الاتصال و النهايات

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

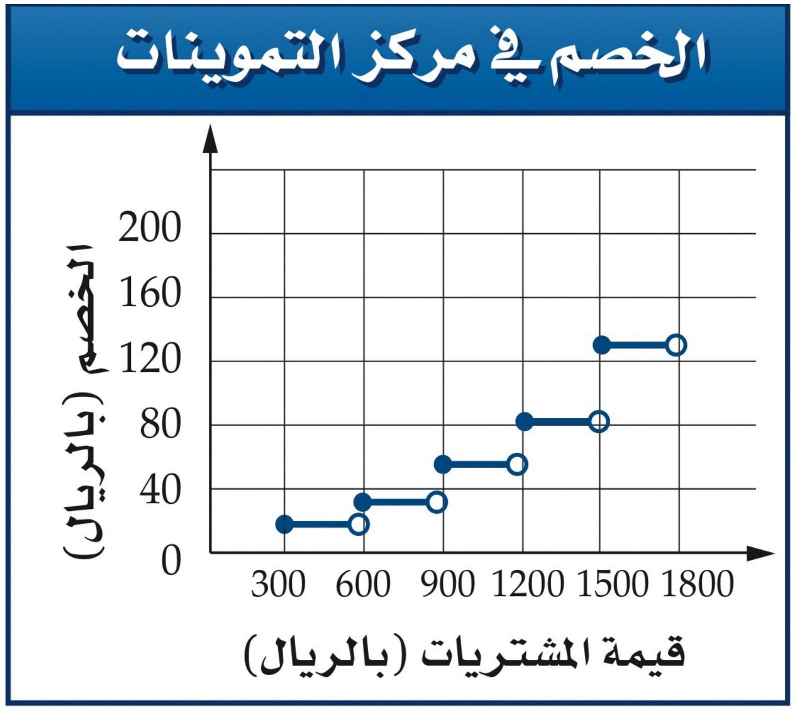
قدرات

ما قيمة $١^{١٠٠} + ١٠^{\text{صفر}}$

٢ ١٠ ٣ ٥

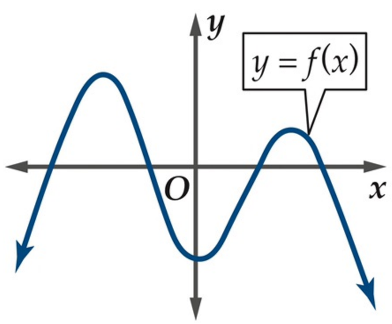
لماذا

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

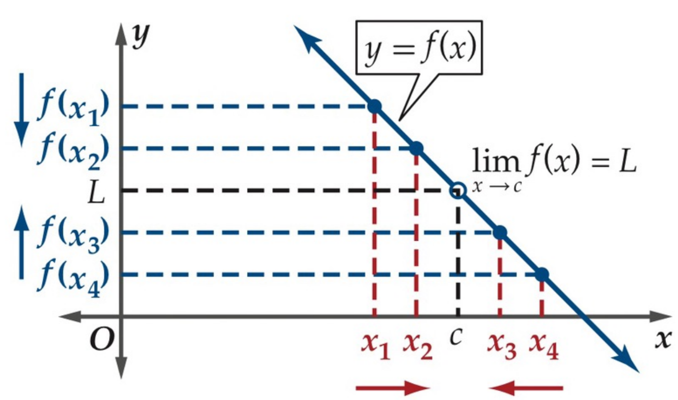


$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز: نقول: إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

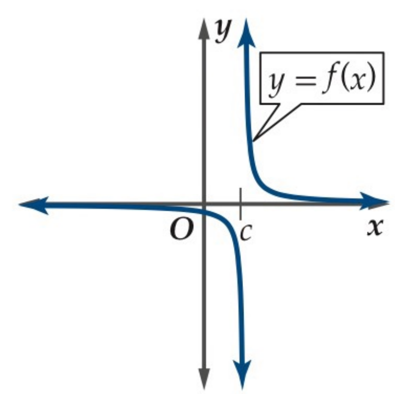


إن التمثيل البياني **للدالة غير المتصلة** يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال. وفيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

