المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات ٢-٢

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الثانية

الفصل الدراسي الثاني

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٤٤ - ٢٠٢٢

لتوزع مجانًا ولا يباع
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الفصل 4

العلاقات والدوال العكسية والجذرية
Inverses and Radical Functions and Relations

فيما سبق

درست تبسيط كثيرات الحدود.

والآن

- أجد معكوس دالة، وتركيب دالتين.
- أمثّل بيانيًّا دوال ومتباينات الجذر التربيعي وأحلّلها.
- أبسّط معادلات تتضمن جذورًا وأسسًا نسبية وأحلّها.

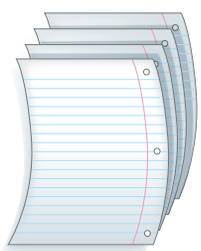
لماذا؟

إدارة الموارد المالية:
يعد ربط إدارة الموارد المالية بالرياضيات مهارة، وإذا أتقنتها فإنك ستستفيد منها في مجالات حياتك المختلفة. إن تعلم إدارة مواردك المالية يساعدك على وضع ميزانية والعيش ضمن حدودها، وسوف تتعرض في هذا الفصل لمواقف مالية مثل: التوفير، التضخم، صرف العملة.

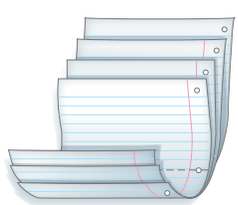
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوال العكسية والجذرية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

1. **ثبّت** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، بحيث تعلو كل ورقة الورقة التي أمامها بمقدار 2.5 سم.



2. **اطوِ** أسفل الورقات الأربع إلى أعلى، وحاذِ الحوافَ بحيث تكون المسافات بين نهايات جميع الأوراق متساوية.



3. **عندما** تتأكد من تساوي المسافات بين الحواف، اثنِ الأوراق جيدًا، ثم ثبتها على طول خط الطي، ثم اقلب المطوية واكتب عنوان الفصل وعناوين الدروس كما في الشكل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الرابع

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي: (يستعمل مع الدرس 2-4)

1) $\sqrt{28}$

2) $\sqrt{\frac{25}{4}}$

3) طاقة حركية: يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة $v = \sqrt{\frac{2KE}{m}}$، حيث (KE) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (m) إلى كتلة الكرة. بسّط هذه المعادلة معتبرًا كتلة الكرة $50\,\text{kg}$.

بسّط كلًّا من العبارات الآتية مستعملًا القسمة التركيبية: (يستعمل مع الدروس 4-4 إلى 4-6)

4) $(5x^2 - 22x - 15) \div (x - 5)$

5) $(3x^2 + 14x - 12) \div (x + 4)$

6) $(2x^3 - 7x^2 - 36x + 36) \div (x - 6)$

7) $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 18x + 15) \div (x - 3)$

8) مبيعات: يمكن تقدير عدد السلع المبيعة من متجر بالمعادلة $n = \frac{4000x^2}{x^2 + 50}$، حيث x تمثل المبلغ الذي أُنفق بمئات الريالات على الدعاية، n عدد السلع المبيعة.

a) أجرِ عملية القسمة المشار إليها بالعبارة $\frac{4000x^2}{x^2 + 50}$

b) ما العدد التقريبي للسلع التي ستباع، إذا أنفق المتجر 1000 ريال على الدعاية؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط العبارة $\sqrt{\frac{45}{20}}$.

$\sqrt{\frac{45}{20}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$ — اضرب في $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$

$= \frac{\sqrt{900}}{20}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{30}{20}$ — أوجد قيمة $\sqrt{900}$

$= \frac{3}{2} = 1.5$ — بسّط

مثال 2

بسّط العبارة $(3x^4+4x^3+x^2+9x-6) \div (x + 2)$، مستعملًا القسمة التركيبية.

$x - r = x + 2$، لذلك $r = -2$.

-2	3	4	1	9	-6
	↓	-6	4	-10	2
	3	-2	5	-1	-4

النتيجة هي: $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - \frac{4}{x+2}$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-1 العمليات على الدوال
Operations on Functions

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

المفردات

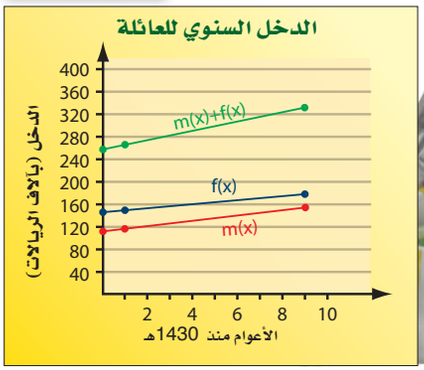
تركيب دالتين

composition of functions

لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1430هـ؛ حيث $f(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.



العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x$, $g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

مثال 1 جمع الدوال وطرحها

إذا كان $g(x) = 2x + 1$, $f(x) = x^2 - 4$، فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي:

a) $(f+g)(x)$

b) $(f-g)(x)$

تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 + 5x - 2$, $g(x) = 3x - 2$

1A) $(f+g)(x)$

1B) $(f-g)(x)$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

في المثال 1، الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز ∩.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = x^2 + 7x + 12$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تنبيه!

قسمة دالتين

بما أنه قد تم تعلُّم قسمة كثيرات الحدود في الفصل 3، فإنه سيُكتفي عند إيجاد ناتج قسمة دالتين (في هذا الدرس) بكتابتهما في صورة دالة نسبية، وتحديد مجالها من دون إجراء عملية القسمة.

تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 - 7x + 2$, $g(x) = x + 4$

2A $(f \cdot g)(x)$

2B $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

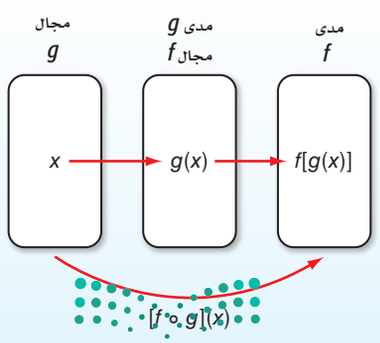
مفهوم أساسي تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

النموذج:



يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

a) $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

b) $f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x$

إرشادات للدراسة

التركيب

كن حذرًا من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$, $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

3B) $f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الربط مع الحياة

في أعقاب الأزمة المالية العالمية عام 2009م، هبطت مبيعات كبرى شركات صناعة السيارات الأمريكية بصورة كبيرة بلغت 53% في أكبر انخفاض لها منذ 42 عامًا، مما اضطر هذه الشركات إلى خفض حجم إنتاجها بمقدار 40%.

مثال 4 من واقع الحياة

استعمال تركيب دالتين

سيارات: استعمل تركيب دالتين لحل المسألة الآتية: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافًا إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

افهم:

خطط:

حل:

تحقق:

تحقق من فهمك

4) تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالًا، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيُّهما يعطي سعرًا أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

1444 - 2022

تأكد

المثالان 2 , 1 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $f(x)=x+2$, $g(x)=3x-1$

2) $f(x)=x^2-5$, $g(x)=-x+8$

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $f=\{(2,5),(6,10),(12,9),(7,6)\}$, $g=\{(9,11),(6,15),(10,13),(5,8)\}$

4) $f=\{(-5,4),(14,8),(12,1),(0,-3)\}$, $g=\{(-2,-4),(-3,2),(-1,4),(5,-6)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا.

5) $f(x)=-3x$, $g(x)=5x-6$

6) $f(x)=x+4$, $g(x)=x^2+3x-10$

مثال 4

7) ادِّخار: يُقتطع ما نسبته 8% من راتب موظف للادِّخار. ويستطيع الموظف أن يختار بحيث يكون الاقتطاع قبل تسديده قسطًا آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. فإذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط 9500 ريال، فهل يكون ادّخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط أم بعده؟ وضِّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

8) $f(x)=x-1$, $g(x)=5x-2$

9) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x+1$

10) $f(x)=3x^2-4$, $g(x)=x^2-8x+4$

11) رياضة المشي: يمشي راشد على ممر متحرك. فإذا كانت سرعته يُعبر عنها بالدالة: $I(x)=3x-4$، وسرعة الممر المتحرك يعبر عنها بالدالة: $W(x)=4x+7$، حيث x الزمن بالثواني.

a) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا كان يمشي في اتجاه سير الممر المتحرك؟

b) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا مشى في عكس اتجاه سير الممر المتحرك؟

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية ، إذا كان ذلك ممكنًا:

12) $f=\{(-8,-4),(0,4),(2,6),(-6,-2)\}$, $g=\{(4,-4),(-2,-1),(-4,0),(6,-5)\}$

13) $f=\{(5,13),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$, $g=\{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

14) $f=\{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$, $g=\{(-6,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$

15) $f=\{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-4)\}$, $g=\{(5,-4),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

16) $f(x)=2x^2-x+1$, $g(x)=4x+3$

17) $f(x)=4x-1$, $g(x)=x^3+2$

18) $f(x)=2x^2$, $g(x)=8x^2+3x$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 4

19) صناعة: ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة: $r(x) = 6.5x$، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة: $c(x) = 0.75x + 1850$.

a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبِّر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان.

b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و1000 فنجان و5000 فنجان.

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299 ريالًا، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

a) اكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$ ، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان $t(x)$.

b) أيّ الدالتين الآتيتين يمثّل سعر التلفاز النهائي: $[p \circ t](x)$، أم $[t \circ p](x)$؟ وضِّح إجابتك.

c) كم سيدفع سامر ثمنًا للتلفاز؟

الربط مع الحياة

الخاصية المميزة للشاشات المسطحة HDTV هي أن نسبة عرضها إلى ارتفاعها هي 16:9، فتوفر للمشاهد صورة أوضح.

إذا كان $f(x) = x^2 + x - 12, g(x) = x - 3$. فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي، وحدد مجالها:

21) $(f - g)(x)$ **22)** $2(g \cdot f)(x)$ **23)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $f(x) = 5x, g(x) = -2x + 1, h(x) = x^2 + 6x + 8$ فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

24) $g[h(3)]$ **25)** $h[f(-5)]$ **26)** $h[f(9)]$

27) $f[g(3a)]$ **28)** $f[h(a + 4)]$ **29)** $g[f(a^2 - a)]$

30) تمثيلات متعددة: لتكن: $f(x) = x^2, g(x) = x$.

a) جدوليًّا: أنشئ جدولًا يبين بعض قيم الدوال: $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا الدوال $f(x), g(x), (f + g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

c) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا الدوال $f(x), g(x), (f - g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) لفظيًّا: صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

31) توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1434 هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين:

عدد الرجال: $y = 7x + 6$

عدد النساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1434 هـ ، وy تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1434 هـ.

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟

إذا كان $f(x) = x + 2, g(x) = -4x + 3, h(x) = x^2 - 2x + 1$ فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

32) $(f \cdot g \cdot h)(3)$ **33)** $[(f + g) \cdot h](1)$ **34)** $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(-6)$

35) $[f \circ (g \circ h)](2)$ **36)** $[g \circ (h \circ f)](-4)$ **37)** $[h \circ (f \circ g)](5)$

وزارة التعليم
Ministry of Education

مسائل مهارات التفكير العليا

38) مسألة مفتوحة: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](4) = 0$.

39) اكتشف الخطأ: تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$ ، حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$. من منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

ريم

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$$
$$= x^4 + 18x^2 + 72$$

العنود

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 2x + 56$$

40) تحدٍّ: إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}, g(x) = \sqrt{x^6}$ فحدد مجال كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

a) $[g \circ g](x)$ **b)** $[f \circ f](x)$

41) تبرير: حدد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسِّر إجابتك.

a) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة f أو جزءًا منه.

b) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة g أو جزءًا منه.

42) اكتب: وضِّح لماذا نقوم بتركيب دالتين. وأعطِ مثالًا من واقع الحياة يمكنك حلّه باستعمال تركيب دالتين.

تدريب على اختبار

43) إذا كان $h(x) = 2(x + 5)^2, g(x) = x^2 + 9x + 21$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟

A $k(x) = -x^2 - 11x - 29$

B $k(x) = x^2 + 11x + 29$

C $k(x) = x + 4$

D $k(x) = x^2 + 7x + 11$

44) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي:

A 38

B 43

C 86

D 261

مراجعة تراكمية

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية، لكلٍّ من الدوال الآتية: (مهارة سابقة)

45) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ **46)** $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3$

47) صندوق أبعاده 12in, 16in, 18in . ما المقدار الثابت من الطول الذي يجب إضافته إلى كلٍّ بعد من أبعاده، ليصبح حجمه 5985in^3؟ (مهارة سابقة)

حل كلَّ معادلة فيما يأتي، بالنسبة للمتغير المبين إزاء كل منها: (مهارة سابقة)

48) $5x - 7y = 12, x$ **49)** $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ **50)** $(x + 2)^2 - (y + 5)^2 = 4, y$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-2

العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

فيما سبق

درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن

- أجد كلًّا من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدّد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

لماذا؟

يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267\ r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75\ d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة .

