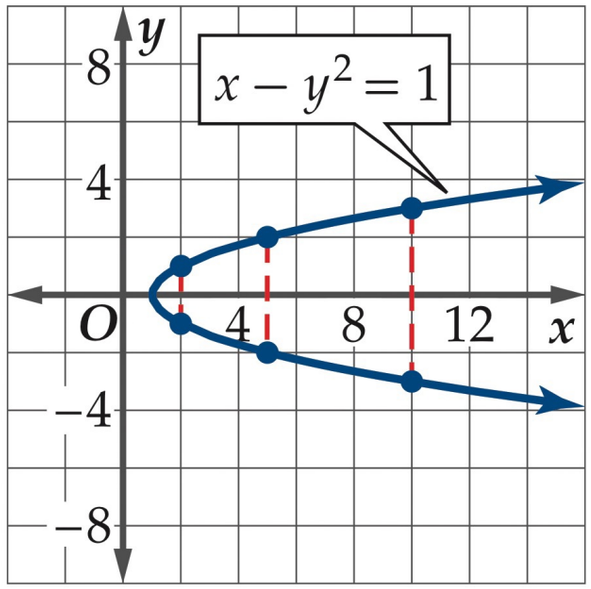
مفهوم أساسي — اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور x، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور y، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

اختبار التماثل

مثال

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا.

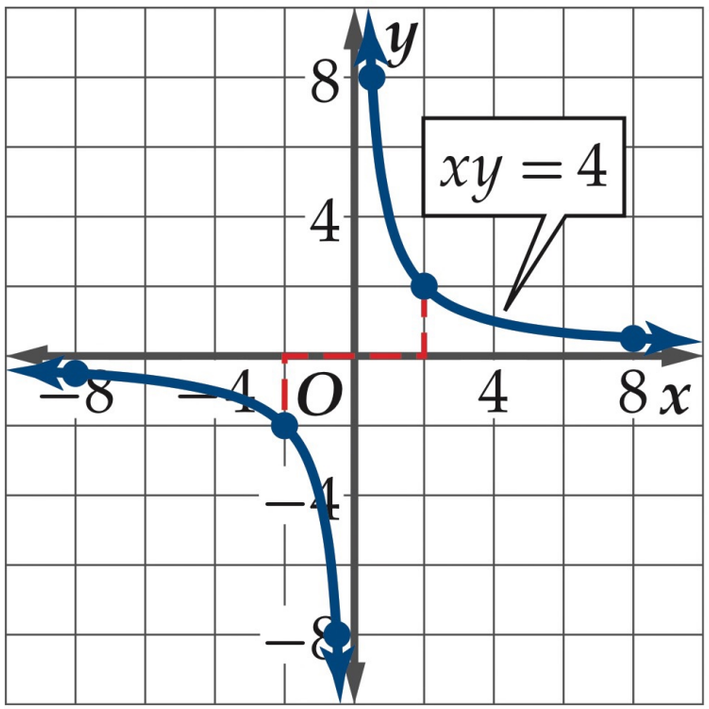


$x - y^2 = 1$ (a

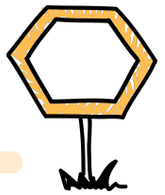
اختبار التماثل

مثال

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا.

