الفصل الأول
رياضيات ٥

العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

مجموعة رفعة الرياضيات
@A_Shark_s
تطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التاريخ:

اليوم:

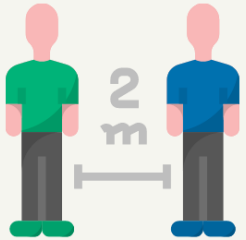
المادة:

نعود بحذر

الالتزام بارتداء الكمامة

عدم المصافحة

غسل اليدين



التباعد الاجتماعي

@A_Sharks_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

٤-١ القيم القصوى ومتوسط معدل التغيير

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درست كيفية إيجاد قيم الدوال.

و الآن

- أستعمل التمثيل البياني لدالة، لأحد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة،ثابته،متناقصة. وأحدد القيم العظمى و الصغرى لها.
- أجد متوسط معدل التغيير للدالة.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

المفردات

المتزايدة
increasing

المتناقصة
decreasing

الثابتة
constant

النقطة الحرجة
critical point

العظمى
maximum

الصغرى
minimum

القصوى
extrema

القاطع
secant line

متوسط معدل التغير
average rate of change

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

يبيِّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

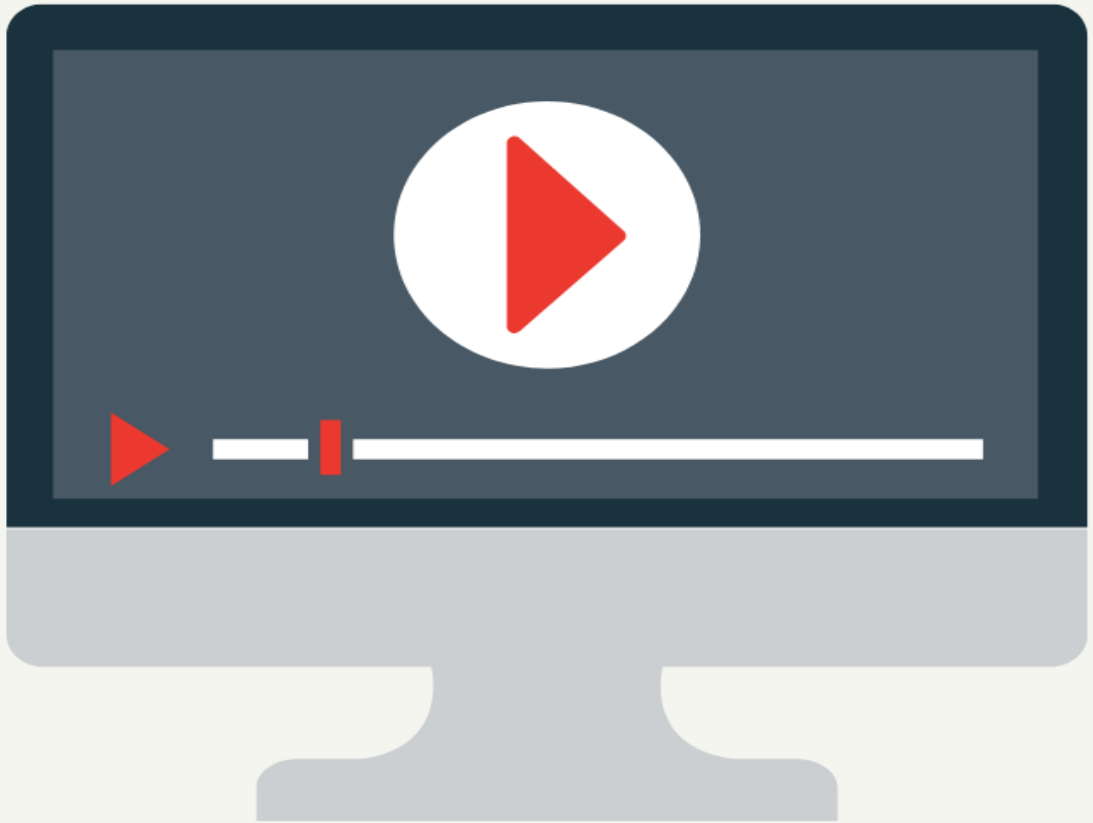
يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الربط بالواقع