السعودية	أمريكا
السعودية	0.267
أمريكا	3.75

إيجاد العلاقة العكسية: تذكّر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. والعلاقة العكسية هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكنك الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب في العلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي — العلاقة العكسية

أضف إلى مطويتك

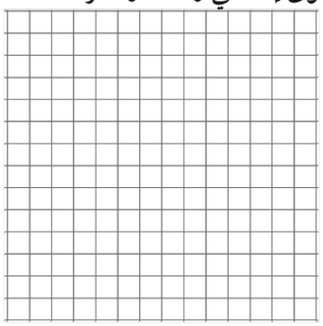
التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$

مثال 1 — إيجاد العلاقة العكسية

هندسة: يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(1, -2), (2, 5), (4, -1)\}$.
أوجد العلاقة العكسية لها، ثم مثِّل بيانيًّا العلاقة والعلاقة العكسية لها على مستوى إحداثي واحد، واذكر التحويل الهندسي الذي يحوّل العلاقة المعطاة إلى العلاقة العكسية لها.



تحقق من فهمك

1) هندسة: إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-6, -3), (-6, -8), (-3, -8)\}$، تمثّل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة ومعكوسها، وإذا كان معكوس الدالة يمثل دالةً أيضًا، فإنه يسمى دالة عكسية. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

وزارة التعليم
Ministry of Education

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خواص الدالة العكسية

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

أوجد $f(6)$. أوجد $f^{-1}(2)$.

$f(x) = x - 4$ $f^{-1}(x) = x + 4$

$f(6) = 6 - 4 = 2$ $f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

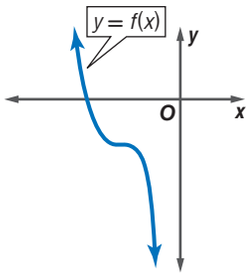
وبما أن كلًّا من $f^{-1}(x)$, $f(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2$, $f^{-1}(2) = 6$.

قراءة الرياضيات

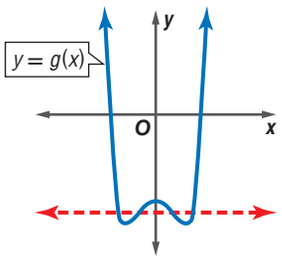
الدالة العكسية

f^{-1} يقرأ الدالة العكسية للدالة f. تذكّر أن (-1) ليس أسًّا.

اختبار الخط الأفقي: إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكّر أنه يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكنك استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة (الدالة متباينة)؛ لذا يمثِّل معكوس الدالة $y = f(x)$ دالة أيضًا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة (الدالة ليست متباينة)؛ لذا لا يكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالةً.

يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

مثال 2

إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا

أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

a) $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

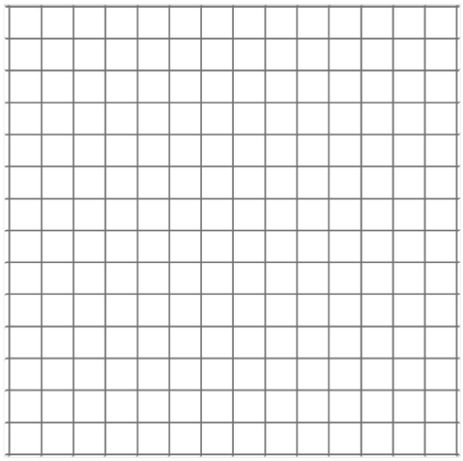
الخطوة 4:

إرشادات للدراسة

رمز الدالة العكسيّة

بما أن معكوس الدالة $f(x)$ في الفرع a من المثال 2 هو دالة أيضًا، لذا تم التعبير عنها بـ $f^{-1}(x)$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



(b $f(x) = x^2 + 1$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

الخطوة 4:

ارشادات للدراسة

الدوال

معكوس الدالة **f** في الفرع **b** لا يمثل دالة؛ لأنه لا يحقق اختبار الخط الرأسي، أو لأن الدالة **f** لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

تحقق من فهمك

(2A $f(x) = \frac{x-3}{5}$

(2B $f(x) = 3x^2$

التأكد من الدالة العكسية: يمكنك تحديد ما إذا كانت دالتان، كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كلٍّ من تركيبَيهما.

مفهوم أساسي — **الدالة العكسية**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون كلٌّ من الدالتين f, g دالة عكسيةً للأخرى، إذا وفقط إذا كان تركيب كلٍّ منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = (x)$.

الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

مثال 3 **التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى**

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

(a $f(x) = 3x + 9 \, , \, g(x) = \frac{1}{3}x - 3$

تنبيه!

الدالة العكسية

تأكد أن التركيبين $[g \circ f](x)$ و $[f \circ g](x)$ يساوي كلّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$؛ وذلك لتكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

(b $f(x) = 4x^2, g(x) = 2\sqrt{x}$

تحقق من فهمك

(3A $f(x) = 3x - 3 \, , \, g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

(3B $f(x) = 2x^3 - 1 \, , \, g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education

تأكد

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

1) $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$ **2)** $\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كلٍّ من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

3) $f(x) = -3x$ **4)** $g(x) = 4x - 6$ **5)** $h(x) = x^2 - 3$

مثال 3 في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

6) $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$

7) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $g(x) = 2x - \frac{4}{3}$

8) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

9) $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$ **10)** $\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

11) $f(x) = x + 2$ **12)** $g(x) = 5x$ **13)** $l(x) = -2x + 1$

14) $h(x) = \frac{x - 4}{3}$ **15)** $k(x) = -\frac{5}{3}x - 8$ **16)** $h(x) = x^2 + 4$

17) $f(x) = 5x^2$ **18)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ **19)** $f(x) = (x + 1)^2 + 3$

مثال 3 في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$

21) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$, $g(x) = -3x + 9$

22) $f(x) = \frac{x + 10}{8}$, $g(x) = 8x - 10$

23) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$

24) $f(x) = (x + 6)^2$, $g(x) = \sqrt{x} - 6$

25) $f(x) = 2\sqrt{x - 5}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

26) وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل l لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(l) = 12l$، وكان سعر اللتر كما هو موضح في الشكل المجاور.

a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين

b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلو متر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية.

27) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$.

a) أوجد معكوس الدالة.

b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحتها 36cm^2.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحدد ما إذا كان معكوس كلِّ دالة من الدوال الآتية دالة أيضًا أم لا:

28) $f(x) = x^3 - 8$ **29)** $h(x) = 2x^2$ **30)** $g(x) = 3x + 7$

31) درجات الحرارة: تستعمل الصيغة $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجة الحرارة السيليزية إلى درجة الحرارة الفهرنهايتية.

a) أوجد $F^{-1}(x)$. ثم بيِّن أن $F^{-1}(x)$ و $F(x)$ تمثل كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى.

b) فيم تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟

32) تمثيلات متعددة: تأمل الدالة $y = x^n$، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) بيانيًا: مثِّل الدوال $y = x^n$ بيانيًا للقيم $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) جدوليًا: ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدوال دوال أيضًا؟ سجل نتائجك في جدول.

c) تحليليًا: استنتج قيم n التي يكون عندها معكوس الدوال $f(x) = x^n$ دوال أيضًا، على فرض أن n عدد كلي.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) تبرير: حدد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك.
"إذا كانت العلاقة لا تمثل دالة، فإن معكوسها لا يمثل دالةً أيضًا."

34) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على دالة، ودالتها العكسية . وتحقق من أن كلًّا منهما دالة عكسية للأخرى.

35) تحدٍّ: أعطِ مثالًا على دالة معكوسها الدالة نفسها.

36) اكتب: إذا كان لديك تركيب لدالتين، كل منهما دالة عكسية للأخرى. فلماذا تكون قيمة تركيب الدالتين عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا؟

تدريب على اختبار

37) إذا كان $g(x) = -x + 1$ ، $f(x) = x^2 + 3$، فأيٌّ مما يأتي يمثل $f[g(x)]$؟

A $x^2 - x + 2$ **C** $-x^3 + x^2 - 3x + 3$

B $-x^2 - 2$ **D** $x^2 - 2x + 4$

38) أيُّ الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$ ؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$ **C** $g(x) = 2x + 5$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$ **D** $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = x - 2$ ، $f(x) = 3x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس: 4-1)

39) $g[f(3)]$ **40)** $f[h(-2)]$ **41)** $h[g(1)]$

42) مساحة: قطعة أرض على شكل شبه منحرف، طول قاعدتها الأطول يزيد بمقدار 8 ft على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر، ويزيد ارتفاعها قدمًا واحدةً على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر. ما أبعاد قطعة الأرض إذا كانت مساحتها 4104ft^2؟ (مهارة سابقة)

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

43) $(3 + 4i)(5 - 2i)$ **44)** $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ **45)** $\frac{1 + i}{1 - i}$ **46)** $\frac{4 - 3i}{1 + 2i}$

وزارة التعليم
Ministry of Education

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-3

دوال ومتباينات الجذر التربيعي
Square Root Functions and Inequalities

فيما سبق
درست تبسيط عبارات تحتوي جذورًا تربيعية. (مهارة سابقة)

والآن
- أمثل بيانيًا دوال الجذور التربيعية وأحلّلها.
- أمثل بيانيًا متباينات الجذور التربيعية.

المفردات
دالة الجذر التربيعي
square root function

الدالة الجذرية
radical function

متباينة الجذر التربيعي
square root inequality

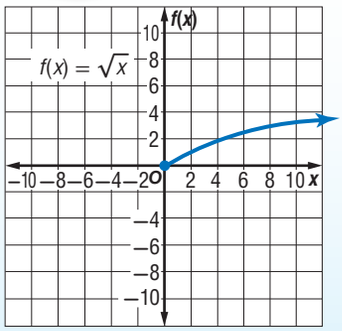
لماذا؟

يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ، حيث T الزمن الدوري بالثواني، L طول البندول بالأقدام ، g تسارع السقوط الحر، الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تُسمى **دالة الجذر التربيعي**. وهي نوع من أنواع **الدالة الجذرية**.

مفهوم أساسي
الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك



الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x)=\sqrt{x}$
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$
المقطعان:	$x=0, f(x)=0$
غير معرّفة عندما:	$x<0$
سلوك الدالة عند طرفيها:	$x \to 0, f(x) \to 0$
	$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة.

مثال 1
تعيين المجال والمدى

عين كلًّا من المجال والمدى للدالة: $f(x)=\sqrt{x+4}$.

تحقق من فهمك
1A) $f(x)=\sqrt{x-3}$

1B) $f(x)=\sqrt{x+6}+2$

يمكنك تمثيل دالة الجذر التربيعي بيانيًّا، بتحديد القيم الصغرى لها، وعمل جدول لبعض قيم x وقيم $f(x)$ المقابلة لها.

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

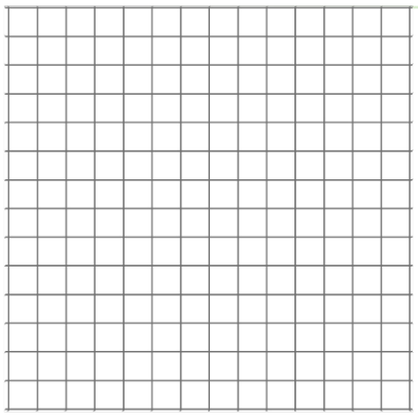
حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

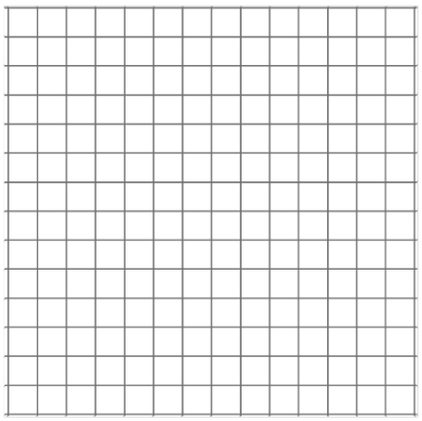
مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا

مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

a) $y = \sqrt{x-2} + 5$

b) $y = -2\sqrt{x+3} - 1$





تحقق من فهمك

2A) $f(x) = 2\sqrt{x+4}$

2B) $f(x) = -3\sqrt{x-1} + 2$

إرشادات حل المسألة

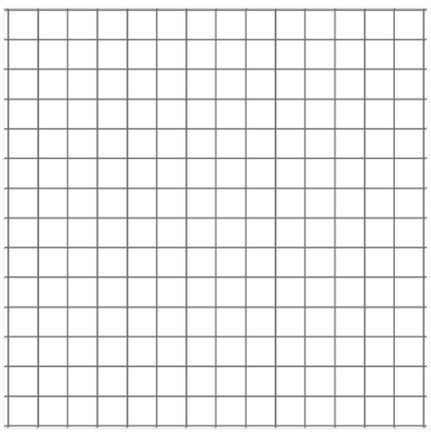
عمل جدول

يعد عمل جدول طريقة جيدة لترتيب الأزواج المرتبة؛ لدراسة سلوك التمثيل البياني للدالة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال التمثيل البياني لتحليل دوال الجذر التربيعي

فيزياء: بالرجوع إلى فقرة لماذا؟ بداية هذا الدرس، يمكنك تحديد الزمن الدوري للبندول T بالثواني باستعمال الدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ حيث تمثل L طول البندول بالأقدام.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le L \le 10$.



b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8 أقدام؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

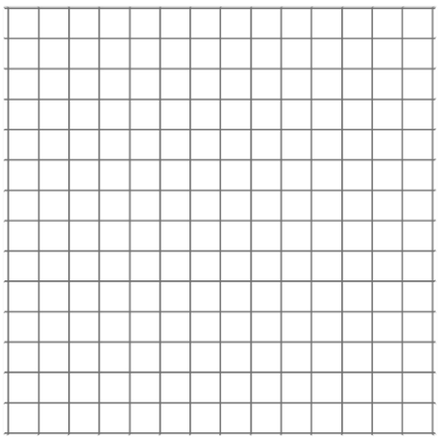
تحقق من فهمك

3) صوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $f = 200\sqrt{m_t}$، حيث f تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، m_t كتلة ثقل قوة الشّد مقيسة بالرطل. مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le m_t \le 10$، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشّد 3 أرطال.