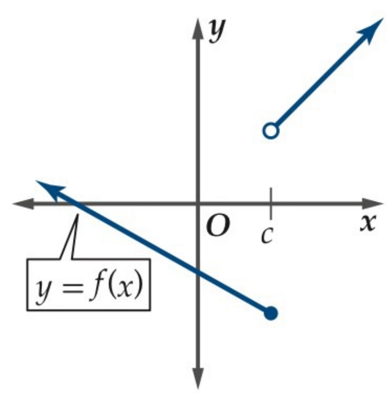
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



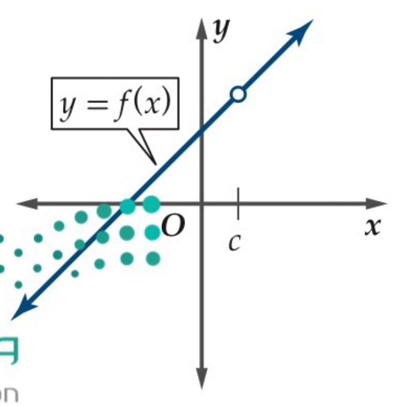
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **عدم اتصال قابل لإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة (ο) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:

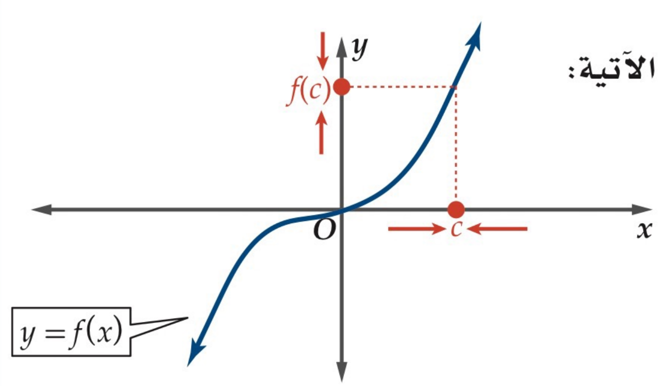


تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

ملخص المفهوم — اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

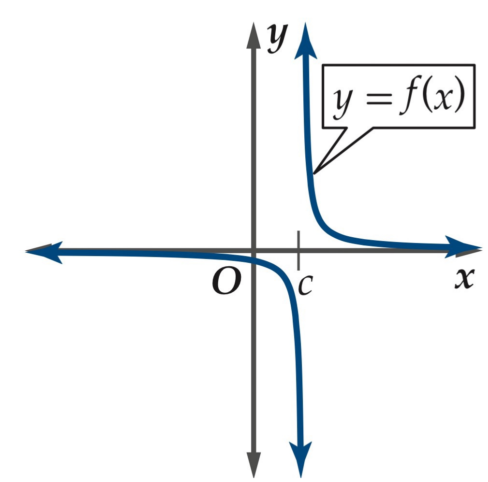
- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.



حالات عدم الاتصال

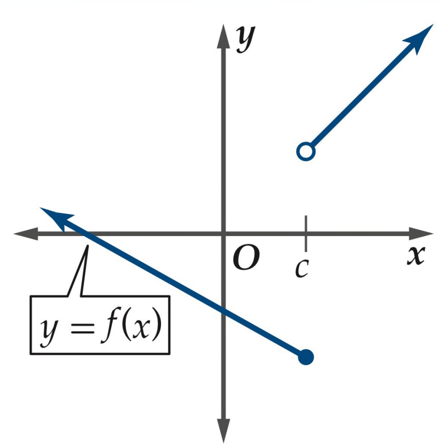
عدم اتصال لا نهائي

$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$



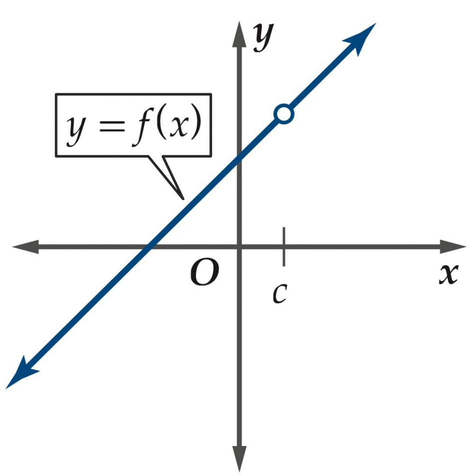
عدم اتصال قفزي

النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى



عدم اتصال قابل للإزالة

$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(x)$



التحقق من الاتصال عند نقطة

مثال

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

2) هل $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة؟

x							
$f(x)$							

3) هل $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ؟

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1B) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

x							
$f(x)$							

إذا لم يتحقّق أي من شروط الاتصال عند نقطة معينة تكون الدالة غير متصلة عند تلك النقطة، فاختبار اتصال الدالة يساعدك على تحديد نوع عدم الاتصال عند تلك نقطة.

تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

مثال

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , \quad x > -3 \\ 2 - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$ عند $x = -3$.

x							
$f(x)$							

تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

مثال

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = -3$, $x = 3$.

① $x = 3$

x							
$f(x)$							

② $x = -3$

x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

2A) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

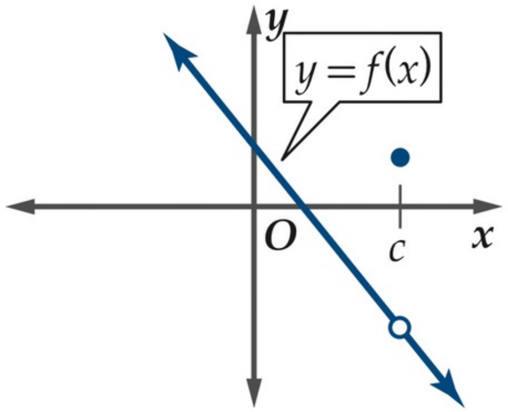
x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

2B) $f(x)=\begin{cases} 5x+4 & , \quad x>2 \\ 2-x & , \quad x\le 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$.

x							
$f(x)$							

لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.



يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

إزالة عدم الاتصال

مثال

أعد تعريف الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

x							
$f(x)$							

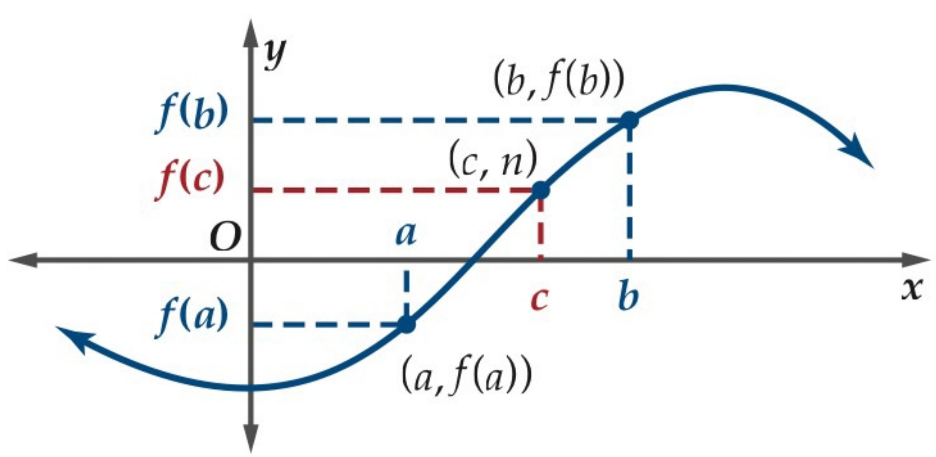
تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a $\left(\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)\right)$ ، ومتصلة من اليسار عند b $\left(\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)\right)$. ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

نظرية

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b.



تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

مثال

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

تحقق من فهمك

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

4B) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

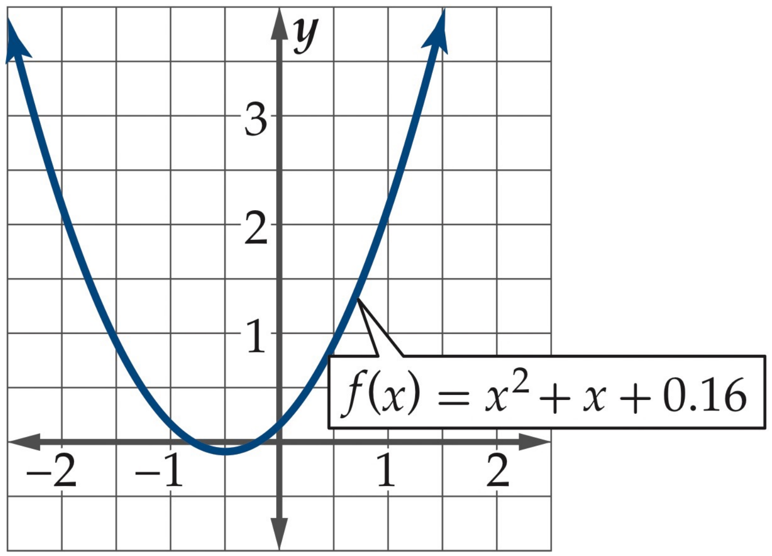
x							
$f(x)$							

إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمَّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

