

الفصل الثاني رياضيات ٥

العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزیز الشریف





المادة:

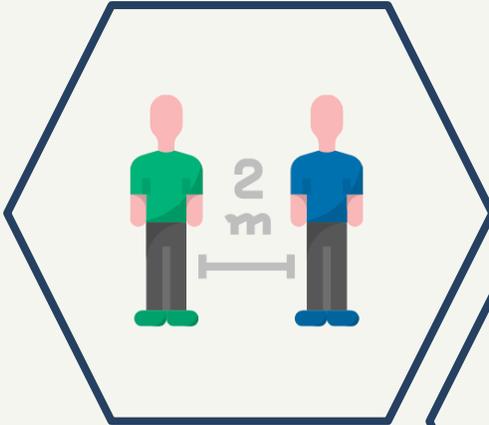


اليوم:



التاريخ:

نعود بحذر



التباعد الاجتماعي

غسل اليدين



عدم المصافحة

الالتزام بارتداء الكمامة





الدوال الأسية

رابط الدرس الرقمي



فيما سبق

درست دوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانياً

والآن

- أتعرف الدالة الأسية.
- أمثل دوال النمو الأسي بيانياً.
- أمثل الدالة الأسية.
- أمثل دوال الاضمحلال الأسي بيانياً.





المفردات

الدالة الأسية

exponential function

النمو الأسّي

exponential growth

عامل النمو

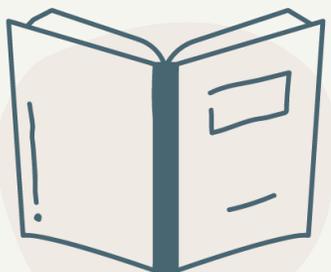
growth factor

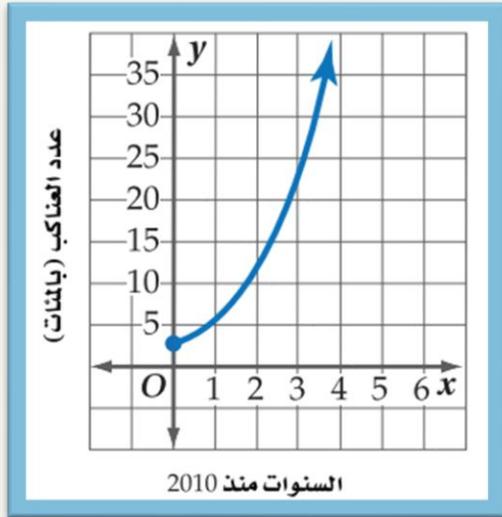
الدالة الأسية

exponential function

النمو الأسّي

exponential growth





قد تبدو عناكب الرتيلاء (*Tarantulas*) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبين التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.

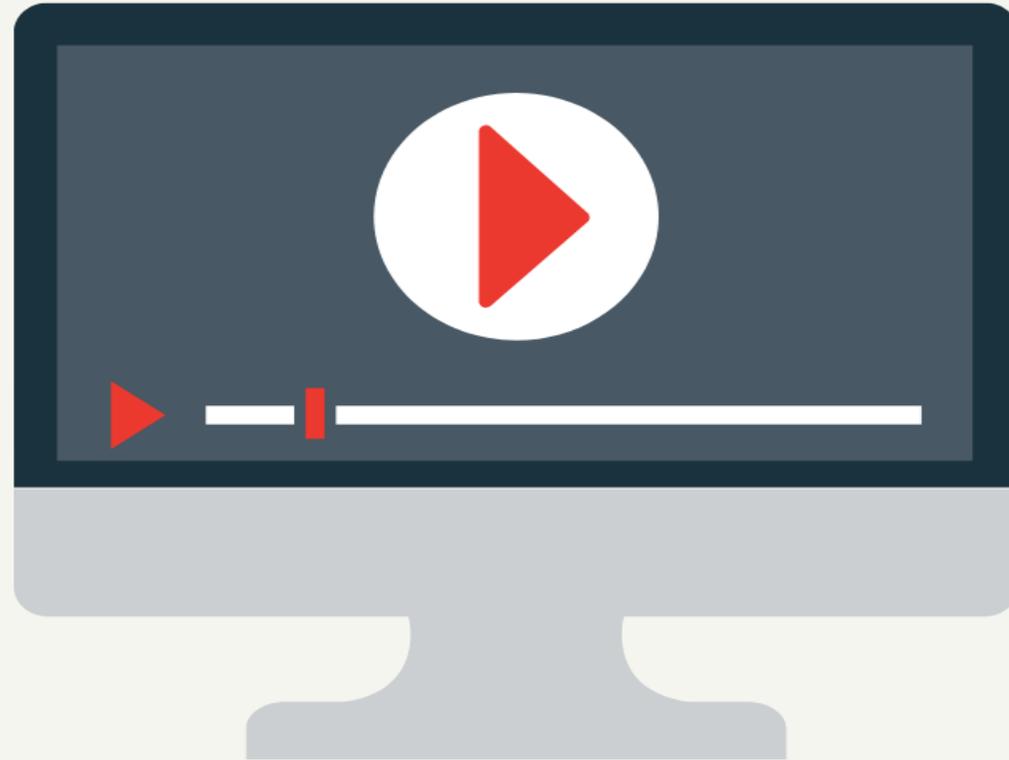
لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطياً، وليس تربيعياً أيضاً، وإنما يمثل الدالة $y = 3(2)^x$ ، والتي هي مثال على الدالة الأسية.



