العلاقات و الدوال العكسية

فيما سبق:

درستُ إيجاد تركيب دالتين.
(الدرس 6–1)

والآن:

- أستعملُ اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.
- أجِدُ الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

المفردات:

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

الدالة المتباينة
one-to-one function

قدرات

إذا كان ٤٠:س = ١٠ : ١٠٠ ، أوجد قيمة س

٤٠٠٠   ٣٠   ٤٠٠   ٣٠٠٠

مفهوم بدايك ؟

لماذا

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

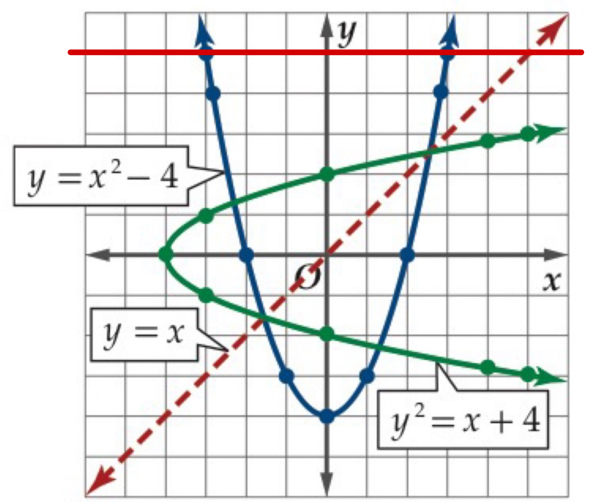
السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلًّا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالَّ. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لِـ f، ويرمز لها بالرمز f^{-1}.

لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

الدالة خط رأسي

الدالة العكسية خط أفقي

قراءة الرياضيات

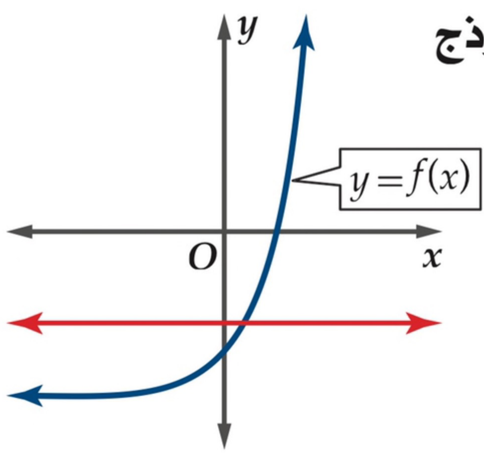
رمز الدالة العكسية:
يجب ألّا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

