الفصل الأول
رياضيات ٥

العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

مجموعة رفعة الرياضيات
@A_Shark_s
تطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التاريخ:

اليوم:

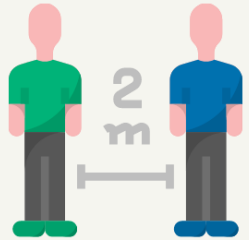
المادة:

نعود بحذر

الالتزام بارتداء الكمامة

عدم المصافحة

غسل اليدين



التباعد الاجتماعي

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

٣-١ الاتصال و النهايات

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درست إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني

و الآن

- أستعمل النهايات للتحقق من اتصال دالة وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

@A_Shark_s

المفردات

الدالة المتصلة

continuous function

النهاية

limit

الدالة غير المتصلة

discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي

infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي

jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة

removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة

nonremovable discontinuity

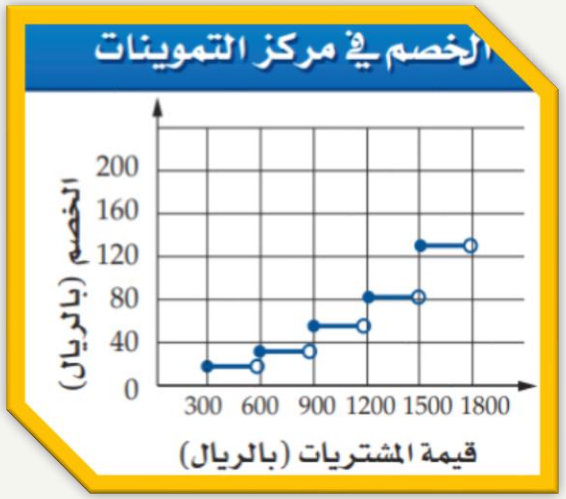
سلوك طرفي التمثيل البياني

end behavior

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

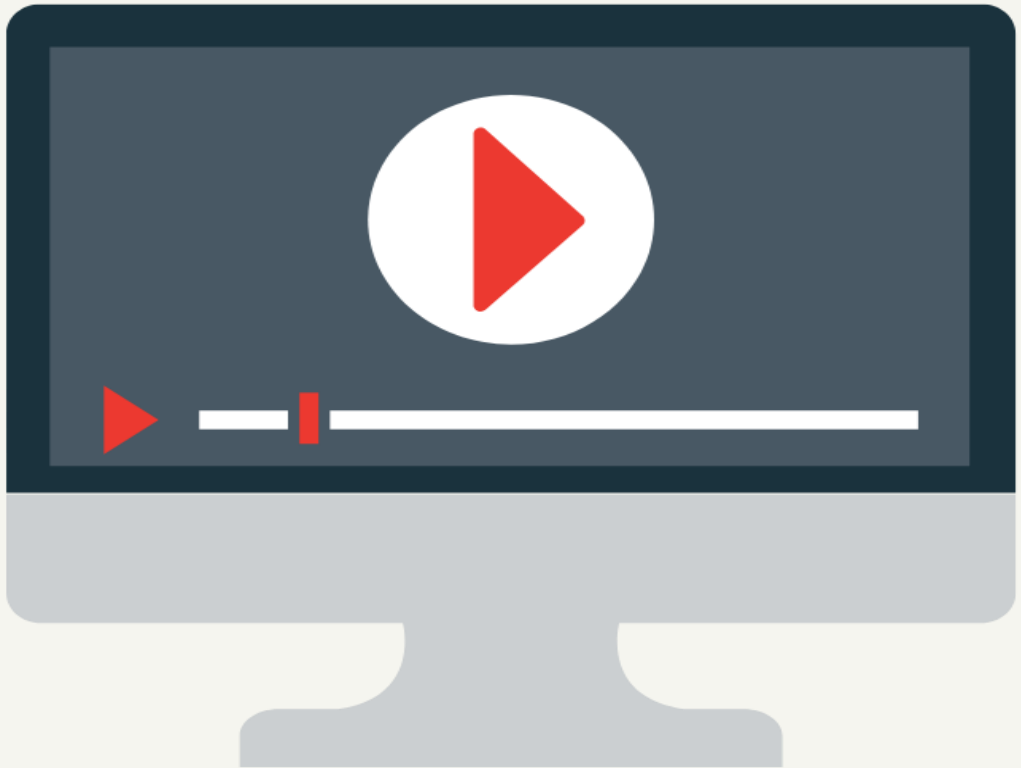


بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=900$, $x=600$.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