الربط بالواقع



شاهد





مفهوم أساسي

تمثيل الدوال الأسية: الدالة الأسية هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$. لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة

$$y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$$

$$y = 2(3)^x$$

$$y = 4^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

أمثلة:





(a) مثل الدالة $y = 3^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.

(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

إرشادات للدراسة

- الدالة $y = ab^x$:
- تكون الدالة الأسية $y = ab^x$ معرفة لجميع قيم x التي تحقق الشرط:
- $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$
وذلك لأنه:
- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم، فمثلًا تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
 - إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة.



الحل



(a) مثل الدالة $y = 3^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.

(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.





تحقق من فهمك

1A مثل الدالة $y = 7^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.

1B استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.



الحل



1A مثل الدالة $y = 7^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.

1B استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.





تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدّد مجالها ومداهما، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.:

$$(1) \quad y = 2^x, \quad 2^{1.5}$$



الحل



مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجالها ومداهما، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك..:

$$(1) \quad y = 2^x, \quad 2^{1.5}$$





(a) مثل الدالة $y = (\frac{1}{3})^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداه.

(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{3})^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

إرشادات للدراسة

$$a < 0$$

إذا كانت قيمة a سالبة، فإن
منحنى الدالة ينعكس حول
المحور x .



الحل



(a) مثل الدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.

(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.





تحقق من فهمك

2A مثل الدالة $y = (\frac{1}{2})^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.

2B استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{2})^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.



الحل



2A مثل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانياً، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.

2B استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.





تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدّد مجالها ومداهما، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.:

$$2 \left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}, y = 2 \left(\frac{1}{6}\right)^x \quad (3)$$

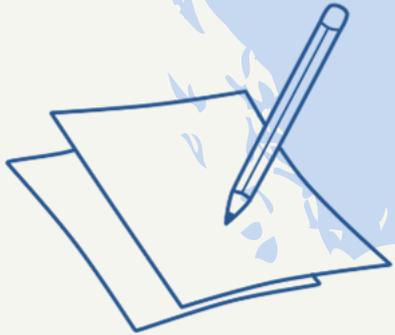


الحل



مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدّد مجالها ومداهما،
ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب
جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.:

$$2 \left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}, y = 2 \left(\frac{1}{6}\right)^x \quad (3)$$