مفهوم أساسي اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج

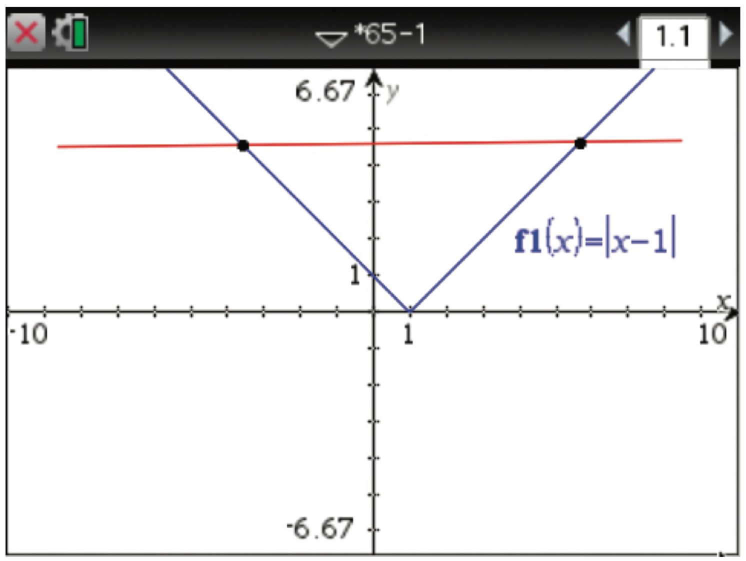


مثال

تطبيق اختبار الخط الأفقي

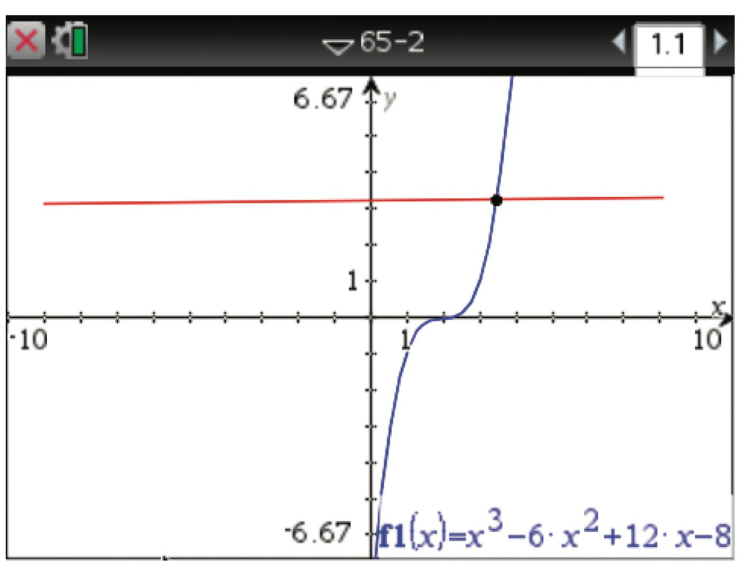
مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

a) $f(x) = |x - 1|$



لا يوجد دالة عكسية

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



يوجد دالة عكسية

تحقق من فهمك

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$

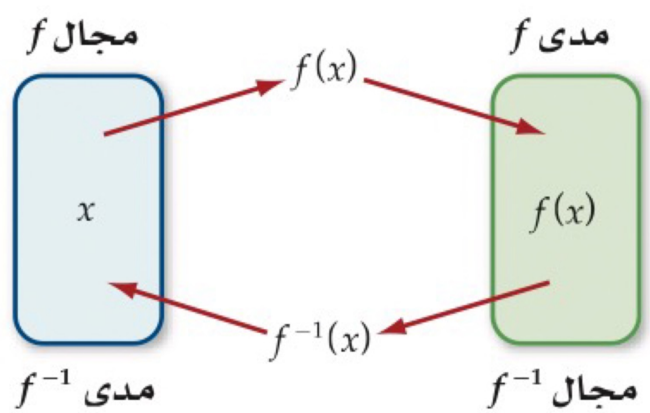
يوجد

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$

لا يوجد

إيجاد الدالة العكسية: إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y، ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي **إيجاد الدالة العكسية**

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

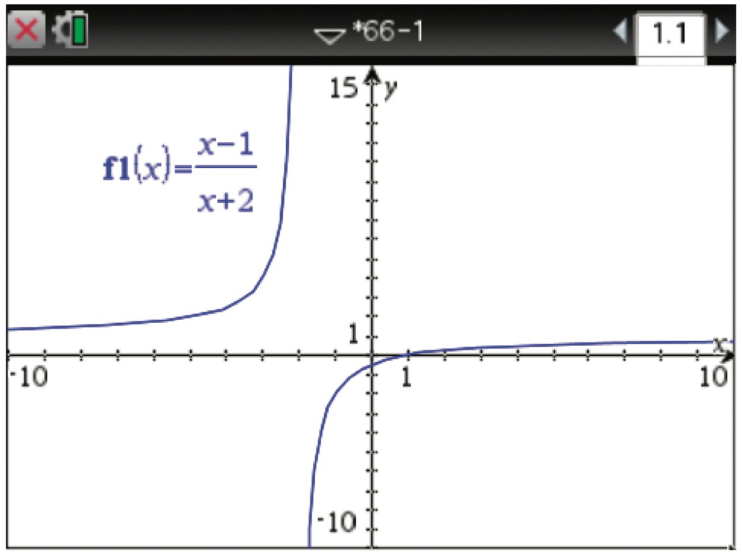
يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}.