متباينات الجذر التربيعي: **متباينة الجذر التربيعي** هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانيًّا تمامًا مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مثال 4 تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًّا

مثّل المتباينة $y < \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.



تحقق:

تحقق من فهمك

4A) $f(x) \ge \sqrt{2x+1}$

4B) $f(x) < -\sqrt{x+2} - 4$

تأكد

مثال 1 عيّن المجال والمدى لكلِّ دالة فيما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x}$

2) $f(x) = \sqrt{x-5}$

3) $f(x) = \sqrt{x+8} - 2$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

4) $f(x) = \sqrt{x} - 2$

5) $f(x) = 3\sqrt{x-1}$

6) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$

7) $f(x) = -\sqrt{3x-5} + 5$

مثال 3 **8) محيطات:** يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال الدالة: $v = 356\sqrt{d}$، حيث تمثل v السرعة بالكيلومترات لكل ساعة، و d متوسط عمق الماء بالكيلومترات. إذا كانت سرعة الموجة 145 km/h، فما متوسط عمق الماء ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر.

مثال 4 مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

9) $f(x) \ge \sqrt{x} + 4$

10) $f(x) \le \sqrt{x-6} + 2$

11) $f(x) < -2\sqrt{x+3}$

12) $f(x) > \sqrt{2x-1} - 3$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

مثال 1 عيِّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

13) $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ **14)** $f(x) = \sqrt{x} - 6$ **15)** $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

16) $f(x) = \sqrt{6x}$ **17)** $f(x) = -\sqrt{5x}$ **18)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

19) $f(x) = \sqrt{x-4} - 10$ **20)** $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ **21)** $f(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$

مثال 3

22) القفز بالمظلات: إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى بالدالة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$، فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟

23) ألعاب: إذا كانت سرعة العربة الدوّارة V في مدينة الألعاب في أثناء نزولها من أعلى قمة تعطى بالدالة: $V = \sqrt{{v_0}^2 + 64h}$، حيث v_0 السرعة الابتدائية بالأقدام لكل ثانية، و h الارتفاع الرأسي بالأقدام. أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة 90 ft/s عندما تصل أدنى مستوى لها.

a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند القمة هي 10 ft/s ، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف.

b) حتى يتحقق ما يريده المصمم، كم يجب أن يكون ارتفاع القمة، إذا كانت سرعة العربة الابتدائية عند القمة 10ft/s ؟

مثال 4 مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

24) $y < \sqrt{x-5}$ **25)** $y > \sqrt{x+6}$

26) $y \geq -4\sqrt{x+3}$ **27)** $y > 2\sqrt{x+7} - 5$

28) $y \geq 4\sqrt{x-2} - 12$ **29)** $y \leq 6 - 3\sqrt{x-4}$

30) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعمال الدالة: $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك الذي يصف حالة سطح الطريق، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افترض أن $f = 0.6$.

a) أوجد سرعة سيارة طول أثر احتكاك عجلاتها بالأرض 25ft.

b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة 35 mil/h، فكم قدمًا تحتاج لتقف وقوفًا تامًّا؟

c) إذا تضاعفت سرعة سيارة مرة واحدة، فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ مرة واحدة؟ وضح إجابتك.

31) عيِّن المجال والمدى للدالة: $f(x) = -\sqrt{x-6} + 5$، ثم مثلها بيانيًّا.

الربط مع الحياة

توصلت دراسة إلى أن السبب الأول لحوادث السيارات بين أوساط الشباب يعود إلى استخدام الهاتف الجوال أثناء القيادة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مسائل مهارات التفكير العليا

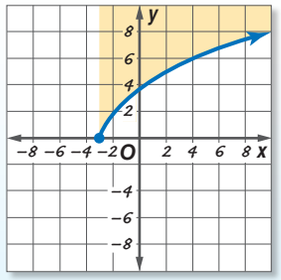
32) تحدٍّ: اكتب معادلة لدالة جذر تربيعي مجالها $\{x \mid x \geq -4\}$، ومداها $\{y \mid y \leq 6\}$، وتمر بالنقطة $(5, 3)$.

33) تبرير: ما قيم a الصحيحة الموجبة التي تجعل مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[a]{x}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ؟

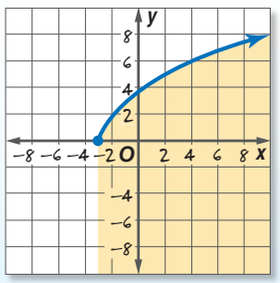
34) اكتب: وضِّح لماذا لا تمثل $y = \pm\sqrt{x}$ دالة؟

35) اكتشف الخطأ: مثَّل كلٌّ من عبد الرحمن وعبد العزيز المتباينة $y \leq \sqrt{5x + 15}$. فأيُّهما إجابته صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

عبد الرحمن



عبد العزيز



تدريب على اختبار

36) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{-64x^6}{8x^3}$, $x \neq 0$:

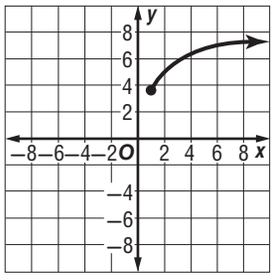
A $8x^2$

B $8x^3$

C $-8x^2$

D $-8x^3$

37) يمثّل الشكل المجاور التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. فأيٌّ ممَّا يأتي صحيح؟



I) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

II) الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

III) المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريبًا

A I فقط **B** II, III فقط **C** I, II, III **D** III فقط

مراجعة تراكمية

في كلِّ زوج مما يأتي حدد هل كلّ دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا ؟ (الدرس: 2-4)

38) $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}x$

39) $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{16}$

40) $f(x) = \frac{3x + 2}{5}$, $g(x) = \frac{5x - 2}{3}$

41) زمن: إذا كانت الدالة: $h = \frac{m}{60}$ تستعمل لتحويل الدقائق m إلى ساعات h ، والدالة: $d = \frac{h}{24}$ تستعمل لتحويل الساعات h إلى أيام d، فاكتب دالة يمكن استعمالها لتحويل الدقائق إلى أيام. (مهارة سابقة)

حدد ما إذا كان كلُّ عدد مما يأتي نسبيًّا أو غير نسبي: (مهارة سابقة)

42) 6.34 **43)** 3.787887888... **44)** 5.333... **45)** 1.25

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-4 الجذر النوني
nth Root

فيما سبق

درست دوال الجذر التربيعي.

والآن

- أبسّط عبارات جذرية.
- أستعمل الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات

الجذر النوني
*n*th root

رمز الجذر
radical sign

الدليل
index

ما تحت الجذر
radicand

الجذر الرئيس
principal root

لماذا؟

لوحظ تزايد عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالدالة $c = \sqrt[5]{b^2}$، حيث b عدد الدراجات، c عدد الحوادث.

تبسيط الجذور: يعدُّ إيجاد الجذر التربيعي لعددٍ عمليةً عكسية لتربيعه. فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a. وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد **الجذر النوني** للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني:

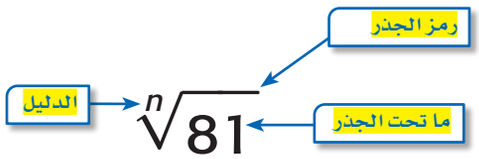
مفهوم أساسي — **تعريف الجذر النوني**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a, b، ولأيِّ عدد صحيح n، $n > 1$ إذا كان $a^n = b$، فإن a هو جذر نوني للعدد b.

مثال: بما أن $81 = (-3)^4$، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81 .

يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.



بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و -8؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، ويكون n عددًا زوجيًّا، فإن الجذر غير السالب يسمى **الجذر الرئيس**.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{25}$ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$-\sqrt{25} = -5$ ، $-\sqrt{25}$ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ، $\pm\sqrt{25}$ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

الوثيق للعدد 25

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

الجذر النوني الحقيقي

أضف إلى مطويتك

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًّا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	

مثال 1

إيجاد الجذور

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\pm\sqrt{16y^4}$

b) $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

c) $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

d) $\sqrt[7]{128}$

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt[3]{8x^6}$

1B) $-\sqrt{(y+7)^{16}}$

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وأسّ ما تحت الجذر عددًا زوجيًّا، وكان أسّ الناتج عددًا فرديًّا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالبًا.

مثال 2

التبسيط باستعمال القيمة المطلقة

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\sqrt[4]{y^4}$

b) $\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}}$

تحقق من فهمك

2A) $\sqrt{36y^6}$

2B) $\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$

إرشادات للدراسة

دليل الجذر

إذا كان n عددًا فرديًّا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًّا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة: تذكَّر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها في صورة كسور عشرية منتهية أو دورية، تُسمى أعدادًا غير نسبية. وغالبًا ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

تشير الإحصاءات في الولايات المتحدة إلى وقوع أكثر من 500 ألف حادث اصطدام للدراجات الهوائية والسقوط من عليها وإصابة راكبيها سنويًا، منهم أكثر من 11 ألف طفل ومراهق، مما يرفع تكلفة العلاج إلى ما يجاوز 200 مليون دولار سنويًا. ويُنصح بارتداء الخوذة لأهميتها لحماية رؤوس راكبي الدراجات الهوائية عند تعرضهم لحوادث السقوط.

مثال 3 من واقع الحياة — تقريب الجذور

حوادث الدراجات: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، و b تمثل عدد الدراجات الهوائية، فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريقٍ ما، إذا عُلم أن 1000 دراجة تمرُّ خلاله كل شهر.

افهم:

خطّط:

حل:

تحقق

b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريقٍ ما في أحد الأشهر يساوي 21 حادثًا، فقدر عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر.

تحقق من فهمك

3A) قياس: يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها، باستعمال الدالة $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$، حيث V تمثل حجم الكرة. أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200\,\text{in}^3$.

3B) قياس: إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5\,\text{in}^2$، فأوجد حجم الكرة.

تأكد

المثالان 2 , 1 بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

1) $\pm\sqrt{100y^8}$

2) $-\sqrt{49u^8v^{12}}$

3) $\sqrt{(y-6)^8}$

4) $\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}}$

5) $\sqrt[3]{-125}$

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

7) قمر اصطناعي: إذا كان نصف القطر r لمدار قمر اصطناعي تلفزيوني يُعطى بالدالة $r = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$؛ حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني، M كتلة الأرض، t الزمن اللازم لإكمال القمر الاصطناعي دورة واحدة حول الأرض، فأوجد نصف قطر مدار القمر الاصطناعي إذا كانت :

$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2,\ M = 5.98 \times 10^{24}\,kg,\ t = 2.6 \times 10^6 s$

مثال 3 **استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:**

8) $\sqrt{58}$ **9)** $-\sqrt{76}$ **10)** $\sqrt[5]{-43}$ **11)** $\sqrt[4]{71}$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 **بسِّط كلًّا ممّا يأتي:**

12) $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}}$ **13)** $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$ **14)** $\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$

15) $\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ **16)** $\sqrt[5]{-243}$ **17)** $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$

18) $\sqrt[6]{x^{18}}$ **19)** $\sqrt[3]{a^{12}}$ **20)** $\sqrt[4]{81(x+4)^4}$

21) $\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}}$ **22)** $\sqrt[8]{x^{16}y^8}$ **23)** $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$

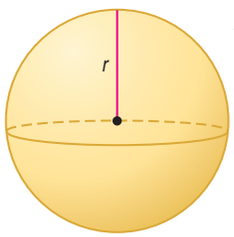
مثال 3 **24) شحن:** يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروبًا في مكعب عدد ثابت F؛ أيْ أن $N = V \cdot F^3$. فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي $0.8\,ft^3$ ، والحجم الجديد يساوي $21.6\,ft^3$؟

25) هندسة: يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$، حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة . أوجد طول ضلع مكعب حجمه $512\,cm^3$.