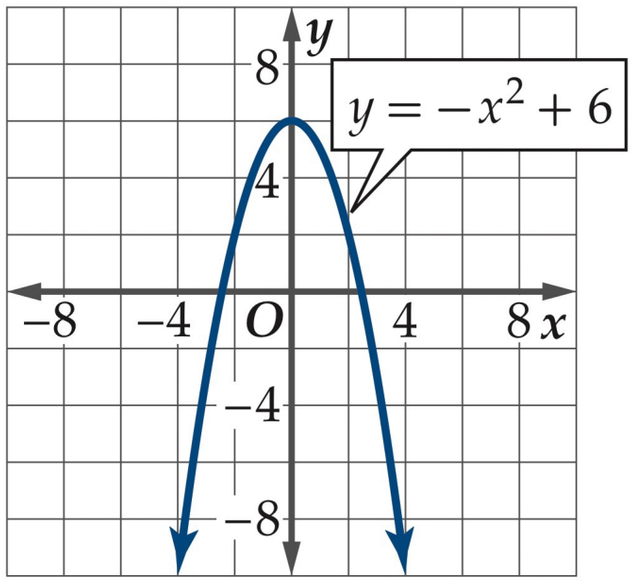


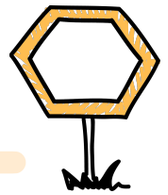
(b $xy = 4$



تحقق من فهمك

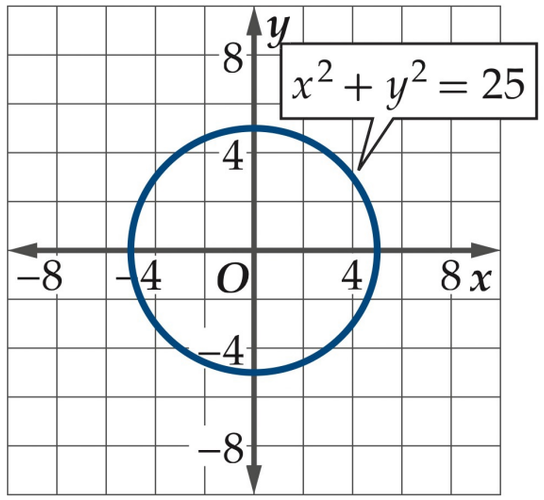
(5A





تحقق من فهمك

(5B



يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

مفهوم أساسي **الدوال الزوجية والدوال الفردية**

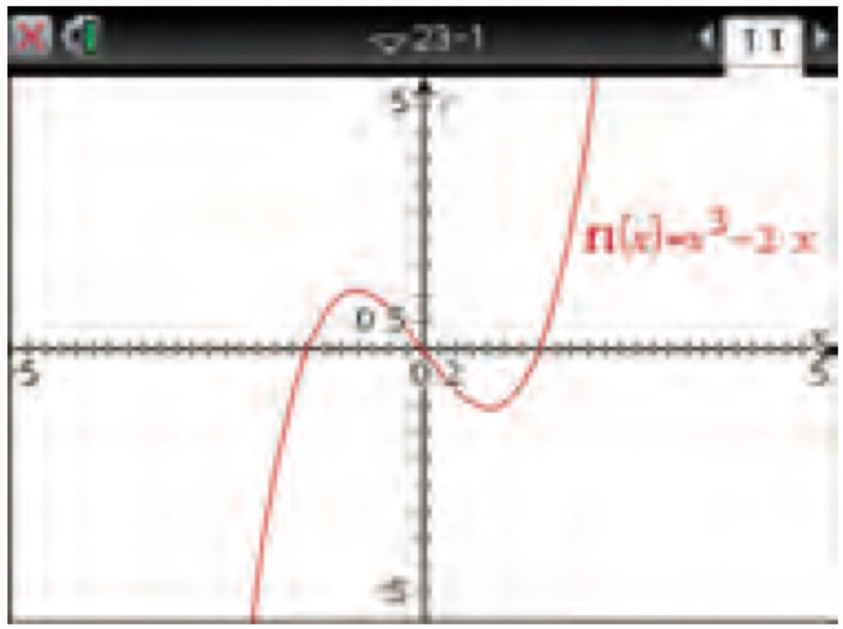
نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

