المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

رياضيات ٦

التعليم الثانوي

(نظام المقررات)

(مسار العلوم الطبيعية)

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٤٤ ـ ٢٠٢٢

يوزع مجاناً ولا يباع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الفصل 1

المتجهات
Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية، الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخَر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهَي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بينَ متجهين في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا؟

رياضة: تستعمل المتجهات لنمذجة مواقف حياتية، فمثلًا يمكن استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما ستتعلَّمه في هذا الفصل .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

التهيئة للفصل 1

اختبار سريع

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّي نقطةِ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

1) $(1, 4), (-2, 4)$

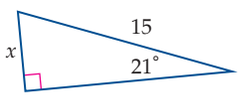
2) $(-5, 3), (-5, 8)$

3) $(2, -9), (-3, -7)$

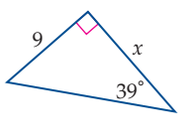
4) $(-4, -1), (-6, -8)$

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

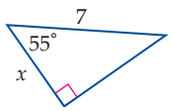
5)



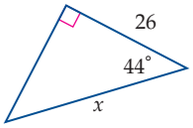
6)



7)



8)



9) بالون: أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض 40°، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب " لا يوجد حَلّ " مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$

11) $a = 15, b = 16, A = 127°$

12) $a = 15, b = 18, A = 52°$

مراجعة المفردات

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي (Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي (Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

إذا كان $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$، فإن إحداثيَّي نقطةِ منتصف $\overline{AB}$:

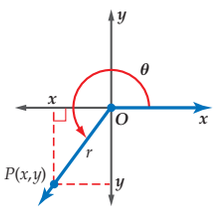
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

النسبة المثلثية (Trigonometric Ratio)

نسبة تقارن بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (Trigonometric Functions of Angels)

لتكن θ زاويةً مرسومةً في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:



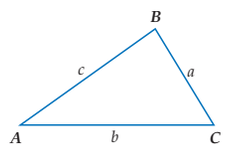
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

قانون جيوب التمام (Law of Cosines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



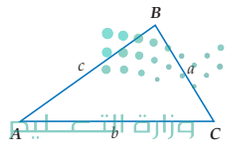
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

قانون الجيوب (Law of Sines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

لماذا ؟

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كمية متجهة**.

مثال 1 تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

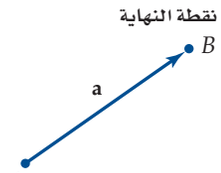
1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي.

1B) هبوط مظلّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h .

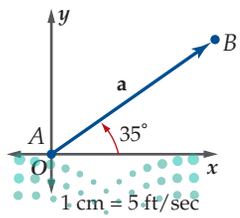
1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

المتجهات:

يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه **(قطعة مستقيمة متجهة)**، أو سهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز |**a**| ، يساوي 5 × 2.6 أو 13 ft/s .



يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو 35° .

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:

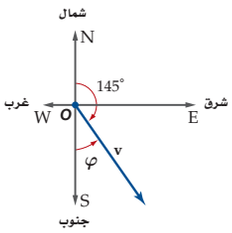
- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثّلها هندسيًّا .
- أحلل المتجه إلى مركبتَيه المتعامدتين.
- أحلُّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية) scalar quantity
متجه vector
الكمية المتجهة vector quantity
قطعة مستقيمة متجهة directed line segment
نقطة البداية initial point
نقطة النهاية terminal point
الوضع القياسي standard position
اتجاه المتجه direction
طول المتجه (المقدار) magnitude
الاتجاه الربعي quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي true bearing
المتجهات المتوازية parallel vectors
المتجهات المتساوية equal vectors
المتجهان المتعاكسان opposite vectors
المحصلة resultant
قاعدة المثلث triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع parallelogram method
المتجه الصفري zero vector
المركبات components
المركبات المتعامدة rectangular components

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه $\mathbf{v}$ في الشكل المجاور هي 35° جنوب شرق، وتُكتب S 35° E .



كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة 025° .

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي

إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه $\mathbf{v}$ في الشكل المجاور هي 145° .

إرشادات للدراسة

النيوتن

وحدةٌ لقياس القوّة، ويرمز له بالحرف N، وهو عبارة عن القوّة التي تؤثر في جسم كتلته 1 kg؛ لتكسبه تسارعًا مقداره $1\ m/s^2$.

مـثال 2 تمثيل المتجه هندسيًّا

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

a) $\mathbf{a} = 20\ ft/s$ باتجاه 030° .

b) $\mathbf{v} = 75\ N$ ، بزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الأفقي.

c) $\mathbf{z} = 30\ mi/h$ ، باتجاه S 60° W .

تحقق من فهمك

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20\ ft/s$ ، باتجاه 065° .

2B) $\mathbf{u} = 15\ mi/h$ ، باتجاه S 25° E .

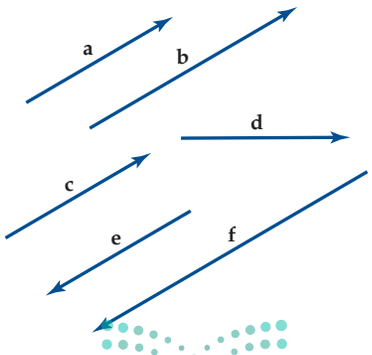
2C) $\mathbf{m} = 60\ N$ ، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي.

تنبيه!

الطول

يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة .

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



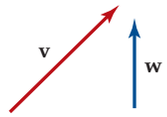
- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ ، $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه $\mathbf{a}$ على الصورة $-\mathbf{a}$ ، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

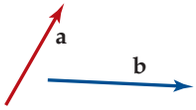
تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(3A



(3B

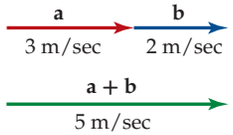


(3C لعبة أطفال: رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\,in/s$ ، باتجاه $310°$ ، فارتدت باتجاه $055°$ ، وبسرعة $4\,in/s$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)

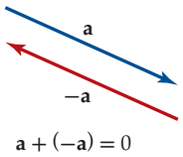
إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$ ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$ ؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.



$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.

مفهوم أساسي — ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

قراءة الرياضيات

$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

$|\mathbf{v}|$ تمثل طول المتجه $\mathbf{v}$.

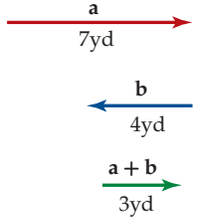
مثال 4 — العمليات على المتجهات

ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان

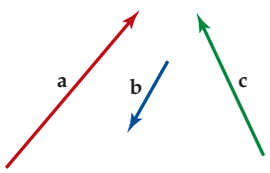
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.



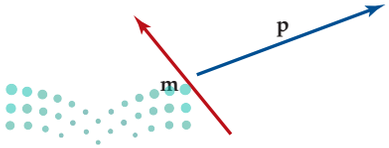
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

(4A $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$

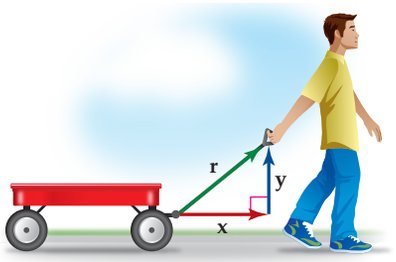


(4B $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه **r** ، **مركبتي r** . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين**، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة **r** المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية **x** تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية **y** تسحب العربة إلى أعلى.

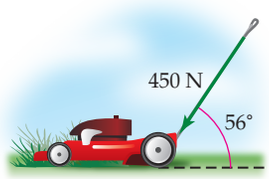


الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N . والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .