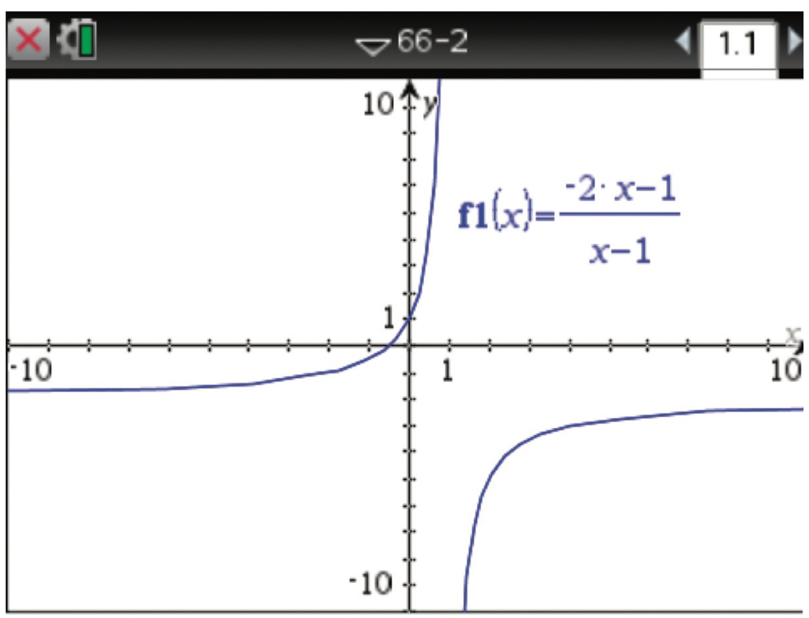
مثال

إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$





① $y = \dfrac{x-1}{x+2}$

② $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{y+2} \Rightarrow y-1 = x(y+2)$

$y-1 = xy+2x$

$xy - y = -2x - 1$

$y(x-1) = -2x-1$

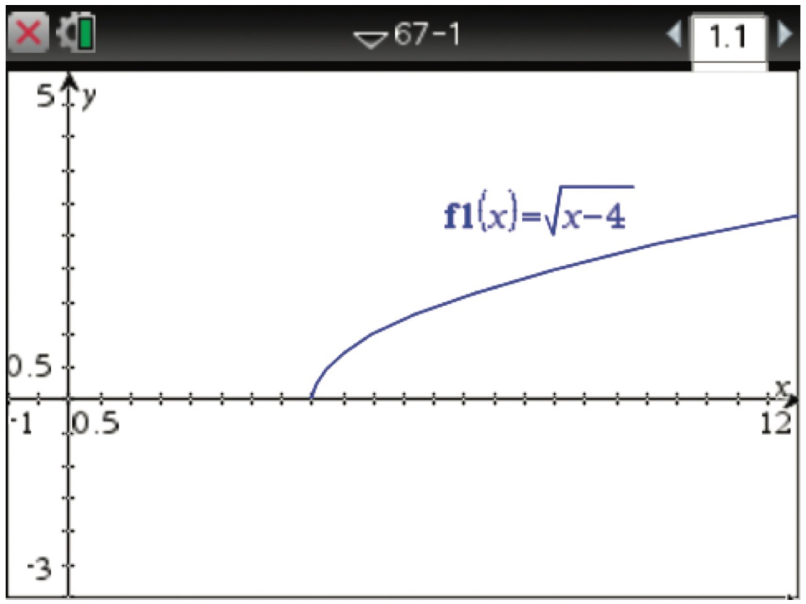
$y = \dfrac{-2x-1}{x-1}$

③ $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$

مثال

إيجاد الدالة العكسية جبريًّا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.



