

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



المملكة العربية السعودية

الرياضيات ٢-١

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الأولى المشتركة

الفصل الدراسي الثاني



قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

طبعة ١٤٤٤ - ٢٠٢٢

المثلثات المتطابقة

Congruent Triangles

الفصل 3

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة
والزوايا والعلاقات بين
قياساتها.

والآن:

- أطبق العلاقات الخاصة
بالزوايا الداخلية والزوايا
الخارجية للمثلثات.
- أحدد العناصر المتناظرة في
مثلثات متطابقة، وأبرهن
على تطابق المثلثات.
- أعرف خصائص المثلثات
المتطابقة الضلعين
والمثلثات المتطابقة
الأضلاع.

لماذا؟

لياقة: تستعمل المثلثات
لتقوية إنشاءات ومعدات كثيرة،
من بينها أجهزة اللياقة البدنية
مثل هياكل الدراجات.



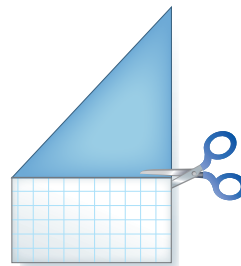
المثلثات المتطابقة: اعمل المطوية التالية لتنظيم ملاحظاتك حول المثلثات المتطابقة. ابدأ بثلاث أوراق رسم بياني وورقة مقواة من الحجم نفسه.

منظم أفكار

المطويات



2 شَبِّت الحافة، بحيث تشكل الأوراق
دفترًا، واكتب عنوان الفصل في
الصفحة الأولى، ورقم كل درس
وعنوانه في باقي الصفحات.

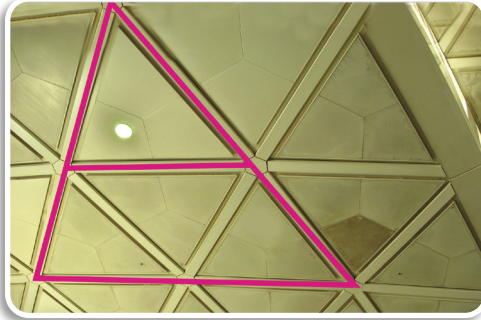


1 ضع أوراق الرسم البياني فوق
الورقة المقواة، ثم اطو الأوراق
لتشكل مثلثًا، كما في الشكل، ثم
قص الورق الزائد.

تصنيف المثلثات

Classifying triangles

3-1



لماذا؟

يعدُّ المثلث عنصراً زخرفياً مميزاً في العمارة التقليدية في المملكة العربية السعودية، كما يلاحظ ذلك في صالات المسافرين بمطار الملك خالد الدولي بمدينة الرياض.

فيما سبق:

درست قياس الزوايا وتصنيفها.

(مهارة سابقة)

والآن:

■ أستمع تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها أو زواياها في إيجاد قيم مجهولة.

المفردات:

المثلث الحاد الزوايا

acute triangle

المثلث المنفرج الزاوية

obtuse triangle

المثلث القائم الزاوية

right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع

equilateral triangle

المثلث المتطابق الضلعين

isosceles triangle

المثلث المختلف الأضلاع

scalene triangle

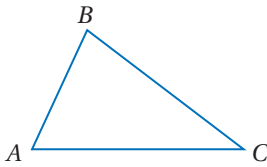
تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها: يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$ ، وتُسمى عناصره باستعمال

الأحرف A, B, C كما يلي:

• أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$

• الرؤوس هي: A, B, C

• الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$ ، $\angle C$ أو $\angle BCA$ ، $\angle B$ أو $\angle ABC$



وتُصنّف المثلثات بطريقتين: وفقاً لزواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وتُستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.

أضف إلى مطويتك

مثلث قائم الزاوية

إحدى الزوايا قائمة

مثلث منفرج الزاوية

إحدى الزوايا منفرجة

مثلث حاد الزوايا

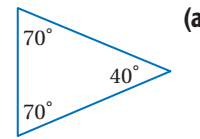
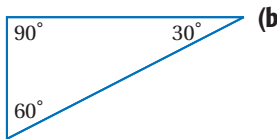
3 زوايا حادة

يمكن تصنيف أي مثلث وفقاً لزواياه إلى أحد التصنيفات السابقة، بمعرفة قياسات زواياه.

تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

مثال 1

صنّف كلّاً من المثلثين الآتيين وفقاً لزواياه:



مراجعة المفردات

الزاوية الحادة:

زاوية يقل قياسها عن 90°

الزاوية القائمة:

زاوية قياسها 90°

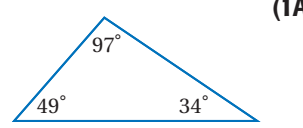
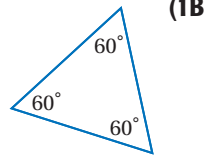
الزاوية المنفرجة:

زاوية قياسها أكبر

من 90°

تحقق من فهمك

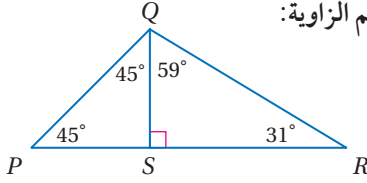
صنّف كلّاً من المثلثين الآتيين وفقاً لزاويهما:



مثال 2

تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لزاويها

صنّف $\triangle PQR$ إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



تحقق من فهمك

(2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف $\triangle PQS$ إلى: حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

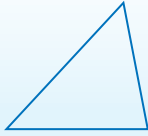
تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها: يمكن كذلك تصنيف المثلثات بحسب عدد الأضلاع المتطابقة فيها. وللدلالة على تطابق ضلعين في مثلث، يوضع عدد متساوٍ من الشرطات الصغيرة على الضلعين المتطابقين.



مفهوم أساسي

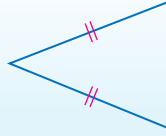
تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

مثلث مختلف الأضلاع



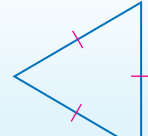
لا توجد أضلاع متطابقة

مثلث متطابق الضلعين



ضلعان على الأقل متطابقان

مثلث متطابق الأضلاع



3 أضلاع متطابقة

إن المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.



الربط مع الحياة

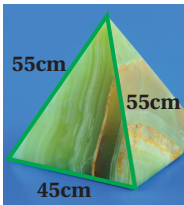
في العديد من السيارات، تُشغّل أضواء الخطر بالضغط على زرّ صغير قرب المقود. يكون شكل هذا الزر عادةً مثلثاً أحمر أو برتقالياً صغيراً كما في الشكل أعلاه.

عندما يشغّل هذا الزرّ تضییء أضواء إشارات الانعطاف بطريقة تحذيرية، وبنمط خاص يسهّل رؤية السيارة من قبل السائقين الآخرين.

مثال 3 من واقع الحياة

تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

فن العمارة: صنّف المثلث في الشكل المجاور وفقاً لأضلاعه.



تحقق من فهمك

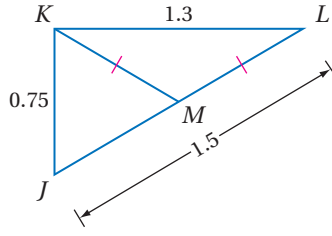
(3) **قيادة السيارة والسلامة:** صنّف شكل زرّ ضوء الخطر في الهامش يمين الصفحة وفقاً لأضلاعه.

وزارة التعليم

Ministry of Education

تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لأضلاعها

مثال 4

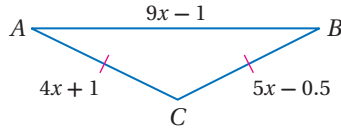


إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{KL}$ ، فصنّف $\triangle JKM$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضّح إجابتك.

تحقق من فهمك

(4) صنّف $\triangle KML$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضّح إجابتك.

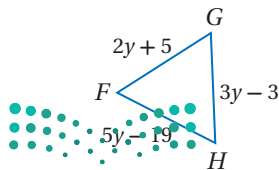
يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والمتطابقة الضلعين؛ لإيجاد قيم مجهولة كما في المثال الآتي:



جبر: أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين ABC في الشكل المجاور.

الخطوة 1:

الخطوة 2:



تحقق من فهمك

(5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع FGH .



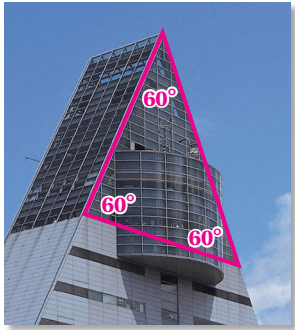
إرشادات للدراسة

تحقق

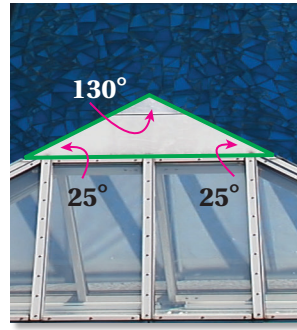
للتحقق من الإجابة في المثال 5، اختبر ما إذا كانت $CB = AC$ عندما نعوض بـ 1.5 مكان x في العبارة $5x - 0.5$ التي تمثل CB .

$$\begin{aligned} CB &= 5x - 0.5 \\ &= 5(1.5) - 0.5 \\ &= 7 \checkmark \end{aligned}$$

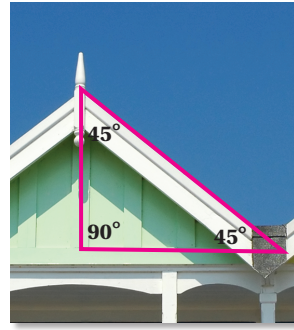
المثال 1 فن العمارة: صنف كلاً من المثلثات الآتية وفقاً لزاواياه.



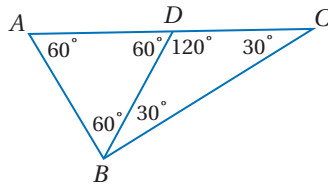
(3)



(2)



(1)



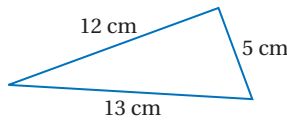
المثال 2 صنف كلاً من المثلثات الآتية وفقاً لزاواياه.

$\triangle ABD$ (4)

$\triangle BDC$ (5)

$\triangle ABC$ (6)

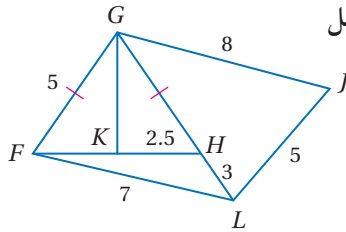
المثال 3 صنف كلاً من المثلثين الآتين وفقاً لأضلاعهم.



(8)



(7)



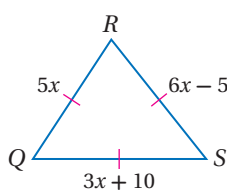
إذا كانت النقطة K هي منتصف $\overline{FH}$ ، فصنف كلاً من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

$\triangle FGH$ (9)

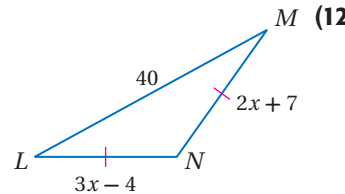
$\triangle GJL$ (10)

$\triangle FHL$ (11)

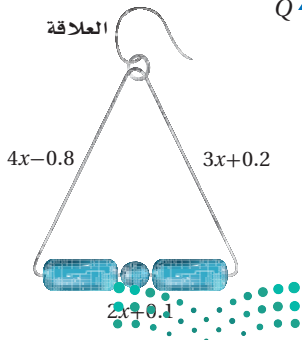
المثال 5 جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كل من المثلثين الآتين:



(13)



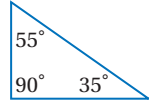
(12)



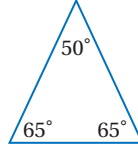
(14) **مجوهرات:** افترض أن لديك سلكاً مرناً من الفولاذ غير قابل للصدأ، وتريد أن تشكّله لتعمل قرطاً. إذا كان الجزء المثلث من القرط متطابق الضلعين، وأبعاده كما في الصورة، وطول جزء العلاقة 1.5 cm، فكم ستمتراً من السلك تحتاج لعمل القرط؟ برّر إجابتك.

المثال 1

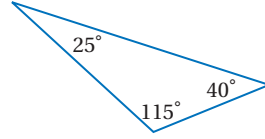
صنّف كلّاً من المثلثات الآتية وفقاً لزواياه:



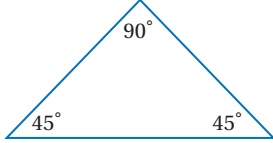
(17)



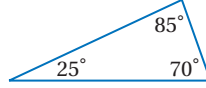
(16)



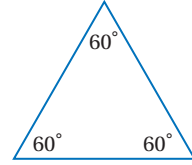
(15)



(20)



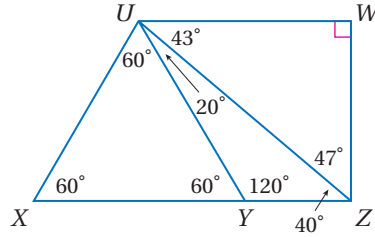
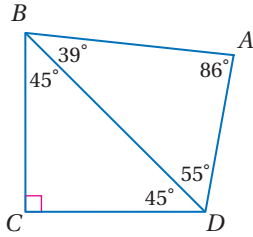
(19)



(18)

صنّف كلّاً من المثلثات الآتية وفقاً لزواياه:

المثال 2



$\triangle UYZ$ (21)

$\triangle BCD$ (22)

$\triangle ADB$ (23)

$\triangle UXZ$ (24)

$\triangle UWZ$ (25)

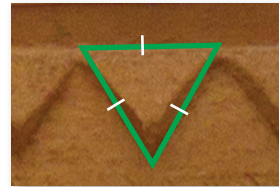
$\triangle UXY$ (26)

صنّف كلّاً من المثلثين الآتيين وفقاً لأضلاعهم:

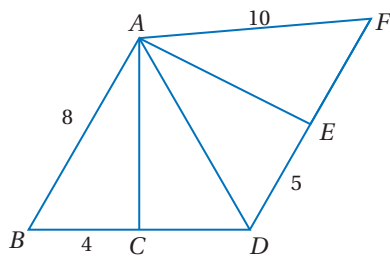
المثال 3



(28)



(27)



إذا كانت النقطة C هي منتصف $\overline{BD}$ ، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$ ،
فصنّف كلّاً من المثلثات الآتية وفقاً لأضلاعها:

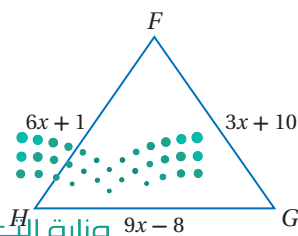
المثال 4

$\triangle ADF$ (30)

$\triangle ABC$ (29)

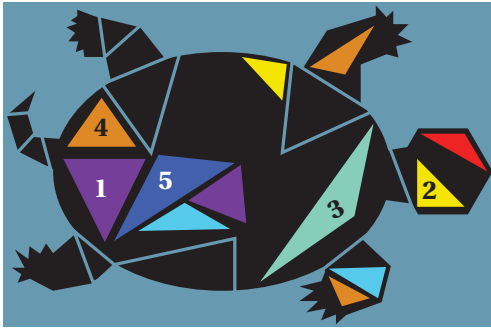
$\triangle ABD$ (32)

$\triangle ACD$ (31)

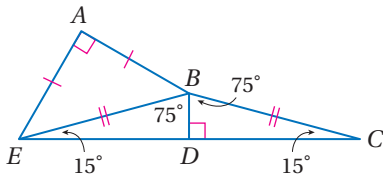


(33) **جبر:** إذا علمت أن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع،
فأوجد قيمة x وطول كل ضلع من أضلاعه.

المثال 5



(34) فنّ تشكيلي: صنّف كلّاً من المثلثات المرقمة في الشكل وفق زواياه ثم وفق أضلاعه. استعمل المثلث القائم الزاوية لتصنيف الزوايا، والمسطرة لقياس الأضلاع.



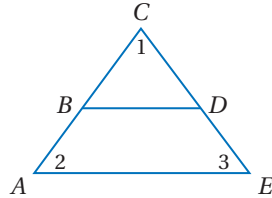
صنّف كلّاً من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:

$\triangle ABE$ (35) $\triangle EBC$ (36) $\triangle BDC$ (37)

هندسة إحدائية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle XYZ$ في كلّ من السؤالين الآتيين، وصنّفه وفق أضلاعه:

(38) $X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3)$ (39) $X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1)$

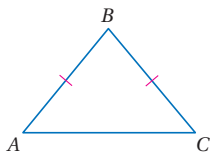
(40) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين تبين فيه أنّ $\triangle BCD$ متطابق الزوايا، إذا كان $\triangle ACE$ متطابق الزوايا، وكانت $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



جبر: أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كلّ مما يأتي:

(41) $\triangle FGH$ مثلث متطابق الأضلاع فيه: $FG = 3x - 10$, $GH = 2x + 5$, $HF = x + 20$.

(42) $\triangle RST$ متطابق الأضلاع. ويزيد RS ثلاثة على أربعة أمثال x ، ويزيد ST سبعة على مثلي x ، ويزيد TR واحداً على خمسة أمثال x .



(43) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين قياسي الزاويتين اللتين تقابلان ضلعين متطابقين في مثلث، ومجموع زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

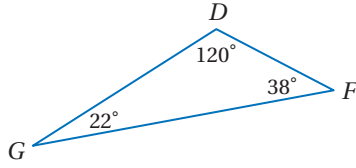
(a) هندسياً: ارسم أربعة مثلثات متطابقة الضلعين، منها مثلث حادّ الزوايا ومثلث قائم الزاوية، ومثلث منفرج الزاوية. وفي كلّ من هذه المثلثات سمّ الرأسين المقابلين للضلعين المتطابقين A , C ، وسمّ الرأس الثالث B . ثم قس زوايا كل مثلث، واكتب على كل زاوية قياسها.

(b) جدولياً: رتب قياسات الزوايا في جدول. وضمنه عموداً تكتب فيه مجموع قياسات هذه الزوايا.