مثال 5 من واقع الحياة — تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها 56° مع سطح الأرض.

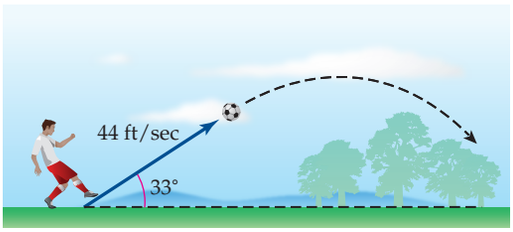


a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

تحقق من فهمك

5) كرة قدم: يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي: **(مثال 1)**

1) طول محمد 125 cm .

2) مساحة مربع $20\ m^2$.

3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب.

4) المسافة التي قطعتها كرة قدم 5 m .

5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل.

6) رمي حجر رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 50 ft/s .

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. **(مثال 2)**

7) $\mathbf{h} = 13$ in/s ، باتجاه 205°

8) $\mathbf{g} = 6$ km/h ، باتجاه N 70° W

9) $\mathbf{j} = 5$ ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 300° مع الأفقي.

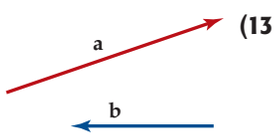
10) $\mathbf{d} = 28$ km ، وبزاويةٍ قياسها 35° مع الأفقي.

11) $\mathbf{R} = 40$ m ، باتجاه S 55° E

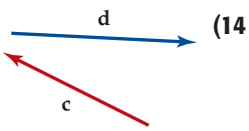
12) $\mathbf{n} = 32$ m/s ، باتجاه 030°

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة: **(مثال 3)**

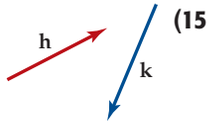
13)



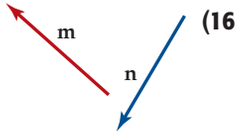
14)



15)



16)



17) ركوب الزوارق: غادر زورق أحد المواني باتجاه N 60° W ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًّا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى N 25° E ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًّا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. **(مثال 3)**

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي: **(مثال 3)**

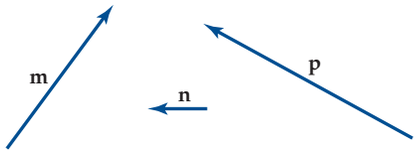
18) 18 N للأمام، ثم 20 N للخلف.

19) 100 m للشمال، ثم 350 m للجنوب .

20) 17 mi شرقًا، ثم 16 mi جنوبًا.

21) $15\ m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها 60° مع الأفقي، ثم $9.8\ m/s^2$ إلى الأسفل.

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل عبارة مما يأتي: **(مثال 4)**



22) $m - 2n$

23) $4n + \frac{4}{5}p$

24) $p + 2n - 2m$

25) $m - 3n + \frac{1}{4}p$

ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتَيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. **(مثال 5)**

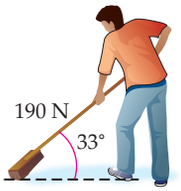
26) $2\frac{1}{8}$ in/s ، باتجاه 310° مع الأفقي.

27) 1.5 cm ، باتجاه N 49° E.

28) $\frac{3}{4}$ in/min ، باتجاه 255° .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

29) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 5)**



a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

30) **لعب أطفال:** يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N، وباتجاه 31° مع الأفقي، أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح.

31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي ضرب متجه في عدد حقيقي.

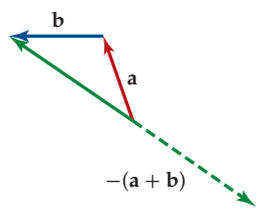
a) **بيانيًا:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لِـ k ، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية مع أربعة متجهات أخرى **b, c, d, e** ، واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة.

b) **جدوليًا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا في العدد k
a		
b		
c		
d		
e		

c) **تحليليًا:** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a** ، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه $k\,\mathbf{a}$ ؟

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري، والمتجه الموازن للمتجه $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ هو $-(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

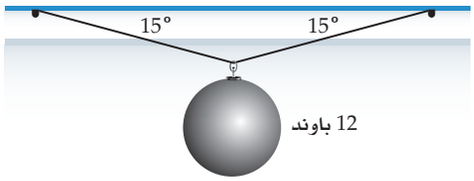


32) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:

$\mathbf{a} = 15$ mi/h ، باتجاه 125°

$\mathbf{b} = 12$ mi/h ، باتجاه 045°

33) **كرة حديدية:** عُلِّقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه.



a) إذا كانت $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$ تُمثّلان قوتَي الشدِّ في الحبلين، وكانت $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2}$ ، فارسم شكلًا يُمثّل وضع التوازن للكرة.

b) أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$

c) استعمل الشكل في الفقرة **b** وحقيقة أن محصلة $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتَيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كلٍّ منها:

34) الأفقية 0.32 in ، الرأسية 2.28 in ، $90° < \theta < 180°$.

35) الأفقية 3.1 ft ، الرأسية 4.2 ft ، $0° < \theta < 90°$.

36) الأفقية 2.6 cm ، الرأسية 9.7 cm ، $270° < \theta < 360°$.

ارسم ثلاثة متجهات a, b, c ؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًّا:

37) الخاصية الإبدالية $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

38) الخاصية التجميعية $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

39) الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ ، حيث $k = 2, 0.5, -2$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **مسألة مفتوحة:** لديك متجه مقداره 5 وحدات بالاتجاه الموجب لمحور x، حلّل المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيٌّ منهما أفقية أو رأسية.

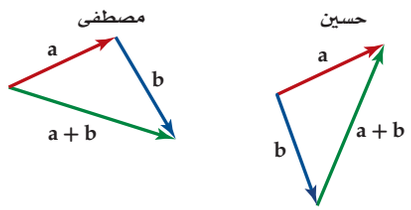
41) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا، وبرِّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع".

42) **تبرير:** بفرض أن: $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

a) عبّر عن هذه العبارة بالكلمات .

b) هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ برِّر إجابتك .

43) **اكتشف الخطأ:** حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



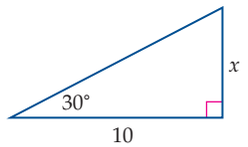
44) **تبرير:** هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساويًا لأحدهما؟ برِّر إجابتك.

45) **اكتب:** قارن بين قاعدتَي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين.

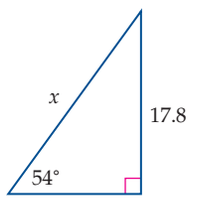
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك. **(مهارة سابقة)**

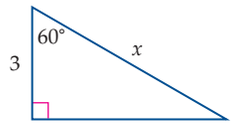
46)



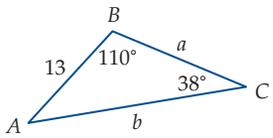
47)



48)



49) حُلّ المثلث الآتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك. **(مهارة سابقة)**

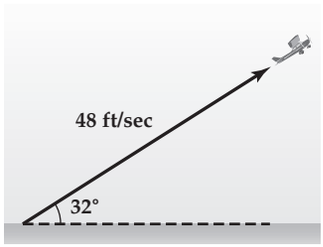


50) حُلّ المعادلة: $\sin 2x - \cos x = 0$ لجميع قيم x. **(مهارة سابقة)**

تدريب على اختبار

51) **نزهة:** قام حسان بنزهة خارج مخيمه الكشفي، فقطع مسافة 3.75 km في اتجاه الشرق من المخيم حتى وصل أحد المساجد، ثم سار شمالًا قاصدًا حديقةً عامةً، فقطع مسافة 5.6 km، حدّد موقع الحديقة بالنسبة للمخيم؟

52) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



A 25.4 ft/s, 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s, 25.4 ft/s

C 56.6 ft/s, 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s, 56.6 ft/s

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

1-2

المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم . (الدرس 1–1)

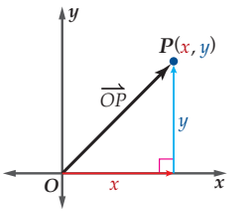
والآن:
- أُجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

المفردات:
الصورة الإحداثية
component form
متجه الوحدة
unit vector
متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors
توافق خطي
linear combination

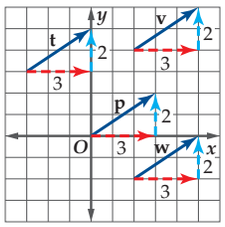
لماذا ؟
تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-1 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 1.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y \rangle$ ، حيث إن x , y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y \rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



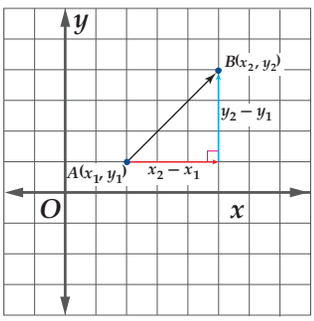
الشكل 1.2.1



الشكل 1.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات **p**, **t**, **v**, **w** في الشكل 1.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2 \rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسومٍ في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيي نقطتَي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي — الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

مثال 1 — التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ **1B)** $A(0, 8), B(-9, -3)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

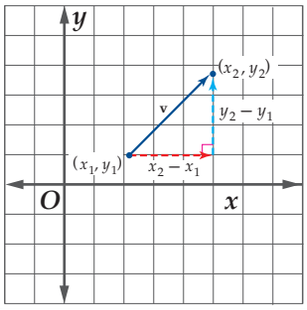
قراءة الرياضيات

المعيار

يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

مفهوم أساسي

طول المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 2

إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

(2A $A(-2, -7), B(6, 1)$

(2B $A(0, 8), B(-9, -3)$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين $\quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $\quad k\,\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

مثال 3

العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

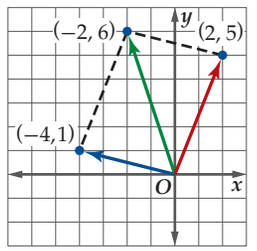
(a $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

(b $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًّا

يمكن التحقق بيانيًّا من إجابة مثال 3 الفرع a ، استعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع .كما في الشكل أدناه.



تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

(3A $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ **(3B** $-3\mathbf{c}$ **(3C** $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز **u**، ولإيجاد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه **v** على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u}$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ **v** في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه **v** في عددٍ حقيقيٍّ.

تاريخ الرياضيات

ويليام روان هاميلتون
(1805–1865)
طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظريةً في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات يعتمد على هذه النظرية.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطًى

أوجد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

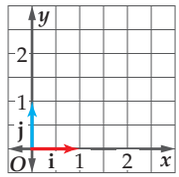
(4A $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

(4B $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

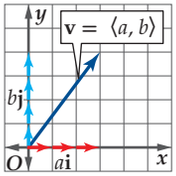
تنبيه!

متجه الوحدة i
لا تخلط بين متجه الوحدة **i** ، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍّ داكن غير مائل **i** ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍّ غير داكن مائل i .

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان **i** , **j** **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.3



الشكل 1.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4 ؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ — الصورة الإحداثية

$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$ — أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين

$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$ — اضرب متجه في عدد حقيقي

$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ — $\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$, $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

مـثال 5 كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

(5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$ **(5B)** $D(-3, -8), E(7, 1)$

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة

تستنتج من الصورة

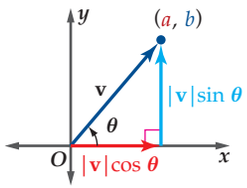
$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$

أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة

$\mathbf{u} = \langle 1 \cos\theta, 1 \sin\theta \rangle$

$= \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 1.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل 1.2.5

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$ عوّض

$= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j}$ توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

مـثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

(6A) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$ **(6B)** $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

من الشكل (1.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

تنبيه!

لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:
$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$
فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبةً فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبةً، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

تحقق من فهمك

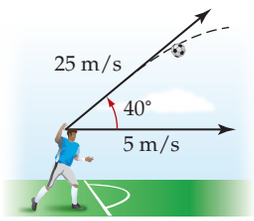
أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

7B) $\langle -3, -8 \rangle$

مثال 8 من واقع الحياة تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s، بزاوية $40°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7\,m/s$

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

3) $A(10, -2), B(3, -5)$

4) $A(-2, 6), B(1, 10)$

5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$

6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

إذا كان: $\mathbf{f} = \langle 8, 0\rangle, \mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle, \mathbf{h} = \langle -6, 2\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$

8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$

9) $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$

10) $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$

11) $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$

12) $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 4)

13) $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$

14) $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$

15) $\mathbf{v} = \langle -8, -5\rangle$

16) $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$

17) $\mathbf{v} = \langle -1, -5\rangle$

18) $\mathbf{v} = \langle 1, 7\rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي على صورة توافقٍ خطِّي لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5)

19) $D(4, -1), E(5, -7)$

20) $D(9, -6), E(-7, 2)$

21) $D(3, 11), E(-2, -8)$

22) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$

23) $D(-4, -6), E(9, 5)$

24) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 6)

25) $|\mathbf{v}| = 12,\ \theta = 60°$

26) $|\mathbf{v}| = 16,\ \theta = 330°$

27) $|\mathbf{v}| = 4,\ \theta = 135°$

28) $|\mathbf{v}| = 15,\ \theta = 125°$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (مثال 7)

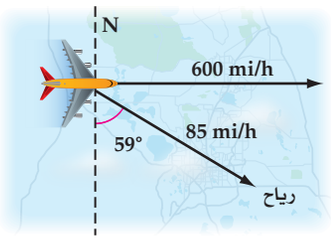
29) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

30) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

31) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

32) $\langle -5, 9 \rangle$

33) ملاحة جوية: تطير طائرة جهة الشرق بسرعةٍ مقدارها 600 mi/h، وتهب الرياح بسرعةٍ مقدارها 85 mi/h باتجاه S 59° E. (مثال 8)



a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة.

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة.

34) تجديف: يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h، ويؤثِّر فيه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h.

a) أوجد السرعة التي يتحرك بها القارب إلى أقرب جزء من عشرة.

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة.

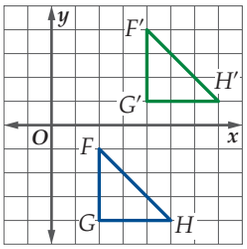
35) ملاحة جوية: تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N 82° E، وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N 79° E. ارسم شكلًا يُمثِّل هذا الموقف.

بيّن ما إذا كان $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب.

36) A(3, 5), B(6, 9), C(−4, −4), D(−2, 0)

37) A(1, −3), B(0, −10), C(11, 8), D(10, 1)

38) انسحاب: يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x، وإضافة b إلى الإحداثي y.



a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور.

b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$، فمثّل بيانيًّا كلًّا من $\triangle F'G'H'$، وصورته $\triangle F''G''H''$.

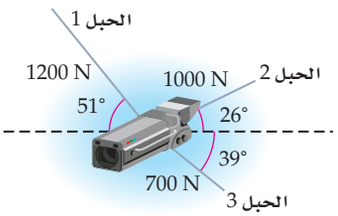
c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$.