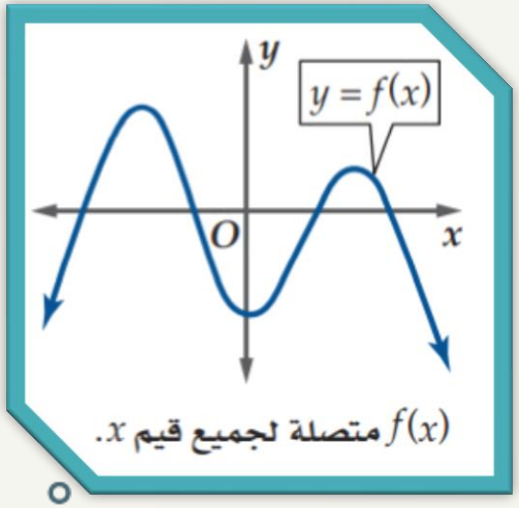
شاهد



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الاتصال



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

@A_Shark_s

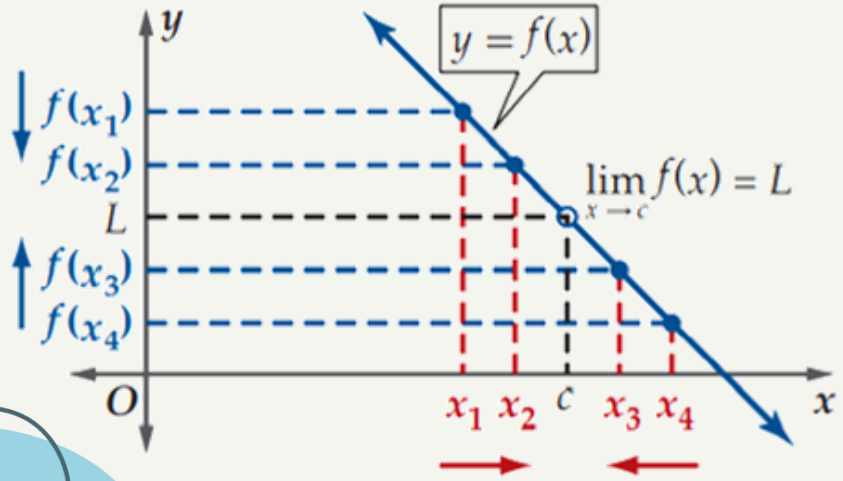
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

النهايات

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز: نقول: إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



@A_Shark_s

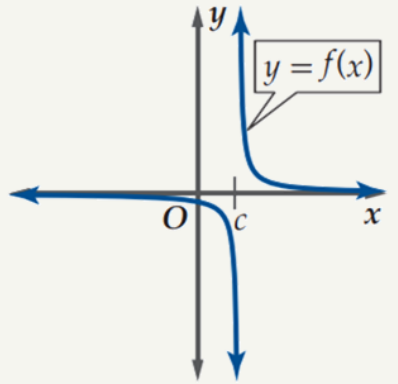
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أنواع عدم الاتصال

مفهوم أساسي

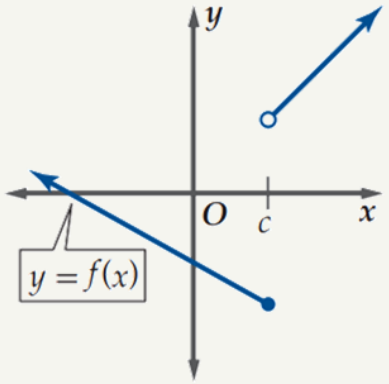
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