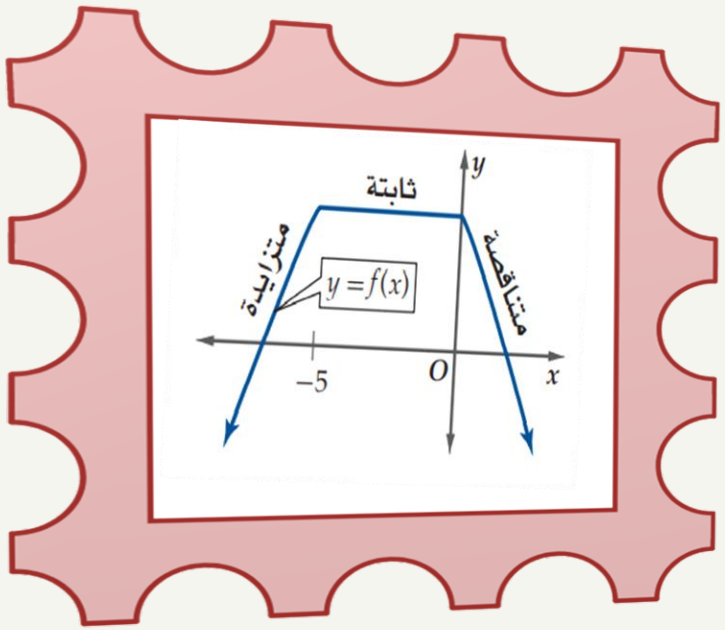


شاهد

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التزايد و التناقص



التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًّا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

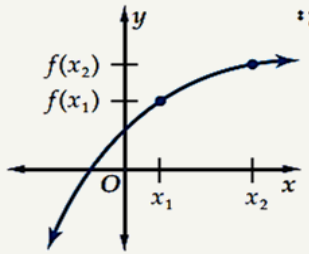
الدوال المتزايدة، المتناقصة، الثابتة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

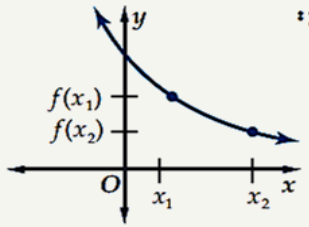
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

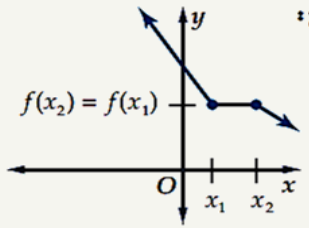
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$.
عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحديد التزايد و التناقص

مثال ١

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.

a) $f(x) = -2x^3$

b) $g(x) = x^3 - 3x$

تنبيه!

فترات:

لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (,) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

a

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

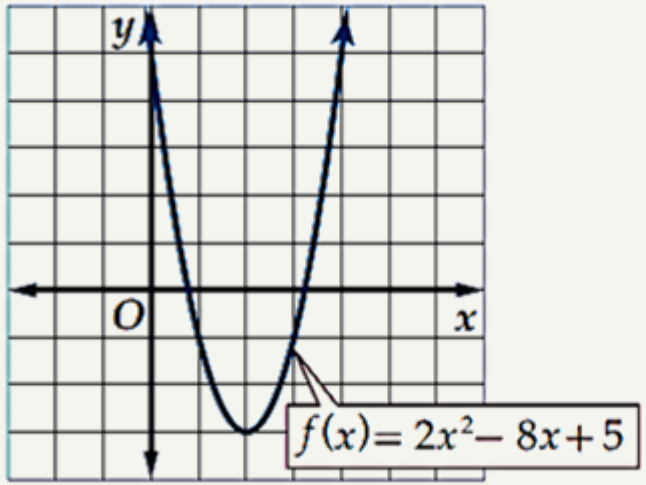
b

@A_Shark_s

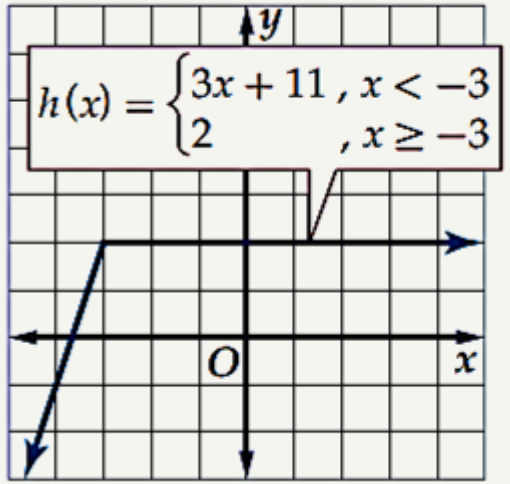
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(1A