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علِمتَ طوله ونقطة بدايته:

39) $\sqrt{37}$, $(-1, 4)$

40) 10, $(-3, -7)$

41) آلة تصوير: عُلِّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثِّل متجهًا، فأجب عما يأتي:



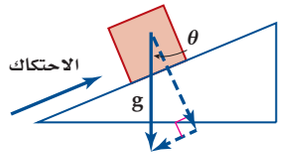
a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه لأقرب عدد صحيح.

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير.

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى.

42) قوة: تؤثِّر قوة الجاذبية $\mathbf{g}$ وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444



مسائل مهارات التفكير العليا

43) **تبرير:** إذا كان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متجهين متوازيين، فعبِّر عن كلٍّ من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيِّنًا العلاقة بين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

44) **تبرير:** إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثِّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيَّنًا).

45) **تحد:** إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y \rangle$ هي $(4y)^\circ$ ، فأوجد قيمة x بدلالة y.

برهان: إذا كان: $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1 \rangle, \mathbf{b} = \langle x_2, y_2 \rangle, \mathbf{c} = \langle x_3, y_3 \rangle$ ، فأثبت الخصائص الآتية:

46) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

47) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

48) $k\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ ، حيث k عدد حقيقي.

49) $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$ ، حيث k عدد حقيقي.

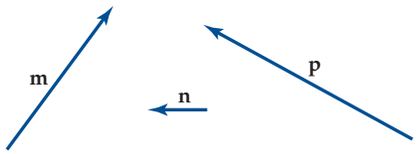
مراجعة تراكمية

50) **دُمى أطفال:** يقوم محمد بسحب دميته بقوة مقدارها 1.5N بواسطة نابض مثبَّت بها. **(الدرس 1-1)**

a) إذا كان النابض يصنع زاوية 52° مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الرأسية والأفقية للقوة.

b) إذا رفع محمد النابض، وأصبح يصنع زاوية قياسها 78° مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثِّل كلًّا مما يأتي: **(الدرس 1-1)**



51) $\mathbf{n} - \frac{3}{4}\mathbf{m}$

52) $\frac{1}{2}\mathbf{p} + 3\mathbf{n}$

53) $\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$

54) $\mathbf{p} + 2\mathbf{n} - \mathbf{m}$

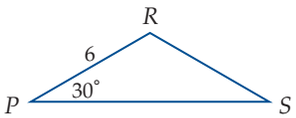
تدريب على اختبار

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$ ؟

A $\sqrt{2}$ **C** $\sqrt{82}$

B $\sqrt{26}$ **D** $\sqrt{106}$

56) ما مساحة المثلث المجاور، إذا علمت أن $PR = RS$ ؟



A $9\sqrt{2}$ **B** $9\sqrt{3}$ **C** $18\sqrt{2}$ **D** $18\sqrt{3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-3

الضرب الداخلي
Dot Product

فيما سبق:
درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًا وجبريًا. (الدرس 2-1)

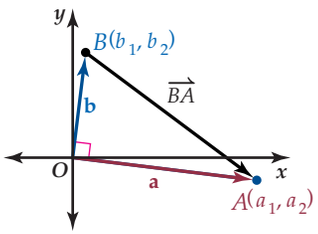
والآن:
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات:
الضرب الداخلي
dot product
المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors
الشغل
work

لماذا؟

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-1 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.



وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

تعريف طول متجه	$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
ربّع الطرفين	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$
فُك الأقواس	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$
جمّع الحدود المربعة	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$
$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $\|\mathbf{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a, b، أو يُقرأ اختصارًا $\mathbf{a}$ dot $\mathbf{b}$.

قراءة الرياضيات
الضرب القياسي
يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

مفهوم أساسي — **الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي**

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان**.

مفهوم أساسي — **المتجهان المتعامدان**

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$.

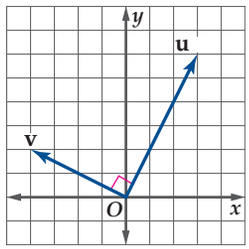
على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن $\langle 0, 0 \rangle \bullet \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مـثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ **b)** $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4 \rangle$

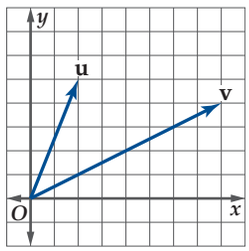


الشكل 1.3.1

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$ **1B)** $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$



الشكل 1.3.2

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

نظريَّة خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$= |\mathbf{u}|^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 37–35

مـثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

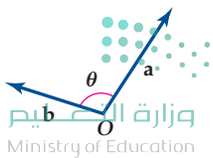
استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$.

تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$ **2B)** $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث إن: $0 \le \theta \le \pi$ ، أو $0° \le \theta \le 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إرشادات للدراسة

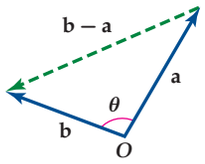
المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية

يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مفهوم أساسي الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



البرهان

إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2$ — قانون جيوب التمام

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{a})$ — $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ — خاصية التوزيع للضرب الداخلي

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2$ — $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

$-2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — بطرح $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ من الطرفين

$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$ — بقسمة الطرفين على $-2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$

مثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$

b) $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

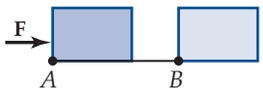
تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

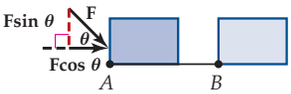
3A) $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت $\mathbf{F}$ قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت $\mathbf{F}$ موازيةً لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن $\mathbf{F}$ يساوي مقدار القوة $\mathbf{F}$ مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة $\mathbf{F}$ ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:



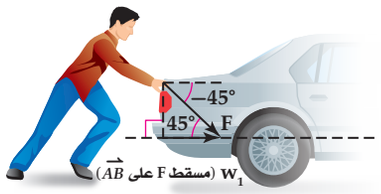
$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة $\mathbf{F}$ ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

مثال 4 من واقع الحياة

حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



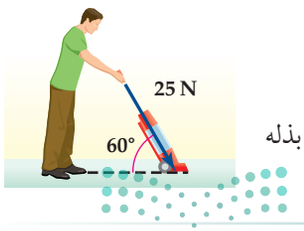
إرشادات للدراسة

وحدات الشغل

وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

تحقق من فهمك

4) تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5 \rangle$

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2 \rangle$

6) زيت الزيتون: يمثِّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297 \rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجرٍ، ويمثِّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15 \rangle$ سعر العلبة من كلا النوعين على الترتيب (مثال 1)

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$ **8)** $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18 \rangle$ **10)** $\mathbf{t} = \langle 23, -16 \rangle$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle$

12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4 \rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10 \rangle$

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

15) مخيم كشفي: غادر يوسف ويحيى مخيَّمَهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6 \rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3)

16) فيزياء: يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوةٍ مقدارها 534 N؛ بزاوية °25، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيحٍ. (مثال 4)

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

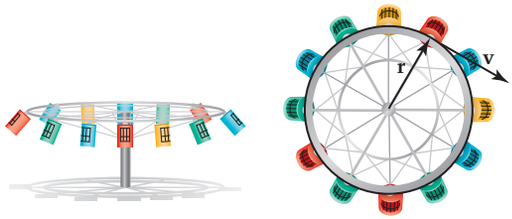
17) $\langle -2, -8 \rangle$

18) $\langle 3, 5 \rangle$

19) $\langle 7, -4 \rangle$

20) $\langle -1, 6 \rangle$

21) عجلة دوَّارة: يعامد المتجه $\mathbf{r}$ في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية $\mathbf{v}$ عند أيِّ نقطةٍ من نقاط الدائرة.