مثال

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	[illegible]

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

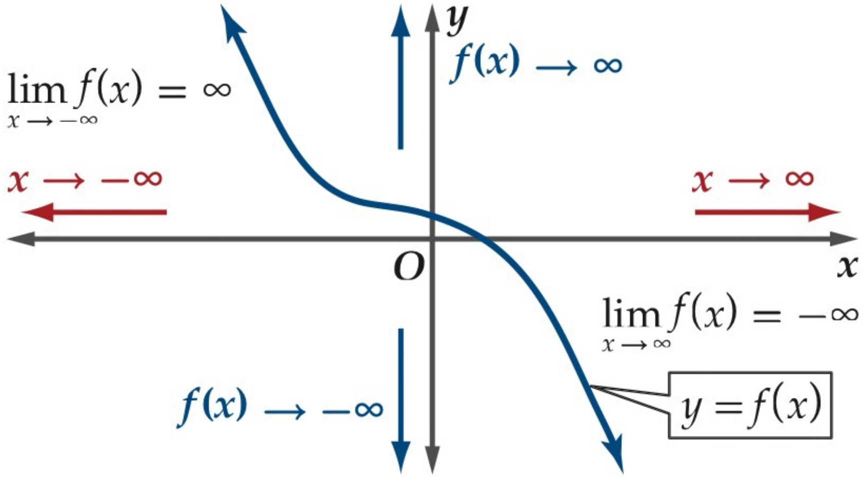
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

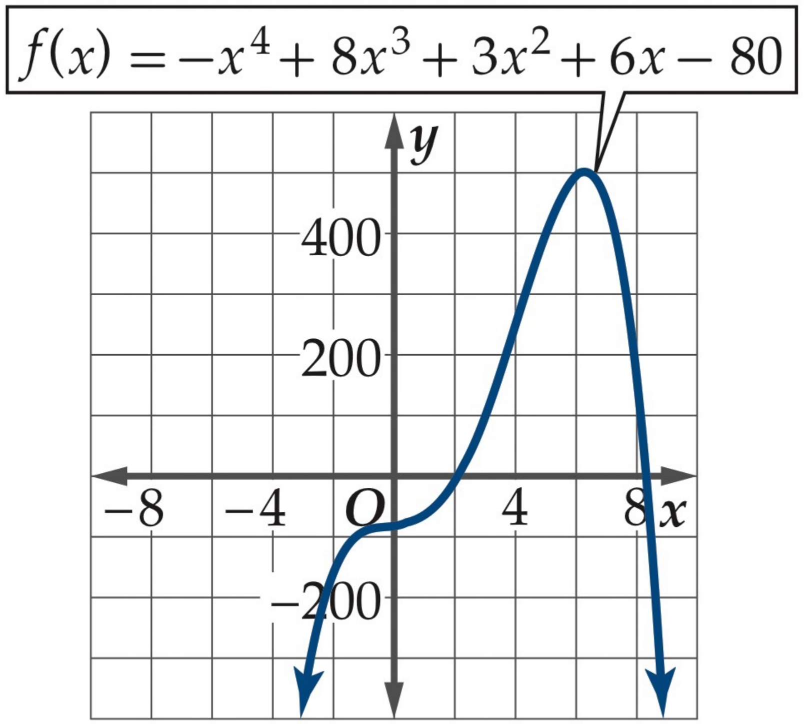
$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$



المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

مثال

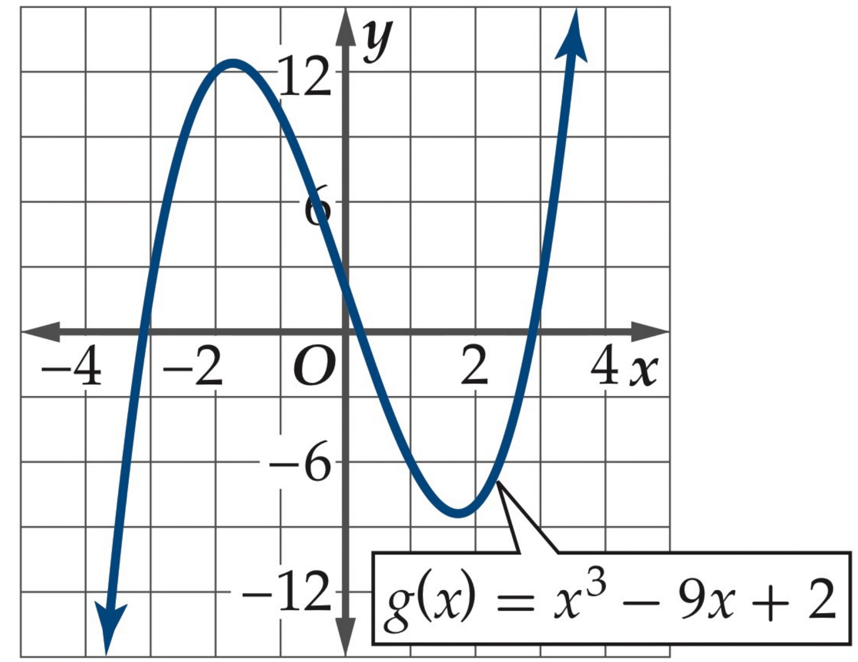
استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.



x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

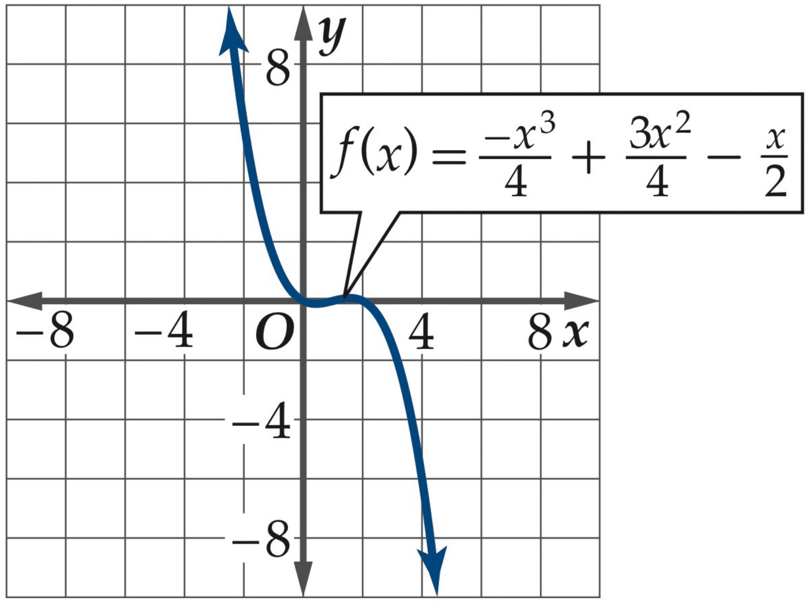
6A)



x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

6B)



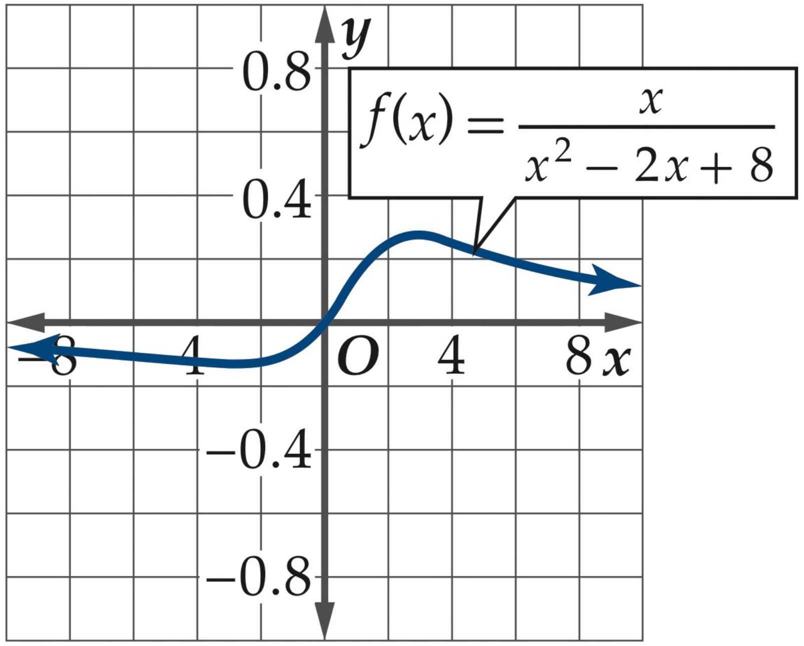
x							
$f(x)$							

لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو $-\infty$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، في حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