(1B



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

1A

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

1B

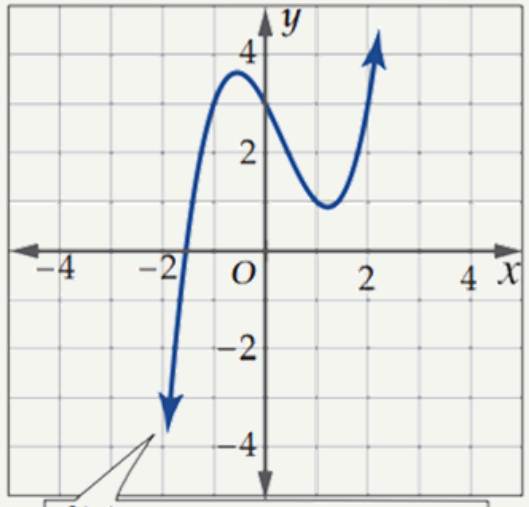
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزّز إجابتك عدديًّا:

1)



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

1

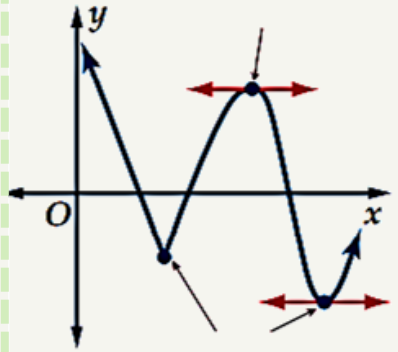
@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:

ليس من الضروري أن توجد قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.



لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًّا أو عموديًّا (أي أن ميله صفر أو غيرمعرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

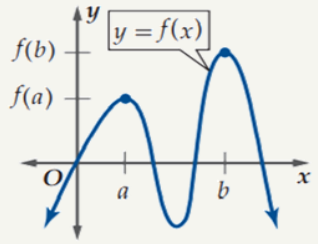
القيم القصوى المحلية و المطلقة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

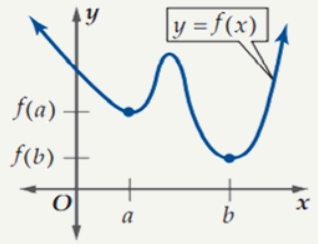
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمِّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمِّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمةً صغرى مطلقةً.

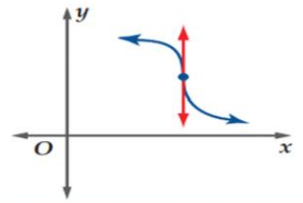
الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية:
يُستعملُ مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:
إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة الحرجة غير معرف كما في الشكل أدناه؛ فإنه لا توجد للدالة عند هذه النقطة قيمة عظمى أو صغرى.



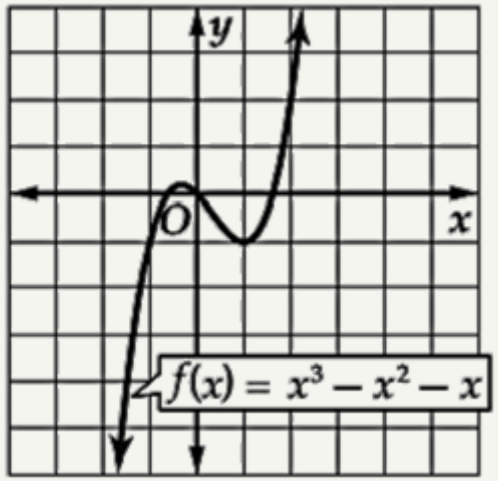
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها

مثال ٢

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

2

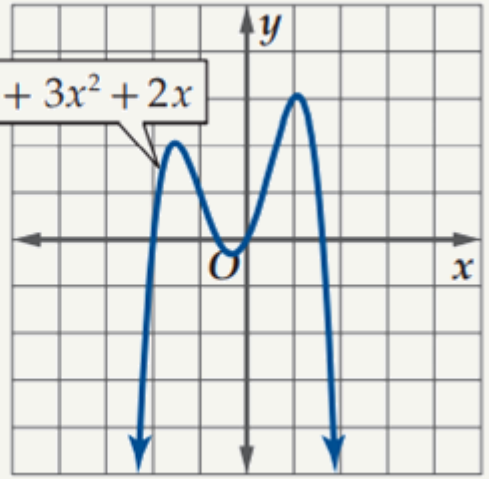
@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