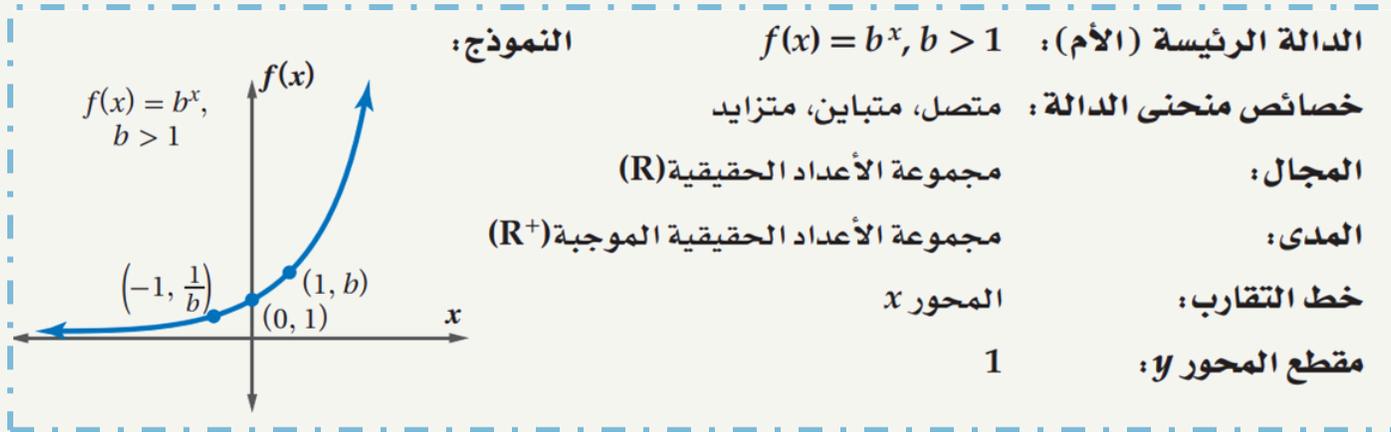




الدالة الرئيسية (الأم) لدوال النمو الأسي

مفهوم أساسي

النمو الأسي: تسمى الدالة الأسية $f(x) = b^x$ ، حيث $b > 1$ دالة النمو الأسي.



لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x . ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a(1+r)^t$ ، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(r+1)$ ويُسمى **عامل النمو**.

وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.





تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431-1425 3.2% تقريباً. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.

(a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملاً $a = 22678262, r = 0.032$

(b) مثل الدالة بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتحصل على الشكل المجاور.



الربط مع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي يتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد أُجري أول تعداد سكاني في المملكة عام 1394 هـ ، وكان عدد سكان المملكة حينئذ 7 ملايين نسمة تقريباً.





الحل

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431-1425 3.2% تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ، فأوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

(a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

(b) مثل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتحصل على الشكل المجاور.





تحقق من فهمك

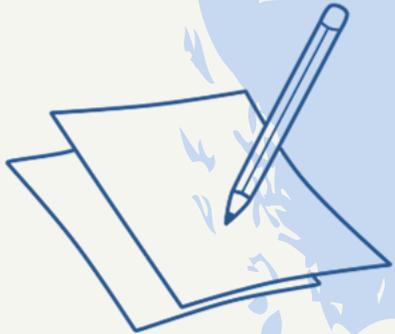
3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنويًا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430 هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.



الحل



3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنويًا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430 هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.





تدرب وحل المسائل

(5) **حاسوب:** يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل النمو في انتشار الفيروس منذ البداية، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.



الحل

(5) **حاسوب:** يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل النمو في انتشار الفيروس منذ البداية، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.