(c) لفظياً: خمن العلاقة بين قياسي الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين، ثم خمن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

(d) جبرياً: إذا كان قياس إحدى الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين هو x ، فاكتب عبارتين جبريتين تمثلان قياسي الزاويتين الأخرين. وفسر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا



(44) **اكتشف الخطأ:** تقول ليلي: إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية،

لكن نوال لا توافقها الرأي وتقول: إن عدد الزوايا الحادة في المثلث أكثر من عدد الزوايا المنفرجة؛ لذا فإن المثلث حادّ الزوايا. أيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

تبرير: قرّر ما إذا كانت الجملة في كلّ مما يأتي صحيحة أحياناً أو صحيحة دائماً أو غير صحيحة أبداً. ووضح إجابتك.

(45) المثلث المتطابق الزوايا هو مثلث قائم الزاوية أيضاً.

(46) المثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين أيضاً.

(47) **تحّد:** إذا كان طولاً ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع $5x + 5$ وحدات، $7x - 5$ وحدات، فما محيطه؟ فسر إجابتك.

(48) **اكتب:** فسر لماذا يُعد تصنيف المثلث المتطابق الزوايا أنه مثلث حاد متطابق الزوايا، تصنيفاً غير ضروري؟

تدريب على اختبار

(50) ما ميل المستقيم الذي معادلته $2x + y = 5$ ؟

- A 2
B $\frac{5}{2}$
C -1
D -2

(49) **جبر:** اشترى خالد معجماً من معرض الكتب بعد تخفيض

نسبته 40%. إذا كان ثمنه قبل التخفيض 84.50 ريالاً، فكم ريالاً وفّر خالد؟

- A 50.70 ريالاً
B 44.50 ريالاً
C 33.80 ريالاً
D 32.62 ريالاً

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كلّ ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

(51) $x = -2, x = 5$ (52) $y = x + 2, y = x - 4$

(53) **كرة قدم:** رسم مصطفى الخطّين الجانبيين لتخطيط ملعب كرة قدم، ووضع علامات على أحدهما، بحيث كانت المسافة بين أي علامتين متتابتين 9 m، ثم أنشأ أعمدة عند هذه العلامات. فسر لماذا تكون هذه الأعمدة متوازية. (مهارة سابقة)

حدّد الفرض والنتيجة في كل جملة شرطية فيما يأتي: (مهارة سابقة)

(54) إذا كان الرجل كهلاً، فإن عمره 40 سنة على الأقل.

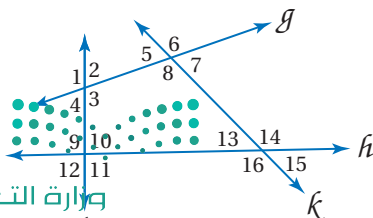
(55) إذا كان $2x + 6 = 10$ ، فإن $x = 2$.

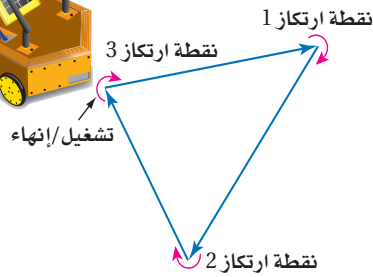
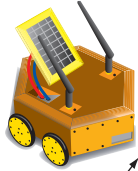
استعد للدرس اللاحق

صنّف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلى متبادلتين داخلياً أو متبادلتين خارجياً أو متناظرتين أو متحالفتين:

(56) $\angle 3$ و $\angle 5$ (57) $\angle 4$ و $\angle 9$

(58) $\angle 11$ و $\angle 13$ (59) $\angle 1$ و $\angle 11$





زوايا المثلثات

Angles of Triangles

3-2

لماذا؟

يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمم الطلاب روبوتاً آلياً يؤدي مهام مختلفة. وقد تمت برمجة هذا الروبوت الآلي في أحد الاختبارات ليتحرك في مسار على شكل مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي يعطف فيها الروبوت الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتاً دائماً.

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: تُعبر نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأي مثلث.

فيما سبق:

درست تصنيف المثلثات وفقاً لقياسات أضلاعها وزواياها.

(الدرس 1-3)

والآن:

- أطبق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

المفردات:

المستقيم المساعد

auxiliary line

الزاوية الخارجية

exterior angle

الزاويتان الداخليتان

البعدتان

remote interior angles

البرهان التسلسلي

flow proof

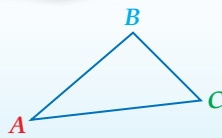
النتيجة

corollary

أضف إلى
مطوياتك

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

نظرية 3.1



التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°

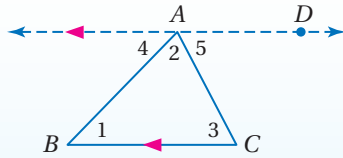
$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$$

مثال:

يتطلب برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث استعمال مستقيم مساعد، والمستقيم المساعد هو مستقيم إضافي (أو قطعة مستقيمة إضافية) يتم رسمه للمساعدة على تحليل العلاقات الهندسية، وكما تُبرر العبارات والاستنتاجات المُستعملة في البرهان، فإن خصائص المستقيم المساعد يجب تبريرها.

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

برهان



المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

البرهان: من النقطة A ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ موازياً لـ $\overline{BC}$.

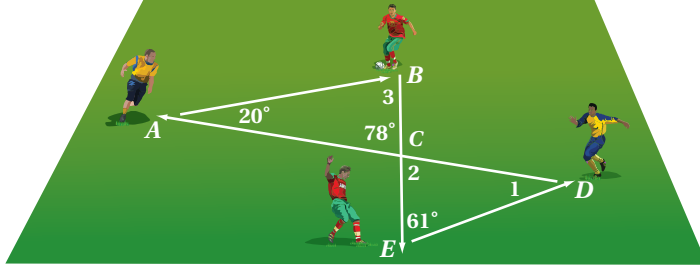
المبررات	العبارات
(1) مُعْطَى	(1) $\triangle ABC$
(2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم	(2) $\angle 4, \angle BAD$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.
(3) الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان	(3) $\angle 4, \angle BAD$ متكاملتان.
(4) تعريف الزاويتين المتكاملتين	(4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180^\circ$
(5) مسلمة جمع قياسات الزوايا	(5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$
(6) بالتعويض	(6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180^\circ$
(7) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً	(7) $\angle 4 \cong \angle 1, \angle 5 \cong \angle 3$
(8) تعريف تطابق الزوايا	(8) $m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$
(9) بالتعويض	(9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$



يمكن استعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث لإيجاد الزاوية الثالثة في المثلث إذا علم قياسا زاويتييه الآخرين.

مثال 1 من واقع الحياة استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة قدم: بيّن الشكل مسار الكرة في تدريب على تمريرات نفذها أربعة لاعبين. أوجد قياسات الزوايا المرقمة.



افهم:

خطط:

حل:



الربط مع الحياة

يتمج تمرين "مرّر وتحرك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير، حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على شكل مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك، على اللاعب أن يتحرك فوراً بعد تمريره الكرة.



إرشادات للدراسة

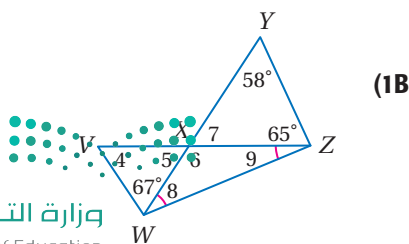
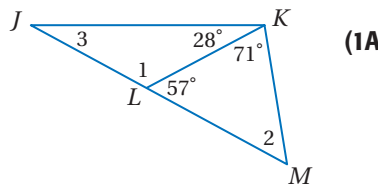
تجزئة المسألة

تُجزأ المسائل المركبة إلى مسائل يمكن التعامل مع كل منها بسهولة؛ مما يساعد على حلها. فمثلاً في المثال 1: عليك أن تجد $m\angle 2$ أولاً قبل أن تحاول إيجاد $m\angle 1$.

تحقق:

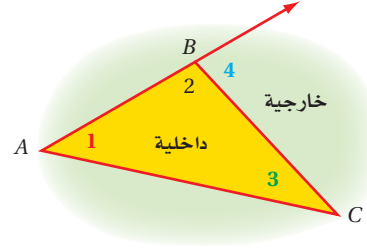
تحقق من فهمك

أوجد قياسات الزوايا المرقمة فيما يأتي:



نظرية الزاوية الخارجية للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث، يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** كلٌّ منها تتشكل من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان** **بعيدتان** غير مجاورتين لها.

∠4 زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$ ،
وزاويتاها الداخليتان البعيدتان
هما ∠1، ∠3.



نظرية 3.2 **نظرية الزاوية الخارجية**

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

أضف إلى مطويتك

في **البرهان التسلسلي** تُستعمل عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبين التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسلي كما يأتي.

البرهان **نظرية الزاوية الخارجية**

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

برهان تسلسلي:

تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم

∠1، ∠2 زاويتان متجاورتان على مستقيم

∠1، ∠2 متكاملتان

الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$

تعريف الزاويتين المتكاملتين

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$

نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2$

بالتعويض

$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

بالطرح

قراءة الرياضيات

البرهان بالمخطط

التسلسلي

يُسمى البرهان التسلسلي أحياناً البرهان بالمخطط التسلسلي.

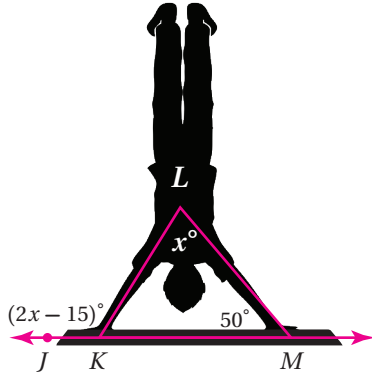
إرشادات للدراسة

البرهان التسلسلي

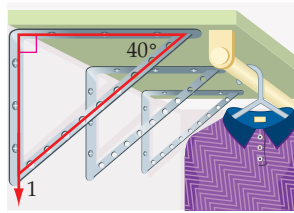
يمكن أن يكتب البرهان التسلسلي بصورة رأسيّة أو أفقيّة.

يمكن إيجاد قياسات الزوايا المجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال نظرية الزاوية الخارجية



اللياقة البدنية: أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة.



(2) **تنظيم خزانة الملابس:** تثبت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟

تحقق من فهمك



الربط مع الحياة

المدرّب المتخصص

يعلم مدرّبو اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها، ومن المهم أن يحمل هؤلاء المدرّبون شهادات تخصص في مجال عملهم.

النتيجة هي نظرية يكون برهانها مبنياً على نظرية أخرى، ويمكن استعمال النتيجة كأى نظرية أخرى لتبرير خطوات برهان آخر، أو حل أسئلة ذات علاقة، وفيما يلي نتائج مباشرة لنظرية مجموع زوايا المثلث:

أضف إلى مطويتك

نتيجتان

3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.
مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle A, \angle B$ زاويتان متتامتان.

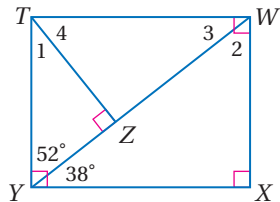
3.2 توجد زاوية قائمة واحدة، أو زاوية منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.
مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة، فإن $\angle J, \angle K$ زاويتان حادتان.

ستبرهن النتيجتين 3.1 و 3.2 في السؤالين 24 و 23

إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

مثال 3

أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك



(3C) $\angle 4$

(3B) $\angle 3$

(3A) $\angle 2$

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 2-3 زوايا المثلثات 23



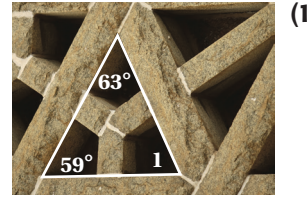
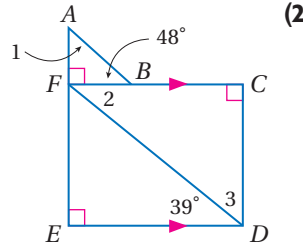
إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولة

عندما تجد قياسات زوايا مثلث، تأكد دائماً أن مجموع هذه القياسات يساوي 180° .

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين:

المثال 1



كراسي الشاطئ: تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلاً من القياسات الآتية:

$m\angle 4$ (4) $m\angle 2$ (3)

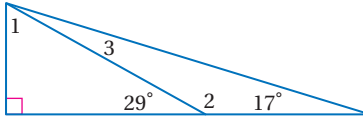
$m\angle 3$ (6) $m\angle 1$ (5)

معتمدًا على الشكل المجاور، أوجد القياسات التالية:

$m\angle 1$ (7)

$m\angle 3$ (8)

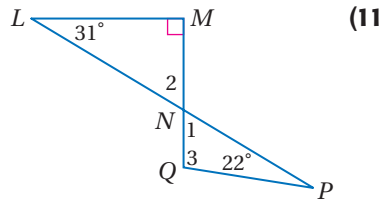
$m\angle 2$ (9)



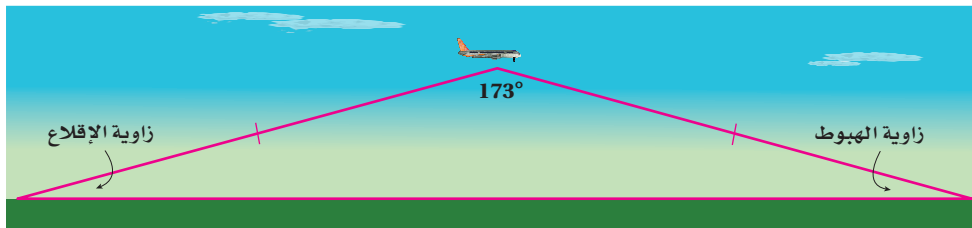
تدرب وحل المسائل

أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين:

المثال 1



طائرات: يمكن تمثيل خط الطيران في رحلة ما باستعمال ضلعي مثلث كما في النموذج أدناه، علمًا بأن المسافة التي تقطعها الطائرة صعودًا تساوي المسافة التي تقطعها هبوطًا.



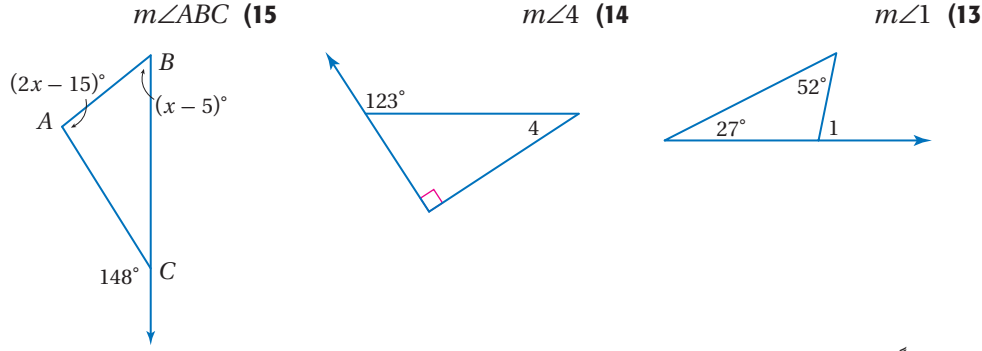
(a) صنّف النموذج بحسب الأضلاع والزوايا.

(b) إذا كانت زاويتي الإقلاع والهبوط متطابقتين، فأوجد قياس كل منهما.



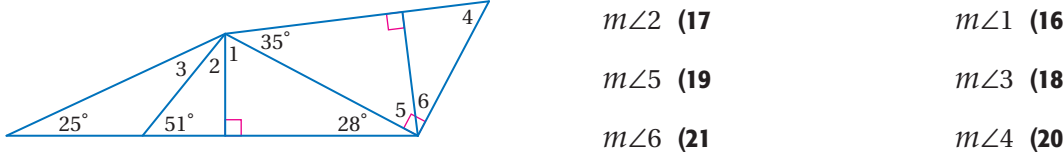
المثال 2

أوجد كلاً من القياسات الآتية:



المثال 3

أوجد كلاً من القياسات الآتية:



الربط مع الحياة

يصل طول ساق زهرة الأقحوان إلى 30in ، وتنقسم هذه النباتات إلى 13 صنفاً بحسب أشكال أزهارها.

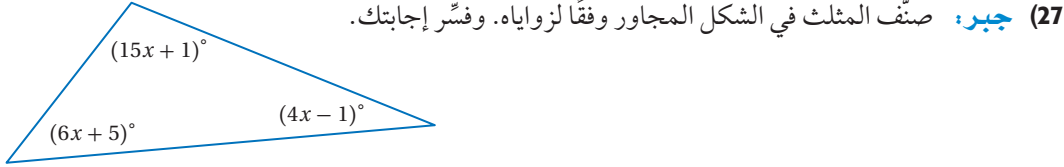
(22) **بستنة:** استنبت مهندس زراعي زهور أقحوان في حوض على شكل مثلث متطابق الضلعين. إذا رغب المهندس في أن يكون قياس $\angle A$ ثلاثة أمثال قياس كل من $\angle B$ ، $\angle C$ ، فما قياس كل زاوية في هذا المثلث؟

(23) **براهين:** برهن كلاً مما يأتي مستعملاً طريقة البرهان المذكورة.

(24) النتيجة 3.2 باستعمال البرهان الحر

(25) النتيجة 3.1 باستعمال البرهان التسلسلي

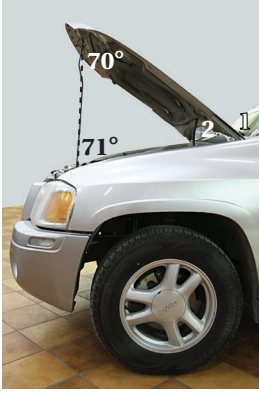
أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة فيما يأتي:



(28) قرّر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأ، واذكر مثلاً مضاداً لها إذا كانت خطأ، ودعّم استنتاجك إذا كانت صحيحة:

"إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90، فإن المثلث حادّ الزوايا"

(29) **سيارات:** انظر إلى الصورة المجاورة:



(a) أوجد $m\angle 1$, $m\angle 2$.