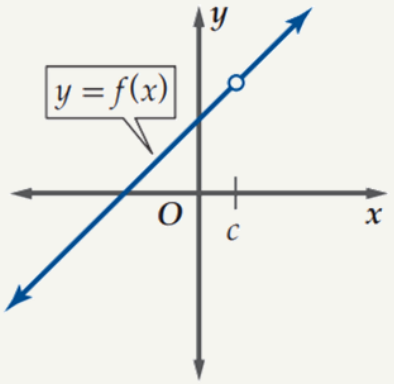
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **عدم اتصال قابل لإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



@A_Shark_s

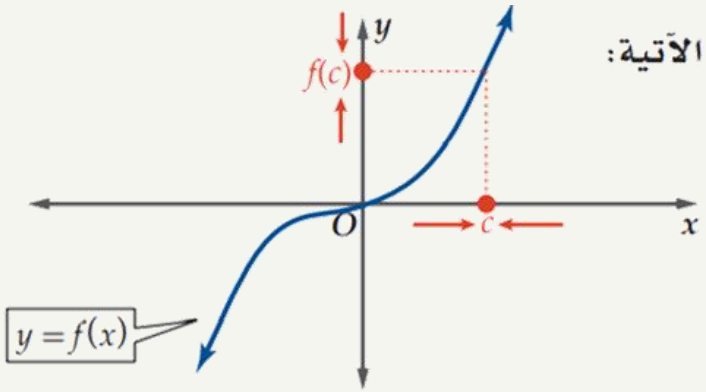
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اختبار الاتصال

ملخص المفهوم

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.



إرشادات للدراسة

النهايات:

إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التحقق من الاتصال عند نقطة

مثال ١

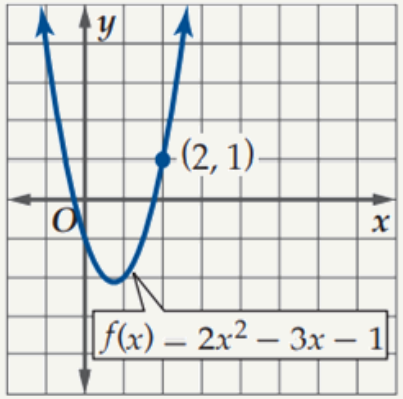
حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

2) هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

3) هل $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

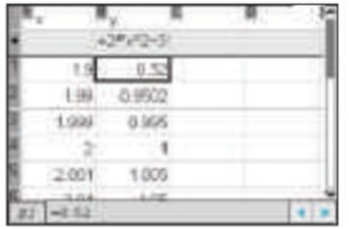


الشكل 1.3.1

إرشاد تقني

جداول:

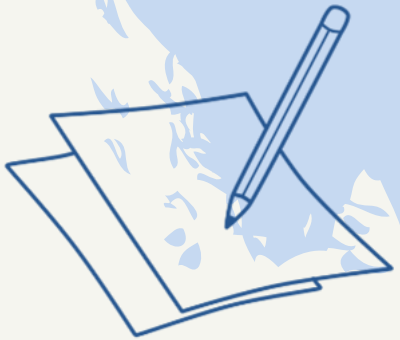
لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة ، ثم اختر تطبيق القوائم وجداول البيانات بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة .



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل



@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

(1A $f(x) = x^3$

(1B
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

1A

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

1B

@A_Shark_s

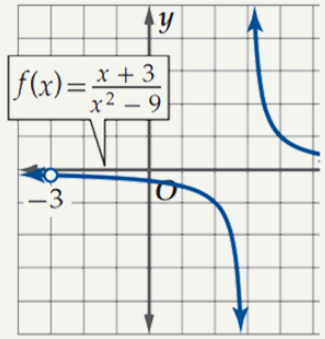
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٢

تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

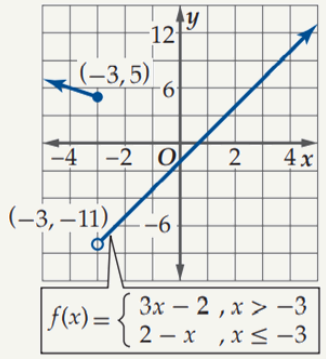
حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

(a $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \quad x>-3 \\ 2-x & , \quad x\le -3\end{cases}$ عند $x=-3$.