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

26) $-\sqrt{150}$ **27)** $\sqrt{0.43}$ **28)** $\sqrt[5]{-4382}$ **29)** $\sqrt[6]{(8912)^2}$

30) هندسة: يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



a) أوجد نصف قطر كلٍّ من الكرات ذات الأحجام الآتية:
$1000\,cm^3, 8000\,cm^3, 64000\,cm^3$.

b) ما مقدار التغيّر في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

31) $\sqrt{196c^6d^4}$ **32)** $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$ **33)** $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$

34) فيزياء: طوَّر جوهانز كيبلر (Johannes kepler) القانون $d = \sqrt[3]{6t^2}$، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس ، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كان كوكب المريخ يستغرق 687 يومًا أرضيًّا ليدور حول الشمس، فكم يبعد المريخ عن الشمس؟

الربط مع الحياة

الأيض metabolism هو جميع العمليات الكيميائية التي ينتج عنها بناء أو تحليل المواد الغذائية داخل جسم الكائن الحي.

35) أحياء: يبين قانون كليبر (kleiber) $P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$، العلاقة بين كتلة كائن حي m بالكيلوجرام ومتوسط الأيض اليومي له P بالسعرات الحرارية. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول المجاور.

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التمساح	72
الدولفين	156
الفيل	2300

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 2022

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستعمل في هذا السؤال كلًّا من: $f(x) = x^n, g(x) = \sqrt[n]{x}$ لاستكشاف المعكوس.

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا لكلٍّ من $f(x), g(x)$ مستعملًا $n = 4, n = 3$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من المعادلتين السابقتين بيانيًّا.

c) تحليليًّا: أيُّ المعادلتين السابقتين تمثل دالة؟ وأيّها تمثل دالة متباينة؟

d) تحليليًّا: ما قيم n التي يكون عندها كلٌّ من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى؟

e) لفظيًّا: ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول $g(x) = \sqrt[n]{x}$ و $f(x) = x^n$، لقيم n الزوجية الموجبة، وقيم n الفردية الموجبة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **تحدٍّ:** ما قيم x التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة $x > \sqrt[3]{x}$؟

38) **مسألة مفتوحة:** أوجد عددًا يكون جذره التربيعي الرئيس وجذره التكعيبي عددين صحيحين.

39) **اكتب:** وضّح متى يكون استعمال رمز القيمة المطلقة ضروريًّا عند إيجاد الجذر النوني؟ ولماذا؟

40) **تحدٍّ:** حل المعادلة: $\frac{-5}{\sqrt{a}} = -125$

تدريب على اختبار

41) أيُّ الآتية هو الأقرب إلى قيمة المقدار $\sqrt[3]{7.32}$؟

A 1.8

B 1.9

C 2

D 2.1

42) قيمة $\sqrt[4]{256x^8y^{16}}$ هي:

A $16x^8y^{16}$

B $16x^2y^{16}$

C $4x^2y^4$

D $4x^4y^4$

مراجعة تراكمية

مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-4)

43) $y = \sqrt{x-5}$

44) $y = \sqrt{x} - 2$

45) $y = 3\sqrt{x} + 4$

46) **صحة:** تبلغ كتلة طفل وُلد حديثًا $7\frac{1}{2}$ أرطال، وطوله 19.5in. فإذا كان الكيلوجرام الواحد يساوي 2.2 رطل تقريبًا، والسنتمتر الواحد يساوي 0.3937in تقريبًا. فأوجد كتلة المولود بالكيلوجرامات وطوله بالسنتمترات. (الدرس 2-4)

بسّط كلًّا ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

47) $(11x^2 + 13x - 15) - (7x^2 - 9x + 19)$

48) $(2a^2 + 6)^2$

أوجد حاصل الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

49) $(x + 4)(x + 5)$

50) $(x + 2y)(x - y)$

51) $2(w + z)(w - 4z)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

اختبار منتصف الفصل

الدروس 4-1 إلى 4-4

إذا كان $g(x) = 5x - 2$, $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

1) $(f+g)(x)$ **2)** $(f-g)(x)$

3) $(f \cdot g)(x)$ **4)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

5) $[f \circ g](x)$ **6)** $[g \circ f](x)$

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدِّد هل كلَّ دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، ووضِّح إجابتك:

7) $f(x) = 2x + 16$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 8$

8) $g(x) = 4x + 15$, $h(x) = \frac{1}{4}x - 15$

9) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = 5 + x^{-2}$

10) $g(x) = -6x + 8$, $h(x) = \frac{8-x}{6}$

أوجد معكوس كلِّ دالة مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $h(x) = \frac{2}{5}x + 8$ **12)** $f(x) = \frac{4}{9}(x-3)$

13) $h(x) = -\frac{10}{3}(x+5)$ **14)** $f(x) = \frac{x+12}{7}$

15) تنسيق حدائق: تتقاضى مؤسسة لتنسيق الحدائق 25 ريالًا أجرة للمعدات، إضافة إلى 15 ريالًا عن كل ساعة عمل. وتمثل الدالة $f(h) = 15h + 25$ تكلفة العمل لمدة h ساعة.

a) أوجد $f^{-1}(h)$. وماذا تمثل $f^{-1}(h)$؟

b) إذا كانت أجرة تنسيق حديقة 85 ريالًا، فكم عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة؟

مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

16) $y < \sqrt{x-5}$ **17)** $y \le -2\sqrt{x}$

18) $y > \sqrt{x+9} + 3$ **19)** $y \ge \sqrt{x+4} - 5$

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدِّد مجال كل منهما ومداها:

20) $y = 2 + \sqrt{x}$ **21)** $y = \sqrt{x+4} - 1$

22) اختيار من متعدد: ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x+5}$؟

A $\left\{x \middle| x > \frac{5}{2}\right\}$ C $\left\{x \middle| x \ge \frac{5}{2}\right\}$

B $\left\{x \middle| x > -\frac{5}{2}\right\}$ D $\left\{x \middle| x \ge -\frac{5}{2}\right\}$

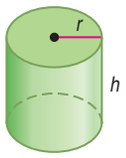
بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\sqrt{121a^4b^{18}}$ **24)** $\sqrt{(x^4+3)^{12}}$

25) $\sqrt[3]{27(2x-5)^{15}}$ **26)** $\sqrt[5]{-(y-6)^{20}}$

27) $\sqrt[3]{8(x+4)^6}$ **28)** $\sqrt[4]{16(y+x)^8}$

29) اختيار من متعدد: نصف قطر الأسطوانة أدناه يساوي ارتفاعها. ويمكن إيجاد نصف قطرها r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$، حيث V حجم الأسطوانة. ما نصف القطر التقريبي للأسطوانة إذا كان حجمها $500\,\text{in}^3$؟



A 2.53 in

B 5.42 in

C 7.94 in

D 24.92 in

30) إنتاج: إذا كانت تكلفة إنتاج p قطعة بالريالات في مصنع يعبّر عنها بالدالة: $C(p) = 5p + 60$. وكان عدد القطع المنتجة في نهاية h ساعة عمل يُعبَّر عنه بالدالة: $P(h) = 40h$.

a) أوجد $C[p(h)]$.

b) أوجد تكلفة الإنتاج في نهاية 8 ساعات عمل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-5

العمليات على العبارات الجذرية
Operations with Radical Expressions

فيما سبق

درستُ تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني. (الدرس 4-4)

والآن

- أبسّط عبارات جذرية.
- أجمع عبارات جذرية وأطرحها وأضربها وأقسمها.

المفردات

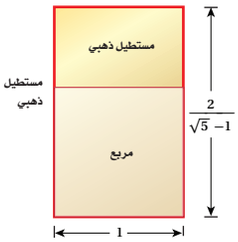
إنطاق المقام
rationalizing the denominator

الجذور المتشابهة
like radical expressions

المرافق
conjugate

لماذا؟

عُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا. وستتعلم في هذا الدرس تبسيط عبارات جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.



تبسيط العبارات الجذرية: يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذورًا نونية باستعمال خواص العمليات عليها.

مفهوم أساسي — خاصية ضرب الجذور

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a , b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، إذا كانت n عددًا زوجيًّا وكان a , b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًّا.

مثالان: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

ولكي تكون العبارة الجذرية التي تتضمن جذورًا في أبسط صورة، يجب ألا يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب في صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثال 1 — تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية الضرب

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{32x^8}$

$\sqrt{32x^8} = \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot (x^4)^2}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{2}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 4x^4\sqrt{2}$ — بسّط

b) $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$

$\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot (a^6)^4 (b^3)^4 \cdot b}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة للأس 4

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{(a^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^3)^4} \cdot \sqrt[4]{b}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 2a^6|b^3|\sqrt[4]{b}$ — بسّط

ولا ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة في هذه الحالة؛ لأنه حتى يكون $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$ معرّفًا، يجب أن تكون b موجبة.

لذا فإن $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = 2a^6b^3\sqrt[4]{b}$.

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt{12d^3c^{12}}$ $\qquad$ **1B)** $\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

خاصية قسمة الجذور هي خاصية أخرى تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خاصية قسمة الجذور

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a, b ، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ ، فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ، إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

مثالان: $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق.

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

إرشادات للدراسة

الجذور الدقيقة

يسهل إيجاد الجذور بصورة دقيقة عندما تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر، فمثلًا:

$\sqrt{25a^4} = 5a^2$

مثال 2

تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية القسمة

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

تحقق من فهمك

2A) $\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}}$ $\qquad$ **2B)** $\sqrt[5]{\frac{3}{4y}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

فيما يأتي ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية:

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

مثال 3 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية: $3\sqrt[3]{18a^2b^2} \cdot 5\sqrt[3]{-12ab^4}$.

تحقق من فهمك

(3A) $6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3}$

(3B) $2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2}$

يمكنك جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحيدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

متشابهان: $\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$

مثال 4 جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{98} - 2\sqrt{32}$.

إرشادات للدراسة

جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط كل جذر على حدة قبل محاولة تجميع الجذور المتشابهة.

تحقق من فهمك

(4A) $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$

(4B) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة نفسها المتبعة في جمع وحيدات الحد وطرحها، فإنه يمكنك أيضًا ضرب الجذور باستعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيتي حد.

مثال 5 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية $(3\sqrt{2}-6)(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})$.

تحقق من فهمك

5A $(6\sqrt{3}-5)(2\sqrt{5}+4\sqrt{2})$

5B $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(7\sqrt{2}+3\sqrt{3})$

إرشادات للدراسة

المُرافق
حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد نسبي دائمًا.

تعتبر كلٌّ من ثنائيتي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية مرافقة للأخرى. ويمكنك استعمال **المرافق** لإنطاق المقام.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال المرافق لإنطاق المقام

هندسة: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، واستعمل المرافق لإنطاق المقام وتبسيط العبارة الجذرية: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

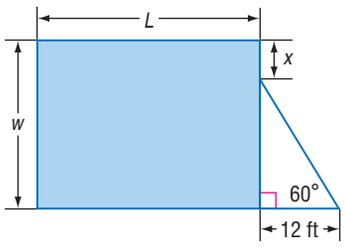
إرشادات للدراسة

يمكنك إيجاد ناتج $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ مباشرة باستعمال الفرق بين مربعين بالشكل:

$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$
$=(\sqrt{5})^2-(1)^2$
$=5-1=4$

تحقق من فهمك

6) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل في الشكل المجاور تساوي $900\ \text{ft}^2$، فاكتب معادلة تمثل طول المستطيل L بدلالة x، ثم بسطها.



تأكد

الأمثلة 1-5 بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

1) $\sqrt{36ab^4c^5}$

2) $\sqrt{144x^7y^5}$

3) $\frac{\sqrt{c^5}}{\sqrt{d^9}}$

4) $\sqrt[4]{\frac{5x}{8y}}$

5) $5\sqrt{2x}\cdot 3\sqrt{8x}$

6) $3\sqrt[3]{36xy}\cdot 2\sqrt[3]{6x^2y^2}$

7) $\sqrt[4]{3x^3y^2}\cdot\sqrt[4]{27xy^2}$

8) $5\sqrt{32}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

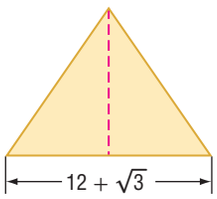
9) $(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})$ **10)** $(8\sqrt{3}-2\sqrt{2})(8\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

11) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+3}$ **12)** $\dfrac{8}{\sqrt{6}-5}$

13) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$ **14)** $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$

مثال 6

15) هندسة: أوجد ارتفاع المثلث في الشكل المجاور في أبسط صورة إذا كانت مساحته $189+4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.



تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4

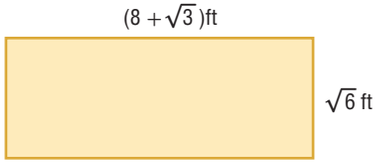
بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

16) $\sqrt{72a^8b^5}$ **17)** $\sqrt{9a^{15}b^3}$ **18)** $\sqrt{18a^6b^3c^5}$ **19)** $\sqrt{\dfrac{7x}{10y^3}}$

20) $\dfrac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{5y}}$ **21)** $\sqrt[4]{\dfrac{7x^3}{4b^2}}$ **22)** $3\sqrt{5y}\cdot 8\sqrt{10yz}$ **23)** $2\sqrt{32a^3b^5}\cdot\sqrt{8a^7b^2}$

24) $3\sqrt{90}+4\sqrt{20}+\sqrt{162}$ **25)** $4\sqrt{28}-8\sqrt{810}+\sqrt{44}$

26) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور واكتبه في أبسط صورة. ثم أوجد مساحته واكتبها في أبسط صورة.



المثالان 5, 6

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

27) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{6}+3\sqrt{12})$ **28)** $(6\sqrt{3}+5\sqrt{2})(2\sqrt{6}+3\sqrt{8})$

29) $\dfrac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **30)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **31)** $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$ **32)** $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

33) $\sqrt[3]{-54x^6y^{11}}$ **34)** $\sqrt[4]{\dfrac{12x^3y^2}{5a^2b}}$ **35)** $\dfrac{\sqrt[3]{36xy^2}}{\sqrt[3]{10xz}}$

36) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ **37)** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ **38)** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

الربط مع الحياة

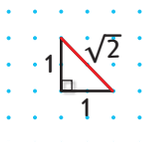
التفاح يطفو على الماء لأن نسبة الهواء فيه 25% من حجمه.

39) تفاح: يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالدالة $d=\sqrt[3]{3w}$، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات.

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي، حيث b عدد زوجي:

40) $\sqrt[b]{a^b}$ **41)** $\sqrt[b]{a^{4b}}$ **42)** $\sqrt[b]{a^{2b}}$ **43)** $\sqrt[b]{a^{3b}}$

44) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال العمليات على الجذور المتشابهة.



a) عدديًّا: انقل الشكل المجاور على ورقة نقطية. واستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الحمراء يساوي $\sqrt{2}$ وحدة.

b) بيانيًّا: زد طول القطعة المستقيمة الحمراء ليصبح $\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

c) تحليليًّا: استعمل الشكل الذي رسمته لتبين أن: $\sqrt{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{2+2}=2$.

d) بيانيًّا: استعمل الورقة النقطية لرسم مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$ وحدة.

e) عدديًّا: برهن على أن مساحة المربع تساوي $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ وحدة مربعة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 1422

مسائل مهارات التفكير العليا

45) اكتشف الخطأ: بسّط كلّ من خالد وناصر العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$، فأيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

خالد

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2}$$
$$= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$$
$$= 34\sqrt{2}$$

ناصر

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2}$$
$$= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$$
$$= 118\sqrt{2}$$

46) تحدٍّ: بيّن أن $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ هو جذر تكعيبي للعدد 1.

47) تبرير: ما قيم a، التي تجعل العبارة الجذرية $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$ عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر إجابتك.

48) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا غير الواحد الصحيح بحيث يكون كلٌّ من جذوره: التربيعي، والتكعيبي، والرابع عددًا كليًّا موجبًا.

49) اكتب: وضّح متى يكون وضع رمز القيمة المطلقة ضروريًّا، أو غير ضروري في ناتج تبسيط الجذر النوني لعبارة ما .

تدريب على اختبار

50) أيّ العبارات الجذرية الآتية تكافئ العبارة الجذرية $\sqrt{180a^2b^8}$؟

A $5\sqrt{6}|a|b^4$ **B** $6\sqrt{5}|a|b^4$ **C** $3\sqrt{10}|a|b^4$ **D** $36\sqrt{5}|a|b^4$

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

51) $\sqrt{81x^6}$ **52)** $\sqrt[3]{729a^3b^9}$ **53)** $\sqrt{(g+5)^2}$

54) مثّل المتباينة $y \le \sqrt{x-2}$ بيانيًّا. (مهارة سابقة)

حل كلَّ معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

55) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ **56)** $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$ **57)** $27x^3 + 1 = 0$

58) قوارب: تربح شركة لصناعة القوارب، 5000 ريال من صنع القارب الصغير، و 9000 ريال من صنع القارب الكبير. فإذا زاد عدد ما أنتجته الشركة من القوارب الصغيرة 5 قوارب على عدد القوارب الكبيرة خلال فصلي الصيف والربيع. وربحت مقابل ذلك 81000 ريال. فكم عدد القوارب التي أنتجتها الشركة من كل نوع؟ (مهارة سابقة)

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $3\left(\frac{1}{8}\right)$ **60)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ **61)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{5}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-6

الأسس النسبية
Rational Exponents

فيما سبق

درست استعمال خصائص الأسس. (مهارة سابقة)

والآن

- أكتب عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.
- أُبسّط عبارات أسية أو جذرية.

لماذا؟

يمكن أن تستعمل الصيغة $P = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتمادًا على التضخم المالي، حيث P يمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r يمثل معدَّل التضخم السنوي، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلًا يمكن أن تستعمل الصيغة:

$$P = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الثمن المستقبلي لجهاز تبريد ماء في ستة أشهر.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية: تعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أسًّا نسبيًّا كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$ اكتبه على صورة حاصل ضرب

$$= b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$ اجمع الأسس

$$= b^1 = b$$ بسّط

لذا فإن $b^{\frac{1}{2}}$ هو عدد مربعه يساوي b؛ إذن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{1}{n}}$)

التعبير اللفظي: لأيِّ عدد حقيقي b، وأيِّ عدد صحيح موجب n، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$، إلا إذا كانت $b < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر النوني يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$ ، $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

مثال 1 الصورتان الجذرية والأسية

a) اكتب $x^{\frac{1}{6}}$ على الصورة الجذرية.

b) اكتب $\sqrt[4]{z}$ على الصورة الأسّية.

تحقق من فهمك

1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية.

1B) اكتب $\sqrt[8]{c}$ على الصورة الأسّية

وبشكل عام يمكنك تقديم التعريف العام الآتي للأسس النسبية:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{x}{y}}$)

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = \left(\sqrt[y]{b}\right)^x$ لأيِّ عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا ، ولأي عددين صحيحين x, y بحيث $y > 1$، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًّا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركّبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{-16}\right)^3 = (4i)^3 = -64i$ $\quad 27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

كما أن القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية السالبة.

مثال 2 إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية

أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}}$ **b)** $216^{\frac{2}{3}}$

تحقق من فهمك

2A) $-3125^{-\frac{1}{5}}$ **2B)** $256^{\frac{3}{8}}$

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية

ثقافة مالية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وافترض أن الثمن الحالي لجهاز تبريد الماء هو 390 ريالًا. فكم سيزيد الثمن خلال ستة أشهر إذا كان معدَّل التضخم المالي السنوي 5.3% ؟

تحقق من فهمك

3) ثقافة مالية: افترض أن ثمن لتر الحليب الآن 4 ريالات. فكم سيزيد الثمن بعد تسعة أشهر، إذا كان معدَّل التضخم المالي السنوي 5.3%؟

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل عبارة على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحة موجبة؛ لذلك أنت في حاجة إلى إنطاق المقام أحيانًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 4 تبسيط عبارات بأسس نسبية

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

a) $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

b) $b^{-\frac{5}{6}}$

c) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تحوي أسسًا نسبية، اترك الأسس على الصورة النسبية بدلًا من كتابة العبارة على الصورة الجذرية.

تحقق من فهمك

4A) $p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}}$

4B) $r^{-\frac{4}{5}}$

4C) $\dfrac{y^{\frac{1}{2}} + 2}{y^{\frac{1}{2}} - 2}$

عند تبسيط عبارة جذرية اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكّر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

مثال 5 تبسيط العبارات الجذرية

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

b) $\sqrt[4]{9g^2}$

وزارة التعليم
Ministry of Education

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إرشادات للدراسة

العبارات الجذرية والأسية

اكتب العبارة بعد تبسيطها (الناتج النهائي) على الصورة التي كان عليها قبل التبسيط؛ أيْ إذا بدأت بعبارة جذرية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الجذرية، وإذا بدأت بعبارة تتضمن أسسًا نسبية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الأسية.

تحقق من فهمك

5A) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}}$ **5B)** $\sqrt[3]{16x^4}$

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

عبارات تتضمن أسسًا نسبية

تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا.
- دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

تأكد

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كلٍّ مما يأتي:

1) $10^{\frac{1}{4}}$ **2)** $x^{\frac{3}{5}}$ **3)** $\sqrt[3]{15}$ **4)** $\sqrt[4]{7x^6y^9}$

مثال 2 أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

5) $343^{\frac{1}{3}}$ **6)** $32^{-\frac{1}{5}}$ **7)** $125^{\frac{2}{3}}$ **8)** $\frac{24}{4^{\frac{3}{2}}}$

مثال 3 **9) قياس:** إذا علمت مساحة مربع هي A ، فإنه يمكن إيجاد طول ضلعه ℓ باستعمال القانون $\ell = A^{\frac{1}{2}}$. فإذا علمت أن مساحة حديقة مربعة الشكل 169m^2، فما طول ضلعها؟

المثالان 4, 5 بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

10) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ **11)** $\frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ **12)** $\frac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c}{b^{\frac{1}{3}}}$

13) $\sqrt[3]{64z^6}$ **14)** $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}}$ **15)** $\frac{g^{\frac{1}{2}} - 1}{g^{\frac{1}{2}} + 1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسّية في كلٍّ مما يأتي:

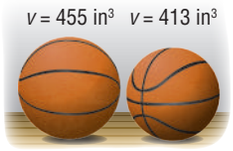
16) $8^{\frac{1}{5}}$ **17)** $(x^3)^{\frac{3}{2}}$ **18)** $\sqrt{17}$ **19)** $\sqrt[4]{625x^2}$

مثال 2 أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

20) $27^{\frac{1}{3}}$ **21)** $256^{\frac{1}{4}}$ **22)** $16^{-\frac{1}{2}}$ **23)** $(-27)^{-\frac{2}{3}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 3



24) كرة سلة: يوجد حجمان لكرة السلة؛ حجم كبير وآخر صغير، كما في الصورة جانبًا. فإذا كان نصف قطر الكرة r التي تسع V وحدة مكعبة من الهواء يُعبَّر عنه بالعلاقة $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$، فأجب عمَّا يأتي:

a) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الصغير.

b) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الكبير.

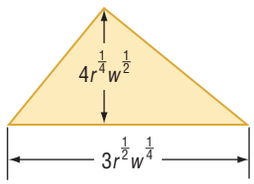
المثالان 4, 5

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

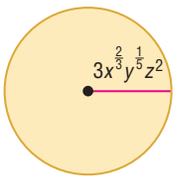
25) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$ **26)** $y^{-\frac{4}{5}}$ **27)** $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[6]{3}}$ **28)** $\sqrt[4]{25x^2}$ **29)** $\frac{x^{\frac{1}{4}} + 2}{x^{\frac{1}{4}} - 2}$

هندسة: أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي:

30)



31)



32) ما أبسط صورة للعبارة $18^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 32^{\frac{1}{2}}$ ؟

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

33) $a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}}$ **34)** $\left(y^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ **35)** $\sqrt[6]{216}$ **36)** $w^{-\frac{7}{8}}$

الربط مع الحياة

الطريقة الأكثر دقة لتحديد عمر بعض أنواع الغزلان هي النظر إلى مقطع عرضي لإحدى أسنانه، حيث تنمو كل فصل شتاء طبقة كلسية تكسو السن على شكل حلقة، وكل حلقة تمثل سنة كما هو الحال في حلقات جذع الشجرة.

37) محميات: إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا كان في المحمية 100 غزال، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبَّر عنه بالصيغة $D = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$، فأجب عما يأتي:

a) كم سيصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟

b) اعمل جدولًا يحدد عدد الغزلان في كل سنة من السنوات الخمس القادمة.

c) مثّل بيانيًّا بيانات الجدول الذي كوّنته في الفرع **b**.

d) قرِّر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني: هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

38) $\frac{f^{-\frac{1}{4}}}{4f^{\frac{1}{2}} \cdot f^{-\frac{1}{3}}}$ **39)** $\frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} + 2}$ **40)** $\frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ **41)** $\sqrt{23} \cdot \sqrt[3]{23^2}$

42) $\sqrt{\sqrt{81}}$ **43)** $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$ **44)** $\frac{xy}{\sqrt[3]{z}}$ **45)** $\frac{8^{\frac{1}{6}} - 9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

46) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال الدالتين:

$f(x) = x^3, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a) جدوليًّا: انسخ الجدول المجاور، وأكمله.

x	f(x)	g(x)
−2		
−1		
0		
1		
2		

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا كلًّا من: $g(x)$, $f(x)$.

c) لفظيًّا: ما التحويل الهندسي الذي يصف العلاقة بين تمثيليهما البيانيين؟

وزارة التعليم
Ministry of Education

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة $-x^{-2} = (-x)^{-2}$ صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك.