(b) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 1$ ؟ فسّر إجابتك.

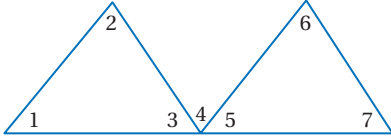
(c) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 2$ ؟ فسّر إجابتك.

برهان: برهن كلاً مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

(31) برهان تسلسلي

المعطيات: $\angle 3 \cong \angle 5$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$

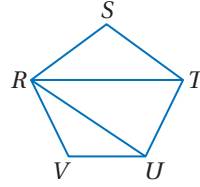


(30) برهان ذو عمودين

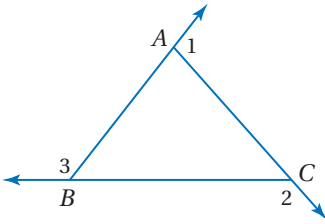
المعطيات: $RSTUV$ شكل خماسي.

المطلوب:

$m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540^\circ$



(32) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستكشف مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث.



(a) **هندسياً:** ارسم خمسة مثلثات مختلفة، ومُدّ الأضلاع وسمّ الزوايا كما في الشكل المجاور، على أن يكون ضمن المثلثات التي رسمتها على الأقل مثلث منفرج الزاوية، وآخر قائم الزاوية، ومثلث حادّ الزوايا.

(b) **جدولياً:** قسّ الزوايا الخارجية لكل مثلث. وسجّل القياسات ومجموعها لكل مثلث في جدول.

(c) **لفظياً:** خمن مجموع الزوايا الخارجية للمثلث، واكتب تخمينك.

(d) **جبرياً:** عبّر عن التخمين الذي وصلت إليه في الجزء C جبرياً.

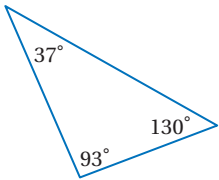
(e) **تحليلياً:** اكتب برهاناً حرّاً لإثبات التخمين الذي توصلت إليه.

تنبيه !

قياس الزوايا

عند استعمال المنقلة لقياس زاوية ما، اجعل خطّ التدريج 0 منطبقاً على أحد ضلعي الزاوية، ومركز المنقلة منطبقاً على رأس الزاوية.

مسائل مهارات التفكير العليا

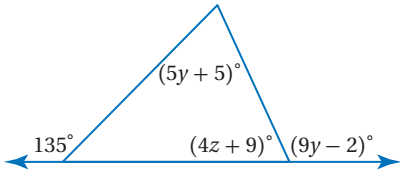


(33) **اكتشف الخطأ:** قام خالد بقياس زوايا المثلث وكتبها كما في الشكل. فقال عادل: إنّ هناك خطأً في هذه القياسات. وضح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف توصل عادل إلى هذه النتيجة.

(34) **اكتب:** فسّر كيف يمكنك إيجاد القياسات المجهولة في الشكل المجاور؟



(35) **تحديد:** أوجد قيمة كل من y, z في الشكل المجاور.



(36) **تبرير:** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle A$ حادة، فهل $\triangle ABC$ حادّ الزوايا أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم أنه لا يمكن تحديد نوعه؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

(37) **جبر:** أيُّ المعادلات الآتية تكافئ المعادلة $7x - 3(2 - 5x) = 8x$ ؟

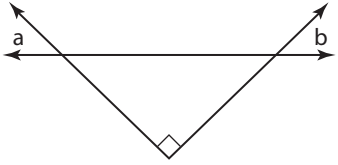
$2x - 6 = 8$ **A**

$22x - 6 = 8x$ **B**

$-8x - 6 = 8x$ **C**

$22x + 6 = 8x$ **D**

(38) أيُّ العبارات التالية تصف العلاقة الصحيحة بين الزاويتين a, b في الشكل أدناه؟



$a + b = 90^\circ$ **C**

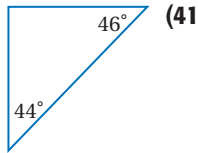
$a + b = 45^\circ$ **D**

$a + b < 90^\circ$ **A**

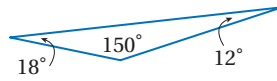
$a + b > 90^\circ$ **B**

مراجعة تراكمية

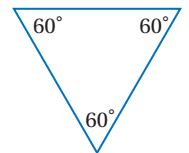
صنّف كلّاً من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: (مهارة سابقة)



(41)



(40)



(39)

هندسة إحدائية: أوجد المسافة بين النقطة P والمستقيم l في كلّ من السؤالين الآتيين. (مهارة سابقة)

(42) المستقيم l يمرّ بالنقطتين $(1, 3)$ ، $(0, -2)$ ، وإحداثيّات النقطة P هما $(-4, 4)$.

(43) المستقيم l يمرّ بالنقطتين $(3, 0)$ ، $(-3, 0)$ ، وإحداثيّات النقطة P هما $(4, 3)$.

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (44)

(45) إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

(46) إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 4$ ، $\angle 2 \cong \angle 3$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 4$.





المثلثات المتطابقة

Congruent triangles

3-3



لماذا؟

تقوم عدّة مصانع بصنع مسجّلات سيارات بواجهات متحركة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علماً بأن شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق شكل المكان الذي تثبت فيه وأبعاده تماماً؛ وذلك لتثبيتها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.

التطابق والعناصر المتناظرة: إذا كان لشكلين هندسيين الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنهما **متطابقان**.

فيما سبق:

درست الزوايا المتطابقة واستعملاتها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أُسْمِي العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أثبت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

المفردات

التطابق

Congruent

المضلعات المتطابقة

Congruent Polygons

العناصر المتناظرة

Corresponding Parts

غير متطابقة	متطابقة
الشكلان 4, 5 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.	الأشكال 1, 2, 3 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها، على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.

في أيّ مضلعين متطابقين تتطابق **العناصر المتناظرة**، والعناصر المتناظرة تتضمن الزوايا والأضلاع.

أضف إلى مطويتك

نموذج:

مفهوم أساسي

تعريف المضلعات المتطابقة

التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

مثال:

الزوايا المتناظرة

$$\angle C \cong \angle K \quad \angle B \cong \angle J \quad \angle A \cong \angle H$$

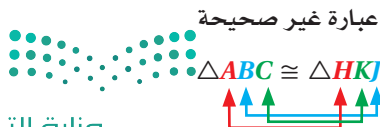
الأضلاع المتناظرة

$$\overline{CA} \cong \overline{KH} \quad \overline{BC} \cong \overline{JK} \quad \overline{AB} \cong \overline{HJ}$$

عبارة التطابق

$$\triangle ABC \cong \triangle HJK$$

هناك عبارات تطابق أخرى للمثلثين أعلاه، وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.



عبارة غير صحيحة

$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$

عبارة صحيحة

$\triangle BCA \cong \triangle JKH$

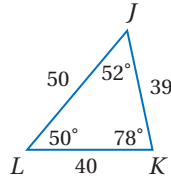
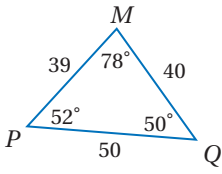
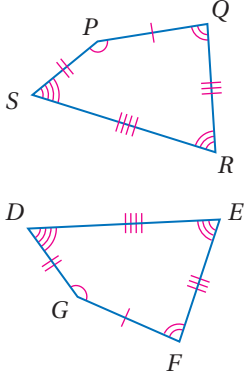
تعريف العناصر المتناظرة المتطابقة

مثال 1

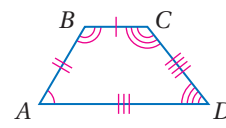
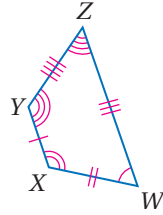
بين أن المثلّعين المجاورين متطابقان، بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق.

الزوايا:

الأضلاع:

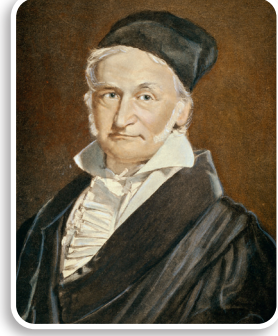


(1B)



(1A)

تحقق من فهمك



تاريخ الرياضيات

جوهان كارل فردريك

جاوس (1777م - 1855م)

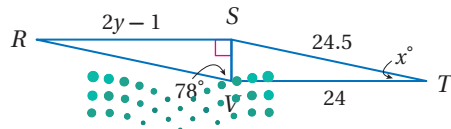
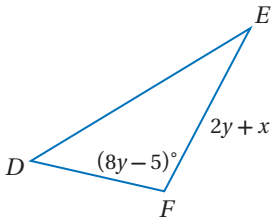
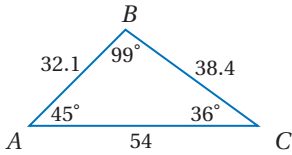
قدم جاوس رمز التطابق ليعيّن أن طرفي المعادلة متساويان حتى ولو كانا مختلفين شكلاً. وقد حقق إنجازات عديدة في الرياضيات والفيزياء تتضمن برهاناً للنظرية الأساسية في الجبر.

أداة الربط "إذا وفقط إذا" التي وردت في تعريف المضلعات المتطابقة تعني أن كلّاً من العبارة الشرطية وعكسها صحيحتان؛ لذا إذا كان المضلعان متطابقين، فإنّ عناصرهما المتناظرة متطابقة. وإذا كانت العناصر المتناظرة متطابقة فإنّ المضلعين متطابقان.

تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

مثال 2

في الشكل المجاور إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، فأوجد قيمة كلّ من x ، y .



(2) في الشكل المجاور إذا كان $\triangle RSV \cong \triangle TVS$ ، فأوجد قيمة كلّ من x ، y .

تحقق من فهمك

إرشادات للدراسة

استعمال عبارة التطابق

يمكنك استعمال عبارة التطابق لمساعدتك على معرفة الأضلاع المتناظرة.

$$\triangle ABC \cong \triangle DFE$$

$$\underline{BC \cong FE}$$

إثبات تطابق المثلثات إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2-3 تقود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

نظرية 3.3

التعبير اللفظي: إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كانت: $\angle C \cong \angle K$, $\angle B \cong \angle J$ ، فإن: $\angle A \cong \angle L$.

نظرية الزاوية الثالثة

أضف إلى مطوبتك

ستبرهن هذه النظرية في السؤال 17



مثال 3 من واقع الحياة **استعمال نظرية الزاوية الثالثة**

تنظيم الحفلات: قرر منظمو حفلة مدرسية أن يطووا مناديل الطعام على صورة جيب مثلي حتى يتمكنوا من وضع هدية بسيطة فيه.

إذا كانت: $m\angle NPQ = 40^\circ$, $\angle NPQ \cong \angle RST$ ، فأوجد $m\angle SRT$.



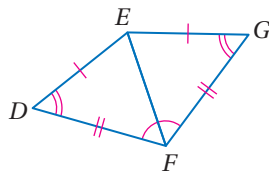
الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يُضفي لمسة من الجمال والأناقة على أي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.

تحقق من فهمك

(3) في الشكل أعلاه، إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$ ، وكان $\overline{WX}$ منصفاً لـ $\angle NXR$ ، وكان $m\angle NXW = 49^\circ$ ، $m\angle WNX = 88^\circ$ ، فأوجد $m\angle NWR$. وفسر إجابتك.

مثال 4 إثبات تطابق مثلثين



اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$, $\angle D \cong \angle G$

$\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GFE$

البرهان:

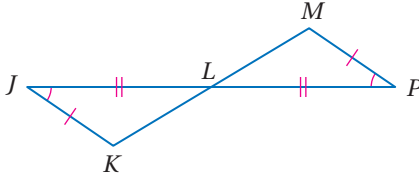
المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)

إرشادات للدراسة

خاصية الانعكاس

عندما يشترك مثلثان في ضلع، استعمل خاصية الانعكاس للتطابق؛ لتثبت أن الضلع المشترك يطابق نفسه.

تحقق من فهمك



(4) اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$

$\overline{KM}$ تنصف L , $\overline{JL} \cong \overline{PL}$

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$

علاقة تطابق المثلثات علاقة انعكاس وتماثل وتعدّ كما في تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

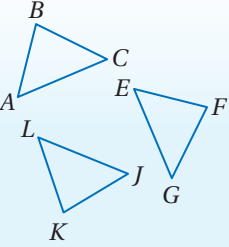


النظرية 3.4

خصائص تطابق المثلثات

أضف إلى

مطوبتك



خاصية الانعكاس للتطابق

$$\triangle ABC \cong \triangle ABC$$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$, فإن $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

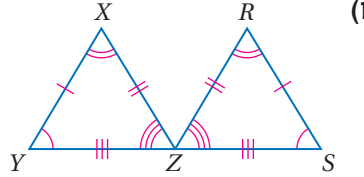
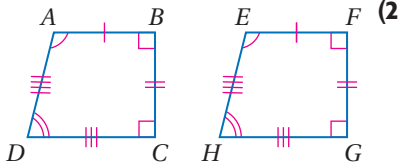
خاصية التعدي للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$, $\triangle EFG \cong \triangle JKL$, فإن $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

ستبرهن عناصر هذه النظرية في الأسئلة 18, 20, 21

تأكد

في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بيّن أنّ المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق:



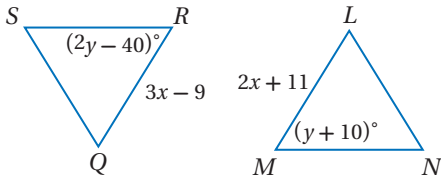
المثال 1

المثال 2

في الشكلين المجاورين، إذا كان $\triangle LMN \cong \triangle QRS$ فأوجد:

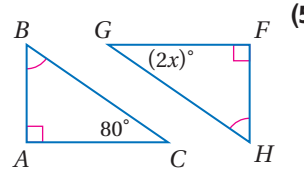
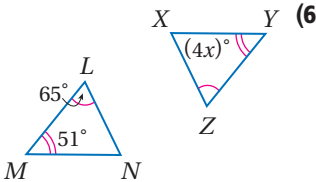
(3) قيمة x .

(4) قيمة y .



في كلٍّ من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x ، وفسّر إجابتك.

المثال 3

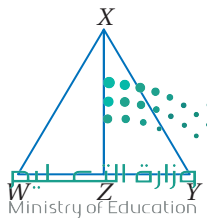


(7) برهان: اكتب برهاناً حرّاً.

المثال 4

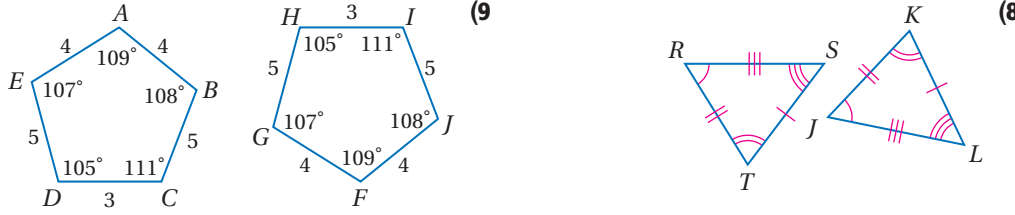
المعطيات: $\angle WXZ \cong \angle YXZ$, $\angle XZW \cong \angle XZY$, $\overline{WX} \cong \overline{YX}$, $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$



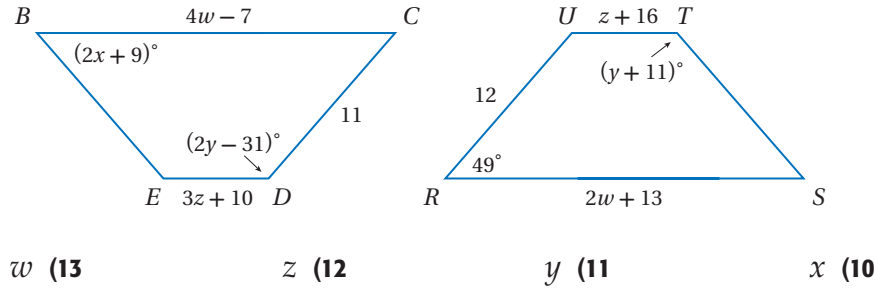
في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

المثال 1



إذا كان المضلع $BCDE \cong RSTU$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

المثال 2



w (13)

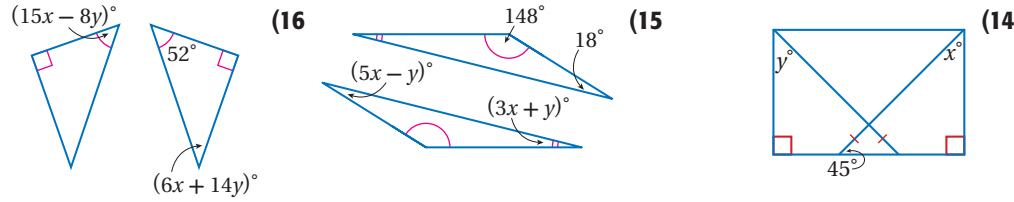
z (12)

y (11)

x (10)

أوجد قيمة كل من x , y في الأسئلة الآتية:

المثال 3



برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 3.3.

المثال 4

برهان: رتب العبارات المستعملة في برهان العبارة الآتية ترتيباً صحيحاً. وقدم تبريراً لكل عبارة.

"تطابق المثلثات علاقة تماثل". (النظرية 3.4)



المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:

$\triangle XYZ \cong \triangle RST$

?

$\triangle RST \cong \triangle XYZ$

?

$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y,$
 $\angle T \cong \angle Z,$
 $\overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ},$
 $\overline{RT} \cong \overline{XZ}$

?

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S,$
 $\angle Z \cong \angle T,$
 $\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST},$
 $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$

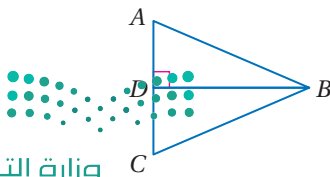
?