الشكل 1.3.3

(b $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=-3$, $x=3$.



الشكل 1.3.2

عند $x=3$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

a

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

b

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(2A $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

(2B $f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , \quad x > 2 \\ 2 - x & , \quad x \leq 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

2A

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

2B

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$، عند $x = -5$.

@A_Shark_s

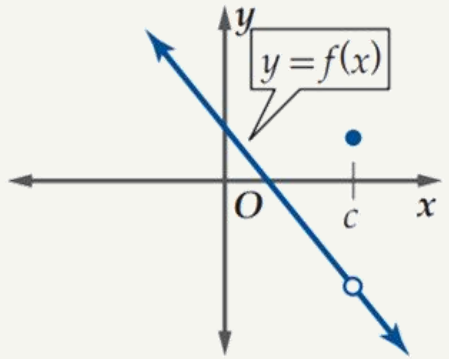
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

1

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إزالة عدم الاتصال

مثال ٣

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

@A_Sharks_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

3

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

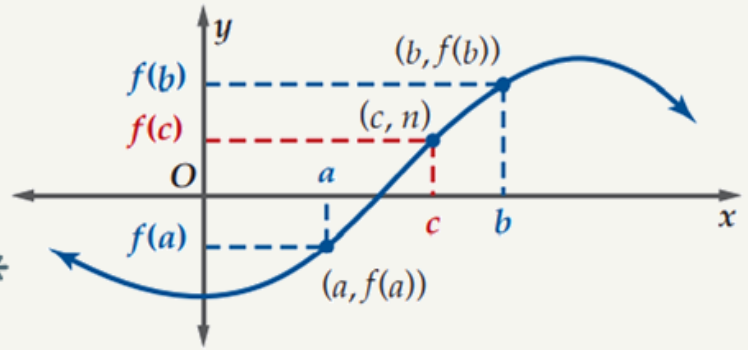
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

نظرية القيمة المتوسطة

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a $(\lim\limits_{x\to -a^+} f(x) = f(a))$ ، ومتصلة من اليسار عند b $(\lim\limits_{x\to -b^-} f(x) = f(b))$. ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b ، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .



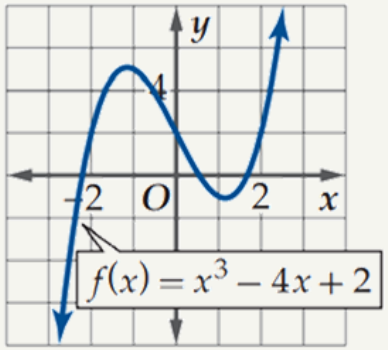
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٤

تقريب الأصفار عند تقريب الاشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.



الشكل 1.3.4

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(4A $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$، $[-6, 4]$

(4B $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$، $[-3, 4]$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

4A

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

4B

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

مثال ٥

إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمَّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

إرشاد تقني

قد يُظهر التمثيل البياني للدالة صفرًا واحدًا؛ لذا اختر التدريج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

5A $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

5B $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

إرشاد: استعمل الآلة الحاسبة البيانية (إذا لزم الأمر)

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

5A

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

5B

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

10) $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

10

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

سلوك طرفي التمثيل البياني

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

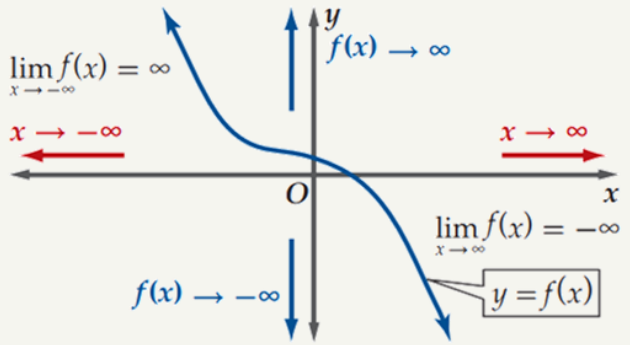
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$



قراءة الرياضيات

النهايات:

تقرأ العبارة $\lim_{x \to \infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

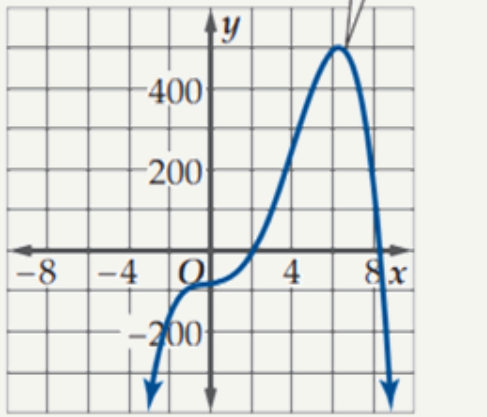
مثال ٦

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

إرشادات للدراسة

في المثال 6، أوجدت قيم تقريبيّة لِـ $f(x)$ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الدقيقة لِـ $f(x)$.
وكذلك في المثال 7.

$f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

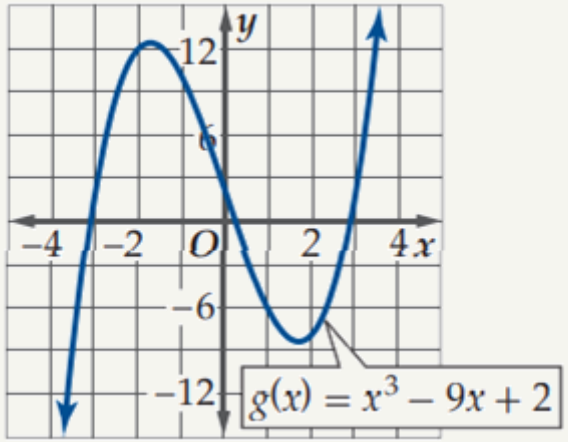
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

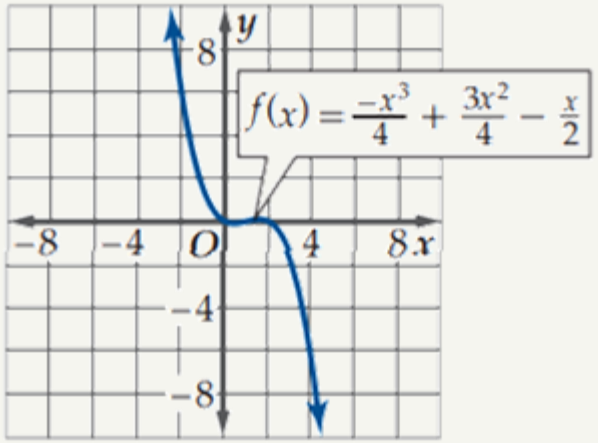
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.

(6A



(6B



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

6A

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

6B

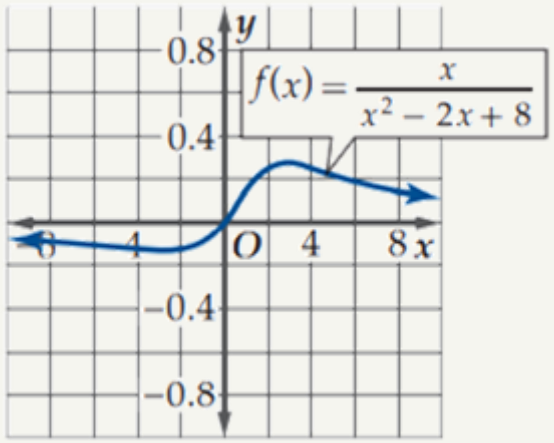
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