مثال

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

$f(x) = x^3 - 2x$ (a

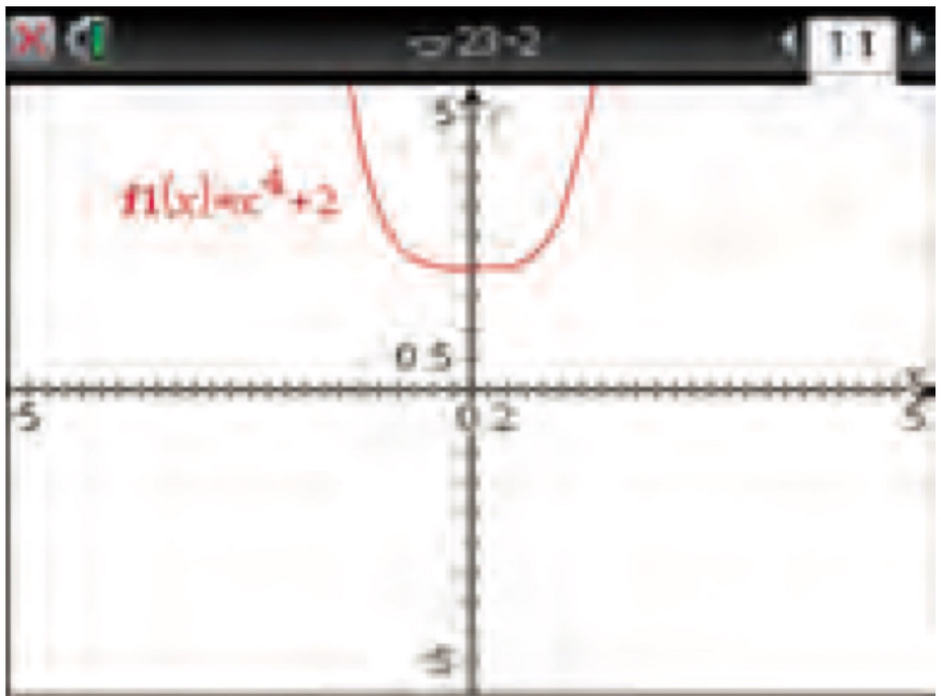


تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

مثال

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

$$f(x) = x^4 + 2 \quad \textbf{(b}$$

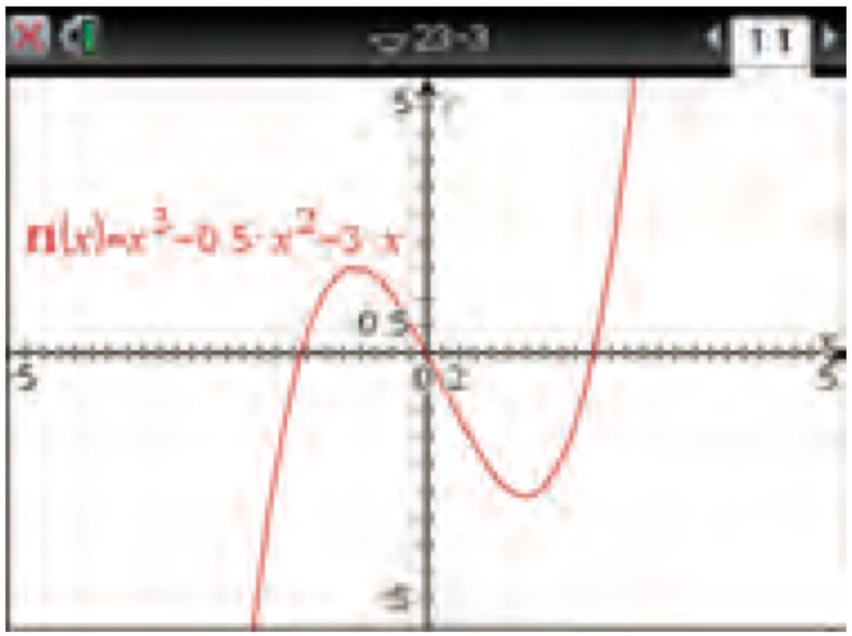


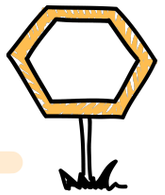
تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

مثال

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

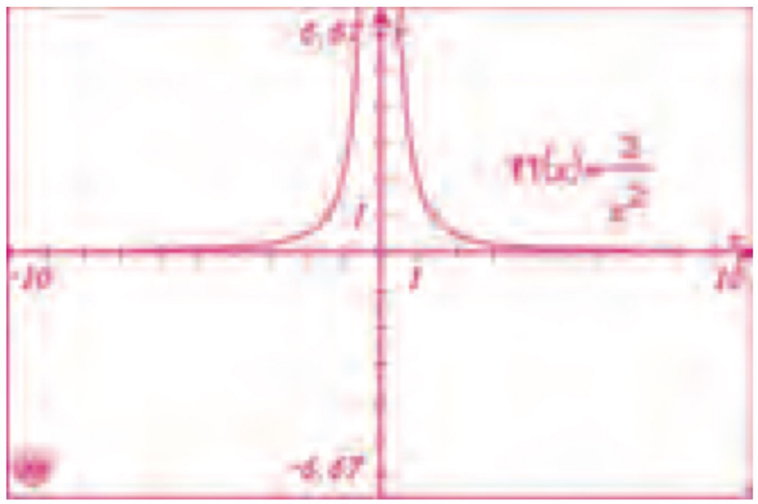
$$f(x) = x^3 - 0.5\,x^2 - 3x \quad (\mathbf{c}$$