مثال

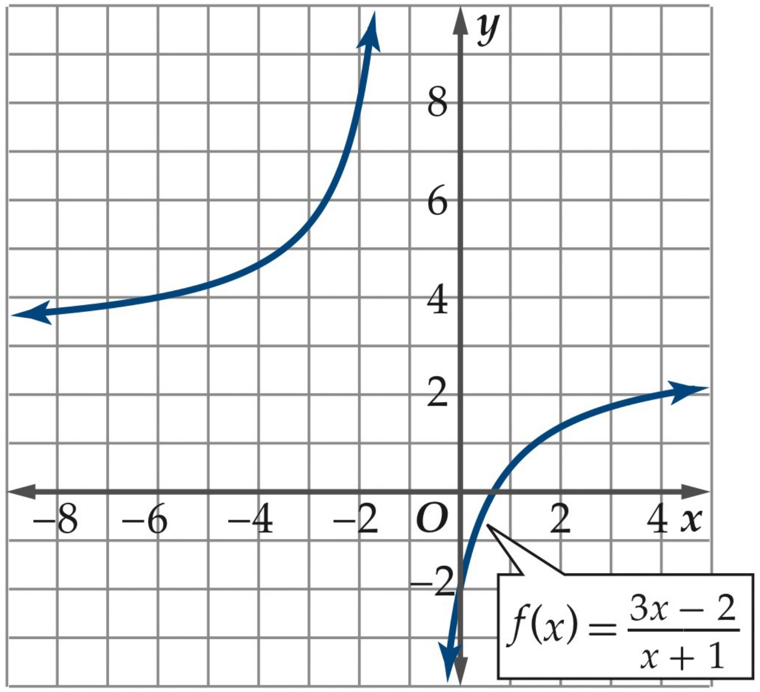
استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.



x							
$f(x)$							

تحقق من فهمك

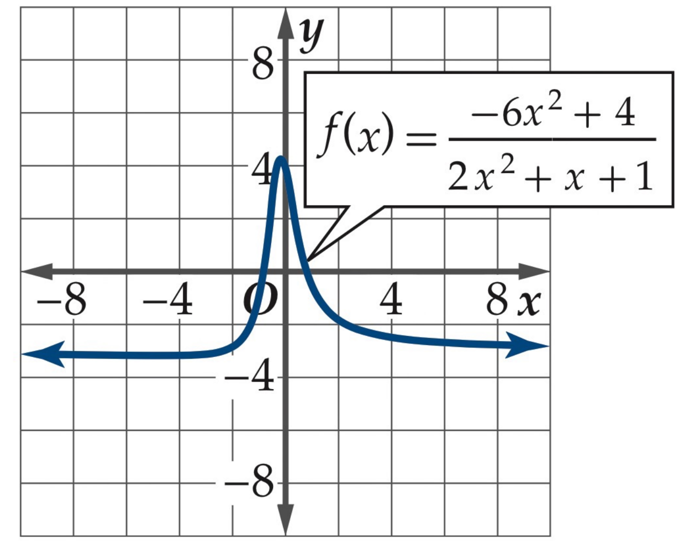
7A)