48) **اكتشف الخطأ:** بسَّط كل من محمود وعلي العبارة $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟

محمود

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$= x^{\frac{5}{4}}$$

علي

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}}$$
$$= x^{\frac{3}{2}}$$

49) **مسألة مفتوحة:** أوجد عبارتين مختلفتين على الصورة $x^{\frac{1}{a}}$ بحيث تكون قيمة كلٍّ منهما 2 .

50) **اكتب:** وضِّح كيف يمكن أن يكون استعمال الأسس النسبية لتبسيط عبارة أسهل من استعمال الجذور.

تدريب على اختبار

51) تكون العبارة $\sqrt{56-c}$ مساويةً لعدد صحيح موجب عندما تكون قيمة c هي:

A 8 **B** -8 **C** 56 **D** 36

52) ما قيمة p التي تحقق المعادلة: $p = 3^3 \cdot 3^5$؟

A 2^{-3} **B** 3^{-2} **C** 3^2 **D** 2^3

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 5-4)

53) $\sqrt{243}$ **54)** $\sqrt[3]{16y^3}$ **55)** $3\sqrt[3]{56y^6z^3}$

56) **فيزياء:** تعطى سرعة الصوت في سائل بالعلاقة $s = \sqrt{\frac{B}{d}}$، حيث B معامل تغيّر حجم السائل، d كثافة السائل. أما بالنسبة للماء، فإن $B = 2.1 \times 10^9\ \text{N/m}^2, d = 10^3\ \text{kg/m}^3$. أوجد سرعة الصوت في الماء لأقرب متر لكل ثانية. (الدرس: 5-4)

أوجد $p(x+h), p(-4)$ لكلِّ دالة مما يأتي: (مهارة سابقة)

57) $p(x) = x - 2$ **58)** $p(x) = -x + 4$ **59)** $p(x) = 6x + 3$

60) $p(x) = x^2 + 5$ **61)** $p(x) = x^2 - x$ **62)** $p(x) = 2x^3 - 1$

أوجد $(\frac{f}{g})(x), (f.g)(x), (f-g)(x), (f+g)(x)$ لكلِّ دالتين فيما يأتي: (الدرس: 1-4)

63) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$ **64)** $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8 - x$

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي: (الدرس: 5-4)

65) $(\sqrt{x-3})^2$ **66)** $(\sqrt[3]{3x-4})^3$ **67)** $(2\sqrt{x}-5)^2$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-7

حل المعادلات والمتباينات الجذرية
Solving Radical Equations and Inequalities

فيما سبق

درست حل معادلات كثيرات الحدود. (مهارة سابقة)

والآن

- أحل معادلات تحتوي جذورًا.
- أحل متباينات تحتوي جذورًا.

المفردات

المعادلة الجذرية
radical equation

الحل الدخيل
extraneous solution

المتباينة الجذرية
radical inequality

لماذا؟

عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمنًا معينًا في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام، وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$.

إذا عُلم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريبًا، فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزته؟

حل المعادلات الجذرية : تحتوي **المعادلات الجذرية** على عبارات جذرية يكون المتغير فيها تحت الجذر. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين.

مفهوم أساسي

حل المعادلات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.

الخطوة 2: ارفع طرفَي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر.

الخطوة 3: حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلًّا دخيلًا**.

مثال 1

حل معادلات جذرية

حلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $\sqrt{x+2} + 4 = 7$

b) $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتحقق من حل المعادلة، مثِّل كل طرف من أطراف المعادلة الأصلية بيانيًّا، ثم ابحث عن نقاط التقاطع.

تحقق:

تحقق من فهمك

(1A $5 = \sqrt{x-2} - 1$

(1B $\sqrt{x+15} = 5 + \sqrt{x}$

للتخلص من الجذر التربيعي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 2، وللتخلص من الجذر التكعيبي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 3.

مثال 2 حل معادلة جذر تكعيبي

حل المعادلة: $2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$.

تحقق من فهمك

(2A $(3n+2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$

(2B $3(5y-1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أيًّا كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي عبارة ارفعه للأس n.

مثال 3 على اختبار

ما حلُّ المعادلة $3(\sqrt[4]{2n+6})-6=0$؟

A -1 **B** 1 **C** 5 **D** 11

إرشادات الاختبار

تعويض البدائل

يمكنك أيضًا حلّ سؤال الاختبار بتعويض كل البدائل المعطاة لقيمة n في المعادلة، لاختيار الحلّ الصحيح منها وهو الذي يحقق المعادلة.

تحقق من فهمك

3) $4(3x+6)^{\frac{1}{4}}-12=0$

A $x=7$ **B** $x=25$ **C** $x=29$ **D** $x=37$

حلُّ المتباينات الجذرية: **المتباينة الجذرية** هي متباينة تحوي عبارات جذرية، ويكون المتغير فيها تحت الجذر. ولحلّ متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

حلُّ المتباينات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا، فعيِّن قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.

الخطوة 2: حل المتباينة جبريًّا.

الخطوة 3: حدّد حل المتباينة من الخطوتين السابقتين، ثم اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل.

إرشادات الاختبار

المتباينات الجذرية

- بما أن الجذر التربيعي الرئيس لا يكون سالبًا أبدًا، فإن المتباينات التي تبسط إلى الصورة: $\sqrt{ax+b}\le c$ حيث c عدد سالب، ليس لها حل، والتي تُبسَّط إلى الصورة $\sqrt{ax+b}>c$ تكون مجموعة حلها هي مجموعة الأعداد الحقيقية.
- إذا كان طرفا المتباينة موجبين، فإنه يمكنك تربيع الطرفين مع بقاء الرمز $\le$ كما هو.

مثال 4

حل المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $3+\sqrt{5x-10}\le 8$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

تحقق من فهمك

4A) $\sqrt{2x+2}+1 \geq 5$

4B) $\sqrt{4x-4}-2 < 4$

تأكد

المثالان 1, 2 حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

1) $\sqrt{x-4}+6=10$

2) $\sqrt{x+13}-8=-2$

3) $8-\sqrt{x+12}=3$

4) $\sqrt[3]{x-2}=3$

5) $(x-5)^{\frac{1}{3}}-4=-2$

6) $(4y)^{\frac{1}{3}}+3=5$

7) $\sqrt{y}-7=0$

8) $2+4z^{\frac{1}{2}}=0$

9) $5+\sqrt{4y-5}=12$

10) $\sqrt{2t-7}=\sqrt{t+2}$

11) فيزياء: يعطى الزمن الدوري للبندول بالصيغة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T الزمن الدوري للبندول بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، والذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانيةٍ مربعةٍ.

a) ما الزمن الدوري لبندول ضخم طوله 73 ft ؟

b) يريد صانع ساعات أن يصنع بندولًا يستغرق 5 s لإتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

مثال 3 **12) اختيار من متعدد:** حلّ المعادلة $(2y+6)^{\frac{1}{4}}-2=0$ هو:

A $y=1$ **B** $y=5$ **C** $y=11$ **D** $y=15$

مثال 4 حلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

13) $\sqrt{3x+4}-5 \leq 4$

14) $\sqrt{b-7}+6 \leq 12$

15) $2+\sqrt{4y-4} \leq 6$

16) $\sqrt{3a+3}-1 \leq 2$

17) $1+\sqrt{7x-3} > 3$

18) $\sqrt{3x+6}+2 \leq 5$

19) $-2+\sqrt{9-5x} \geq 6$

20) $6-\sqrt{2y+1} < 3$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

21) $6+\sqrt{3x+1}=11$

22) $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$

23) $\sqrt{x-15}=3-\sqrt{x}$

24) $2+\sqrt{3y-5}=10$

25) $\sqrt{7a-2}=\sqrt{a+3}$

26) $\sqrt{b-6}+\sqrt{b}=3$

27) فيزياء: تصف الصيغة: $t=\frac{1}{4}\sqrt{d-h}$ الزمن t بالثواني اللازم لوصول جسم إلى الارتفاع h عن سطح الأرض عند سقوطه من ارتفاع قدره d متر عن سطح الأرض، إذا سقطت مفاتيح بدر من ارتفاع 65 m من أعلى العجلة الدوارة في مدينة الألعاب، فما ارتفاع المفاتيح عن سطح الأرض بالأمتار بعد مرور ثانيتين؟

مثال 2 حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

28) $(5n-6)^{\frac{1}{3}}+3=4$

29) $(6q+1)^{\frac{1}{4}}+2=5$

30) $(4z-1)^{\frac{1}{5}}-1=2$

31) $3(x+5)^{\frac{1}{3}}-6=0$

32) $\sqrt[3]{4n-8}-4=0$

33) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}}=1$

مثال 3 **34) اختيار من متعدد:** حَلّ المعادلة: $\sqrt[4]{y+2}+9=14$ هو:

A 23 **B** 53 **C** 123 **D** 623

مثال 4 حُلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

35) $\sqrt{2x+14}-6\geq 4$

36) $10-\sqrt{2x+7}\leq 3$

37) $6+\sqrt{3y+4}<6$

38) $\sqrt{2y+5}+3\leq 6$

39) $-2+\sqrt{8-4z}\geq 8$

40) $-3+\sqrt{6a+1}>4$

41) فيزياء: الصيغة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ تُمثل الزمن الدوري للبندول بالثواني، حيث L طول البندول بالأقدام. احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 ثانية لإتمام دورته.

42) أسماك: يمكن تقريب العلاقة بين طول سمكة وكتلتها بالمعادلة: $L=0.46\sqrt[3]{M}$، حيث L الطول بالأمتار، M الكتلة بالكيلوجرامات. حلّ هذه المعادلة بالنسبة للمتغير M.

43) زمن التحليق: عُد إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وصف كيف يرتبط ارتفاع القفزة بزمن التحليق. واكتب توضيحًا مفصلًا لكيفية تحديد ارتفاع قفزةٍ زمنُ تحليقها 0.98 ثانية.

44) رفع الأثقال: يمكن استعمال الصيغة $M=512-146230B^{-\frac{8}{5}}$؛ لتقدير الكتلة العظمى M التي يستطيع رافع أثقال كتلته B كيلوجرام رفعها. استخدم هذه الصيغة في إيجاد كتلة رافع أثقال يستطيع رفع 470 kg على الأكثر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

45) تحدٍّ: قالت عائشة: إنه بإمكانها الحكم بعدم وجود حلٍّ حقيقي للمعادلة $(x+5)^{\frac{1}{4}}=-4$ دون حلها. فهل ما تقوله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

46) أي معادلة مما يأتي ليس لها حلٌّ؟

$\sqrt{x-1}+3=4$	$\sqrt{x+1}+3=4$
$\sqrt{x-2}+7=10$	$\sqrt{x+2}-7=-10$

47) **تبرير:** حدد ما إذا كانت $x=\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x}$ ، صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وذلك إذا كان x عددًا حقيقيًّا. ووضِّح إجابتك.

48) **مسألة مفتوحة:** اختر عددًا كليًّا، واعمل بشكل عكسي، لكتابة معادلتين جذريتين يكون حلّهما ذلك العدد الكلي، بحيث تكون إحداهما معادلة جذر تربيعي، والأخرى معادلة جذر تكعيبي.

49) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة يمكن حلّها برفع كلا الطرفين للأس المعطى:

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{7}{8}$

50) **تحدٍّ:** حَلّ المعادلة: $7^{3x-1}=49^{x+1}$. (إرشاد: $b^x=b^y$ إذا وفقط إذا كان $x=y$).

51) **اكتب:** وضِّح العلاقة بين دليل جذر المتغير في المعادلة الجذرية والأس الذي ترفع طرفي المعادلة له عند حلّها.