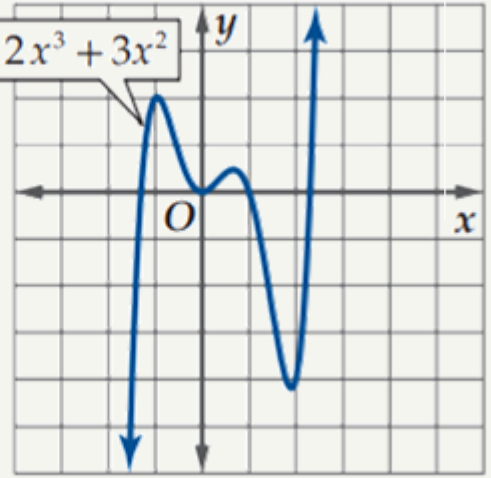
(2A

$f(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x$



(2B

$g(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2$



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

2A

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

2B

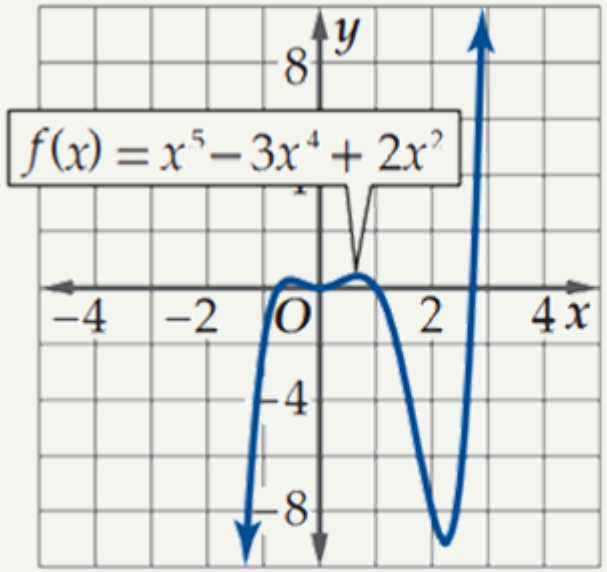
@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.

6)



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

6

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تطبيقات القيم القصوى

مثال ٤

زراعة : يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

الربط مع الحياة

تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

4

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

4) صناعة: يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

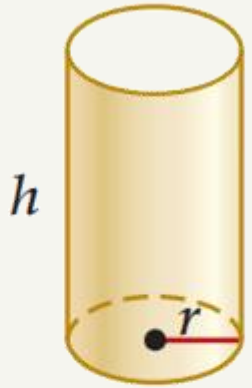
4

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

18) هندسة: أوجد كلًّا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة).



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
تساوي 20.5π بوصة مربعة

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

18

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

متوسط معدل التغيير

متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

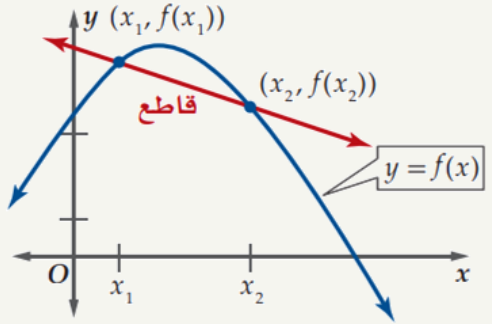
مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمّى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



إذا كان متوسط معدل التغير على فترة موجبًا، فإن الدالة تكون متزايدة في المتوسط على الفترة. وأما إذا كان سالبًا، فإن الدالة تكون متناقصة في المتوسط على الفترة.

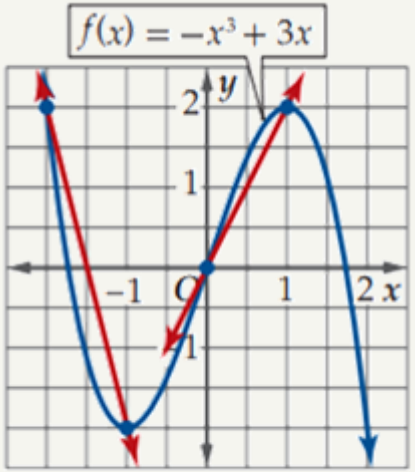
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إيجاد متوسط معدل التغير

مثال ٥

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:



الشكل 1.4.1

(a $[-2, -1]$

(b $[0, 1]$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

a

$[-2, -1]$ (a

b

$[0, 1]$ (b

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

(5A $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

(5B $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

5A

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

5B

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة.

19) $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

19

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إيجاد السرعة المتوسطة

مثال ٦

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

تنبيه!

السرعة المتوسطة:
يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة، فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).

الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمَّى السرعة الحديّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديّة (120-150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

a

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

b

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

6) **فيزياء:** قَذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و$d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

6

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل التفكير العليا

47) تبرير: أوجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ إذا كانت $f(x)$ ثابتة في الفترة (a, b). وضّح إجابتك.

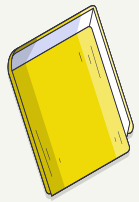
@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا



@A_Shark_s