منظر أمامي — منظر علوي

a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/s، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{r}$، إذا كان يصنع زاويةً قياسها °35 مع الأفقي، ثم اكتب الصورة الإحداثية لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه $\mathbf{r}$، ومتجه السرعة باستعمال الصورتين الإحداثيتين اللتين أوجدتهما في الفرع a؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

22) $\mathbf{v} = \langle 3, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$

23) $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$

24) مدرسة: يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها 100 N، إذا بذل الطالب شغلًا مقداره 1747 J، لسحب حقيبته مسافة 31 m، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي، من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غير ذلك.

25) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$

26) $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

27) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

28) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

29) النقاط: $(8, 1), (4, 7), (2, 3)$ تُمثِّل رؤوس مثلثٍ، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات.

إذا علمت كلًّا من $|\mathbf{v}|$,$\mathbf{u}$ والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{v}$ ، قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

30) $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, \theta = 45°$

31) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, \theta = 121°$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) تبرير: اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية:
إذا كانت $|\mathbf{d}|, |\mathbf{e}|, |\mathbf{f}|$ تُمثِّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين $\mathbf{d}, \mathbf{e}$ وبين $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ حادتين، فإن الزاوية بين $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ يجب أن تكون قائمة. فسِّر تبريرك.

33) اكتشف الخطأ: يدرس كلٌّ من فهدٍ وفيصلٍ خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن:
$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضِّح إجابتك.

34) اكتب: وضّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين.

برهان: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية:

35) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$

36) $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$

37) $k(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet k\mathbf{v}$

38) برهان: إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي $90°$، فأثبت أن $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين.

مراجعة تراكمية

إذا علمت: أن $\mathbf{a} = \langle 10, 1 \rangle, \mathbf{b} = \langle -5, 2.8 \rangle, \mathbf{c} = \langle \frac{3}{4}, -9 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-1)

39) $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$

40) $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$

41) $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (الدرس 2-1)

42) $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

43) $\langle -9, 5 \rangle$

44) $\langle -7, 7 \rangle$

تدريب على اختبار

45) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1 \rangle, \langle -9, 0 \rangle$ ؟

A $0°$ **C** $90°$

B $45°$ **D** $135°$

46) إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle, \mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل r، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟

A $\langle 14, 8 \rangle$ **C** $\langle -14, 8 \rangle$

B $\langle 14, 6 \rangle$ **D** $\langle -14, -8 \rangle$

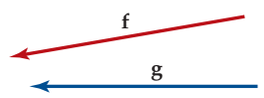
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-1 إلى 3-1

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، وقرّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من الستمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي ، مستعملًا المسطرة والمنقلة . (الدرس 1-1)

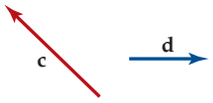
1)



2)

3) التزلُّج: يسحب شخص مزلجةً على الجليد بقوةٍ مقدارها 50 N بزاوية 35° مع الأفقي، أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة ، وقرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-1)

4) ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$ (الدرس 1-1)



اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ ممَّا يأتي بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. (الدرس 1-2)

5) $B(3,-1), C(4,-7)$

6) $B(10,-6), C(-8,2)$

7) $B(1,12), C(-2,-9)$

8) $B(4,-10), C(14, 10)$

9) اختيار من متعدد: أيٌّ مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، حيث $A(3, -5)$ نقطة بدايته، و $B(2, -1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 1-2)

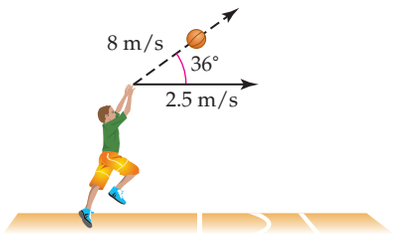
A $\langle 4, -1 \rangle$

B $\langle 7, -4 \rangle$

C $\langle -4, 7 \rangle$

D $\langle -6, 4 \rangle$

10) كرة سلة: ركض راشد في اتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة 2.5 m/s ، ومن منتصف الملعب صوَّب كرةً بسرعة 8 m/s بزاويةٍ قياسها 36° مع الأفقي. (الدرس 1-2)



a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللّذين يُمثِّلان سرعة راشد ، وسرعة الكرة ، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على الترتيب في كلٍّ مما يأتي ، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 2-1)

11) $A(-4, 2), B(3,6)$

12) $Q(1, -5), R(-7, 8)$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، وقرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 3-1)

13) $\mathbf{u}=\langle 9, -4\rangle, \mathbf{v}=\langle -1, -2\rangle$

14) $\mathbf{u}=\langle 8, 4\rangle, \mathbf{v}=\langle -2, 4\rangle$

15) $\mathbf{u}=\langle 2, -2\rangle, \mathbf{v}=\langle 3, 8\rangle$

16) اختيار من متعدد: إذا كان : $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{w} = \langle 8, -5\rangle$ ، فما ناتج $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \bullet \mathbf{v})$ ؟ (الدرس 3-1)

A -2

B -18

C 15

D 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 3-1)

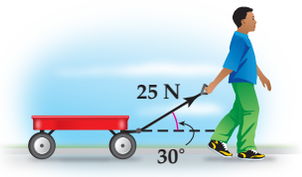
17) $\langle 2, -5\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle$

18) $\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 7, 4\rangle$

19) $\langle 1, -6\rangle \cdot \langle 5, 8\rangle$

20) $\langle 3, -6\rangle \cdot \langle 10, 5\rangle$

21) عربة: يسحب أحمد عربةً بقوةٍ مقدارها 25 N ، وبزاوية 30° مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 3-1)



a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي 40° ، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أم أقل؟ فسّر إجابتك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
Vectors in Three-Dimensional Space

فيما سبق:
درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا. الدرس (1–1)

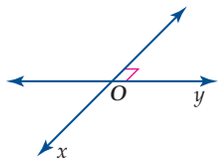
والآن:
- أعيّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبّرُ عن المتجهات جبريًا، وأجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المفردات:
نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system
المحور z z-axis
الثُمن octant
الثلاثي المرتب ordered triple

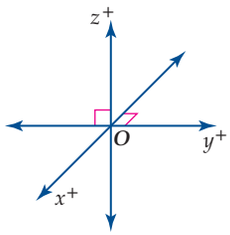
لماذا ؟

لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

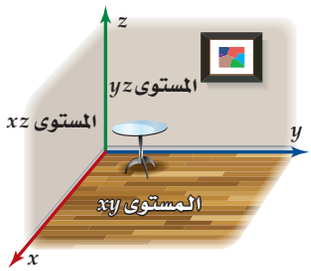
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 1.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y كما في الشكل 1.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz ، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُّمن**، ويمكن تمثيل الثُّمن الأول بجزء الحجرة في الشكل 1.4.3.



الشكل 1.4.1



الشكل 1.4.2



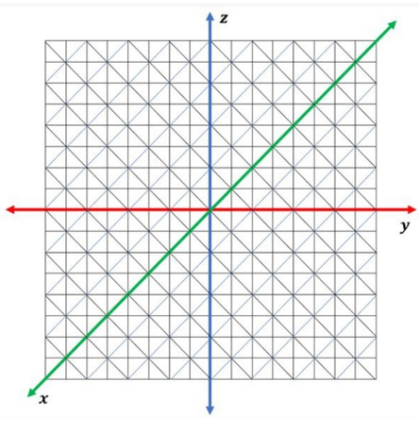
الشكل 1.4.3

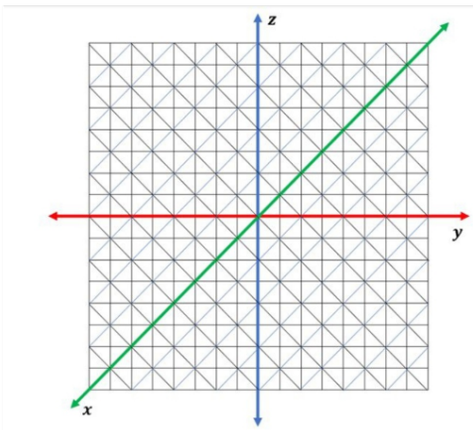
تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى xy، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z.