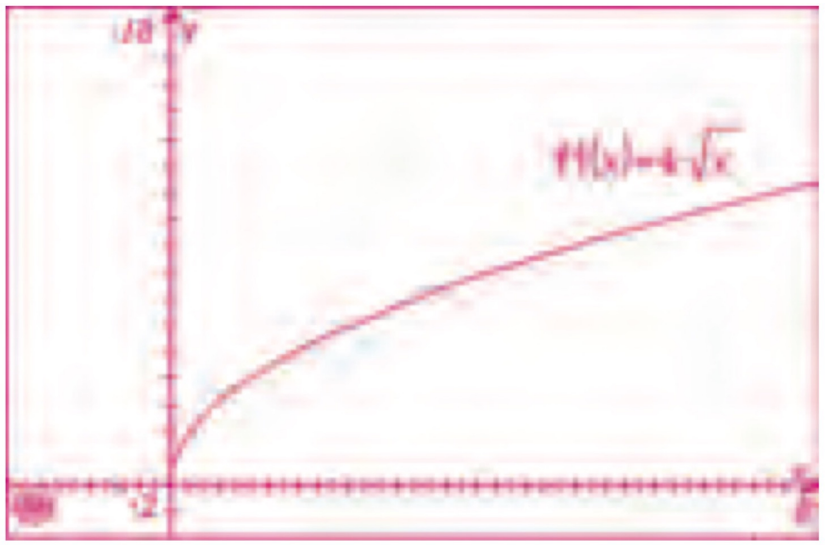




تحقق من فهمك

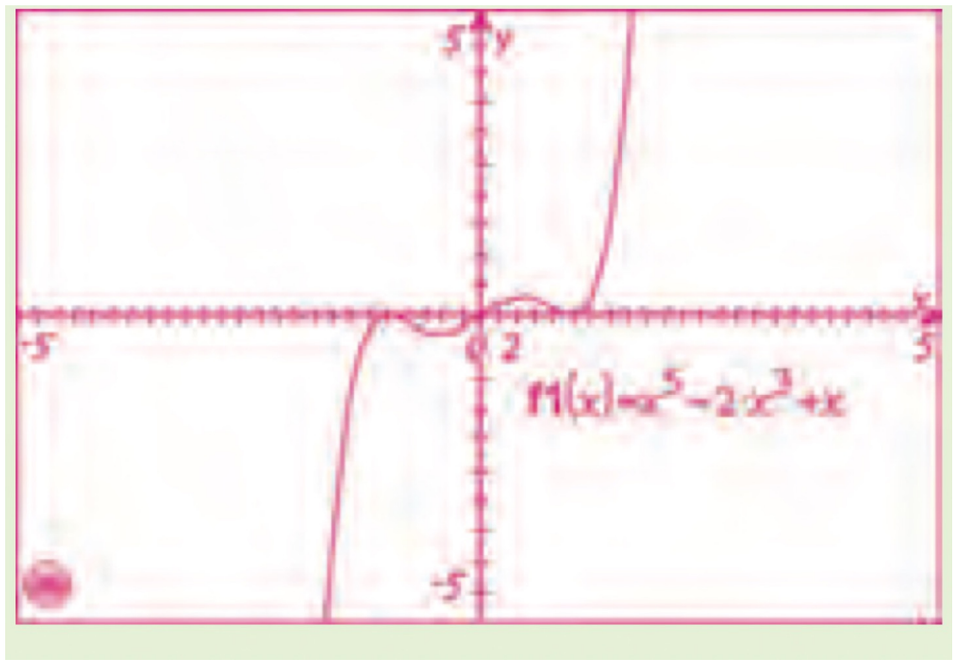
$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$ (**6A**





