# العمليات على الدوال و تركيب دالتين

## فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال.
(الدرس 1–1)

## والآن:

- أُجري العمليات على الدوال.
- أجِدُ تركيب الدوال.

## المفردات:

**تركيب الدالتين**

composition of functions

# قدرات

ما قيمة $\frac{٢٤.٥}{٧.٥} - \frac{١}{١٥} - \frac{٤٨}{١٥}$

صفر ٢ ٥ ٣

## لماذا

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و $t$ تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

قاعدة إختبارك

1. $(f+g)(x) =$
2. $(f-g)(x) =$
3. $(f \cdot g)(x) =$
4. $\frac{f}{g}(x) =$

مجال الدوال

① كثيرة حدود

② الجذرية

③ الكسرية

④ كسرية جذرية

**العمليات على الدوال:** ستتعلمُ في هذا الدرس إجراءَ العمليات الأربع على الدوال.

**مفهوم أساسي** **العمليات على الدوال**

**إذا كانت $f, g$ دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم $x$ الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:**

**الجمع:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

**الطرح:** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين $f$ و $g$، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

# العمليات على الدوال

**مثال**

إذا كانت $h(x) = 3x - 5$ ، $g(x) = \sqrt{x+2}$ ، $f(x) = x^2 + 4x$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتيةِ، ثم حدد مجالها:

**(a** $(f + g)(x)$

**(b** $(f - h)(x)$

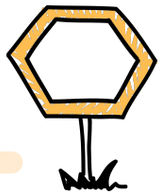
# العمليات على الدوال

**مثال**

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = \sqrt{x+2}, h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتيةِ، ثم حدد مجالها:

**c** $(f \bullet h)(x)$

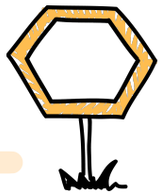
**d** $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$



## تحقق من فهمك

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(f - g)(x)$ ، $(f + g)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

**1A)** $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$



## تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$ , $(f-g)(x)$ , $(f \cdot g)(x)$ , $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

**1B** $f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x}$

**تركيب الدوال:** تنتج الدالة $y = (x - 3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

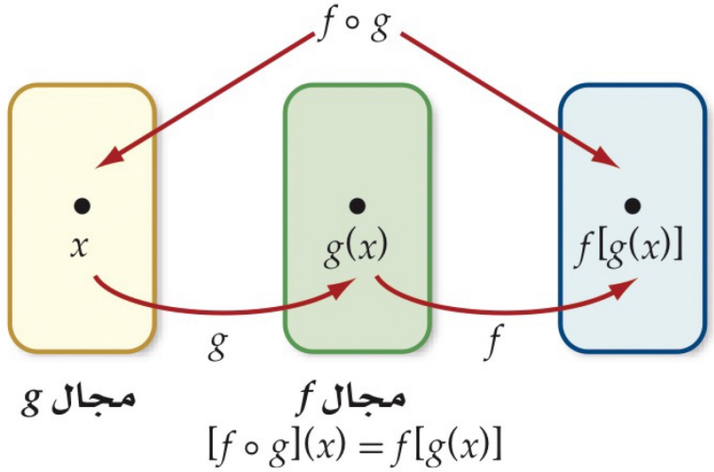
## مفهوم أساسي

### تركيب دالتين

**يعرف تركيب الدالتين $f$ وَ $g$ على النحو الآتي:**

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

**ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم $x$ في مجال الدالة $g$ على أن تكون $g(x)$ في مجال $f$.**



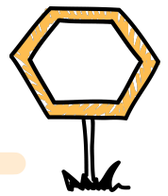

تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو $f$ تركيب $g$ أو $f$ بعد $g$، حيثُ تُطبَّقُ الدالة $g$ أولًا ثم الدالة $f$.

# تركيب دالتين

**مثال**

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1 \ , g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

**a** $[f \circ g](x)$ **b** $[g \circ f](x)$ **c** $[f \circ g](2)$



## تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$ , $[g \circ f](x)$ , $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

**2A** $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

**2B** $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

بما أن مجال كل من $f, g$ في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in \mathrm{R}\}$.