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين:

المعطيات: $\overline{BD}$ تنصف $\angle B$.

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle C$



برهان: اكتب برهاناً من النوع المذكور لكل جزء من النظرية 3.4.

(20) تطابق المثلثات علاقة تعدد. (برهان حرّ)

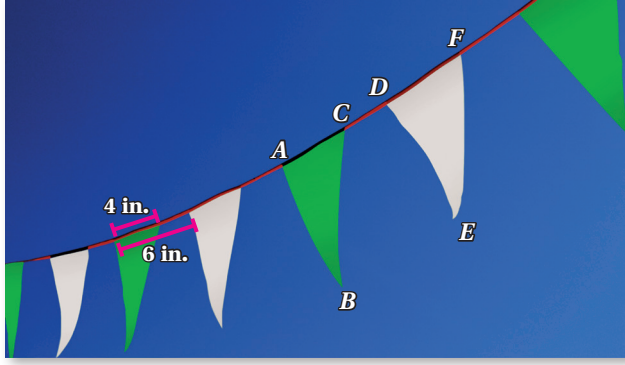
(21) تطابق المثلثات علاقة انعكاس. (برهان تسلسلي)

جبر: ارسم شكلاً يمثل المثلثين المتطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين وسمّه، ثم أوجد قيمة x, y :

(22) $\triangle ABC \cong \triangle DEF, AB = 7, BC = 25, AC = 11 + x, DF = 3x - 13, DE = 2y - 5$

(23) $\triangle LMN \cong \triangle RST, m\angle L = 49^\circ, m\angle M = (10y)^\circ, m\angle S = 70^\circ, m\angle T = (4x + 9)^\circ$

(24) **رايات:** في مهرجان رياضي، كان سعيد مسؤولاً عن إحاطة منطقة مساحتها 100 ft^2 مخصصة لجلوس المُعلّقين والإعلاميين، فاستعمل حبلاً وثبّت عليه رايات على شكل مثلثات متطابقة، كلّ منها متطابق الضلعين. إرشاد: $1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$



(a) اكتب سبعة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة في الصورة.

(b) إذا كانت المنطقة التي حوَّطها سعيد بحبل الرايات مربعة الشكل، فكم سيكون طول الحبل؟

(c) ما عدد الرايات المثبتة بالحبل؟

(25) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين مساحات المضلعات المتطابقة:

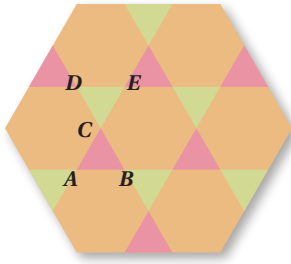
(a) **لفظياً:** اكتب عبارة شرطية تمثل العلاقة بين مساحتي مثلثين متطابقين.

(b) **لفظياً:** اكتب عكس عبارتك الشرطية. وهل العبارة العكسية صحيحة أم خطأ؟ وضح تبريرك.

(c) **هندسياً:** ارسم - إن أمكن - مستطيلين لهما المساحة نفسها، ولكنهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.



(d) **هندسياً:** ارسم - إن أمكن - مربعين لهما المساحة نفسها، ولكنهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.



(26) **أنماط:** صمّم النمط المجاور باستعمال مضلعات منتظمة.

(a) ما المضلعان المنتظمان اللذان استُعملا في التصميم؟

(b) سمّ زوجاً من المثلثات المتطابقة.

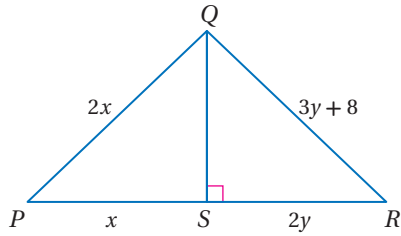
(c) سمّ زوجاً من الزوايا المتطابقة.

(d) إذا كان $CB = 2$ in ، فكم يكون AE ؟ وضح إجابتك.

(e) ما قياس $\angle EDC$ ؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

(27) **تحّد:** إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$ ، فأوجد قيمة كل من x, y .



تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأ. وإذا كانت خطأ، فأعطِ مثالاً مضاداً. أما إذا كانت صحيحة، فوضح إجابتك.

(28) إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة لمثلثين، وتطابقت الأزواج الثلاثة من أضلاعهما المتناظرة، فإنّ المثلثين متطابقان.

(29) إذا كانت أزواج الزوايا المتناظرة الثلاثة لمثلثين متطابقة، فإنّ المثلثين متطابقان.



(30) **تحّد:** اكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن المضلع $ABED \cong FEBC$.

(31) **اكتب:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو ليست صحيحة أبداً. ووضح إجابتك.

"المثلثان المتطابقا الأضلاع يكونان متطابقين"

تدريب على اختبار

(33) **جبر:** أي مما يأتي عامل لـ $x^2 + 19x - 42$ ؟

C $x - 2$

A $x + 14$

D $x - 14$

B $x + 2$

(32) إذا علمت أن: $\triangle HIJ \cong \triangle ABC$ ، ورؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-1, 2)$ ، $B(0, 3)$ ، $C(2, -2)$ فما طول الضلع HJ ؟

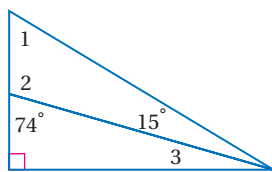
C $\sqrt{2}$

A 5

D 25

B $\sqrt{29}$

مراجعة تراكمية



في الشكل المجاور أوجد كلاً من القياسات الآتية: (الدرس 3-2)

$$m\angle 2 \quad (34)$$

$$m\angle 1 \quad (35)$$

$$m\angle 3 \quad (36)$$

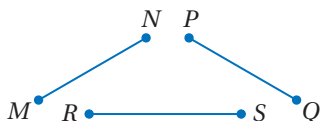
(37) هندسة إحداثية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle JKL$ الذي رؤوسه هي $J(-7, 10)$, $K(15, 0)$, $L(-2, -1)$ وصنّفه وفقاً لأطوال أضلاعه. (الدرس 3-1)

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً أو أحياناً أو ليست صحيحة أبداً: (مهارة سابقة)

(38) تكون الزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم متكاملتين.

(39) إذا كانت الزاويتان متكاملتين فإن إحداهما تكون منفرجة.

استعد للدرس اللاحق



(40) انقل البرهان الآتي وأكمّله:

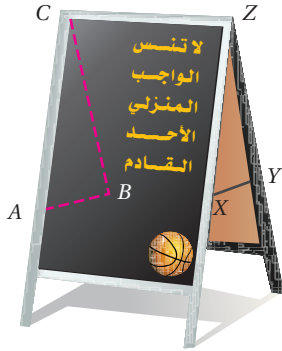
$$\text{المعطيات: } \overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$$

$$\text{المطلوب: } \overline{MN} \cong \overline{RS}$$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a) معطيات	(a) _____ ؟
(b) _____ ؟	(b) $MN = PQ, PQ = RS$
(c) _____ ؟	(c) _____ ؟
(d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة	(d) $\overline{MN} \cong \overline{RS}$





إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS

Proving Triangles Congruent-SSS, SAS

3-4

لماذا؟

تعدّ السبورة المزدوجة التي على شكل الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات، لا لأنها تطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنها تكون ثابتة تمامًا عند وضع الذراعين الجانبيين في موقعيهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه، ويتم تثبيتهما على أبعاد متساوية من القمة على الجانبين، فإن السبورة المفتوحة تشكل مثلثين متطابقين هما $\triangle ABC, \triangle XYZ$.

فيما سبق:

درست إثبات تطابق المثلثات باستعمال تعريف التطابق.

(الدرس 3-3)

والآن:

- أستعمل المسلمة SSS لاختبار تطابق المثلثات.
- أستعمل المسلمة SAS لاختبار تطابق المثلثات.

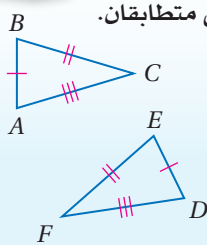
المفردات:

الزاوية المحصورة
Included Angle

أضف إلى

مطويتك

مسلمة 3.1 التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)



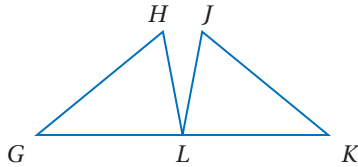
إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{DE}, \\ \overline{BC} &\cong \overline{EF}, \\ \overline{AC} &\cong \overline{DF} \end{aligned}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ فإن}$$

مثال 1

استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$, $\overline{HL} \cong \overline{JL}$, L نقطة منتصف $\overline{GK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle HGL \cong \triangle KJL$

البرهان:



إرشادات للدراسة

منصف قطعة مستقيمة
عبارة عن قطعة أو
مستقيم أو مستوى يقطع
القطعة عند منتصفها.

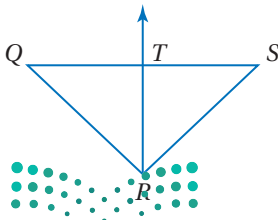
تحقق من فهمك

1) اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\triangle QRS$ متطابق الضلعين، فيه، $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.

$\overline{RT}$ تنصف $\overline{QS}$ عند النقطة T .

المطلوب: إثبات أن $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



مثال 2 على اختبار معياري



إجابة مطولة: إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(2, 5)$.

ورؤوس المثلث EFG هي: $E(1, -1)$, $F(2, -5)$, $G(4, -4)$.

- (a) مثل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.
- (b) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.
- (c) اكتب برهاناً منطقيًا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

تحقق من فهمك

(2) إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(2, 5)$, $K(1, 1)$, $L(5, 2)$. ورؤوس المثلث NPQ هي

$N(-3, 0)$, $P(-7, 1)$, $Q(-4, 4)$.

- (A) مثل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.
- (B) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.
- (C) اكتب برهاناً منطقيًا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء B.

قراءة الرياضيات

الرموز

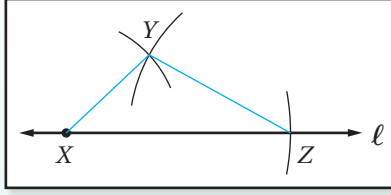
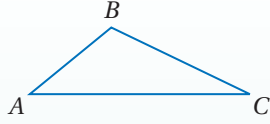
تقرأ العبارة

$$\triangle ABC \neq \triangle EFG$$

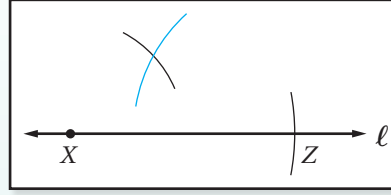
المثلث ABC لا يطابق

المثلث EFG .

ارسم مثلثاً وسمّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلّمة SSS لتُنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



الخطوة 3 سمّ نقطة تقاطع القوسين Y . وارسم $\overline{XY}$, $\overline{ZY}$ لتشكّل $\triangle XYZ$.



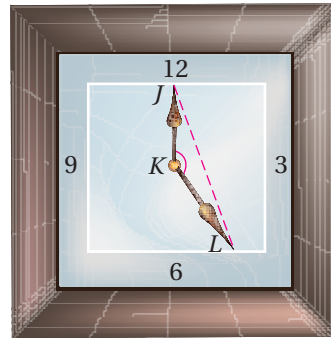
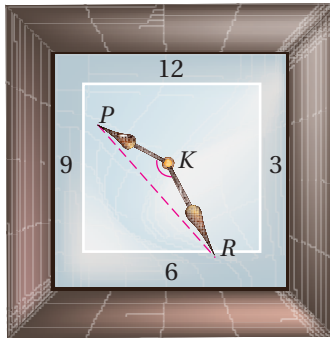
الخطوة 2 أنشئ قوساً طول نصف قطره AB ، ومركزه X ، وقوساً آخر طول نصف قطره BC ، ومركزه Z (مستعملاً الفرجار كما في الخطوة 1).



الخطوة 1 عيّن النقطة X على المستقيم l . ثم أنشئ $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على l كما يأتي:

- ركّز رأس الفرجار في النقطة A ، وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة C .
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ركّز رأس الفرجار في X ، وارسم قوساً يقطع المستقيم l وسمّ نقطة التقاطع Z .

مسلمة التطابق: ضلعان والزواية المحصورة بينهما SAS: تُسمّى الزاوية المتكونة من ضلعين متجاورين لمضلع **زاوية محصورة**. تأمل الزاوية المحصورة والمتكونة من عقربي الساعة في كلا الوضعين الموضّحين أدناه، ولاحظ أنه كلما شكّل العقبران زاوية لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفي العقربين $\overline{JL}$, $\overline{PR}$ متساويتين.



$$\triangle PKR \cong \triangle JKL$$

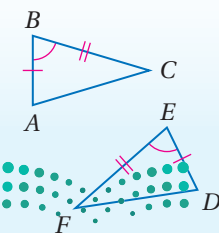
أيّ مثلثين يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزاويتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:



مسلمة 3.2

مسلمة التطابق: ضلعان والزواية المحصورة بينهما (SAS)

أضف إلى مطوبتك



التعبير اللفظي: إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها

في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

مثال:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \text{ إذا كان } \overline{AC} \cong \overline{DF},$$

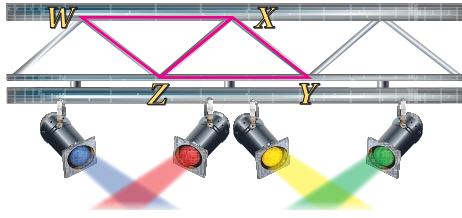
$$\angle B \cong \angle E,$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF},$$

$$\text{فإنّ } \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

استعمال SAS لإثبات تطابق المثلثات

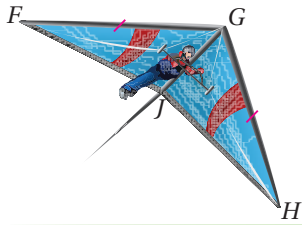
مثال 3 من واقع الحياة



إضاءة: تبدو دعامات السقالة حاملة المصابيح الظاهرة في الصورة وكأنها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ ، فاكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

البرهان:

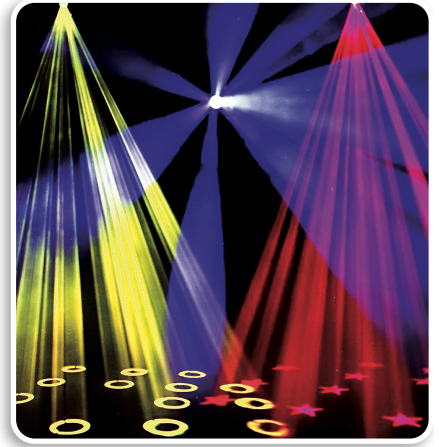
المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)



تحقق من فهمك

(3) **طيران شراعي:** في الصورة المجاورة يبدو جناح الطائرة الشراعية أنهما مثلثان متطابقان. فإذا كانت $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{JG}$ تنصف $\angle FGH$ ، فأثبت أن $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$.

يمكنك أيضاً أن تنشئ مثلثات متطابقة إذا علم طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.



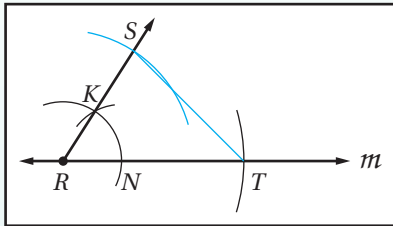
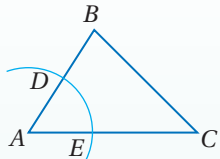
الربط مع الحياة

فنيو الإضاءة: في صناعة الصور المتحركة، يقوم فنيو الإضاءة بتحديد مواقع المصابيح التي تتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.

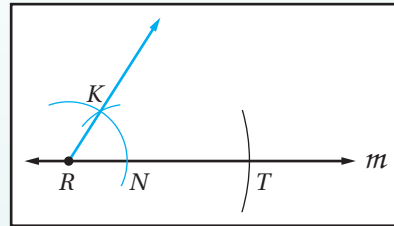
إنشاء هندسي

إنشاء مثلث يطابق مثلثاً مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق "ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)"

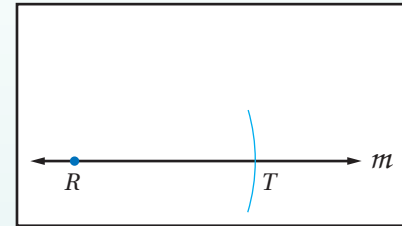
ارسم مثلثاً وسمّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة SAS لتنشئ $\triangle RST$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



الخطوة 3: أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$ ، ثم ارسم $\overline{ST}$ لتشكّل $\triangle RST$.



- الخطوة 2:** أنشئ $\angle R \cong \angle A$ ، باستعمال $\overline{RT}$ ضلعاً للزاوية، والنقطة R رأساً لها كما يأتي:
- ضع رأس الفرجار على النقطة A، وارسم قوساً يقطع ضلعي $\angle A$. سمّ نقطتي التقاطع D, E.
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند R وارسم قوساً يبدأ فوق المستقيم m ويقطعه، سمّ نقطة التقاطع N.
- ضع رأس الفرجار عند E وعدّل الفتحة حتى يصل رأس القلم إلى D.
- دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة N، وارسم قوساً يقطع القوس الذي رسمته سابقاً في النقطة K، ثم ارسم $\overline{RK}$.

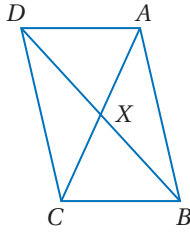


الخطوة 1: عيّن النقطة R على المستقيم m. ثم أنشئ $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على m.



مثال 4

استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين



اكتب برهاناً تسلسلياً لما يأتي.

المعطيات: X منتصف $\overline{DB}$

و X منتصف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

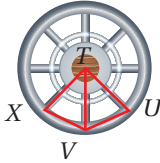
البرهان:

إرشادات للدراسة

البراهين التسلسلية

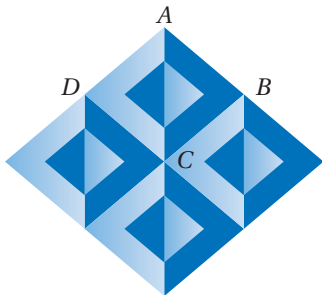
يمكن كتابة البراهين التسلسلية إما رأسياً وإما أفقياً.