تحقق من فهمك

$g(x) = 4\sqrt{x}$ (**6B**



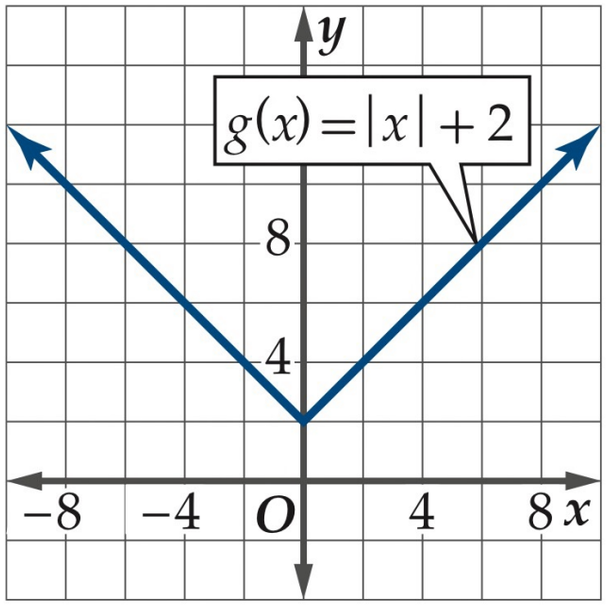
تحقق من فهمك

$$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$$ (**6C**

تدرب

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة ، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

2)

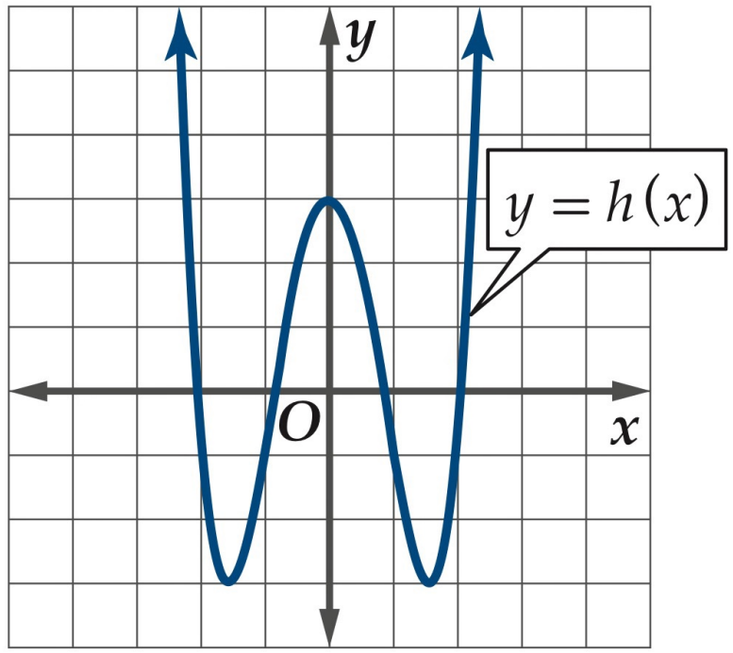


a) $g(-8)$ **b)** $g(-3)$ **c)** $g(0)$

تدرب

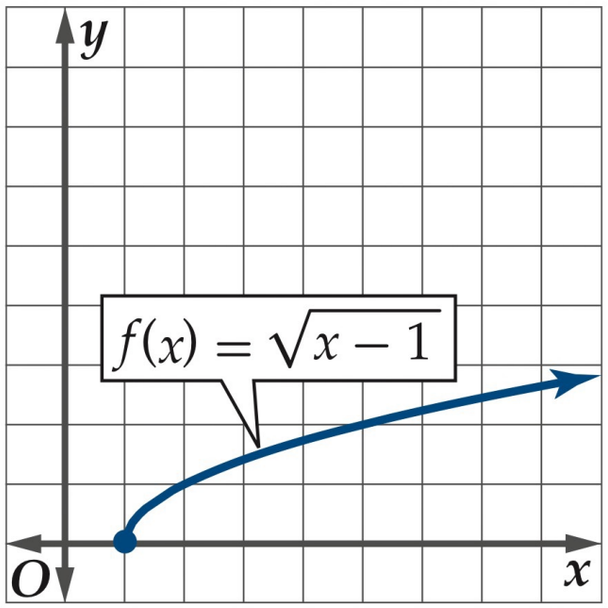
استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. **(مثال 2)**

6)



تدرب

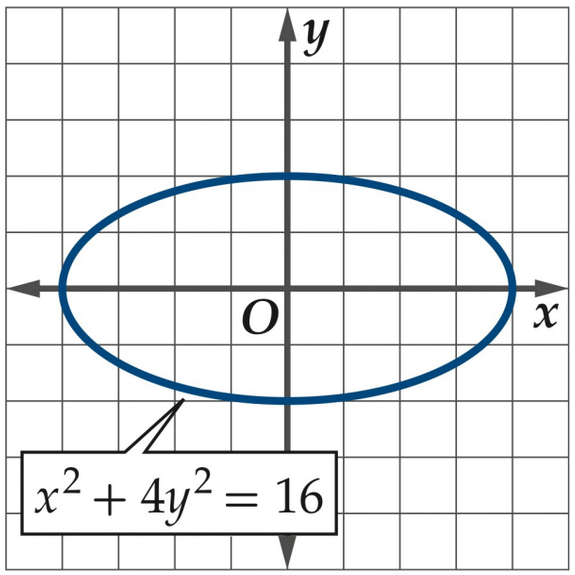
11) استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y، وأصفار الدالة، ثم أوجد أصفار الدالة جبريًّا: **(المثالان 3, 4)**