x							
$f(x)$							

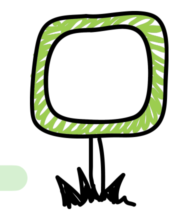
تحقق من فهمك

(7B

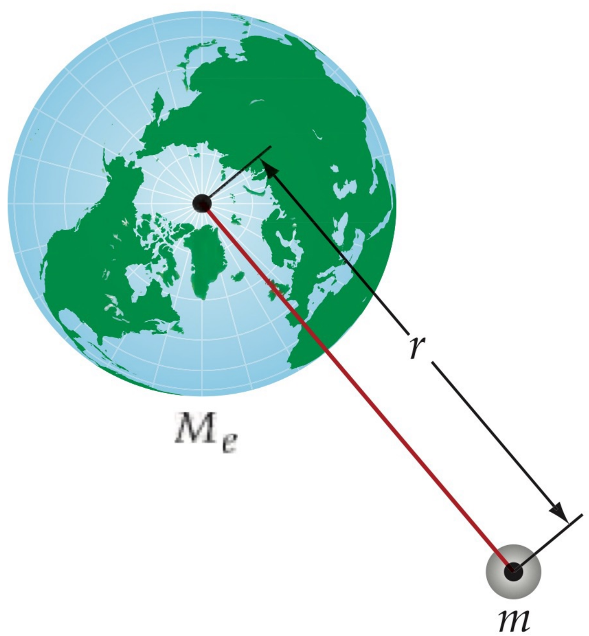


x							
$f(x)$							

تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني



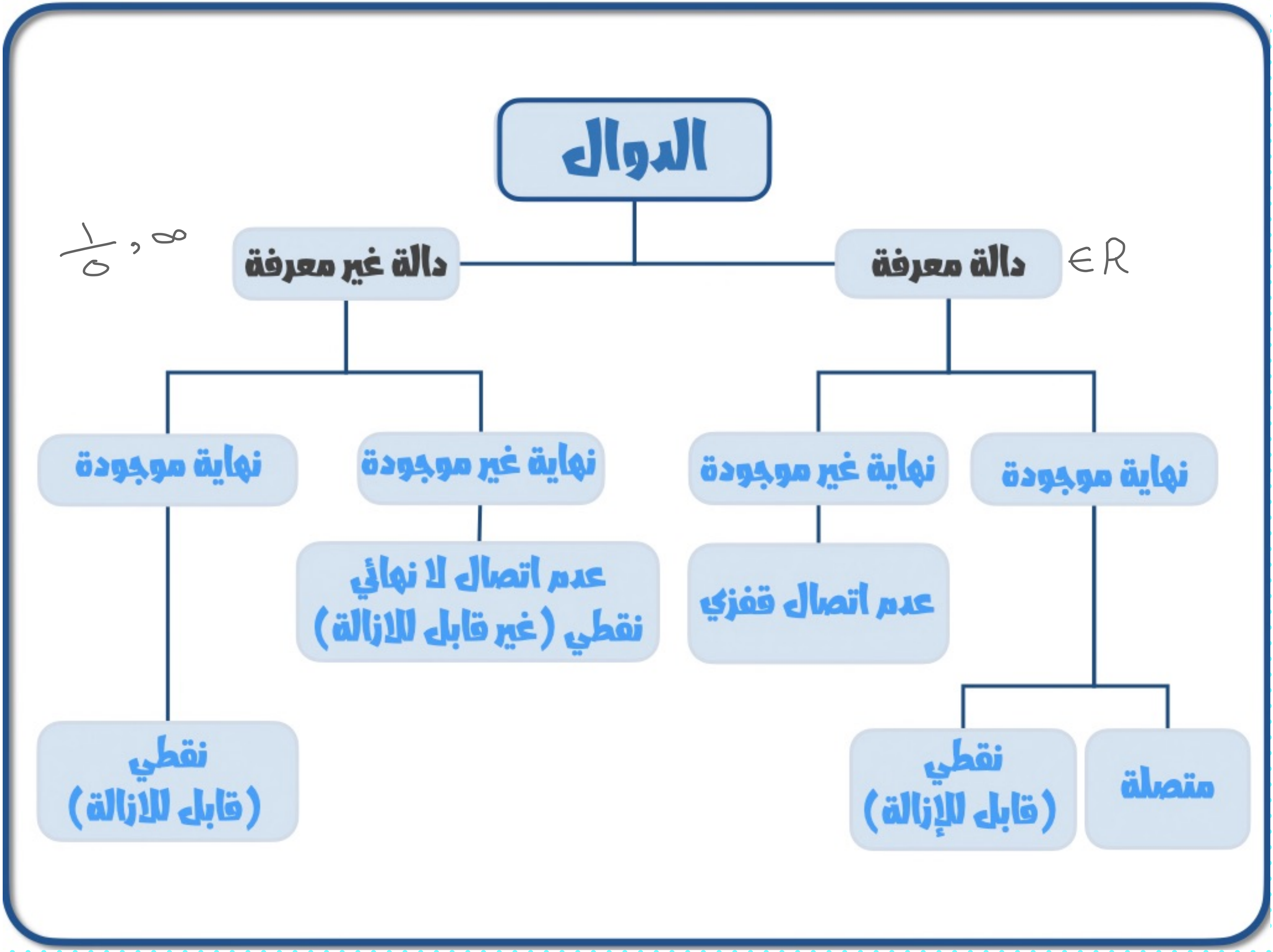
مثال



فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟

تحقق من فهمك

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟


الدوال
دالة معرفة
$\in R$
دالة غير معرفة
$\frac{1}{0}$, ∞
نهاية موجودة
نهاية غير موجودة
متصلة
نقطي (قابل للإزالة)
عدم اتصال قفزي
نهاية غير موجودة
نهاية موجودة
عدم اتصال لا نهائي نقطي (غير قابل للازالة)
نقطي (قابل للازالة)

تدرب

حدّد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، عند $x = -5$.

5) $h(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$ ، عند $x = 1$, $x = 4$.

تدرب

أعد تعريف كل دالة مما يأتي عند قيمة x المعطاة؛ لتصبح الدالة متصلة عندها: (المثال 3)