تحقق من فهمك



(4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان: $\angle XTV \cong \angle UTV$ و $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ ، فبين أن $\triangle XTV \cong \triangle UTV$.

تأكد



(1) **الخداع البصري:** في الشكل المقابل المربع $ABCD$ يطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكل النمط.

(a) ما عدد المثلثات المختلفة القياس التي استعملت لعمل هذا النمط؟

(b) استعمل مسلمة التطابق SSS لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

(2) **إجابة مطولة:** إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي:

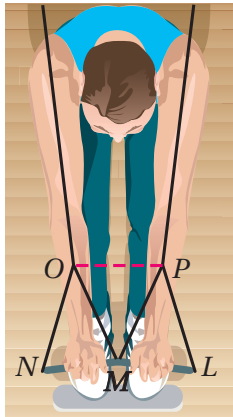
$A(-3, -5)$, $B(-1, -1)$, $C(-1, -5)$ ورؤوس $\triangle XYZ$ هي

$X(5, -5)$, $Y(3, -1)$, $Z(3, -5)$

(a) مثل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.

(b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفّر إجابتك.

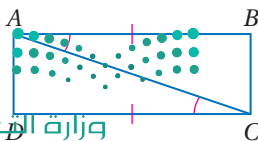
(c) اكتب برهاناً منطقياً باستعمال الهندسة الإحداثية يدعم تخمينك في الفرع b.



(3) **رياضة:** في الشكل المجاور، إذا كان:

$\triangle MOP$, $\overline{LP} \cong \overline{NO}$, $\angle LPM \cong \angle NOM$ متطابق الأضلاع، فكتب برهاناً

حرّاً لإثبات أن $\triangle LMP \cong \triangle NMO$.



(4) اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DC}$, $\angle BAC \cong \angle DCA$

المطلوب: $\overline{BC} \cong \overline{DA}$

تدرب وحل المسائل

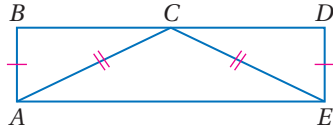
المثال 1 برهان: اكتب برهاناً من النوع المذكور في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(5) برهان حرّ (6) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{CA} \cong \overline{CE}$

$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

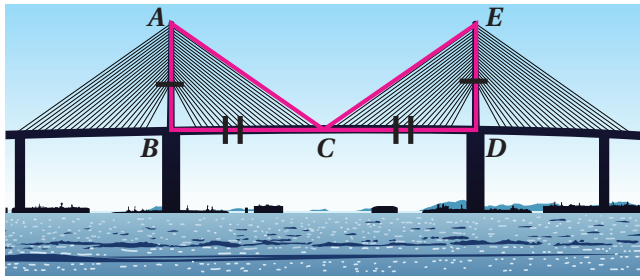
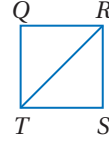
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$

$\overline{ST} \cong \overline{QT}$

المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



(7) **جسور:** جسر الرياض المعلق طوله

763 m، وهو مثبت بحبال معدنية معلقة بدعامتين خرسانيتين. كما هو مبين بالشكل، بحيث يلتقي الحبلان المعدنيان العلويان في النقطة C عند منتصف المسافة بين الدعامتين، إذا كانت $AB = ED$: فأثبت أن المثلثين المبينين في الشكل المجاور متطابقان.

المثال 2 حدّد ما إذا كان $\triangle MNO \cong \triangle QRS$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ووضّح إجابتك:

(8) $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, 4), R(-7, 1), S(-3, 0)$

(9) $M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(3, -3), R(4, -4), S(3, 3)$

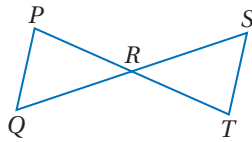
المثال 3 برهان: اكتب برهاناً من النوع المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(10) برهان ذو عمودين (11) برهان حرّ

المعطيات: R نقطة المنتصف لكلٍّ من

$\overline{QS}, \overline{PT}$

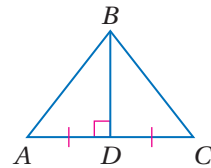
المطلوب: $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$



المعطيات: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\overline{AC}$ تنصّف $\overline{BD}$

المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

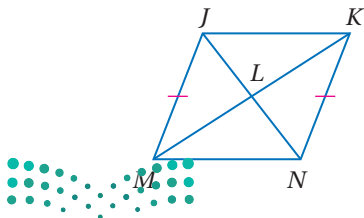


المثال 4 (12) برهان: اكتب برهاناً تسلسلياً

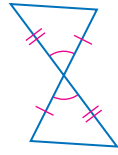
المعطيات: $\overline{JM} \cong \overline{NK}$; L نقطة المنتصف

لكلٍّ من $\overline{JN}, \overline{KM}$

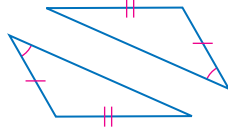
المطلوب: $\angle MJL \cong \angle KNL$



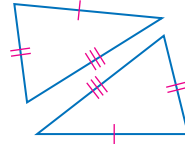
حدّد ما إذا كان المثلثان في كلّ من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.



(15)



(14)



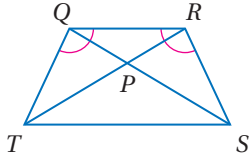
(13)

(16) **إشارة تحذيرية:** استعمل الشكل المجاور.

(a) ما اسم المجسم الذي تمثّله إشارة التحذير.

(b) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, فأثبت أن $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.

(c) لماذا يبدو المثلثان غير متطابقين في الشكل؟



(17) **برهان:** اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\triangle TPQ \cong \triangle SPR$

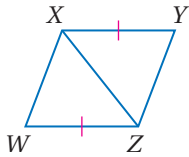
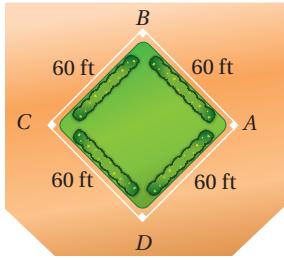
$\angle TQR \cong \angle SRQ$

المطلوب: $\triangle TQR \cong \triangle SRQ$

(18) في الشكل المجاور ABCD مزرعة مربعة الشكل، ويريد أخوان فصلها باستعمال سياج على أحد القطرين.

(a) اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أن $BD = AC$.

(b) اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أن $\angle BDC \cong \angle BDA$.



(19) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{YX} \cong \overline{WZ}$, $\overline{YX} \parallel \overline{WZ}$

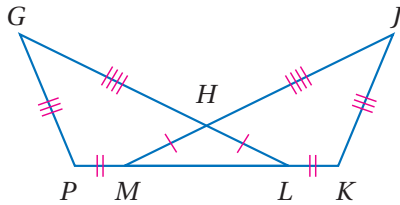
المطلوب: $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$

(20) **برهان:** اكتب برهاناً حرّاً.

المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{HM}$, $\overline{PM} \cong \overline{KL}$,

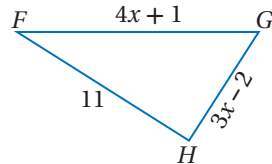
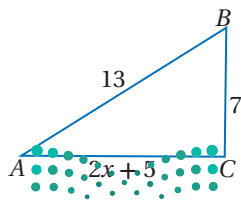
$\overline{PG} \cong \overline{KJ}$, $\overline{GH} \cong \overline{JH}$

المطلوب: $\angle G \cong \angle J$

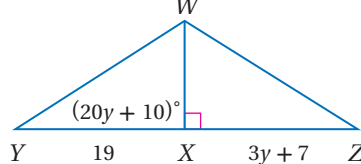


جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلّ من السؤالين الآتيين، وفسّر إجابتك:

$\triangle ABC \cong \triangle FGH$ (22)



$\triangle WXY \cong \triangle WXZ$ (21)



إرشادات للدراسة

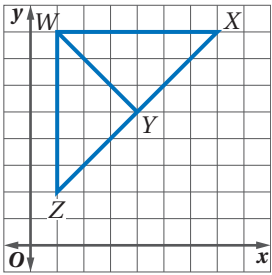
تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقين.

إرشادات للدراسة

الأشكال

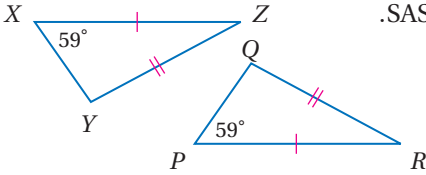
عند كتابة البراهين أو حل المسائل التي تتضمن مثلثات متطابقة، من المفيد أن ترسم شكلاً خاصاً بك، وتعيّن عليه الأضلاع والزوايا المتطابقة التي تجدها.

مسائل مهارات التفكير العليا



(23) **تحّد:** في الشكل المجاور:

- (a) صف طريقتين يمكنك استعمالهما لإثبات أن $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$.
علماً بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المنقلة. وأي طريقة تعتقد أنها فعّالة أكثر؟ وضح إجابتك.
- (b) أثبت أن $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$ ووضح إجابتك.



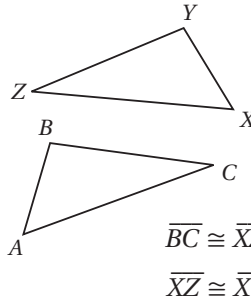
(24) **اكتشف الخطأ:** قال أحمد: إن $\triangle PRQ \cong \triangle XYZ$ بحسب SAS. فاعترض خالد وقال: لا توجد معلومات كافية لإثبات أن المثلثين متطابقان. أيهما كانت إجابه صحيحة؟ وضح إجابتك.

(25) **اكتب:** إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة لمثلثين قائمي الزاوية متطابقين، فهل المثلثان متطابقان؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

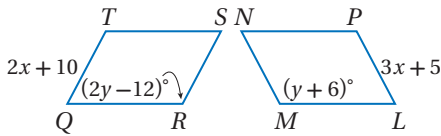
(27) إذا كان $-2a + b = -7$ ، فما قيمة a إذا علمت أن $b = -1$ ؟

- A -1
B 2
C 3
D 4



(26) في الشكلين المجاورين،
 $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ و $\angle C \cong \angle Z$
ما المعلومة الإضافية التي
يمكن استعمالها لإثبات أن
 $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ؟
A $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$
B $\overline{AB} \cong \overline{XY}$
C $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$
D $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$

مراجعة تراكمية

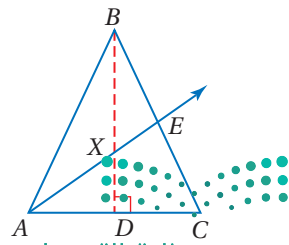


في الشكلين المجاورين، إذا علمت أن متوازي الأضلاع $LMNP \cong QRST$ ، فأوجد: (الدرس 3-3)

(28) قيمة x . (29) قيمة y .

(30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة: "الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان". وحدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثلاً مضاداً. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق



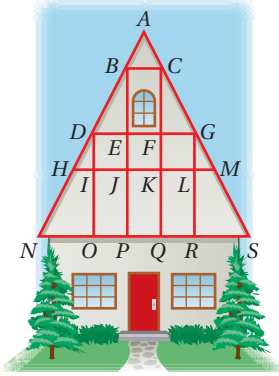
إذا علمت أن $\overline{BD}$ ، $\overline{AE}$ ينصفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:

(32) زاوية تطابق $\angle ABD$

(31) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{EC}$

(34) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{AD}$

(33) زاوية تطابق $\angle BDC$



(12) **فن العمارة:** يبين الشكل المجاور

بيتاً واجهته على شكل الحرف A، وتظهر عليه نقاط مختلفة. افترض أن القطع المستقيمة والزوايا التي تبدو أنها متطابقة هي متطابقة فعلاً. اكتب المثلثات المتطابقة.

(الدرس 3-3)

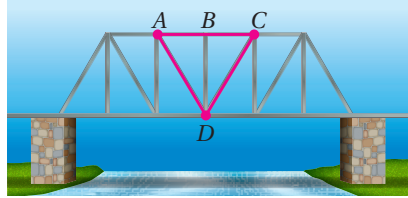
(13) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\triangle CBX \cong \triangle SML$ ، فأى عبارة ممّا

يأتي صحيحة؟ (الدرس 3-3)

$\angle X \cong \angle S$ C $\overline{CB} \cong \overline{ML}$ A

$\angle XCB \cong \angle LSM$ D $\overline{XC} \cong \overline{ML}$ B

(14) **جسور:** يُظهر الجسر في الشكل أدناه أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ، وأن B نقطة منتصف $\overline{AC}$. ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ؟ (الدرس 3-4)



حدّد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ في كلّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4)

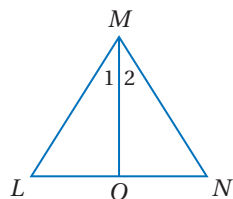
(15) $P(3, -5), Q(11, 0), R(1, 6), X(5, 1), Y(13, 6), Z(3, 12)$

(16) $P(-3, -3), Q(-5, 1), R(-2, 6), X(2, -6), Y(3, 3), Z(5, -1)$

(17) اكتب برهاناً ذا عمودين. (الدرس 3-4)

المعطيات: $\triangle LMN$ متطابق الضلعين. فيه، $\overline{MO}$ تنصّف $\angle LMN$.

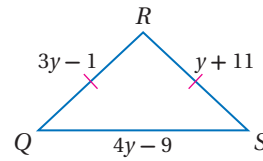
المطلوب: $\triangle MLO \cong \triangle MNO$



(1) **هندسة إحدائية:** صنّف $\triangle ABC$ الذي رؤوسه

$A(-2, -1), B(-1, 3), C(2, 0)$ إلى مختلف الأضلاع أو

متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين. (مهارة سابقة)



(2) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثل

أطوال أضلاع المثلث المتطابق

الضلعين QRS؟ (مهارة سابقة)

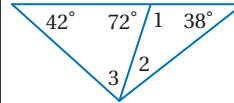
A 17, 17, 15

B 15, 15, 16

C 14, 15, 14

D 14, 14, 16

أوجد كلّاً من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 3-2)

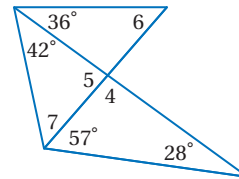


(3) $m\angle 1$

(4) $m\angle 2$

(5) $m\angle 3$

أوجد كلّاً من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 3-2)



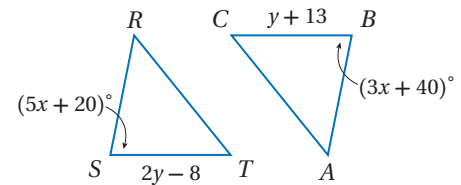
(6) $m\angle 4$

(7) $m\angle 5$

(8) $m\angle 6$

(9) $m\angle 7$

في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\triangle RST \cong \triangle ABC$ فأوجد: (الدرس 3-3)



(10) قيمة x.

(11) قيمة y.



إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS

Proving Triangles Congruent-ASA, AAS

3-5

لماذا؟



تتضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجههم نحو مؤخرة القارب، ولكل منهم مجداف. ويتطلب السباق عادة مسطحة من الماء طوله 1500 متر على الأقل، ويمكن استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة. مثل طول مضمار سباق الزوارق.

فيما سبق:

درست إثبات تطابق مثلثين باستعمال SAS, SSS.

(الدرس 3-4)

والآن:

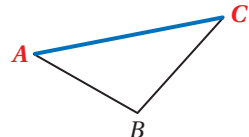
- أستعمل المسلمة ASA لاختبار التطابق.
- أستعمل النظرية AAS لاختبار التطابق.

المفردات:

الضلع المحصور

Included Side

مسلمة التطابق بزائيتين وضلع محصور بينهما ASA: الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لمضلع يُسمى **الضلع المحصور**، ففي $\triangle ABC$ المجاور، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A, \angle C$.



مسلمة 3.3

التطابق بزائيتين وضلع محصور بينهما (ASA)

إذا طبقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائريهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,

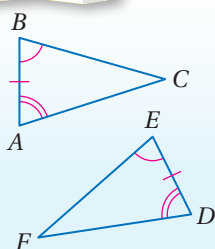
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$,

$\angle B \cong \angle E$,

فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



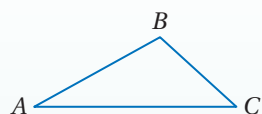
أضف إلى
مطوبتك



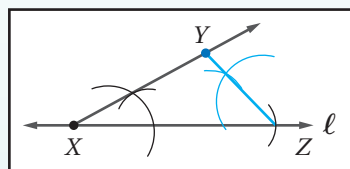
إنشاء مثلث يطابق مثلثاً مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق بزائيتين وضلع محصور بينهما (ASA)

إنشاء هندسي

ارسم مثلثاً وسمّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة ASA لتُنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

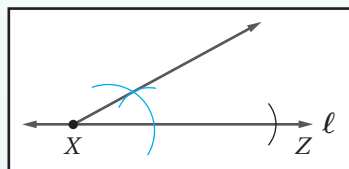


الخطوة 3:



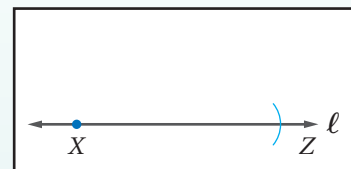
أنشئ زاوية مطابقة لـ $\angle C$ عند النقطة Z باستعمال $\overline{XZ}$ والضلع الزاوية، ومقياس نقطة تقاطع الضلعين الجديدين للزاويتين Y.

الخطوة 2:



أنشئ زاوية مطابقة لـ $\angle A$ عند النقطة X باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعاً للزاوية.