b) $f(x)=\sqrt{x-4}$

$\boxed{1}$ $y=\sqrt{x-4}$

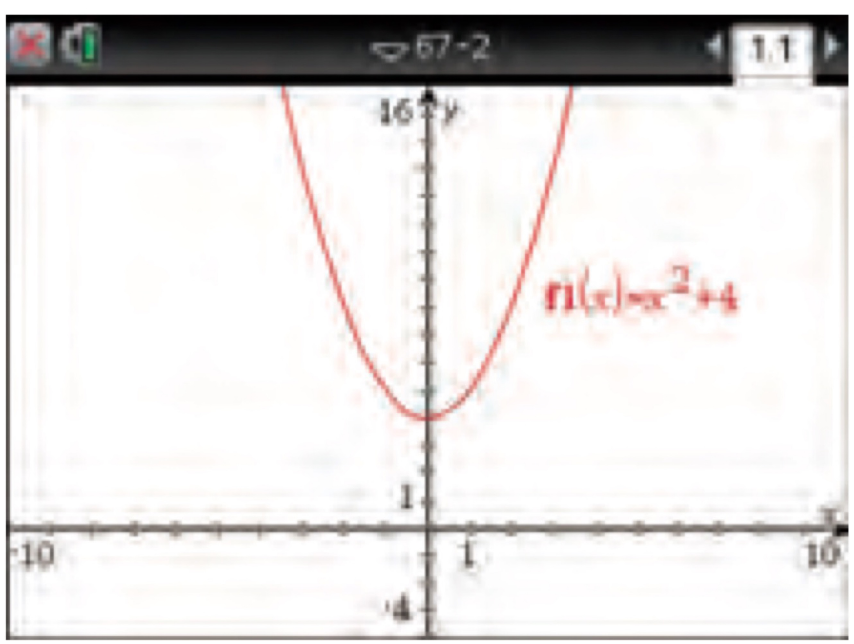
$\boxed{2}$ $x=\sqrt{y-4}$

نربع الطرفين

$x^2=y-4$

$y=x^2-4$

$f^{-1}(x)=x^2-4$



تحقق من فهمك

2A) $f(x) = -16 + x^3$

$y = -16 + x^3$

$x = -16 + y^3$

$y^3 = x + 16$

$y = \sqrt[3]{x+16}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$

تحقق من فهمك

2B) $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$

$$y = \frac{x+7}{x}$$

$$x = \frac{y+7}{y}$$

$$xy = y+7$$

$$xy - y = 7$$

$$y(x-1) = 7$$

$$y = \frac{7}{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{7}{x-1}$$

تحقق من فهمك

2C) $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

$y = \sqrt{x^2 - 20}$

$x = \sqrt{y^2 - 20}$

$x^2 = y^2 - 20$

$y^2 = x^2 + 20$

$y = \sqrt{x^2 + 20}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 20}$

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي **تركيب الدالة ودالتها العكسية**

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

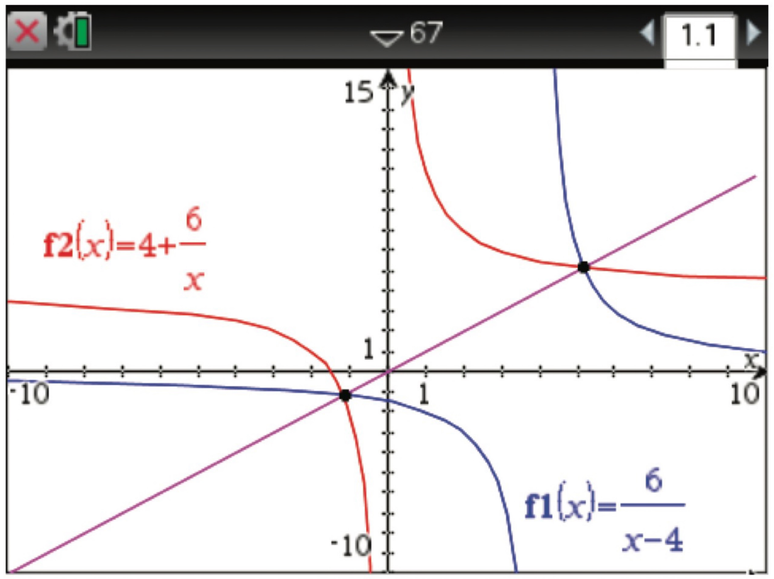
- $f[f^{-1}(x)] = x$ **لجميع قيم x في مجال** $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ **لجميع قيم x في مجال** $f(x)$.

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

مثال

إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.



① $f(g(x)) = f\left(\frac{6}{x}+4\right)$

$= \frac{6}{\frac{6}{x}+4-4} = \boxed{x}$

② $g(f(x)) = g\left(\frac{6}{x-4}\right)$

$= \frac{6}{\frac{6}{x-4}} + 4 = x-4+4$

$= \boxed{x}$

تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A) $f(x) = 18 - 3x\,, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