تدريب على اختبار

52) أيُّ المجموعات الآتية تمثل دالة؟

A $\{(3,0),(-2,5),(2,-1),(2,9)\}$

B $\{(-3,5),(-2,3),(-1,5),(0,7)\}$

C $\{(2,5),(2,4),(2,3),(2,2)\}$

D $\{(3,1),(-3,2),(3,3),(-3,4)\}$

53) **إجابة قصيرة:** محيط مثلث متطابق الضلعين 56 in. فإذا كان طول أحد الضلعين المتطابقين 20 in، فما طول الضلع الثالث؟

54) ما حلّ المعادلة $\sqrt{x+5}+1=4$ ؟

A 4 **B** 10 **C** 11 **D** 20

مراجعة تراكمية

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس: 6-4)

55) $27^{-\frac{2}{3}}$ **56)** $9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{5}{3}}$ **57)** $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

58) **هندسة:** العبارتان $8x^2y^2$ ، $4x^2y^2$ تمثلان طولي ساقي الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية، أوجد عبارةً ثالثةً تمثل طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس، ثم بسّطها. (الدرس: 6-4)

أوجد معكوس كلِّ دالةٍ مما يأتي: (الدرس: 2-4)

59) $y=3x-4$ **60)** $y=-2x-3$ **61)** $y=x^2$ **62)** $y=(2x+3)^2$

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

63) $\frac{3}{10}=\frac{12}{25}a$ **64)** $\frac{6}{7}=9m$ **65)** $\frac{9}{8}b=18$ **66)** $\frac{1}{3}p=\frac{5}{6}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العمليات على الدوال. (الدرس 4-1)

العملية	التعريف
الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$
التركيب	$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

العلاقات والدوال العكسية ودوال الجذر التربيعي
(الدرسان 4-2, 4-3)

- اعكس إحداثيات الأزواج المرتبة لتجد العلاقة العكسية.
- تكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان كل من تركيبيهما يساوي الدالة المحايدة.
- الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي هي $f(x)=\sqrt{x}$ ومجالها هو $\{x \mid x \geq 0\}$ ومداها $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

الجذور النونية للأعداد الحقيقية (الدرس 4-4)

الجذور الحقيقية النونية للعدد a			
n	a > 0	a < 0	a = 0
عدد زوجي	له جذر وحيد موجب وله جذر وحيد سالب	ليس له جذور حقيقية	له جذر حقيقي وحيد وهو 0
عدد فردي	له جذر وحيد موجب وليس له جذور سالبة	ليس له جذور موجبة وله جذر وحيد سالب	

العبارات الجذرية (الدروس 4-5 إلى 4-7)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، وَ n, x, y أعداد صحيحة حيث $b \neq 0, n>1, y>1$ يُعد كل مما يأتي صحيحًا، وذلك عندما تكون جميع الجذور معرفة.

- خاصية الضرب: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
- خاصية القسمة: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- الأسس النسبية: $b^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{b^x}=\left(\sqrt[y]{b}\right)^x$.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

تركيب دالتين ص 13
العلاقة العكسية ص 19
دالة عكسية ص 19
دالة الجذر التربيعي ص 25
الدالة الجذرية ص 25
متباينة الجذر التربيعي ص 27
الجذر النوني ص 30
رمز الجذر ص 30
الدليل ص 30
ما تحت الجذر ص 30
الجذر الرئيس ص 30
إنطاق المقام ص 38
الجذور المتشابهة ص 39
المرافق ص 40
المعادلة الجذرية ص 49
الحل الدخيل ص 49
المتباينة الجذرية ص 51

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) عند _____ ، تستعمل قيم دالة منهما لحساب قيم الدالة الأخرى.

2) عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، فإن الجذر غير السالب يُسمّى _____.

3) للتخلص من الجذور في المقام، فإنك تستعمل عملية تُسمّى _____.

4) عند حل معادلات جذرية، تحصل أحيانًا على عدد لا يحقق المعادلة الأصلية. ويُسمّى مثل هذا العدد _____.

5) دالة الجذر التربيعي هي نوع من أنواع _____.

6) _____ هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي نحصل عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة الأصلية.

7) إذا ساوى كل من تركيبي دالتين الدالةَ المحايدةَ فإن كلتيهما تكون _____ للأخرى.

8) تعد $\sqrt{x-3}>5$ مثالًا على: _____

مراجعة الدروس

4-1 العمليات على الدوال ص 12-18

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ لكلٍّ مما يأتي:

9) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x - 5$

10) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 7$

11) $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 1$

12) $f(x) = 4x$, $g(x) = 5x - 1$

13) قياسات: تستعمل الصيغة $f = 3y$ لتحويل الياردات y إلى أقدام f، كذلك تستعمل الصيغة $f = \frac{n}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدام f. اكتب الصيغة التي تحول الياردات إلى بوصات.

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 3x - 2$ فأوجد كلًّا من $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ — عوّض عن $f(x)$ بالمقدار $x^2 + 3$

$= g(x^2 + 3)$

$= 3(x^2 + 3) - 2$

$= 3x^2 + 9 - 2$ — اضرب

$= 3x^2 + 7$ — بسّط

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ — عوّض عن $g(x)$ بالمقدار $3x - 2$

$= f(3x - 2)$

$= (3x - 2)^2 + 3$

$= 9x^2 - 12x + 4 + 3$ — اضرب

$= 9x^2 - 12x + 7$ — بسّط

4-2 العلاقات والدوال العكسية ص 19-23

أوجد معكوس كلِّ دالة مما يأتي، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد. وبيِّن ما إذا كان معكوس الدالة يمثِّل دالة أم لا، وإذا كان كذلك فاكتب قاعدة الدالة العكسية.

14) $f(x) = 5x - 6$

15) $f(x) = -3x - 5$

16) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

17) $f(x) = \frac{4x + 1}{5}$

18) $f(x) = x^2$

19) $f(x) = (2x + 1)^2$

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدّد هل كل دالة تمثل داالة عكسية للأخرى أم لا، ووضّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 2$

21) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$

22) ثقافة مالية: قام عبدالله بالنشاطات المالية الآتية خلال الشهر الماضي: أودع مبلغًا يعادل مثلي رصيده الأصلي، ثم أودع مبلغين قيمة كل منهما 450 ريالًا، ثم سحب مبلغ 350 ريالًا خمس مرات من رصيده. إذا كان رصيده الآن 1890 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة، وماذا كان رصيده في بداية الشهر؟

مثال 2

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = -2x + 7$.

ضع المتغير y بدلًا من رمز الدالة $f(x)$: $y = -2x + 7$، ثم قم بالتبديل بين المتغيرين x , y، وحل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = -2y + 7$ — بالتبديل بين المتغيرين

$2y = -x + 7$ — بالحل بالنسبة للمتغير y

$y = \frac{-x + 7}{2}$ — اقسم الطرفين على 2

$f^{-1}(x) = \frac{-x + 7}{2}$ — ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y؛ لأن معكوس الدالة $f(x)$ هو دالة أيضًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مراجعة الدروس

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي ص 25-29

مثّل بيانيًّا كلَّ دالة فيما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

23) $f(x) = \sqrt{3x}$

24) $f(x) = -\sqrt{6x}$

25) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

26) $f(x) = \sqrt{x + 5} - 3$

27) $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x - 1} + 5$

28) $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x + 4} - 1$

29) هندسة: يُعبَّر عن مساحة الدائرة بالقانون $A = \pi r^2$. حيث r نصف قطرها. فما قيمة نصف قطر دائرة مساحتها $300\,\text{cm}^2$؟

مثّل بيانيًّا كلَّ متباينة فيما يأتي:

30) $y \geq \sqrt{x} + 3$

31) $y < 2\sqrt{x - 5}$

32) $y > -\sqrt{x - 1} + 2$

مثال 3

مثِّل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \sqrt{x + 1} - 2$، وحدّد مجالها ومداها.

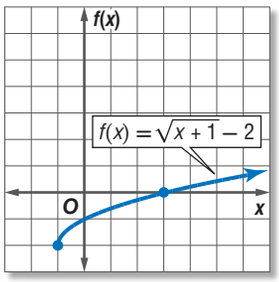
تحديد المجال:

$x + 1 \geq 0$ ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

$x \geq -1$ اطرح العدد 1 من الطرفين.

اعمل جدولًا لبعض قيم المتغير x، حيث $x \geq -1$، ومثّل الدالة بيانيًّا.

x	f(x)
−1	−2
0	−1
1	−0.59
2	−0.27
3	0
4	0.24
5	0.45



المجال هو $\{x | x \geq -1\}$، والمدى هو $\{f(x) | f(x) \geq -2\}$.

4-4 الجذر النوني ص 30-34

بسّط كلًّا مما يأتي:

33) $\pm\sqrt{121}$

34) $\sqrt[3]{-125}$

35) $\sqrt{(-6)^2}$

36) $\sqrt[6]{(x^2 + 2)^{18}}$

37) $\sqrt[3]{27(x + 3)^3}$

38) $\sqrt[4]{a^8 b^{12}}$

39) $\sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$

40) فيزياء: تستعمل الصيغة $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ لحساب سرعة جسم v، حيث v السرعة بالأمتار لكل ثانية، m كتلة الجسم بالجرام، K الطاقة الحركية بالجول. أوجد السرعة بالأمتار لكل ثانية لجسم كتلته 17 جرامًا وطاقته الحركية 850 جولًا.

مثال 4

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{64x^6}$

$\sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2}$ $64x^6 = (8x^3)^2$

$= 8|x^3|$ بسّط

استعمل رمز القيمة المطلقة لتجنب القيم السالبة للمتغير x.

مثال 5

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}}$

$\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}} = \sqrt[6]{(4x^2y^4)^6}$ $4096x^{12}y^{24} = (4x^2y^4)^6$

$= 4x^2y^4$ بسّط

4-5 العمليات على العبارات الجذرية ص 37-42

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

41) $\sqrt[3]{54}$

42) $\sqrt{144a^3b^5}$

43) $4\sqrt{6y} \cdot 3\sqrt{7x^2y}$

44) $6\sqrt{72} + 7\sqrt{98} - \sqrt{50}$

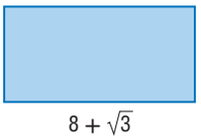
45) $(6\sqrt{5} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$

46) $\dfrac{\sqrt{6m^5}}{\sqrt{p^{11}}}$

47) $\dfrac{3}{5 + \sqrt{2}}$

48) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}$

49) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه ومساحته.



مثال 6

بسّط العبارة $2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$= (2 \cdot 3)\sqrt[3]{18a^2b \cdot 12ab^5}$ خاصية ضرب الجذور

$= 6\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}$ حلّل إلى العوامل

$= 6 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ أوجد الجذر التكعيبي

$= 36ab^2$ بسّط

مثال 7

بسّط العبارة $\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}}$

$\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}} = \dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^5}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \dfrac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^2)^2} \cdot \sqrt{y}}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \dfrac{x^2}{y^2\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ أنطق المقام

$= \dfrac{x^2\sqrt{y}}{y^3}$ $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

4-6 الأسس النسبية ص 43-48

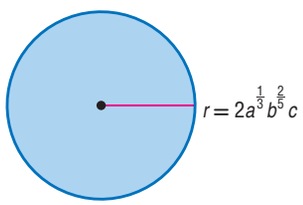
بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

50) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ **51)** $m^{-\frac{3}{4}}$ **52)** $\dfrac{d^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{3}{4}}}$

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

53) $\dfrac{1}{y^{\frac{1}{4}}}$ **54)** $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ **55)** $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

56) هندسة: ما مساحة الدائرة في الشكل أدناه؟



مثال 8

بسّط العبارة $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}$

$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{13}{15}}$ اجمع الأسس

مثال 9

بسّط العبارة $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}}$

$\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}$ اكتب العبارة على الصورة الأسية

$= \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ أنطق المقام

$= \dfrac{2ab^{\frac{2}{3}}}{b} = \dfrac{2a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ اكتب العبارة على الصورة الجذرية

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

57) $\sqrt{x-3}+5=15$

58) $-\sqrt{x-11}=3-\sqrt{x}$

59) $4+\sqrt{3x-1}=8$

60) $\sqrt{m+3}=\sqrt{2m+1}$

61) $\sqrt{2x+3}=3$

62) $(x+1)^{\frac{1}{4}}=-3$

63) $a^{\frac{1}{3}}-4=0$

64) $3(3x-1)^{\frac{1}{3}}-6=0$

65) فيزياء: تُعطى المسافة الأفقية d بالكيلومترات التي يمكن أن يراها شخص بالعلاقة $d=3.57\sqrt{L}$، حيث L تمثل ارتفاع النقطة التي ينظر منها الشخص عن الأرض ويقاس بالأمتار. فإذا كانت المسافة الأفقية التي يراها شخص هي 71.4 كيلومترًا، فكم مترًا ترتفع النقطة التي ينظر منها الشخص عن الأرض؟

حُلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

66) $2+\sqrt{3x-1}<5$

67) $\sqrt{3x+13}-5\geq 5$

68) $6-\sqrt{3x+5}\leq 3$

69) $\sqrt{-3x+4}-5\geq 3$

70) $5+\sqrt{2y-7}<5$

71) $3+\sqrt{2x-3}\geq 3$

72) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6+x}>0$

مثال 10

حُلّ المعادلة الجذرية $\sqrt{2x+9}-2=5$

$\sqrt{2x+9}-2=5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{2x+9}=7$	أضف 2 للطرفين
$(\sqrt{2x+9})^2=7^2$	ربّع الطرفين
$2x+9=49$	أوجد مربع الطرفين
$2x=40$	اطرح 9 من الطرفين
$x=20$	اقسم الطرفين على 2

تحقق: $\sqrt{2\times 20+9}-2\stackrel{?}{=}5$ ✓

مثال 11

حل المتباينة $\sqrt{2x-5}+2>5$.