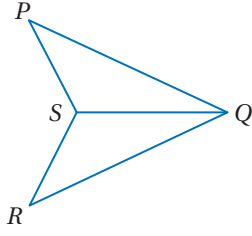
الخطوة 1:



ارسم مستقيماً l ، واختر عليه النقطة X. وأنشئ $\overline{XZ}$ على أن تكون $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين

مثال 1



اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ تنصف $\angle PQR$

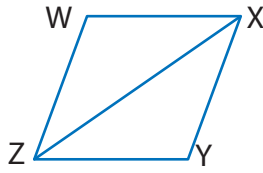
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

المبررات	العبارة
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)

تحقق من فهمك



(1) اكتب برهاناً حرّاً.

المعطيات: $\overline{ZX}$ تنصف $\angle WZY$ ، $\overline{XZ}$ تنصف $\angle YXW$.

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

نظرية التطابق بزائيتين وضلع غير محصور بينهما AAS: تطابق زائيتين وضلع غير محصور يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان. وتعدّ علاقة التطابق هذه نظرية؛ لأنه يمكن إثبات صحتها باستعمال نظرية الزاوية الثالثة.

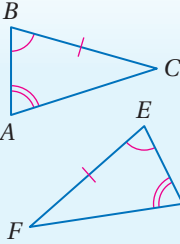
أضف إلى

مطوبتك

التطابق بزائيتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

نظرية 3.5

إذا طابقت زائيتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.

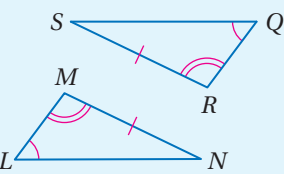


مثال إذا كانت، $\angle A \cong \angle D$

$\angle B \cong \angle E$,

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,

فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

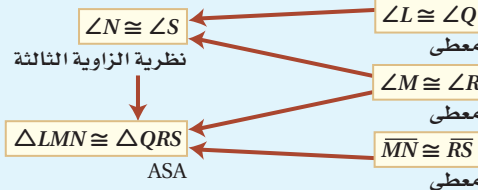


نظرية التطابق بزائيتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

المعطيات: $\angle L \cong \angle Q$, $\angle M \cong \angle R$, $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

البرهان:



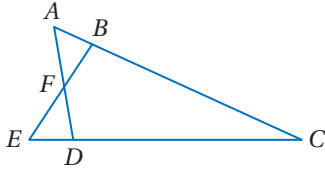
إرشادات للدراسة

SSA تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما:

بالرغم من أن تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان؛ لكن تطابق زائيتين وضلع سواء أكان محصوراً بينهما أو غير محصور بينهما كاف لإثبات تطابق مثلثين.

مثال 2

استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين



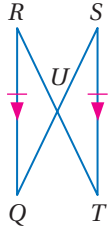
اكتب برهاناً حرّاً.

المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC$,
 $\overline{DC} \cong \overline{EC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان:

تحقق من فهمك



(2) اكتب برهاناً تسلسلياً:

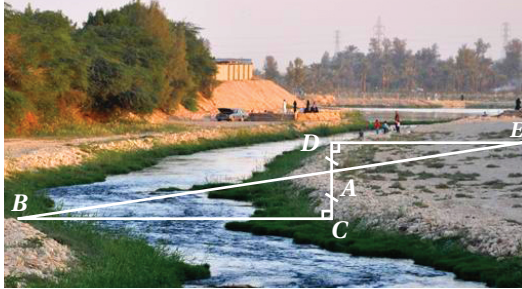
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

يمكنك استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من واقع الحياة

مسافات: أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين B , C ، فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها نقطة مرجعية، بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول DE يساوي 8 ft، فاحسب المسافة بين النقطتين C , B .



إرشادات للدراسة

زاوية-زاوية-زاوية

$\angle B$, $\angle E$ في المثال 3

متطابقتان بحسب

نظرية الزاوية الثالثة.

إن تطابق الزوايا

الثلاث المتناظرة غير

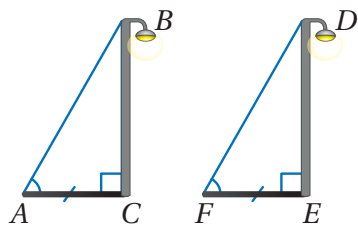
كاف لإثبات تطابق

مثلثين.



وزارة التعليم

Ministry of Education



تحقق من فهمك

3 استعمال الشكل المجاور الذي يمثل عمودَي كهرباء وظلَّيهما
لكتابة برهان حرٍّ يبيِّن أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

تعلمت طرائق عديدة لإثبات تطابق المثلثات.

أضف إلى مطوبتك		ملخص المفاهيم	
		إثبات تطابق المثلثات	
AAS يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.	ASA يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.	SAS يتطابق المثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.	SSS يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة.

تأكد

المثالان 1, 2 برهان: برهن كلاً مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

(1) برهان تسلسلي (2) برهان حرٍّ

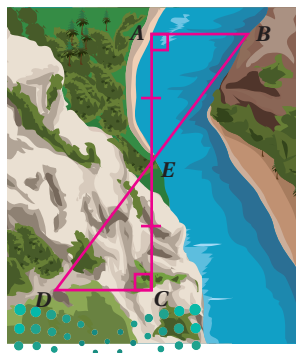
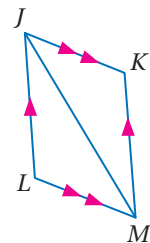
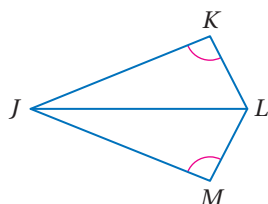
المعطيات: $\angle K \cong \angle M$,

المعطيات: $\overline{JK} \parallel \overline{LM}$, $\overline{JL} \parallel \overline{KM}$

$\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$.

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JML \cong \triangle MJK$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JKL \cong \triangle JML$

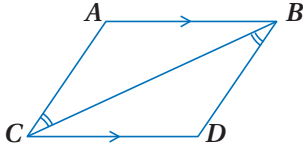


3 المثال 3 (3) بناء جسر: يحتاج مسّاح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين A, B المبيتين في الشكل المجاور لبناء جسر فوق النهر. فوضع وتدّاً عند A، ووضع زميله وتدّاً عند B في الجهة المقابلة، ثمّ عيّن المسّاح النقطة C في جهة A، بحيث كانت $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ووضع وتدّاً رابعاً عند E، التي هي نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيراً وضع وتدّاً عند النقطة D، بحيث كان $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ ، والنقاط B, E, D تقع على مستقيم واحد.

(a) وضح كيف يمكن أن يستعمل المسّاح المثلثين المتكونين لإيجاد المسافة بين النقطتين A, B.

(b) إذا كان: $AC = 160 \text{ m}$, $DC = 60 \text{ m}$, $DE = 100 \text{ m}$

فأوجد المسافة بين النقطتين A, B. وضح إجابتك.

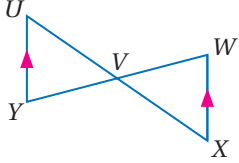


المثال 1 برهان: على الشكل المقابل:

(4) المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$$\angle CBD \cong \angle BCA$$

المطلوب: $\triangle CAB \cong \triangle BDC$



المثال 2 برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين.

(5) المعطيات: V نقطة منتصف $\overline{WY}$

$$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$$

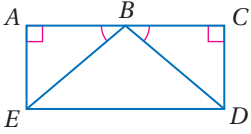
المطلوب: $\triangle UYV \cong \triangle XVW$

(6) برهان: اكتب برهاناً تسلسلياً.

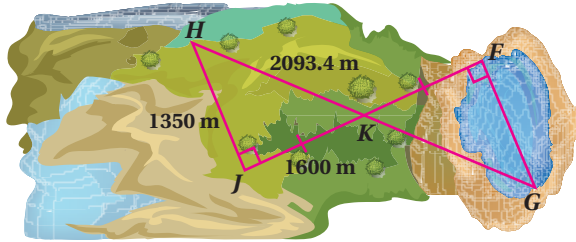
المعطيات: $\angle A, \angle C$ زاويتان قائمتان.

$$\angle ABE \cong \angle CBD, \overline{AE} \cong \overline{CD}$$

المطلوب: $\overline{BE} \cong \overline{BD}$



المثال 3 (7) سباق زوارق: يرغب المشرفون في إقامة سباق تجديف في بحيرة، لكنهم غير متأكدين ممّا إذا كان طول البحيرة كافياً لإجراء السباق أم لا، ولقياس طول البحيرة حدّدوا رؤوس المثلثين المبيينين في الشكل أدناه، ووجدوا أطوال أضلاع $\triangle HJK$ ، استعمل المعلومات الواردة في فقرة لماذا للإجابة عن الفقرتين a, b



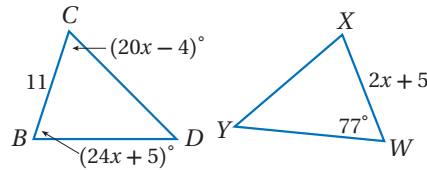
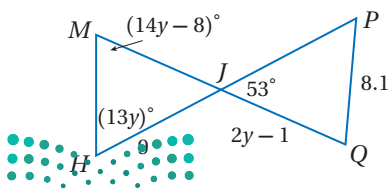
(a) وضح كيف يستعمل المشرفون على السباق المثلثين المتكونين لتقدير المسافة FG عبر البحيرة.

(b) هل طول البحيرة كافٍ لإجراء سباق الزوارق باستعمال القياسات المعطاة؟ وضح إجابتك.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلّ من السؤالين الآتيين:

$$\triangle MHJ \cong \triangle PQJ \quad (9)$$

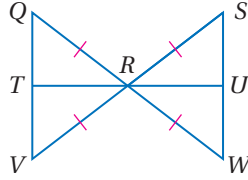
$$\triangle BCD \cong \triangle WXY \quad (8)$$



برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين

(11) المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$

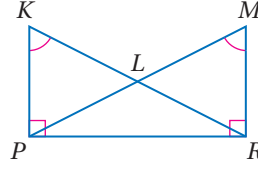
المطلوب: $\overline{QT} \cong \overline{WU}$



(10) المعطيات: $\angle K \cong \angle M$, $\overline{KP} \perp \overline{PR}$

$\overline{MR} \perp \overline{PR}$

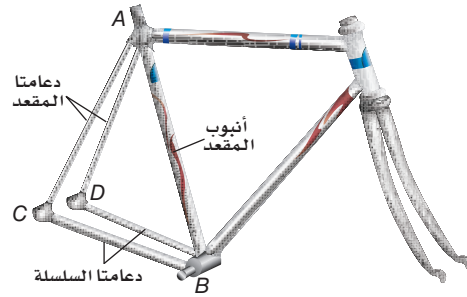
المطلوب: $\angle KPL \cong \angle MRL$



الربط مع الحياة

يعتمد حجم الدراجة الهوائية على طول أنبوب المقعد فيها. ويتراوح هذا الطول في الدراجات الهوائية للشباب ما بين 12 in إلى 26 in. وتعتبر ملائمة للراكب إذا استطاع أن يركب الدراجة بسهولة وهو واقف على الأرض.

(12) **دراجات هوائية:** يشكّل أنبوب مقعد الدراجة مثلثاً مع كلّ من دعائمي السلسلة والمقعد. إذا كانت كل دعامة مقعد تشكّل زاوية قياسها 68° مع دعامة السلسلة المناظرة لها، وكل دعامة سلسلة تشكّل زاوية قياسها 44° مع أنبوب المقعد، فبيّن أن دعائمي المقعد لهما الطول نفسه.



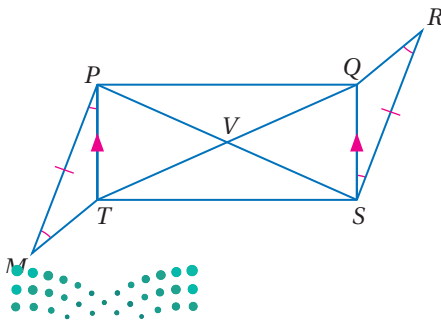
مسائل مهارات التفكير العليا

(13) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال مسلّمة ASA، وسمّهما.

(14) **اكتشف الخطأ:** يقول عمر إنه لا يمكن إثبات تطابق مثلثين بتطابق ثلاث زوايا AAA، بينما يقول حسن إنه بإمكانه إثبات هذا التطابق، أيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

(15) **تبرير:** أوجد مثلاً مضاداً يوضح لماذا لا تستعمل حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما SSA؛ لإثبات تطابق مثلثين.

(16) **تحّد:** باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهاناً تسلسلياً لإثبات أن $\triangle PVQ \cong \triangle SVT$.



(17) **اكتب:** لخص الطرائق الواردة في الدروس من 3-3 إلى 5-3؛ لإثبات تطابق المثلثات في جدول موضحاً متى تُستعمل كل طريقة.

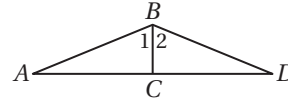
تدريب على اختبار

19 ما قيمة $\sqrt{121 + 104}$ ؟

- (A) 15
(B) 21
(C) 125
(D) 225

18 في الشكل أدناه،

$\overline{BC} \perp \overline{AD}$ ، $\angle 1 \cong \angle 2$



أي نظرية أو مسلمة مما يأتي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ ؟

- (A) AAS
(B) ASA
(C) SAS
(D) SSS

مراجعة تراكمية

20 إذا علمت أن: $A(6, 4)$, $B(1, -6)$, $C(-9, 5)$, $X(0, 7)$, $Y(5, -3)$, $Z(15, 8)$ ، فبين ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ أم لا. ووضح إجابتك. (الدرس 3-4)

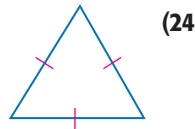
21 جبر: إذا كان: $JK = 4y - 5$, $RT = 9 + x$, $ST = 5$, $RS = 7$, $\triangle RST \cong \triangle JKL$ ، فارسم شكلاً يمثل المثلثين المتطابقين، وسمّه. ثم أوجد قيمة كل من x , y . (الدرس 3-3)

22 أكمل جدول الصواب المجاور (مهارة سابقة)

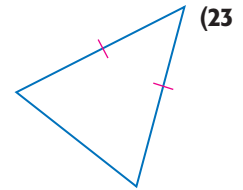
p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
F	T		
T	T		
F	F		
T	F		

استعد للدرس اللاحق

صنف كلًا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه:



(24)



(23)





المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع Isosceles and Equilateral Triangles



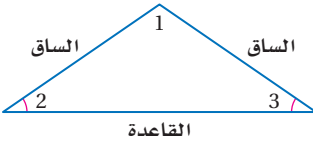
لماذا؟

للعبة القطار السريع في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لتقويتها وتثبيتها، والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين.

خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكر أن

المثلثات المتطابقة الضلعين لها ضلعان متطابقان على الأقل، وأن لعناصرها أسماء خاصة.

حيث يُسمّى الضلعان المتطابقان **الساقين**، والزوايا التي ضلعاها الساقان تُسمّى **زاوية الرأس**. ويُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدة. والزوايتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتي القاعدة**.



ففي الشكل المجاور، $\angle 1$ هي زاوية الرأس، وزاويتي القاعدة هما $\angle 2$ ، $\angle 3$.

فيما سبق:

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

(الدرس 3-1)

والآن:

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المفردات:

ساقا المثلث المتطابق

الضلعين

legs of an isosceles triangle

زاوية الرأس

vertex angle

زاويتي القاعدة

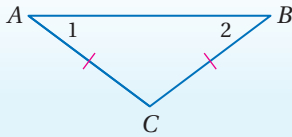
base angles

أضف إلى

مطوبتك

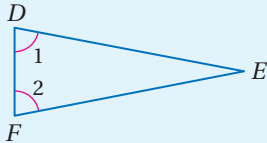
المثلث المتطابق الضلعين

نظريات



3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين
إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.

مثال: إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

مثال: إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\overline{FE} \cong \overline{DE}$.

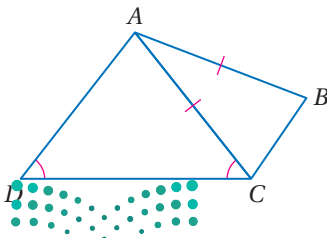
ستبرهن النظرية 3.11 في السؤال 24



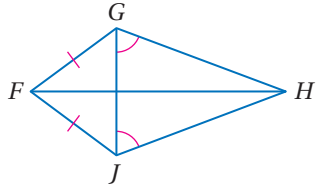
القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة

مثال 1

(a) سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.



(b) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.



تحقق من فهمك

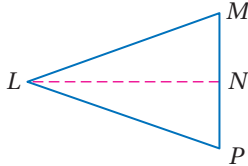
(1A) سمّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل .

(1B) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل .

لإثبات نظرية المثلث المتطابق الضلعين، ارسم مستقيماً مساعداً، ثم استعمل المثلثين الناتجين.

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

البرهان



المعطيات: في $\triangle LMP$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: إثبات أن: $\angle M \cong \angle P$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.	(1) افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$.
(2) كل نقطتين تحددان مستقيماً.	(2) ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$.
(3) نظرية نقطة المنتصف.	(3) $\overline{PN} \cong \overline{NM}$
(4) خاصية الانعكاس في التطابق.	(4) $\overline{LN} \cong \overline{LN}$
(5) معطى.	(5) $\overline{LM} \cong \overline{LP}$
(6) مسلّمة التطابق بثلاثة أضلاع.	(6) $\triangle LMN \cong \triangle LPN$
(7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة.	(7) $\angle M \cong \angle P$

خصائص المثلث المتطابق الأضلاع: نظرية المثلث المتطابق الضلعين تقود إلى نتيجتين حول زوايا المثلث المتطابق الأضلاع.

أضف إلى مطوياتك

نتيجتان

المثلث المتطابق الأضلاع

3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

مثال: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ،
إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$

3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع 60° .

مثال: إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ،
فإن $m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60^\circ$

مراجعة المفردات

المثلث المتطابق

الأضلاع:

هو مثلث أضلاعه

الثلاثة متطابقة.