1) $f(g(x)) = f\left(6 - \frac{x}{3}\right)$

$= 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right)$

$= 18 - 18 + x = x$

2) $g(f(x)) = g(18 - 3x)$

$= 6 - \frac{(18 - 3x)}{3}$

$= \frac{18 - 18 + 3x}{3} = x$

3B) $f(x) = x^2 + 10\,, x \geq 0\,, g(x) = \sqrt{x - 10}$

1) $f(g(x)) = f\left(\sqrt{x - 10}\right)$

$= \left(\sqrt{x - 10}\right)^2 + 10$

$= x - 10 + 10 = x$

$\boxed{2}$ $g(f(x)) = g(x^2 + 10)$

$= \sqrt{x^2 + 10 - 10} = \sqrt{x^2}$

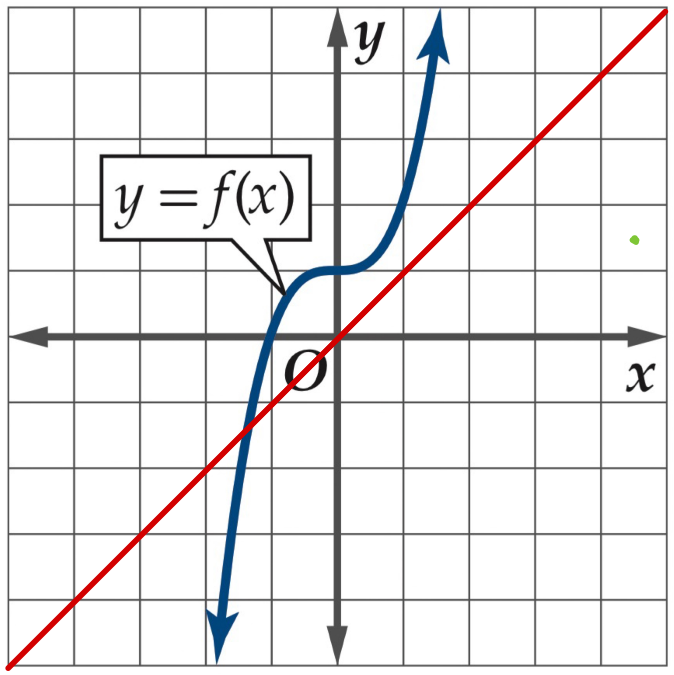
$= x$

من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًّا لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

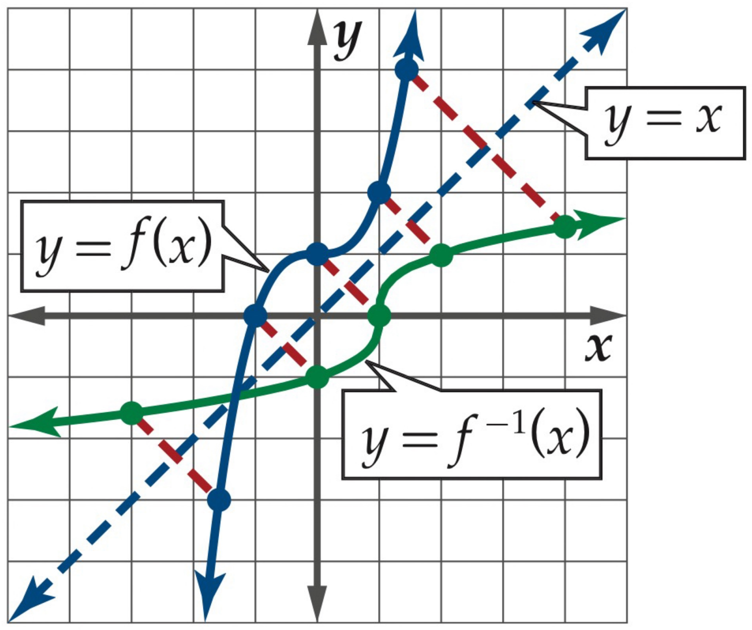
إيجاد الدالة العكسية بيانيًّا

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.