$2x-5\geq 0$	ما تحت الجذر ليس سالبًا
$2x\geq 5$	أضف 5 للطرفين
$x\geq 2.5$	اقسم الطرفين على 2

يجب أن يكون الحلّ أكبر من أو يساوي 2.5 لينتمي إلى المجال.

$\sqrt{2x-5}+2>5$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{2x-5}>3$	اطرح 2 من الطرفين
$(\sqrt{2x-5})^2>3^2$	ربّع الطرفين
$2x-5>9$	أوجد مربع الطرفين
$2x>14$	أضف 5 للطرفين
$x>7$	اقسم الطرفين على 2

بما أن $x\geq 2.5$ تحوي $x>7$، فإن حل المتباينة هو $x>7$.

تحقق: $x=0,\ \sqrt{2\times 0-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✗ $\sqrt{-5}+2>5$

وبما أن $\sqrt{-5}$ ليس عددًا حقيقيًّا، فإن المتباينة لا تتحقق.

$x=8,\ \sqrt{2\times 8-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✓ $\sqrt{11}+2>5$

وبما أن $5.3>5$، فإن المتباينة تتحقق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 2022

اختبار الفصل

في كلِّ زوج ممَّا يأتي، حدِّد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

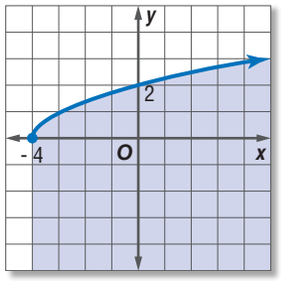
1) $f(x)=3x+8, g(x)=\frac{x-8}{3}$

2) $f(x)=\frac{1}{3}x+5, g(x)=3x-15$

3) $f(x)=x+7, g(x)=x-7$

4) $f(x)=\frac{x-2}{3}, g(x)=3x-2$

5) **اختيار من متعدد:** أيُّ المتباينات الآتية لها التمثيل البياني الظاهر في الشكل أدناه؟



A $y \geq \sqrt{x+4}$ C $y \geq \sqrt{x-4}$

B $y \leq \sqrt{x+4}$ D $y \leq \sqrt{x-4}$

إذا كان $f(x)=3x+2, g(x)=x^2-2x+1$ فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

6) $(f+g)(x)$ **7)** $(f \cdot g)(x)$

8) $(f-g)(x)$ **9)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

10) $\sqrt{a+12}=\sqrt{5a-4}$

11) $\sqrt{3x}=\sqrt{x-2}$

12) $4(\sqrt[4]{3x+1})-8=0$

13) $\sqrt[3]{5m+6}+15=21$

14) $1+\sqrt{x+11}=\sqrt{2x+15}$

15) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x}=3$

16) **اختيار من متعدد:** قيمة العبارة $125^{-\frac{1}{3}}$ هي:

A -5 B $-\frac{1}{5}$ C $\frac{1}{5}$ D 5

بسّط كلًّا مما يأتي:

17) $(2+\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})$ **18)** $(3-2\sqrt{2})(-7+\sqrt{2})$

19) $\frac{12}{2-\sqrt{3}}$ **20)** $\frac{m^{\frac{1}{2}}-1}{2m^{\frac{1}{2}}+1}$

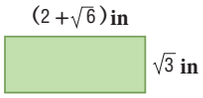
21) $4\sqrt{3}-8\sqrt{48}$ **22)** $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{6}}$

23) $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$ **24)** $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$

25) $w^{-\frac{4}{5}}$ **26)** $\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{6}}}$

27) $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$ **28)** $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}+2}$

29) **اختيار من متعدد:** ما مساحة المستطيل في الشكل أدناه؟



A $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ وحدة مربعة

B $4+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ وحدة مربعة

C $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ وحدة مربعة

D $2\sqrt{3}+3$ وحدة مربعة

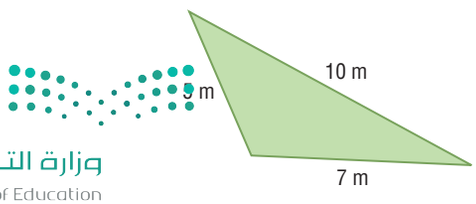
حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

30) $\sqrt{4x-3}<5$ **31)** $2+\sqrt{4x-4} \leq 6$

32) $\sqrt{2x+3}-4 \leq 5$ **33)** $\sqrt{b+12}-\sqrt{b}>2$

34) $\sqrt{y-7}+5 \geq 10$

35) **قانون هيرو (HERO):** يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c باستعمال قانون هيرو: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.
اكتب مساحة المثلث في الشكل أدناه على الصورة الجذرية في أبسط صورة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الحل عكسيًّا

تعطي بعض مسائل الرياضيات معلومات عن النتيجة النهائية، وتتطلب استنتاج بعض الأمور التي حدثت مسبقًا. ويمكنك في مثل هذه المسائل الحل باستعمال استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجية الحل عكسيًّا:

خطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المعلومات المعطاة؟
- ما المطلوب إيجاده؟
- هل توجد معطيات ترتبط بالنتيجة النهائية؟
- هل المطلوب هو إحدى القيم غير المعطاة، والتي لم تذكر في نص المسألة؟
- ما العمليات المستعملة في المسألة؟

خطوة 2

عبِّر عن المسألة بما يناسبها: معادلة أو متباينة أو تمثيل بيانيٌّ، ثم اعمل عكسيًّا لحلّ المسألة.

- مثّل تتابع الأحداث بمخطط حسب نص المسألة إذا تطلب الأمر ذلك.
- استعمل العملية العكسية لكلِّ عملية أثناء الحل عكسيًّا لتصل إلى الإجابة.

خطوة 3

تحقق من صحة الحل مبتدئًا بإجابتك التي حصلت عليها، وتأكد من أنك ستصل إلى النتيجة المعطاة في نص المسألة نفسها؟

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

اشترى عبدالرحمن سيارة مستعملة. فكان مجموع ما دفعه 39540 ريالًا. ويتضمن ذلك المبلغ رسوم نقل الملكية وهي 150 ريالاً، وعمولة مكتب الوساطة وهي 1% من ثمن السيارة. فما ثمن السيارة؟ بين خطوات الحلّ.

اقرأ المسألة بعناية. أنت تعلم المبلغ الذي دفعه عبد الرحمن بما فيه رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب .

والمطلوب هو إيجاد ثمن السيارة قبل إضافة رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب.

افترض أن x تمثل ثمن السيارة. اكتب معادلة، واستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا لحلها.

التعبير اللفظي: ثمن السيارة مضاف إليه رسوم نقل الملكية وعمولة مكتب الوساطة يساوي المبلغ الذي دفعه عبدالرحمن.

المتغير: x = ثمن السيارة.

المعادلة: $x + 0.01x + 150 = 39540$

ينتج عن استعمال استراتيجية الحل عكسيًّا معادلة بسيطة. استعمل العمليات العكسية لإيجاد قيمة x.

$$1.01x + 150 = 39540$$
$$1.01x = 39390$$
$$x = 39000$$

تحقق من صحة حلّك بالبدء بالإجابة التي حصلت عليها؛ لتتأكد من أنك ستحصل على القيمة نفسها المعطاة في نص المسألة.

$39000(1.01) = 39390$ أوجد عمولة مكتب الوساطة

$39390 + 150 = 39540$ اجمع رسوم نقل الملكية

$39540 = 39540$ القيمة نفسها المعطاة

لذا فإن ثمن السيارة هو 39000 ريال.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألتين الآتيتين جيدًا، وحدد المطلوب في كلٍّ منها، ثم استعمل معطياتها لحلِّها:

1) قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 800ft/s. إذا كان ارتفاع الجسم h بالأقدام بعد t ثانية فإنه يُعبَّر عنه بالمعادلة: $h = -16t^2 + 800t$.
فبعد كم ثانية يصل الجسم إلى ارتفاع 10000ft؟

A 10 ثوانٍ

B 25 ثانية

C 100 ثانية

D 625 ثانية

2) يقوم عليٌّ بعمل نموذج لسيارة مستعملًا مقياس رسم، فوجد أن ارتفاع نموذج السيارة يعادل $\frac{1}{32}$ من ارتفاع السيارة الحقيقي x. فأيُّ المعادلات الآتية تمثّل هذه العلاقة؟

A $y = x - \frac{1}{32}$ **C** $y = \frac{1}{32}x$

B $y = \frac{1}{32}x$ **D** $y = x + \frac{1}{32}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الفصل 4

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يقدم محل خصمًا نسبته 20% على جميع لوازم التخييم. ويملك بدر قسيمة حسم إضافية بقيمة 5 ريالات عند أيّ عملية شراء من المحل. إذا استعمل بدر القسيمة بعد الخصم لشراء خيمة، فأيُّ الدوال الآتية يمكن أن تستعمل لإيجاد سعر خيمة سعرها الأصلي d ريالًا؟

A $P(d) = 0.8 \times (d + 5)$

B $P(d) = (0.8 \times d) - 5$

C $P(d) = 0.2 \times (d - 5)$

D $P(d) = 0.8 \times (d - 5)$

2) أيُّ العبارات الآتية تكافئ: $3a(2a+1)-(2a-2)(a+3)$؟

A $2a^2 + 6a + 7$

B $4a^2 - a + 6$

C $4a^2 + 6a - 6$

D $4a^2 - 3a + 7$

3) اشترى سلمان سيارة مستعملة، أضيف إلى ثمنها 6.5% بدل صيانة دورية، ودفع 150 ريالًا رسوم نقل الملكية، أوجد ثمن السيارة إذا كان مجموع ما دفعه سلمان 68310 ريال.

A 64140

B 68000

C 64000

D 68160

4) ما أبسط صورة للعبارة: $\sqrt[3]{-27b^6c^{12}}$.

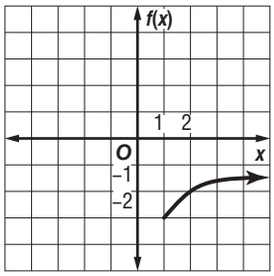
A $-3b^3c^6$

B $-3b^2c^4$

C $3b^2c^4$

D $3b^3c^6$

5) أيّ دوال الجذر التربيعي الآتية لها التمثيل البياني في الشكل المجاور؟



A $f(x) = \sqrt{x - 3} - 1$

B $f(x) = \sqrt{x + 1} - 3$

C $f(x) = \sqrt{x + 3} + 1$

D $f(x) = \sqrt{x - 1} - 3$

6) ما حَلُّ المعادلة: $\sqrt[3]{5x} = 10$ ؟

A 2

B 20

C 200

D 1000

7) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = x - 5$.

A $f^{-1}(x) = x + 5$

B $f^{-1}(x) = 5x$

C $f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$

D $f^{-1}(x) = 5 - x$

8) أيُّ المعادلات الآتية لها جذران نسبيان مختلفان؟

I. $3x^2 + x - 2 = 0$

II. $x^2 - 2x + 1 = 0$

III. $x^2 + 2x + 5 = 0$

A I فقط

B II فقط

C II، III فقط

D I، III فقط

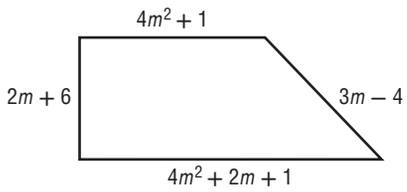
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

9) مثّل الدالة $f(x) = |x + 2|$ بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها.

10) قُذف جسم من منصة إلى أعلى. وتستعمل الصيغة الآتية $h = -16t^2 + 40t + 70$ لإيجاد ارتفاع الجسم h بالأقدام عن سطح الأرض بعد مرور t ثانية من لحظة القذف. فما أعلى ارتفاع يصل إليه الجسم؟

11) إذا كان محيط الشكل الرباعي أدناه 160 وحدة، فما قيمة m؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

12) عمر أب وابنه 56 عامًا فإذا كان عمر الأب يزيد على مثلي عمر الابن بـ 20 عامًا:

a) اكتب نظامًا من المعادلات الخطية يمثل المسألة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن استعمالها لحل النظام في a

c) أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، وحل المعادلة المصفوفية لإيجاد عمر كل من الأب وابنه.

13) إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين كل منهما دالة عكسية للأخرى،

a) صف التمثيل البياني لكلتا الدالتين $f(x)$, $g(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

b) ما قيمة $f[g(2)]$ ؟ وضح إجابتك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا أخطأت في السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	4-1	مهارة سابقة	4-2	4-3	4-3	4-7	4-2	مهارة سابقة	مهارة سابقة	4-7	مهارة سابقة	مهارة سابقة	4-2