مثال 1 تعيّين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

a) $(4, 6, 2)$ **b)** $(-2, 4, -5)$





تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1A) $(-3, -4, 2)$ **1B)** $(3, 2, -3)$ **1C)** $(5, -4, -1)$

إرشادات للدراسة

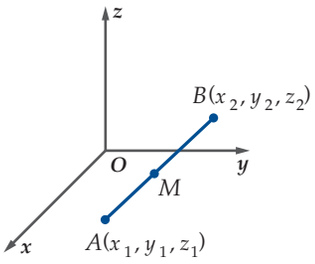
تدريج المحاور
تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي

صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء



تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

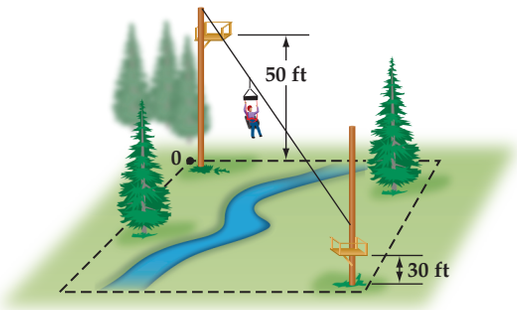
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

مثال 2 من واقع الحياة

المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء



رحلة : تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: (10, 12, 50) , (70, 92 , 30)، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

تحقق من فهمك

2) طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألَّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: (450, −250, 28000) , (300, 150, 30000)، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

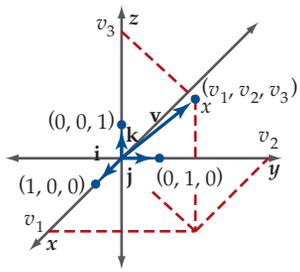
A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ، كما في الشكل 1.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

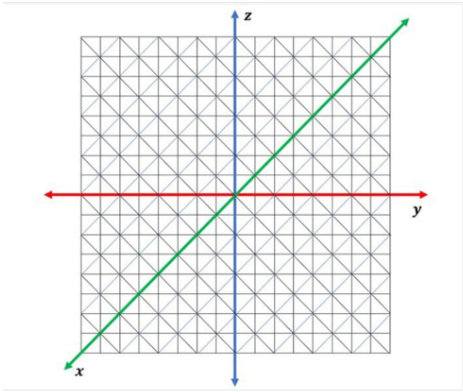


الشكل 1.4.4

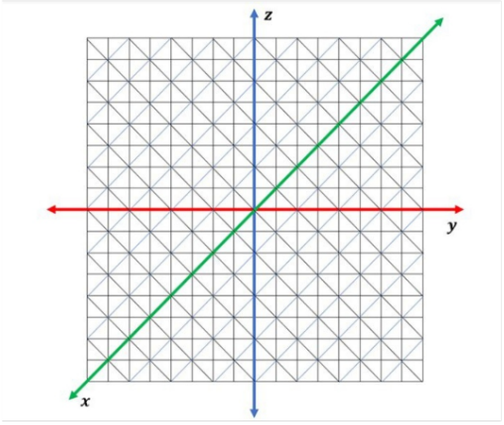
مـثال 3 تعيين متجه في الفضاء

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$



تحقق من فهمك

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح ، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

مـثال 4 العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

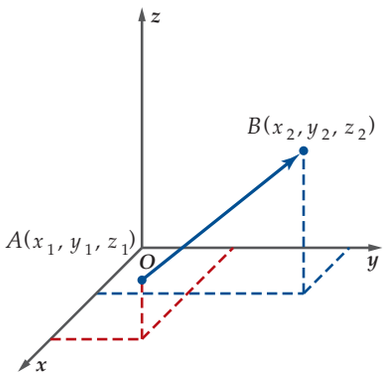
a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

4A) $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ **4B)** $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$



وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

مـثال 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5A) $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$ **5B)** $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1)

1) $(1, -2, -4)$

2) $(3, 2, 1)$

3) $(-5, -4, -2)$

4) $(-2, -5, 3)$

5) $(2, -2, 3)$

6) $(-16, 12, -13)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$

10) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

11) **طيَّارون:** في لحظةٍ ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(19300, -121, 675)$، وإحداثيات موقع طائرةٍ أخرى $(-289, 715, 16100)$ ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم .

b) عيّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3)

12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$

13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$

14) $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4 \rangle$

15) $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3 \rangle$

16) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

17) $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

18) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

19) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :
$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$.
(مثال 4)

20) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

21) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

22) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$

23) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$

24) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$

25) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :
$\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
(مثال 4)

26) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$

27) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$

28) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

29) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$

30) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$

31) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

34) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$

35) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$

36) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$

37) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$

38) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$

39) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$ ، فأوجد إحداثيات النقطة P في كلٍّ ممَّا يأتي:

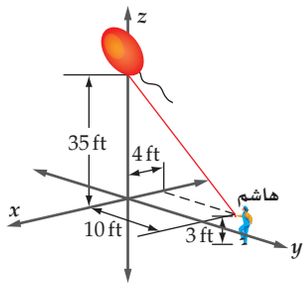
40 $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$

41 $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$

42 $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$

43 $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$

44 **تطوُّع:** تَطَوَّع هاشم لحمل بالونٍ كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدمٍ.



حدّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

45 $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

46 $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

47 $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

48 **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء؛ لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r .
"**إرشاد:** الكرة هي مجموعة نقاط في الفضاء تبعد بعدًا ثابتًا (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز)".

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي:

49 مركزها $(3, -2, -4)$ ، طول نصف قطرها 4

50 مركزها $(1-, 0, 6)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

51 مركزها $(4, -3, 5)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

52 مركزها $(1-, 7, 0)$ ، طول نصف قطرها 12

مسائل مهارات التفكير العليا

53 **تحدٍّ:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M .

54 **اكتب:** اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر منطقية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية.

مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-1)

55 $A(6, -4), B(-7, -7)$

56 $A(-4, -8), B(1, 6)$

57 $A(-5, -12), B(1, 6)$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطِّيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-1)

58 $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

59 $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$

60 $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$

تدريب على اختبار

61 ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, -3, 5)$ ؟

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-5

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

Dot and Cross Products of Vectors in Space

فيما سبق:

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى .

الدرس (3-1)

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء .
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:

الضرب الاتجاهي
cross product

متوازي السطوح
parallelepiped

الضرب القياسي الثلاثي
triple scalar product

لماذا؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطَّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعَرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال 1 — إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$ **b)** $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$ **1B)** $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

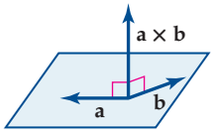
مثال 2 — الزاوية بين متجهين في الفضاء

أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

تحقق من فهمك

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب مئةٍ عشريةٍ.

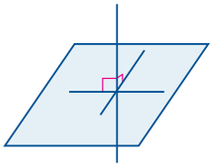
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ $\mathbf{a}$ cross $\mathbf{b}$ ، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًا على مستوى، إذا كان عموديًا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.