تدرب

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا: **(مثال 5)**

17)



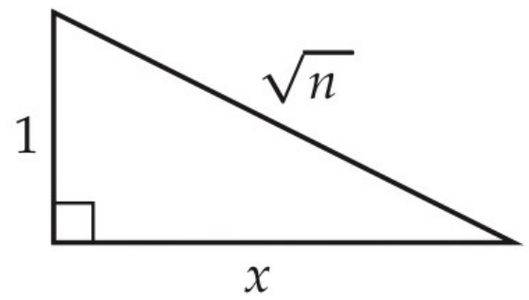
تدرب

الحاسبة البيانية : استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حلّل منحناها لتحدِّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. واذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها: **(مثال 6)**

25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

تدرب

81) إذا كان n عددًا حقيقيًّا أكبر من 1، فأوجد قيمة x بدلالة n في الشكل أدناه.



A $\sqrt{n^2-1}$ **C** $\sqrt{n+1}$

B $\sqrt{n-1}$ **D** $n-1$

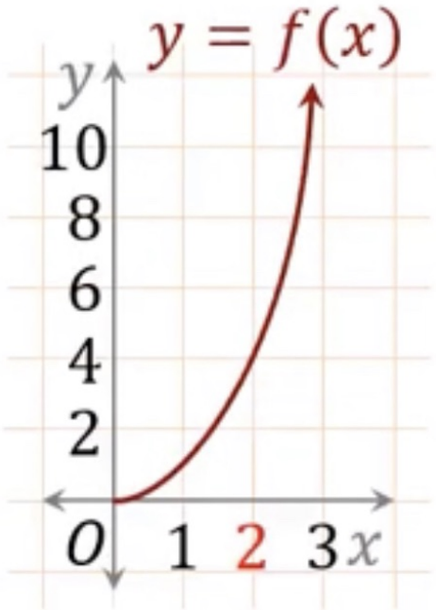
82) ما مدى الدالة $f(x)=x^2+1$، إذا كان مجالها $-2<x<3$ ؟

A $5<f(x)<9$ **C** $1<f(x)<9$

B $5<f(x)<10$ **D** $1\le f(x)<10$

تحصيلي

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة $y = f(x)$ فإن قيمة $f(2)$ تساوي .



1 (A)

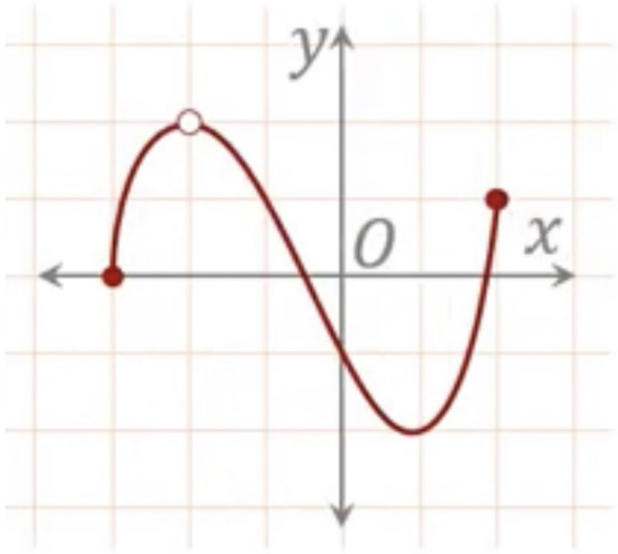
2 (B)

4 (C)

10 (D)

تحصيلي

مجال الدالة $y = f(x)$ الممثلة بالشكل المجاور ..



Ⓐ $[-2, 2)$

Ⓑ $[-2, 2) - \{2\}$

Ⓒ $[-3, 2]$

Ⓓ $[-3,2] - \{-2\}$