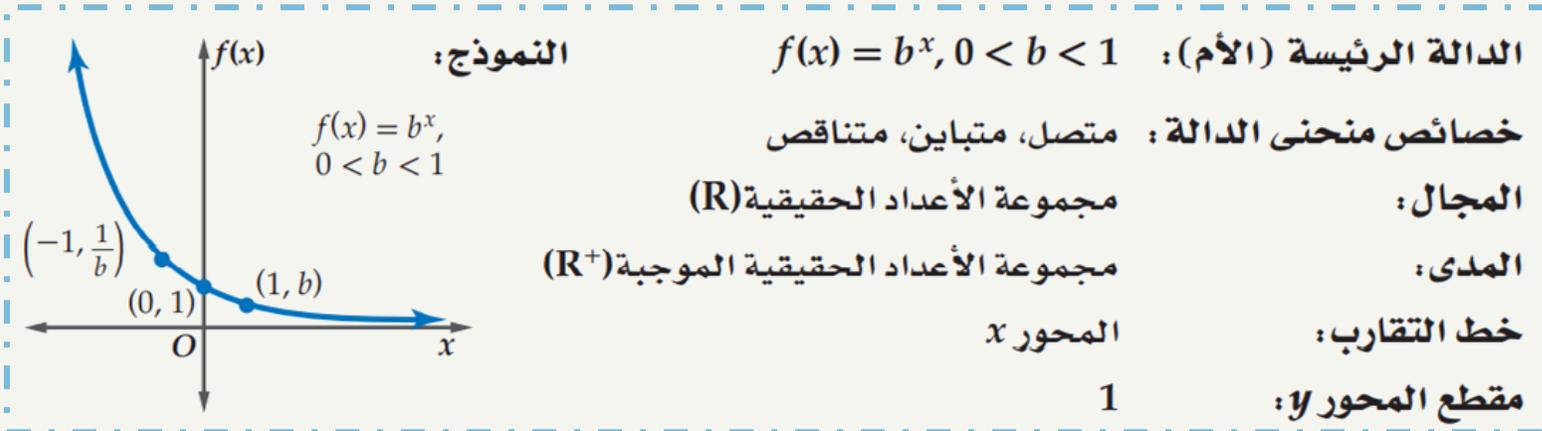




الدالة الرئيسية (الأم) لدوال الاضمحلال الأسي

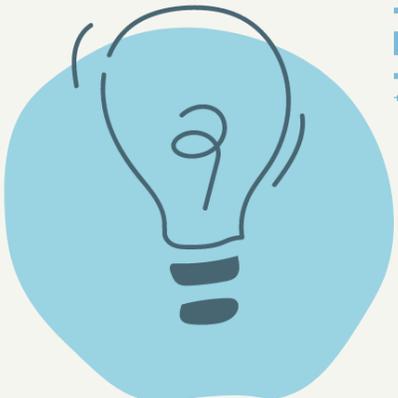
مفهوم أساسي

الاضمحلال الأسي: تُسمى الدالة الأسية $f(x) = b^x$ ، حيث $0 < b < 1$ دالة الاضمحلال الأسي، فالدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ الواردة في المثال 2 هي دالة اضمحلال أسي.



يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانياً بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x ، ولذلك نقول: إن دالة $f(x)$ متناقصة.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1 - r)^t$ ، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$ ، ويُسمى عامل الاضمحلال. وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.





شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافيين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريباً من كمية الكافيين من أجسامهم في الساعة.

(a) أوجد دالة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.

(b) قدر كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوباً من الشاي الأخضر.



الربط مع الحياة

الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل عرضة للإصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.



الحل



شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافيين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريباً من كمية الكافيين من أجسامهم في الساعة.

(a) أوجد دالة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.

(b) قدر كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوباً من الشاي الأخضر.





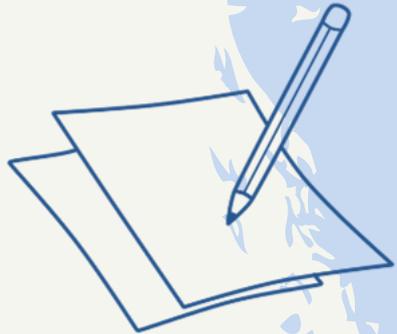
تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافيين. أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوباً من الشاي الأسود، ومثلها بيانياً مستعملاً الحاسبة البيانية، ثم قدر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.



الحل

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافيين. أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوباً من الشاي الأسود، ومثلها بيانياً مستعملاً الحاسبة البيانية، ثم قدر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.





تدرب وحل المسائل

(6) سيارات: سيارة كان سعرها 80000 ريال، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة. أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية. ثم قدر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها.



الحل

(6 سيارات: سيارة كان سعرها 80000 ريال، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة. أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية. ثم قدر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها.





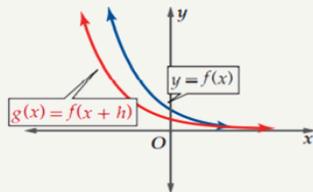
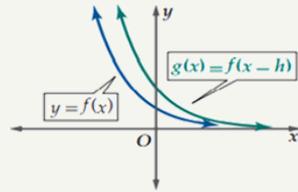
الانسحاب الرأسى والانسحاب الأفقى

مفهوم أساسي

التحويلات الهندسية: تؤثر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكل من دالتي النمو الأسى والاضمحلال الأسى كما هو الحال في باقي الدوال، وستقتصر دراستنا على بعض التحويلات الهندسية لهاتين الدالتين.