ستبرهن النتيجتين 3.3، 3.4 في السؤالين 22، 23

وزارة التعليم

Ministry of Education

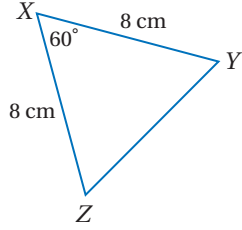
الدرس 6-3 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع 5522

إيجاد القياسات المجهولة

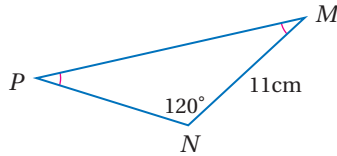
مثال 2

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

$m\angle Y$ (a)



YZ (b)



PN (2B)

تحقق من فهمك

$m\angle M$ (2A)

يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والجبر لتجد القيم المجهولة.

إرشادات للدراسة

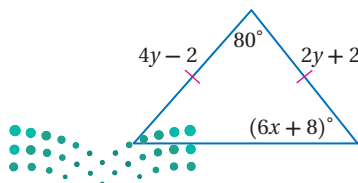
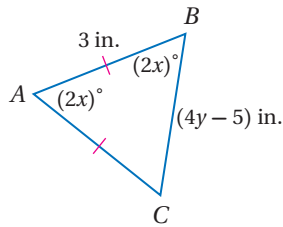
المثلثات المتطابقة الضلعين

كما اكتشفت في المثال 2، أي مثلث متطابق الضلعين فيه زاوية قياسها 60° يكون مثلثاً متطابق الأضلاع.

إيجاد القيم المجهولة

مثال 3

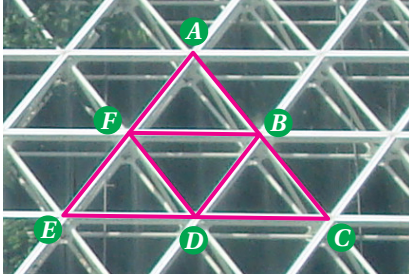
جبر: أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور.



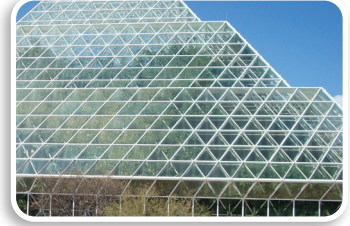
تحقق من فهمك

(3) أوجد قيمة كل من المتغيرين في الشكل المجاور .

مثال 4 من واقع الحياة تطبيق تطابق المثلثات



بناءً: في الصورة المجاورة. $\triangle ACE$ مثلث متطابق
الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$ ، D نقطة منتصف $\overline{EC}$ ، B نقطة
منتصف $\overline{CA}$. برهن أن $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.
المعطيات: $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، و F نقطة منتصف $\overline{AE}$ ،
و D نقطة منتصف $\overline{EC}$ ، و B نقطة منتصف $\overline{CA}$
المطلوب: إثبات أن: $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.
البرهان:



الربط مع الحياة

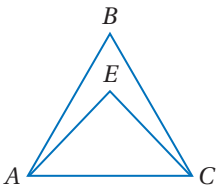
استعمل المهندس المعماري
في هذا المبنى قضباناً
حديدية تم تثبيتها على شكل
مثلثات لتزيد المبنى دعمًا
وقوة مراعيًا في ذلك الجوانب
الجمالية للبناء أيضًا.

المبررات	العبارات
(1)	(1)
(2)	(2)
(3)	(3)
(4)	(4)
(5)	(5)
(6)	(6)
(7)	(7)
(8)	(8)
(9)	(9)
(10)	(10)
(11)	(11)
(12)	(12)

تحقق من فهمك

(4) في الصورة أعلاه إذا علمت أن $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، فيه: $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$ ، $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$ ، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$ ، فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$.

تأكد



باستعمال الشكل المجاور أجب عن السؤالين الآتيين:

المثال 1

(1) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

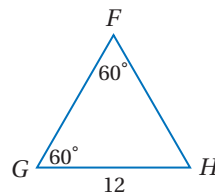
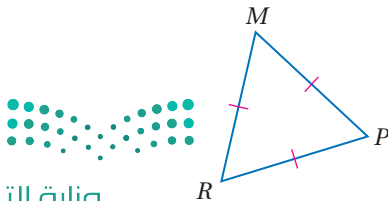
(2) إذا كان $\angle EAC \cong \angle ECA$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

المثال 2

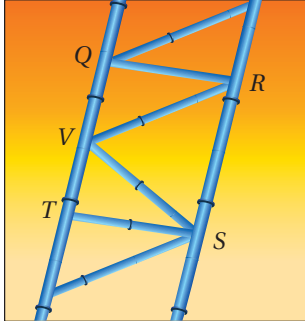
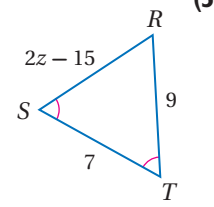
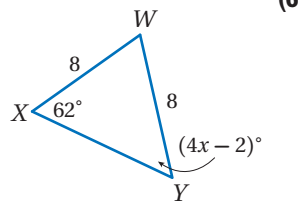
أوجد كلاً من القياسين الآتيين:

(4) $m\angle MRP$

(3) FH



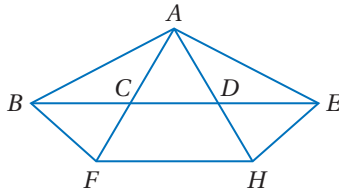
المثال 3 جبر: أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:



المثال 4 (7) القاطرة السريعة: الشكل المجاور يظهر جزءاً من سكة القاطرة السريعة المبنية في فقرة "لماذا؟" مكوّنة من مثلثات.

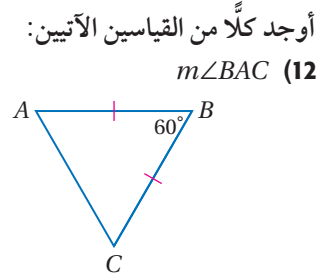
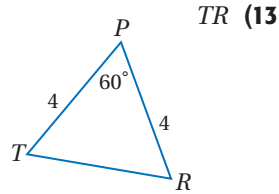
- (a) إذا كان $\overline{QR}$ ، $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$ ، و $\triangle RVS \cong \triangle STV$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$ ، فأثبت أن $\triangle RQV \cong \triangle STV$.
- (b) إذا كان $QR = 2$ m، $VR = 2.5$ m، فأوجد البعد بين المستقيمين $\overleftrightarrow{QR}$ و $\overleftrightarrow{ST}$. برّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

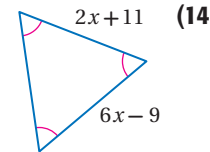
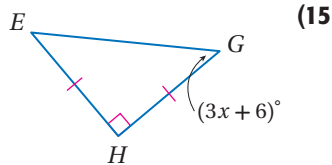


باستعمال الشكل المجاور أجب عن الأسئلة 8-11:

- (8) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AE}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.
- (9) إذا كانت $\angle ABF \cong \angle AFB$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.
- (10) إذا كانت $\overline{CA} \cong \overline{DA}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.
- (11) إذا كانت $\angle DAE \cong \angle DEA$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

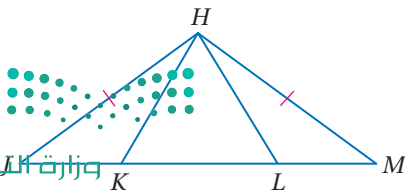


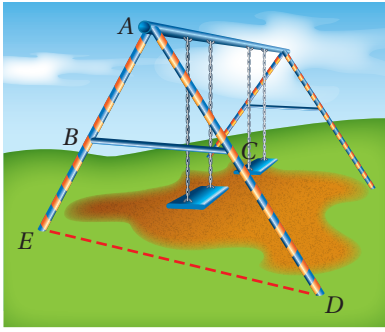
المثال 3 جبر: أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:



المثال 4 برهان: اكتب برهاناً حرّاً.

- (16) المعطيات: $\triangle HJM$ متطابق الضلعين، $\triangle HKL$ متطابق الأضلاع.
- المطلوب إثبات أن: $\angle JHK \cong \angle MHL$





17) حقائق: اصطحب خالد أخاه الأصغر إلى حديقة الحي، فلاحظ أن دعائم الأرجوحة الموجودة في الحديقة تشكل مجموعتين من المثلثات، وأن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ولكن $\overline{BC} \neq \overline{AB}$.

(a) إذا قَدَّر خالد أن $m\angle BAC = 50^\circ$ ، فما قيمة $m\angle ABC$ وفقًا لهذا التقدير؟ وضح إجابتك.

(b) إذا كان $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ ، فبين أن $\triangle AED$ متطابق الضلعين.

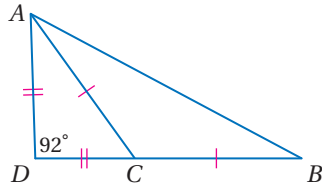
(c) إذا كان $\overline{ED} \cong \overline{AD}$ ، $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ ، فبين أن $\triangle AED$ متطابق الأضلاع.



الربط مع الحياة

مهمة الوالدين اختيار الألعاب التي تناسب أعمار أطفالهم.

أوجد كلاً من القياسات الآتية:



(18) $m\angle CAD$

(19) $m\angle ACD$

(20) $m\angle ACB$

(21) $m\angle ABC$

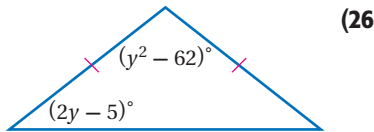
برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

(24) النظرية 3.11

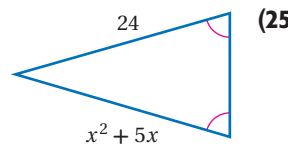
(23) النتيجة 3.4

(22) النتيجة 3.3

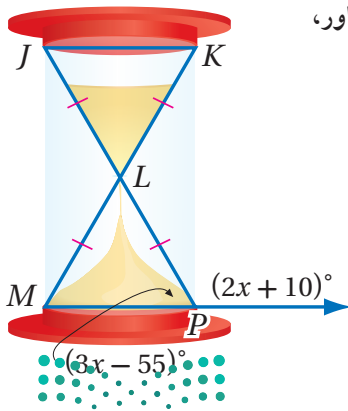
أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



(26)



(25)



الساعات الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلاً من القياسات الآتية:

(27) $m\angle LPM$

(28) $m\angle LMP$

(29) $m\angle JLK$

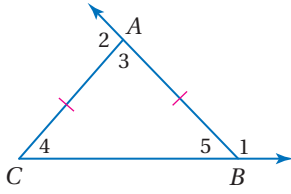
(30) $m\angle JKL$



الربط مع الحياة

دقة ساعة الرمل الزجاجية تعتمد على ثبات معدل تدفق الرمل الذي يعتمد على نسبة قطر الثقب إلى قطر حبات الرمل المستعملة.

31 تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، ستكتشف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث المتطابق الضلعين، إذا علم قياس زاوية خارجية له.



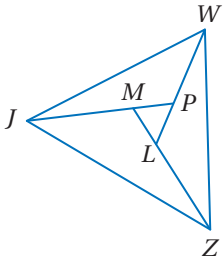
(a) هندسيًا: استعمل المسطرة والمنقلة لرسم ثلاثة مثلثات مختلفة، كلٌّ منها متطابق الضلعين. ومُدِّ أحد ضلعي زاوية الرأس ومدَّت القاعدة من إحدى جهتيها كما في الشكل المجاور.

(b) جدولياً: استعمل المنقلة لإيجاد $m\angle 1$ لكل مثلث وسجِّله في جدول. واستعمل $m\angle 1$ لحساب قياسات $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ ، ثم أوجد $m\angle 2$ وسجِّله في جدول آخر واستعمله لحساب القياسات السابقة نفسها. رتِّب نتائجك في جدولين.

(c) لفظياً: وضح كيف استعملت $m\angle 1$ لإيجاد قياسات $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$. ثم وضح كيف استعملت $m\angle 2$ لإيجاد هذه القياسات نفسها.

(d) جبرياً: إذا كان $m\angle 1 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍّ من $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ ، وبالمثل إذا كان $m\angle 2 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍّ من الزوايا نفسها.

مسائل مهارات التفكير العليا



32 تحد: في الشكل المجاور إذا كان $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ ، فأثبت أن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارتين الآتيتين صحيحة أحياناً أو دائماً أو غير صحيحة أبداً. ووضح إجابتك:

33 إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين عدداً صحيحاً، فإن قياس كلٍّ من زاويتي القاعدة عدد صحيح.

34 إذا كان قياس كلٍّ من زاويتي القاعدة عدداً صحيحاً، فإن قياس زاوية الرأس عدد فردي.

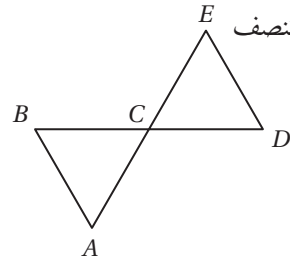
35 مسألة مفتوحة: ارسم مثلثاً متطابق الضلعين، فيه زاويتا القاعدة منفردتان إن أمكنك ذلك، وإلا فوضح السبب.

36 اكتب: وضح كيف تستعمل قياس زاوية قاعدة المثلث المتطابق الضلعين لإيجاد قياس زاوية الرأس.

تدريب على اختبار

38 إذا كان $x = -3$ ، فإن قيمة $4x^2 - 7x + 5$ تساوي:

- 2 A
- 20 B
- 42 C
- 62 D

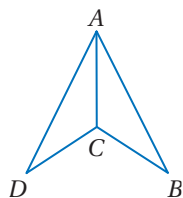


37 في الشكل المجاور، $\overline{AE}$ تنصف $\overline{BD}$ ، كلٌّ منهما الأخرى في النقطة C.

أي المعلومات الإضافية الآتية تعد كافية لإثبات أن $\overline{DE} \cong \overline{DC}$ ؟

- $\angle ACB \cong \angle EDC$ C
- $\angle A \cong \angle B$ D
- $\angle A \cong \angle BCA$ A
- $\angle B \cong \angle D$ B

مراجعة تراكمية



(39) إذا كان: $CB = 7$ in , $DC = 7$ in , $AD = 27$ in , $AB = 27$ in ,
فحدّد ما إذا كان $\triangle ADC \cong \triangle ABC$. (المهارة سابقة) (الدرس 3-4)

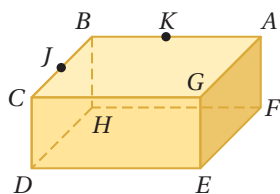
اذكر الخاصية التي تبرر كلّاً من العبارات الآتية: (مهارة سابقة)

(40) إذا كان $x(y + z) = a$ ، فإنّ $xy + xz = a$.

(41) إذا كان $n - 17 = 39$ ، فإنّ $n = 56$.

(42) إذا كان $m\angle P + m\angle Q = 110^\circ$ وكانت $m\angle R = 110^\circ$ ، فإنّ $m\angle P + m\angle Q = m\angle R$.

(43) إذا كان $MD = 15$ ، $CV = MD$ ، فإنّ $CV = 15$.



انظر إلى الشكل المجاور. (مهارة سابقة)

(44) ما عدد المستويات الظاهرة في هذا الشكل؟

(45) سمّ ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

استعد للدرس اللاحق

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفيها كما يأتي:

(46) $A(2, 15)$, $B(7, 9)$

(47) $C(-4, 6)$, $D(2, -12)$

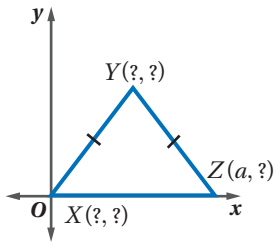
(48) $E(3, 2.5)$, $F(7.5, 4)$



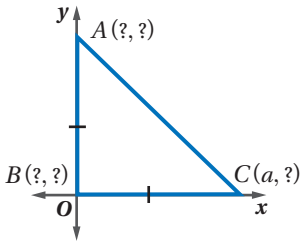
مثال 2

إيجاد الإحداثيات المجهولة

أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث XYZ المتطابق الضلعين.



تحقق من فهمك



(2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.

إرشادات للدراسة

الزاوية القائمة

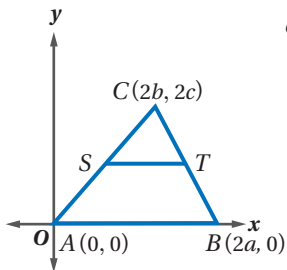
تقاطع المحور x مع المحور y يشكل زاوية قائمة؛ ولذا يُعد هذا التقاطع المكان المناسب لموقع الزاوية القائمة.

كتابة البرهان الإحداثي بعد رسم المثلث في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه، يمكنك استعمال البرهان الإحداثي؛ للتحقق من بعض الخصائص وبرهنة بعض النظريات.

مثال 3

كتابة البرهان الإحداثي

اكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

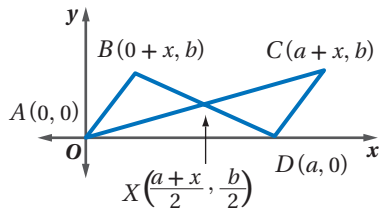


إرشادات للدراسة

البرهان الإحداثي

تنطبق الإرشادات والطرائق المستعملة في هذا الدرس على كل المضلعات، ولا تقتصر على المثلثات.





تحقق من فهمك

3) اكتب برهاناً إحدائياً لإثبات أن:
 $\triangle ABX \cong \triangle CDX$

يمكن استعمال طرائق البرهان الإحدائي لحل مسائل من واقع الحياة.

تصنيف المثلثات

مثال 4 من واقع الحياة

جغرافيا: إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لكل من الرياض وبنبع وتبوك هي:
الرياض $24.15^\circ\text{N } 46.72^\circ\text{E}$ ، بنبع $24.63^\circ\text{N } 38.07^\circ\text{E}$ ، تبوك $28.37^\circ\text{N } 36.6^\circ\text{E}$.



الربط مع الحياة

يقع مثلث برمودة المبين في الخريطة في المحيط الأطلسي، وهو على شكل مثلث مختلف الأضلاع. وتقدر مساحته الحقيقية بـ 482344 ميلاً مربعاً.