الشكل 1.7.3

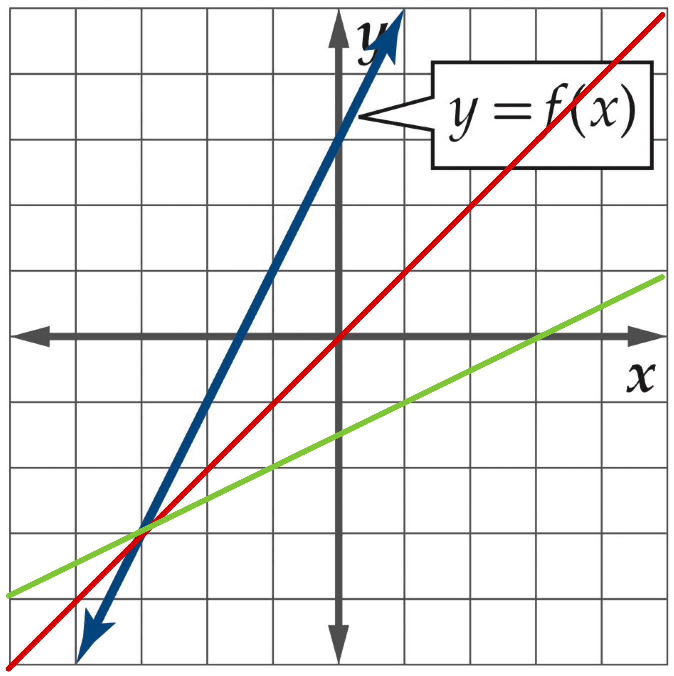


الشكل 1.7.4

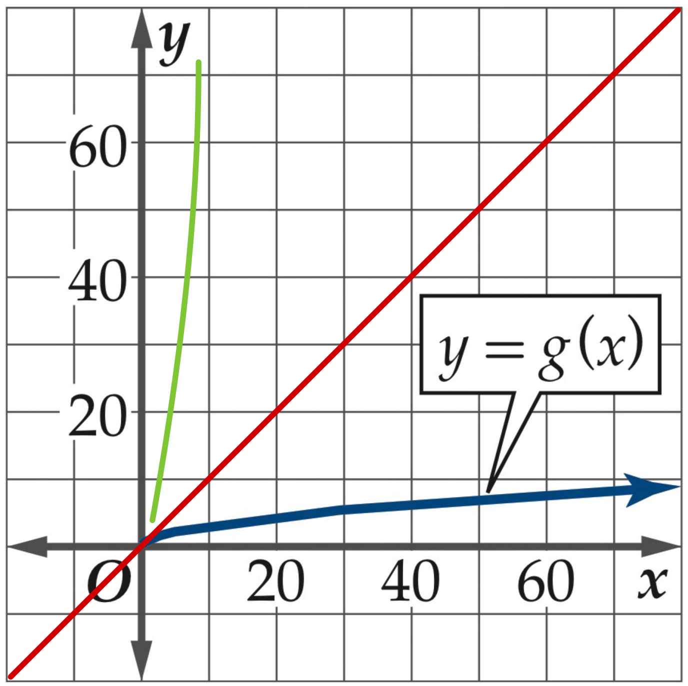
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًّا:

4A)



4B)

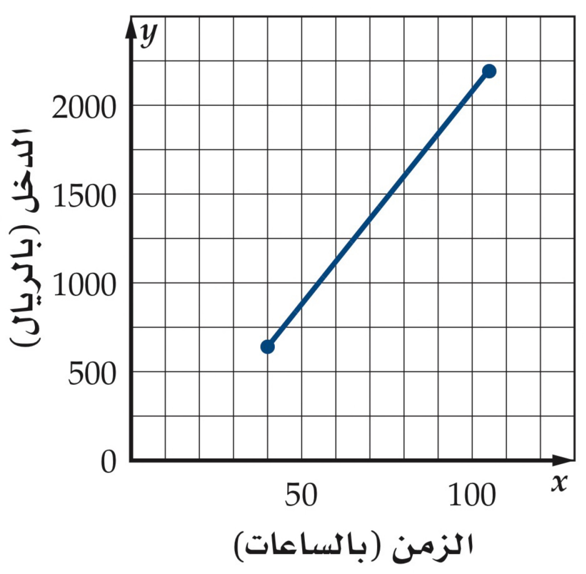


استعمال الدالة العكسية

مثال

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

الدخل الأسبوعي لعامل



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضِّح إجابتك.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

تحقق من فهمك

5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من $x, f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x), f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرِّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