عند وجود قيود على مجال $f$ أو مجال $g$ فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم $x$ في مجال $g$ التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال $f$.

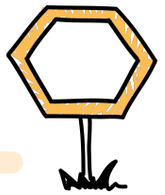
## إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

**مثال**

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

**a** $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

**b** $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x-3}$



## تحقق من فهمك

**(3A** $f(x) = \sqrt{x+1}\,, g(x) = x^2 - 1$

**(3B** $f(x) = \frac{5}{x}\,, g(x) = x^2 + x$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل $h$، فإنك تجد دالتين ($f, g$ مثلا) بحيث يكون تركيبهما هو $h$.

## كتابة الدالة كتركيب دالتين

**مثال**

أوجد دالتين $f$ , $g$ بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

**a** $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

**b** $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

## تحقق من فهمك

**(4A** $h(x) = x^2 - 2x + 1$

**(4B** $h(x) = \frac{1}{x + 7}$

# على شكل تركيب دالتين

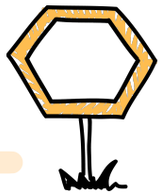
## مثال

**مؤثرات حركية:** تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

**a)** أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل $A$ كدالة في عرضه $L$، وتعطي الأخرى عرضه بعد $t$ ثانية.

**b)** أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

**c)** كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟



# تحقق من فهمك

**5)** **أعمال:** أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

**5A)** عبّر عن هذه البيانات بدالتين $c$ و $d$ .

**5B)** أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$ . وماذا يعني كلٌّ منهما؟

**5C)** أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

أوجد $(f+g)(x)$ , $(f-g)(x)$ , $(f \cdot g)(x)$ , $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ , $g(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: **(مثال 1)**

**1)** $f(x) = x^2 + 4$

$g(x) = \sqrt{x}$

## تدرب

أوجد $[f \circ g](6)$ , $[g \circ f](x)$ , $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية.

(مثال 2)

**11)** $f(x) = 2x - 3$

$g(x) = 4x - 8$

## تدرب

حدِّد مجال $g \circ f$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية:

**15)** $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$g(x) = x^2 - 4$

**81)** إذا كانت $h(x) = 2(x-5)^2 \, , g(x) = x^2 + 9x + 21$ ،
فإن $[h \circ g](x)$ تساوي:

**A** $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$

**B** $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

**C** $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$

**D** $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

**82)** إذا كان $f(2)=3, g(3)=2, f(3)=4, g(2)=5$ ،
فما قيمة $[f \circ g](3)$؟

**A** 2

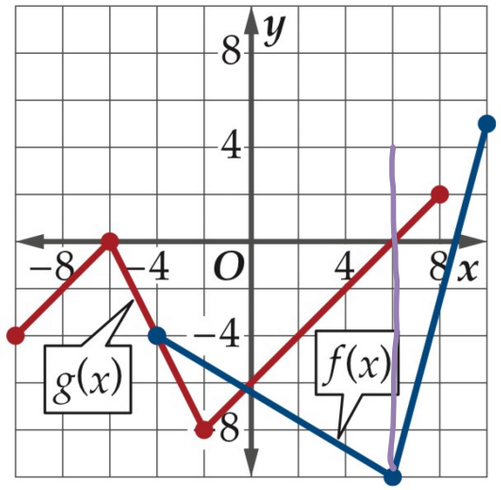
**B** 3

**C** 4

**D** 5

## تدرب

حدّد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:




**63** $(f \circ g)(x)$

**64** $(g \circ f)(x)$

# تحصيلي

إذا كانت $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ ؛ فإن $[f \circ g](x)$ تساوي ..

(A) $\sqrt{x^2 - 9}$

(B) $x^2\sqrt{x-3}$

(C) $(x-3)^2$

(D) $x - 3$

# تحصيلي

إذا كانـــت $f = \{(3,5),(-1,6)\}$ و $g = \{(4,3),(2,-1)\}$ ؛ فـــإن $[f \circ g]$ تساوي ..

Ⓐ $\{(3,5),(-1,6)\}$

Ⓑ $\{(3,4),(6,2)\}$

Ⓒ $\{(4,3),(2,-1)\}$

Ⓓ $\{(4,5),(2,6)\}$