9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ ، $x = -3$

تدرب

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (المثالان 4 , 5)

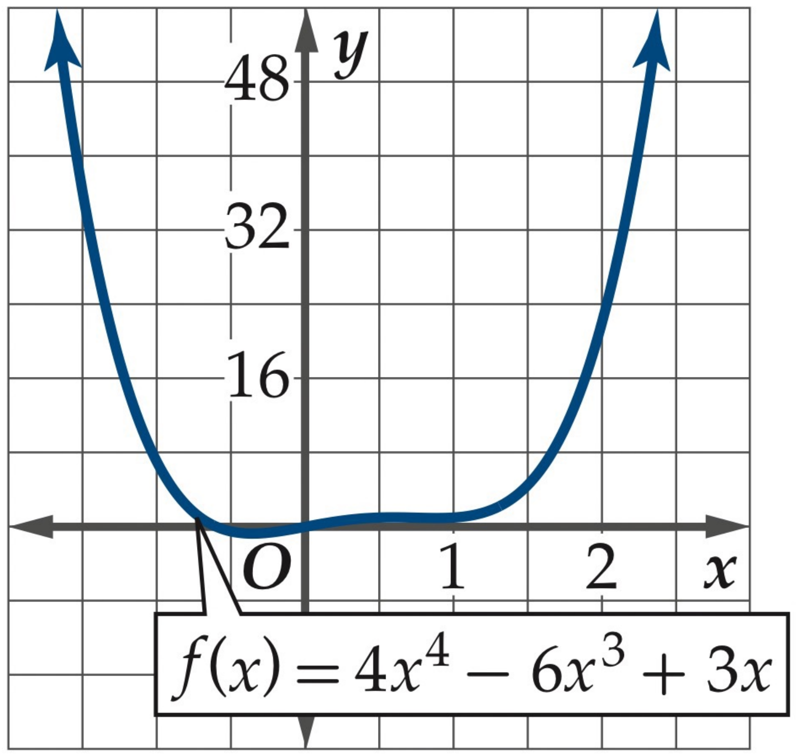
12) $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$

15) $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}, [-2, 4]$

تدرب

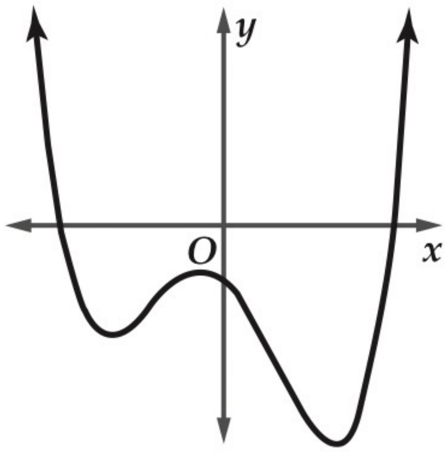
استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا. (المثالان 6, 7)

(17



تدرب

58) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟



A 1

B 2

C 3

D 4

59) في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$؟

A $[6, 7]$

B $[7, 8]$

C $[8, 9]$

D $[9, 10]$

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x \geq 2 \\ kx+1 & , \quad x < 2 \end{cases}$ متصلة عند $x = 2$ فما قيمة k ؟

Ⓐ 2

Ⓑ -2

Ⓒ 3

Ⓓ -3