مفهوم أساسي الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

تنبيه!

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

مثال 3 إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle, \mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

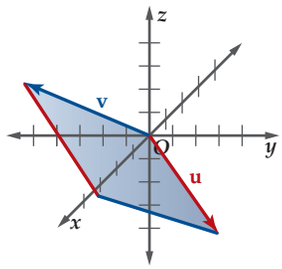
(3A) $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

(3B) $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل 1.5.1 .



الشكل 1.5.1

مـثال 4 مساحة متوازي أضلاعٍ في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

تحقق من فهمك

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 1.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.

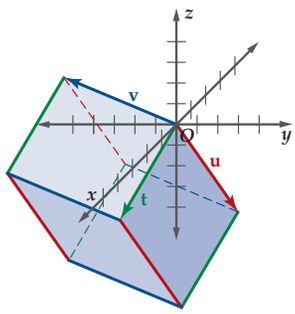
مفهوم أساسي الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

مـثال 5 حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.



الشكل 1.5.2

تحقق من فهمك

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7 \rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4 \rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13 \rangle$

4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8 \rangle$

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

7) كيمياء: تقع إحدى ذرتَي الهيدروجين في جُزيء الماء عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5 \rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5 \rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرَّبة إلى أقرب جزءٍ من عشرة. (مثال 2)

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5 \rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2 \rangle$

10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12 \rangle$

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (مثال 3)

12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3 \rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1 \rangle$

14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8 \rangle$

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4)

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3 \rangle$

17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2 \rangle$

18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

19) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 5)

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6 \rangle$

21) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4 \rangle$

22) $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

23) $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

24) $\langle 3, -8, 4 \rangle$

25) $\langle -1, -2, 5 \rangle$

26) $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3 \right\rangle$

27) $\langle 7, 0, 8 \rangle$

إذا عُلم كلٌّ من $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}$ ، فأوجد حالةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

28) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$

29) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4 \right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$

30) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$

حدّد ما إذا كانت النقاط المعطاة واقعةً على استقامةٍ واحدةٍ أم لا؟

31) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$

32) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$

حدّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

33) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9 \rangle$

34) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7 \rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3 \rangle$

35) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{u}$ الذي يقع في المستوى yz، وطوله 8، ويصنع زاويةً قياسها $60°$ فوق الاتجاه الموجب للمحور y.

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المُعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع أم لا، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحته، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا:

36) $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$

37) $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

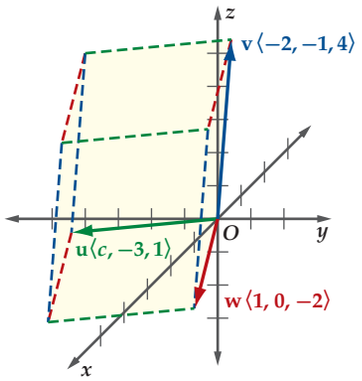
38) عرض جوي: أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فأقلعت الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$، في حين أقلعت الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازى خطَّا سير الطائرتين؟ وضِّح إجابتك.

إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

39) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

40) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

41) إذا كانت $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداتٍ مكعبةٍ، فما قيمة c؟



مسائل مهارات التفكير العليا

42) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، برِّر إجابتك .

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين».

43) تحدٍّ: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$ ، فأوجد قيمة c التي تجعل: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

44) تبرير: فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى.

45) اكتب: بيِّن طرق الكشف عن توازي متجهَين أو تعامدهما.

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعةٍ مستقيمةٍ مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 4-1)

46) $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$

47) $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$

48) $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 3-1)

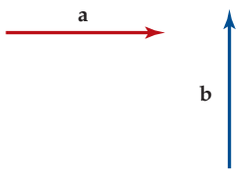
49) $\langle -8, -7 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle$

50) $\langle -4, -6 \rangle \cdot \langle 7, 5 \rangle$

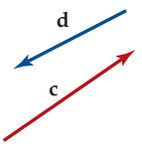
51) $\langle 6, -3 \rangle \cdot \langle -3, 5 \rangle$

أوجد محصلة كل زوجٍ من المتجهات الآتية، مُستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي. (الدرس 1-1)

52)



53)



تدريب على اختبار

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟

A $\langle 1, 0, 0 \rangle , \langle 1, 2, 3 \rangle$

B $\langle 1, -2, 3 \rangle , \langle 2, -4, 6 \rangle$

C $\langle 3, 4, 6 \rangle , \langle 6, 4, 3 \rangle$

D $\langle 3, -5, 4 \rangle , \langle 6, 2, -2 \rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$ ؟

A $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

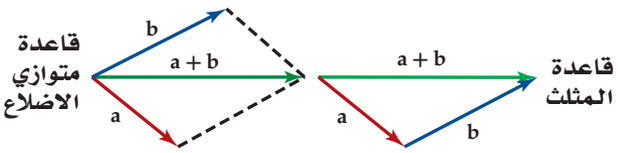
دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 1-1)

- يُعبَّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصِّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 2-1)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y \rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ ، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$ ، $k\,\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$
- يمكن استعمال متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 3-1)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 4-1)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 5-1)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ، ويساوي $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات

كمية قياسية عددية ص 10
المتجه ص 10
كمية متجهة ص 10
قطعة مستقيمة متجهة ص 10
نقطة البداية ص 10
نقطة النهاية ص 10
طول المتجه ص 10
الوضع القياسي ص 10
اتجاه المتجه ص 10
الاتجاه الربعي ص 11
الاتجاه الحقيقي ص 11
المتجهات المتوازية ص 11
المتجهات المتساوية ص 11
المتجهان المتعاكسان ص 11
المحصلة ص 12
قاعدة المثلث ص 12
قاعدة متوازي الأضلاع ص 12
المتجه الصفري ص 13
المركبات ص 14
المركبات المتعامدة ص 14
الصورة الإحداثية ص 18
متجه الوحدة ص 20
متجها الوحدة القياسيَّان ص 20
توافق خطِّيٌّ ص 21
الضرب الداخلي ص 26
المتجهان المتعامدان ص 26
الشغل ص 29
نظام الإحداثيات الثلاثي
الأبعاد ص 33
المحور z ص 33
الثُّمن ص 33
الثلاثي المرتب ص 33
الضرب الاتجاهي ص 40
متوازي السطوح ص 41
الضرب القياسي الثلاثي ص 41

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه .

2) إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 2 \rangle$ ، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$.

3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

4) طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6 \rangle$.

5) يتساوَى متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه.

6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$.

7) لتجد متجهًا يعامد أي متجهين على الأقل في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين.

8) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه.

9) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدةٍ باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مراجعة الدروس

1-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 17 - 10)

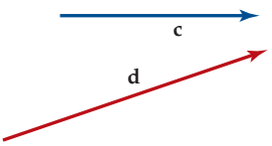
حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق.

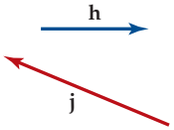
11) شجرة طولها 20 ft.

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

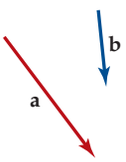
12)



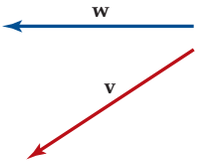
13)



14)



15)



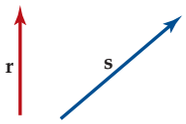
أوجد طول المحصِّلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

16) 70 m جهة الغرب، ثم 150 m جهة الشرق.

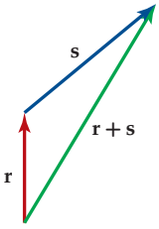
17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف.