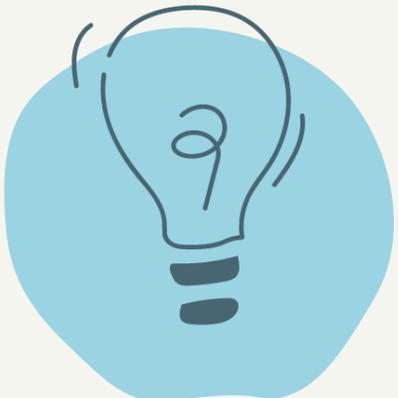
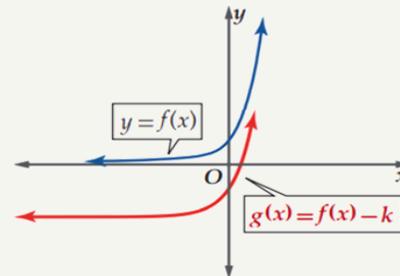
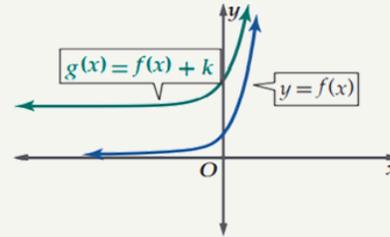
الانسحاب الأفقى

- منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:
- $h > 0$ من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
 - $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



الانسحاب الرأسى

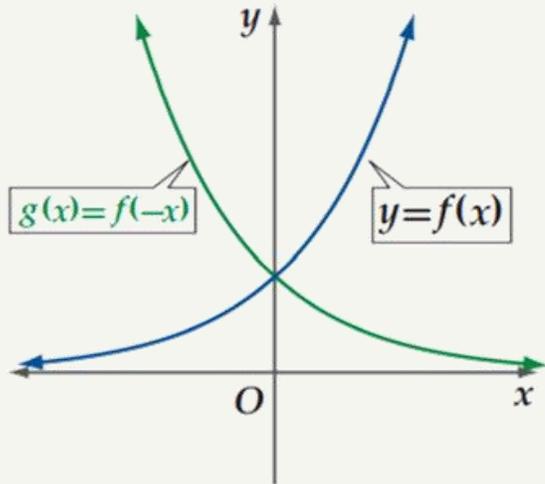
- منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:
- $k > 0$ وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
 - $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



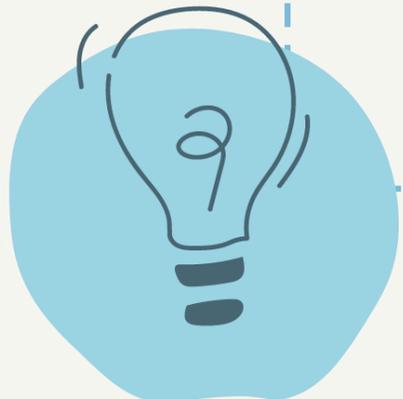


الانعكاس حول محور y

مفهوم أساسي



منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



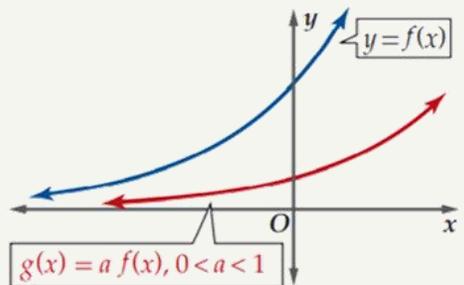


التمدد الرأسي

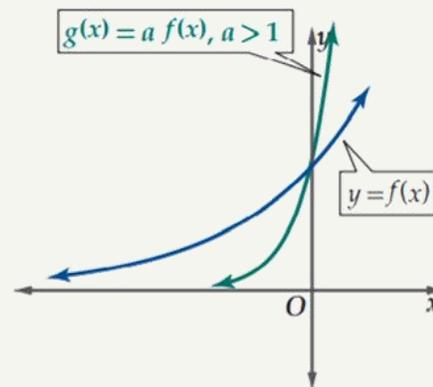
مفهوم أساسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a f(x)$ هو:

تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$



توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$.