تدرب

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$

تدرب

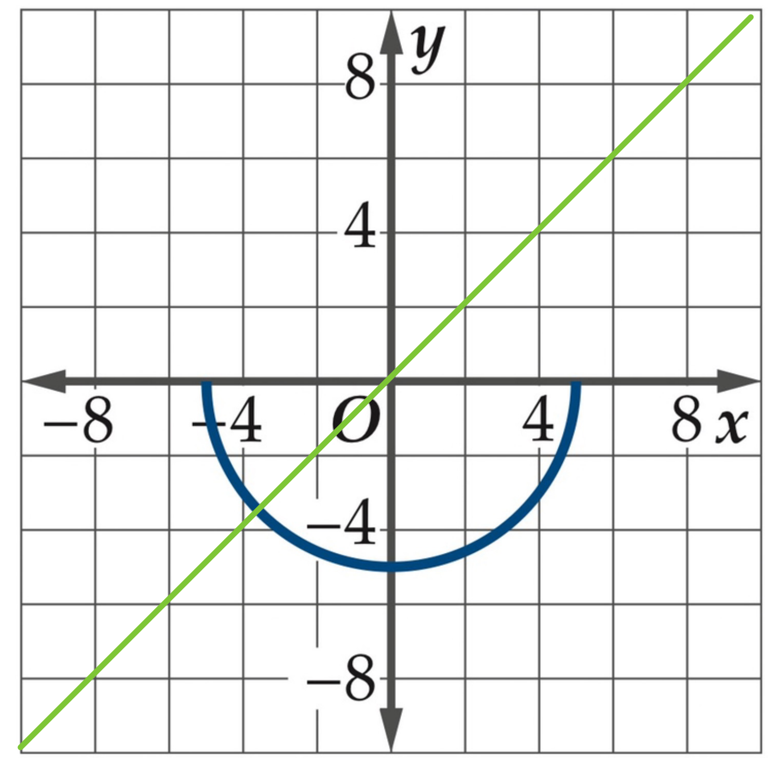
أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $f(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$

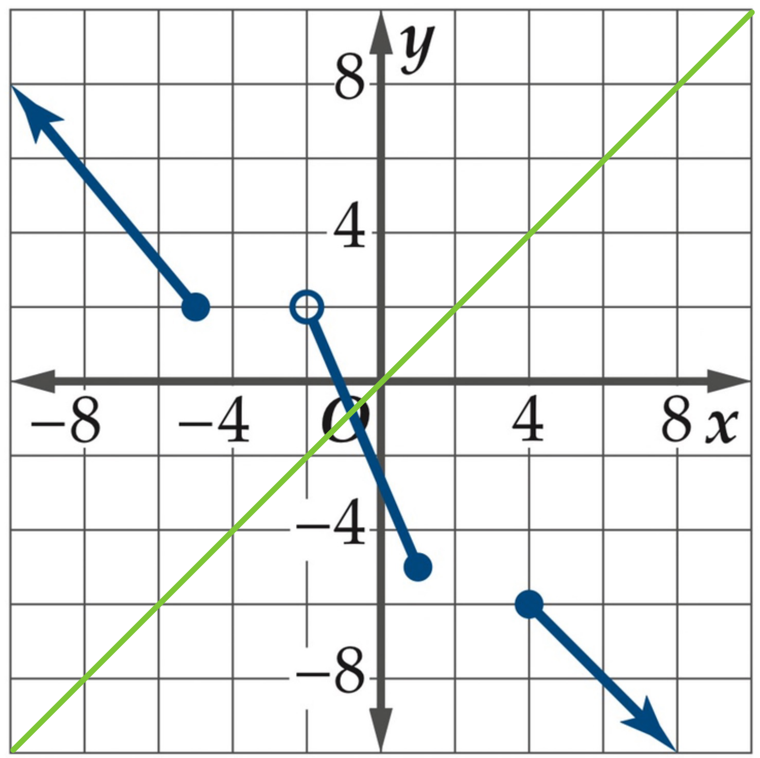
تدرب

حدّد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

(32



(33



تدرب

68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$؟

$x = \frac{3y-5}{2}$

$2x = 3y - 5$

$\frac{2x+5}{3} = y$

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

69) إذا كان كل من m و n عددًا صحيحًا فرديًّا، فأي العبارات الآتية صحيحة؟

$(1 + 3)$

$(1 + 9) = 10$

$1 +$

I) $m^2 + n^2$ عدد زوجي

II) $m^2 + n^2$ يقبل القسمة على 4

III) $(m + n)^2$ يقبل القسمة على 4

A كلها غير صحيحة

B I فقط

C I و II فقط صحيحتان

D I و III فقط صحيحتان

تحصيلي

ما هي الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x$ ؟

(A) $\frac{x}{2}$

(B) $2x + 3$

(C) $2x + 5$

(D) $\frac{2}{x}$