مثال 1

أوجد محصلة المتجهين r, s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

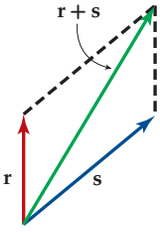


قاعدة المثلث



اسحب r ، بحيث تلتقي نقطة نهاية r مع نقطة بداية s ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية r ، وينتهي عند نقطة نهاية s.

قاعدة متوازي الأضلاع



اسحب s ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية r ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه r, s ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.

فيكون طول المحصلة 3.4 cm ، وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

1-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 25 - 18)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

18 $A(-1, 3), B(5, 4)$

19 $A(7, -2), B(-9, 6)$

20 $A(-8, -4), B(6, 1)$

21 $A(2, -10), B(3, -5)$

إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -4, 2 \rangle, \mathbf{q} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{p} = \langle 4, 0 \rangle$، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

22 $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$

23 $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$

24 $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$

25 $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

26 $\mathbf{v} = \langle -7, 2 \rangle$

27 $\mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

28 $\mathbf{v} = \langle -5, -8 \rangle$

29 $\mathbf{v} = \langle 9, 3 \rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

الصورة الإحداثية $\quad \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

عوّض $\quad = \langle 4 - 3, -1 - (-2) \rangle$

اطرح $\quad = \langle 1, 1 \rangle$

أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

قانون المسافة $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

عوّض $\quad = \sqrt{1^2 + 1^2}$

بسّط $\quad = \sqrt{2} \approx 1.4$

1-3 الضرب الداخلي (الصفحات 31 - 26)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم تحقَّق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا:

30 $\mathbf{u} = \langle -3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1 \rangle$

31 $\mathbf{u} = \langle 4, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7 \rangle$

32 $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2 \rangle$

33 $\mathbf{u} = \langle -2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

34 $\mathbf{u} = \langle 5, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$

35 $\mathbf{u} = \langle -1, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2 \rangle$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{x} = \langle 2, -5 \rangle, \mathbf{y} = \langle -4, 7 \rangle$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

الضرب الداخلي $\quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

عوّض $\quad = 2(-4) + (-5)(7)$

بسّط $\quad = -8 + (-35) = -43$

بما أن $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$، فإن المتجهين $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ غير متعامدين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

1-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 38 - 33)

عيِّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

36 $(1, 2, -4)$

37 $(3, 5, 3)$

38 $(5, -3, -2)$

39 $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفَيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها.

40 $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

41 $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

42 $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

43 $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء:

44 $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4 \rangle$

45 $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

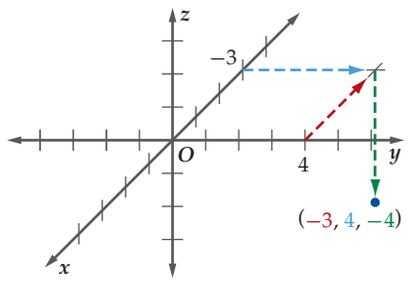
46 $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

47 $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3 \rangle$

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد .

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطةً تبعد 4 وحداتٍ أسفل هذه النقطة، وباتجاه موازٍ للمحور z .



1-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 43 - 39)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا.

48 $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13 \rangle$

49 $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3 \rangle$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$:

50 $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3 \rangle$

51 $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1 \rangle$

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2 \rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle$$

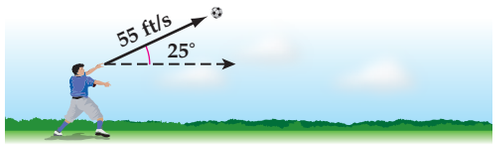
$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

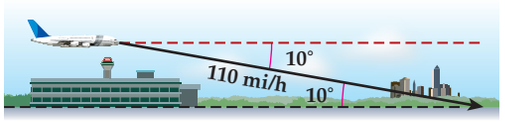
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تطبيقات ومسائل

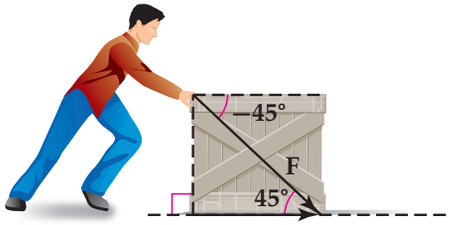
52) كرة قدم: تلقّى لاعب كرة قدم الكرة برأسه، فارتدَّت بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 55 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 25° فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. **(الدرس 1-1)**



53) طيران: تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h ، وبزاوية قياسها 10° تحت الأفقي، أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثّل سرعة الطائرة. **(الدرس 1-2)**



54) صناديق: يدفع عامل صندوقًا بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 90 N بزاوية 45° في الشكل أدناه. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الصندوق 8 m (مع إهمال قوة الاحتكاك). **(الدرس 1-3)**



55) أقمار اصطناعية: إذا مَثَّلت النقطتان: (38426−, 32461, 28625)، (29218, 43015, −31613) موقِعَي قمرين اصطناعيين، ومَثَّلَتِ النقطة (0, 0, 0) مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل، وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عمَّا يأتي: **(الدرس 1-4)**

a) أوجد المسافة بين القمرين.

b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟

c) اشرح إمكانية وضع قمر ثالث في الإحداثيات التي أوجدتها في الفرع **b** .

56) استعمل الضرب القياسي الثلاثي لحساب حجم غرفةٍ أبعادها 3 m, 4 m, 5 m

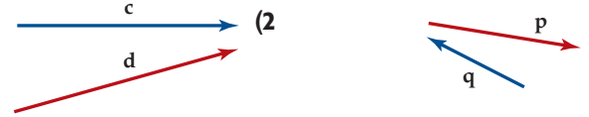
"إرشاد: اعتبر متوازي المستطيلات حالةً خاصةً من متوازي السطوح". **(الدرس 1-5)**

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

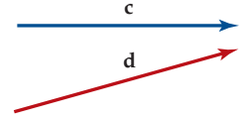
اختبار الفصل

أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

1)



2)

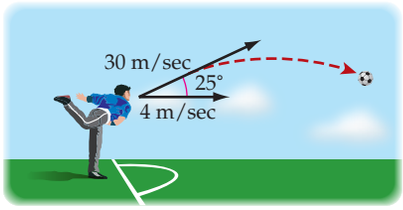


أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

3) $A(1, -3), B(-5, 1)$

4) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

5) كرة قدم: ركض لاعب بسرعة 4 m/s؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s، وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي، فما محصّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟



أوجد متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

6) $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$

7) $\mathbf{u} = \langle 6, -3 \rangle$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أم لا:

8) $\mathbf{u} = \langle 2, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8 \rangle$

10) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

11) اختيار من متعدد: إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يُمثّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ ؟

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5} \right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5} \right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5} \right\rangle$

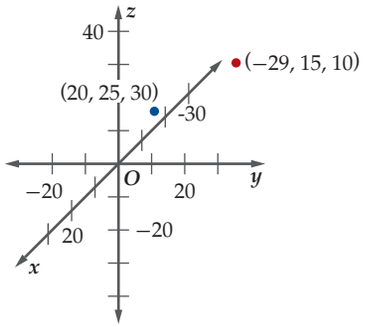
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3 \rangle, \mathbf{b} = \langle -5, -7, 1 \rangle, \mathbf{c} = \langle 8, 5, -9 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

12) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$

13) $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$

14) بالونات الهواء الساخن: أُطلق 12 بالونًا تحوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: $(-29, 15, 10)$, $(20, 25, 30)$ كما في الشكل أدناه ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة.

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته.

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12 \rangle$

16) $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

17) $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11 \rangle$

18) $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444