إرشادات للدراسة

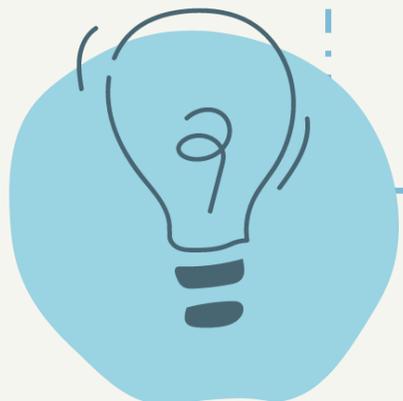
الاضمحلال الأسي:

تأكد من عدم الخلط بين

تضييق التمثيلات البيانية،

حيث $|a| < 1$ والاضمحلال

الأسي، حيث $0 < b < 1$





تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها، ومداهما:

$$y = 2^x + 1 \quad (a)$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2} \quad (b)$$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 5

هو مجموعة الأعداد

الحقيقية (R). تذكر أن

سلوك طرفي التمثيل البياني

هو سلوك التمثيل البياني

مع اقتراب x من مالانهاية أو

سالب مالانهاية. نلاحظ في

المثال (5a) أنه مع اقتراب x

من مالانهاية، تقترب y من

مالانهاية أيضًا، وأما عندما

تقترب x من سالب مالانهاية،

فإن y تقترب من 1. وفي

المثال (5b) عندما تقترب x

من مالانهاية فإن y تقترب

من سالب مالانهاية، وأما

عندما تقترب x من سالب

مالانهاية، فإن y تقترب من

الصفر.



الحل



مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها، ومداهما:

$$y = 2^x + 1 \quad (a)$$





$$y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2} \quad (\mathbf{b})$$





تحقق من فهمك

مثل كل دالة مما يأتي بياناً، وحدد مجالها، ومداهما:

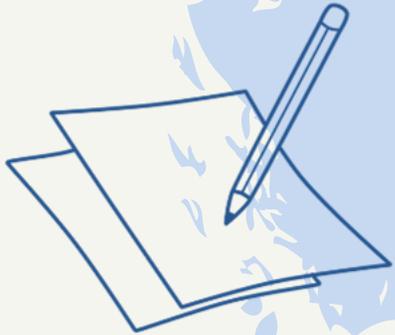
$$y = 2^x + 3 - 5 \quad (5A)$$

$$y = 0.1(6)^x - 3 \quad (5B)$$





$$y = 2^{x+3} - 5 \quad (5A)$$





$$y = 0.1(6)^x - 3 \quad (5B)$$





تدرب وحل المسائل

مثل الدالة بيانياً وحدد مجالها ومداهما.

$$f(x) = 2(3)^x \quad (7)$$

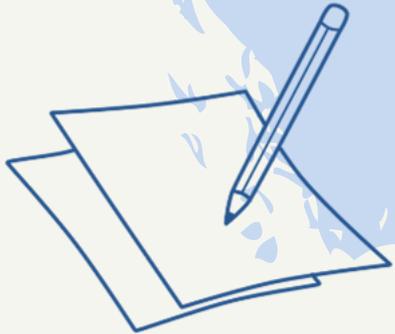


الحل



مثل الدالة بيانياً وحدد مجالها ومداهما.

$$f(x) = 2(3)^x \quad (7)$$





مثال الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانياً، وحدد مجالها ومداهها.



الحل



مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها.





تحقق من فهمك

مثل الدالة بيانياً وحدد مجالها ومداهـا.

$$y = \frac{3}{8} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1 \quad (6)$$



الحل



مثل الدالة بيانياً وحدد مجالها و مداها.

$$y = \frac{3}{8} \left(\frac{5}{6} \right)^{x-1} + 1 \quad (6)$$





تدرب وحل المسائل

مثل الدالة بيانياً وحدد مجالها ومداهما.

$$f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4 \quad (13)$$



الحل



مثل الدالة بيانياً وحدد مجالها ومداهـا.

$$f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4 \quad (13)$$





مسائل التفكير العليا

(28) **تحدي:** اكتب دالة أسية يمر منحناها بكل من النقطتين $(0, 3)$, $(1, 6)$



تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