مثال ٧

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

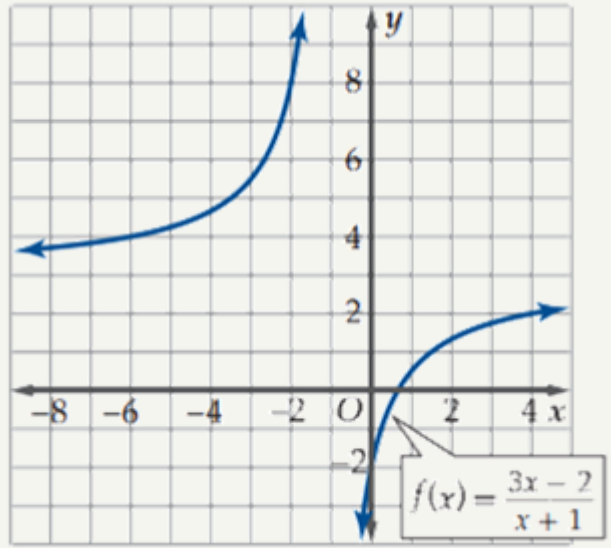
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

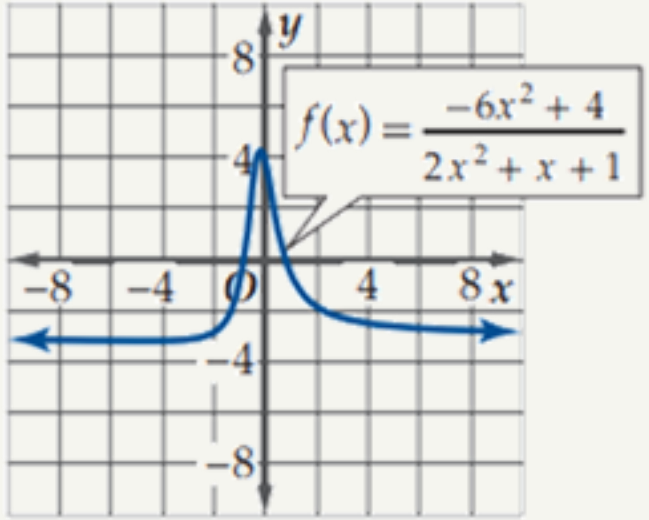
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.

(7A



(7B



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

7A

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

7B

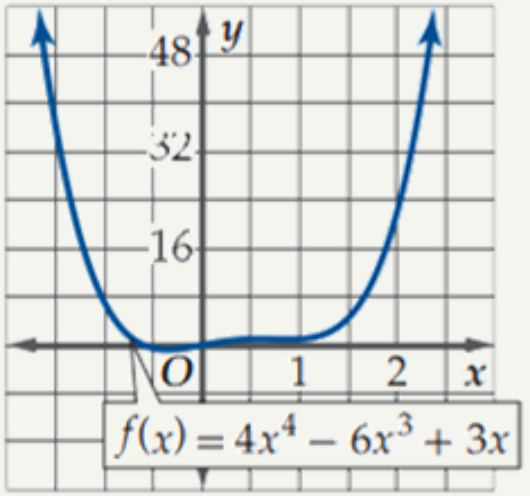
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

(15



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

15

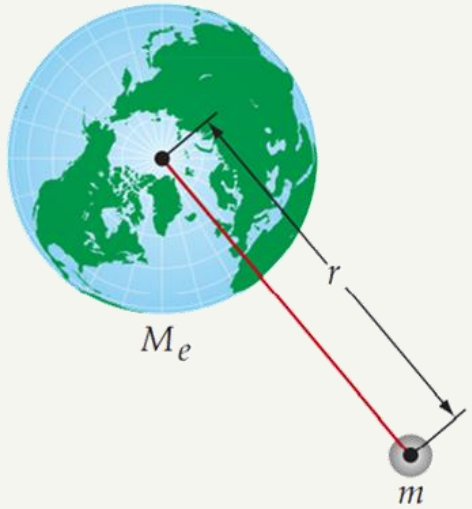
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني

مثال ٨

فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟



الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

عندما تستمر سرعة جزيئات الغاز في التزايد، فإن الضغط الديناميكي يؤول إلى ∞ .

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

8

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$ ، حيث p الزخم (حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته المتجهة) ، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في شاحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

26

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل التفكير العليا

41) تحدّ: أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & , \quad x \geq 3 \\ bx+a & , \quad -3 < x < 3 \\ -b-x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$$

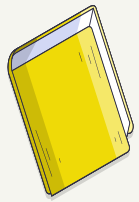
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا



@A_Shark_s