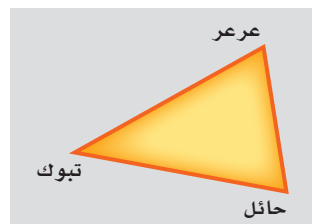


تاريخ الرياضيات

محمد بن أحمد أبو الريحان البيروني الخوارزمي، 362هـ - 973هـ
برز في كثير من فروع المعرفة الإنسانية (الأدب، الجغرافيا، الفلك، الرياضيات)، فقد حدد بدقة خطوط الطول وخطوط العرض، ووضع قاعدة حسابية لتسطيح الكرة؛ أي نقل الخطوط والخرائط من الكرة إلى سطح مسطح والعكس..

تحقق من فهمك

4) **جغرافيا:** يضم مجمّع كشفيّ ثلاث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلثاً. إذا كانت الإحداثيات التقريبية لمواقع هذه المدن الثلاث هي:
تبوك $28.37^\circ\text{N } 36.6^\circ\text{E}$ ، عرعر $30.9^\circ\text{N } 41.13^\circ\text{E}$ ، حائل $27.43^\circ\text{N } 41.68^\circ\text{E}$.
فاكتب برهاناً إحدائياً لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متطابق الضلعين تقريباً.



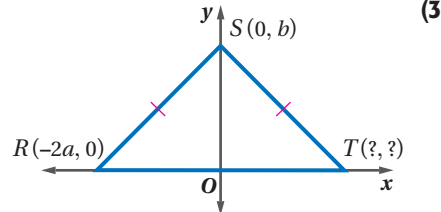
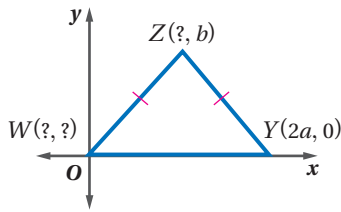
المثال 1

ارسم كلاً من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي، وحدد إحداثيات رؤوسه.

- (1) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، فيه $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ضلعا القائمة، وطول $\overline{AC}$ يساوي $2a$ وحدة، وطول $\overline{AB}$ يساوي $2b$ وحدة.
(2) $\triangle FGH$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{FG}$ يساوي $2a$ وحدة.

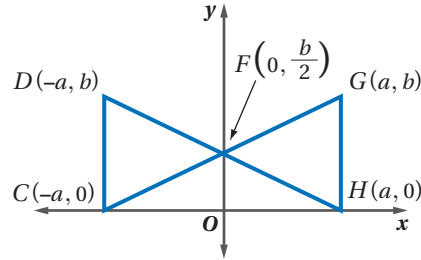
المثال 2

أوجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:



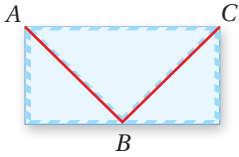
المثال 3

(5) اكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن $\triangle FGH \cong \triangle FDC$.



المثال 4

(6) اكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين، علمًا بأن بُعدي المظروف هما: 10 cm, 20 cm، والنقطة B في منتصف الحافة السفلى للمظروف.



تدرب وحل المسائل

المثال 1

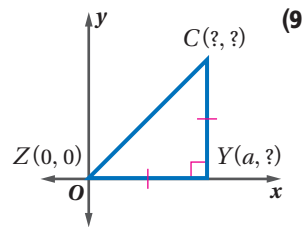
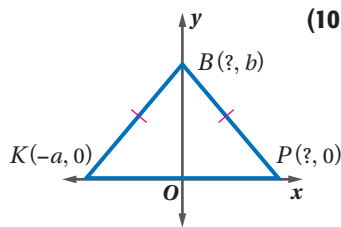
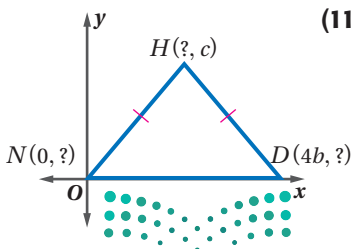
ارسم كل مثلث من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثي، وحدد إحداثيات رؤوسه:

(7) $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{AB}$ يساوي a وحدة.

(8) $\triangle XYZ$ القائم الزاوية الذي وتره $\overline{YZ}$ ، وطول الضلع $\overline{XY}$ يساوي b وحدة، وطول $\overline{XZ}$ ثلاثة أمثال طول $\overline{XY}$.

المثال 2

أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي:



(12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكّل مثلثاً متطابق الضلعين أيضاً.

(13) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.

(14) **جغرافيا:** إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لمواقع مدن جازان ونجران وخميس مشيط هي: جازان $16.9^\circ\text{N } 42.58^\circ\text{E}$ ، نجران $17.5^\circ\text{N } 44.16^\circ\text{E}$ ، خميس مشيط $18.3^\circ\text{N } 42.8^\circ\text{E}$ ، فبين أن المثلث الذي رؤوسه هي هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

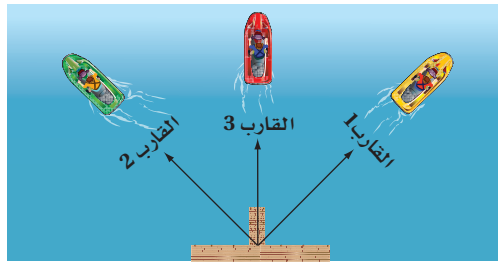
في $\triangle XYZ$ ، أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه، ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضح إجابتك.

$$X(0, 0), Y(1, h), Z(2h, 0) \quad (16)$$

$$X(0, 0), Y(2h, 2h), Z(4h, 0) \quad (15)$$

(17) **نزهة:** أقامت عائلتان خيمتين في متنزه كبير. إذا اعتبرنا أن موقع إدارة المتنزه تقع عند النقطة $(0, 0)$ ، وأن إحداثيات موقعي الخيمتين هما $(12, 9)$ ، $(0, 25)$. فاكتب برهاناً إحدائياً لإثبات أن الشكل المتكون من مواقع إدارة المتنزه والخيمتين هو مثلث قائم الزاوية.

(18) **رياضة مائية:** انطلقت ثلاثة قوارب مائية من الرصيف نفسه، فاتجه الأول نحو الشمال الشرقي، واتجه الثاني نحو الشمال الغربي، أما الثالث فاتجه نحو الشمال.



الربط مع الحياة

تستثمر المنطقة الشرقية
وجدة إطلاقتيها على
الخليج العربي والبحر
الأحمر في توجيه برامج
رياضية بحرية متنوعة
للسياح الذين يتوافدون
على الوجهات البحرية من
مختلف مناطق المملكة.

توقف القاربان (الأول والثاني) على بُعد 300 m تقريباً من الرصيف، بينما توقف الثالث على بُعد 212 m من الرصيف.

(a) إذا اعتبرنا أن الرصيف يمثل النقطة $(0, 0)$ ، فمثل هذا الوضع بياناً، وأوجد معادلة خط سير القارب الأول، ومعادلة خط سير القارب الثاني. وفسر إجابتك.

(b) اكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن الرصيف والقاربين (الأول والثاني) تشكّل مثلثاً قائم الزاوية متطابق الضلعين. (c) أوجد إحداثيات مواقع هذه القوارب الثلاثة، وفسر إجابتك.

(d) اكتب برهاناً إحدائياً لإثبات أن القوارب الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد تقريباً، وأن القارب الثالث يقع في منتصف المسافة بين القاربين الأول والثاني.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحذّر: إذا كانت إحداثيات النقطة J هي $(0, 0)$ ، والنقطة K هي $(2a, 2b)$ ، فأوجد إحداثيات النقطة L ، على أن يكون $\triangle JKL$ من النوع المحدّد في كلّ من الأسئلة الثلاثة الآتية:

(19) مثلث مختلف الأضلاع (20) مثلث قائم الزاوية (21) مثلث متطابق الضلعين

(22) **مسألة مفتوحة:** في المستوى الإحداثي، ارسم مثلثاً قائم الزاوية متطابق الضلعين، على أن تكون نقطة الأصل هي نقطة منتصف وتره، وحدّد إحداثيات كل رأسٍ من رؤوسه.

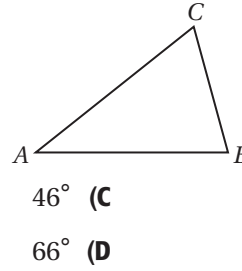
(23) تبرير: إحداثيات رأسين في مثلث هما: $(a, 0)$, $(0, 0)$. إذا أعطي إحداثي الرأس الثالث بدلالة a ، وكان المثلث متطابق الضلعين، فحدد إحداثيات الرأس الثالث، ثم ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.

(24) اكتب: وضح فائدة اتباع كل من الإرشادات الآتية؛ لرسم المثلث في المستوى الإحداثي عند كتابة البرهان الإحداثي:

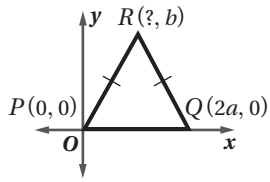
- (a) اجعل نقطة الأصل أحد رؤوس المثلث.
- (b) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على المحور x أو المحور y .
- (c) حاول أن يقع المثلث في الربع الأول ما أمكن ذلك.

تدريب على اختبار

(25) في الشكل أدناه إذا كان $m\angle B = 76^\circ$ ، وقياس $\angle A$ يساوي نصف قياس $\angle B$ ، فما $m\angle C$ ؟



(26) ما إحداثيات النقطة R في المثلث المجاور؟



- (a) $(4a, b)$ C $(\frac{a}{2}, b)$ A
- (b) $(\frac{a}{4}, b)$ D (a, b) B

مراجعة تراكمية

باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة 27-29. (الدرس 3-6)

(27) سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إليهما في الشكل.

(28) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إليهما في الشكل.

(29) سمّ مثلثين متطابقين.

(30) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 6)$, $(-2, -6)$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، وقرب الناتج إلى أقرب عُشر:

(31) $X(5, 4)$, $Y(2, 1)$

(32) $A(1, 5)$, $B(-2, -3)$

(33) $J(-2, 6)$, $K(1, 4)$



المفردات الأساسية :

- المثلث الحاد الزوايا (ص. 12) النتيجة (ص. 23)
 المثلث المنفرج الزاوية (ص. 12) التطابق (ص. 28)
 المثلث القائم الزاوية (ص. 12) المضلعات المتطابقة (ص. 28)
 المثلث المتطابق الأضلاع (ص. 13) العناصر المتناظرة (ص. 28)
 المثلث المتطابق الضلعين (ص. 13) الزاوية المحصورة (ص. 38)
 المثلث المختلف الأضلاع (ص. 13) الضلع المحصور (ص. 45)
 المستقيم المساعد (ص. 20) ساقا المثلث المتطابق
 الزاوية الخارجية (ص. 22) الضلعين (ص. 54)
 الزاويتان الداخليتان (ص. 54) زاوية الرأس (ص. 54)
 البعديتان (ص. 22) زاويتا القاعدة (ص. 54)
 البرهان التسلسلي (ص. 22) البرهان الإحداثي (ص. 62)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح صحيحة:

- المثلث المتطابق الزوايا هو مثال على المثلث الحاد الزوايا.
- المثلث الذي يحوي زاوية أكبر من 90° هو مثلث قائم الزاوية.
- المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا دائماً.
- المثلث المختلف الأضلاع فيه ضلعان متطابقان على الأقل.
- الضلع المحصور هو الضلع الذي يقع بين زاويتين متتاليتين في مضلع.
- البرهان التسلسلي يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لبرهنة المفاهيم الهندسية.
- قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياس الزاويتين الداخليتين البعديتين.



ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تصنيف المثلثات (الدرس 3-1)

- يمكن تصنيف المثلث بحسب نوع زواياه، فيكون حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. وكذلك يمكن تصنيفه بحسب أضلاعه، فيكون مختلف الأضلاع أو متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

زوايا المثلث (الدرس 3-2)

- قياس الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع قياس الزاويتين الداخليتين البعديتين.

المثلثات المتطابقة (الدرس 3-3 إلى 3-5)

- SSS: يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة.
- SAS: يتطابق مثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- ASA: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- AAS: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة

الأضلاع (الدرس 3-6)

- زاويتا القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، ويكون المثلث متطابق الأضلاع إذا تطابقت جميع زواياه.

المثلثات والبرهان الإحداثي (الدرس 3-7)

- يستعمل البرهان الإحداثي الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية.

المطويات

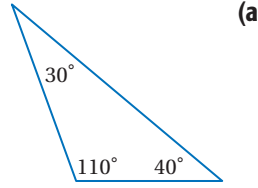
منظم أفكار



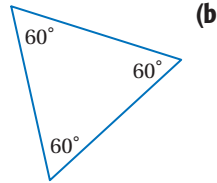
تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

مثال 1

صنّف كلّاً من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

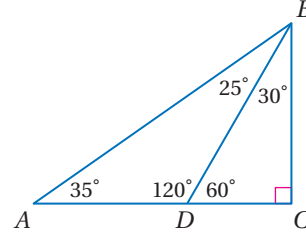


بما أن للمثلث زاوية منفرجة، فيكون مثلثاً منفرج الزاوية.



للمثلث ثلاث زوايا حادة جميعها متساوية؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

صنّف كلّاً من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

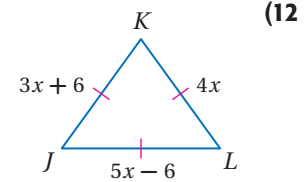
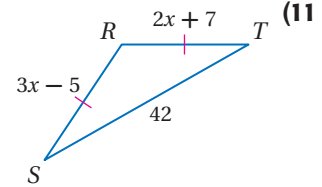


$\triangle ADB$ (8)

$\triangle BCD$ (9)

$\triangle ABC$ (10)

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:

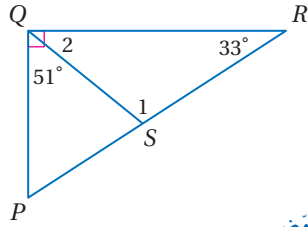


(13) **خرائط:** المسافة من الرياض إلى المدينة المنورة ومنها إلى مكة المكرمة ثم إلى الرياض تساوي 2092 km، والمسافة بين الرياض ومكة المكرمة تزيد 515 km على المسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة. والمسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة تقل 491 km عن المسافة بين الرياض والمدينة المنورة. أوجد المسافة بين كل مدينتين من هذه المدن، وصنّف المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث.



3-2 زوايا المثلثات (ص: 20-27)

مثال 2



أوجد قياس كل من
الزوايا المرقمة في الشكل المجاور:

$$m\angle 2 + m\angle PQS = 90^\circ$$

$$m\angle 2 + 51^\circ = 90^\circ$$

$$m\angle 2 = 39^\circ$$

$$m\angle 1 + m\angle 2 + 33^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle 1 + 39^\circ + 33^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle 1 + 72^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle 1 = 108^\circ$$

عوض

اطرح 51 من الطرفين

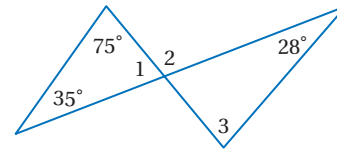
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

عوض

بسّط

اطرح 72 من الطرفين

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة الآتية:



14 $\angle 1$

15 $\angle 2$

16 $\angle 3$

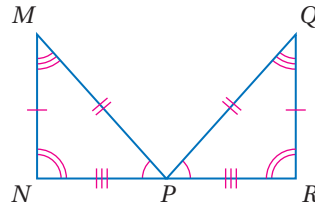
17 **منازل:** حديقة منزلية على صورة مثلث متطابق الضلعين كما في الشكل أدناه. أوجد قيمة x .



3-3 المثلثات المتطابقة (ص: 28-35)

مثال 3

بين أن المثلثين الآتيين متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:



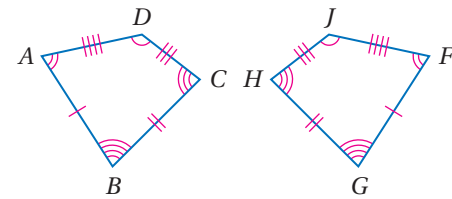
الزوايا: $\angle N \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q, \angle MPN \cong \angle QPR$

الأضلاع: $\overline{MN} \cong \overline{QR}, \overline{MP} \cong \overline{QP}, \overline{NP} \cong \overline{RP}$

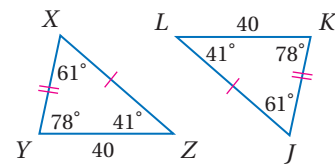
جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة؛ لذا فإن

$$\triangle MNP \cong \triangle QRP$$

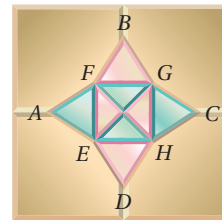
بين أن كل مضلعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:



18



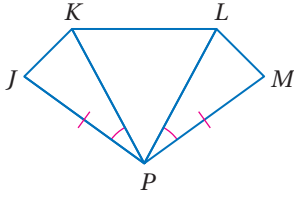
19



20 **فسيفساء:** يُظهر الشكل المجاور جزءًا من تخطيط فسيفسائي. سمّ 4 مثلثات تبدو متطابقة في الشكل.

مثال 4

اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.

$$\overline{JP} \cong \overline{MP}$$

$$\angle JPK \cong \angle MPL$$

المطلوب: إثبات أن $\triangle JPK \cong \triangle MPL$.

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.
(2) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع	(2) $\overline{PK} \cong \overline{PL}$
(3) معطى	(3) $\overline{JP} \cong \overline{MP}$
(4) معطى	(4) $\angle JPK \cong \angle MPL$
(5) SAS	(5) $\triangle JPK \cong \triangle MPL$

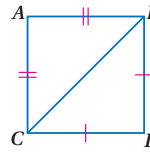
حدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ، ووضح إجابتك.

$$(21) A(5, 2), B(1, 5), C(0, 0), X(-3, 3), Y(-7, 6), Z(-8, 1)$$

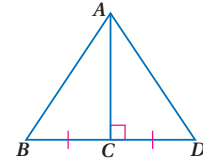
$$(22) A(3, -1), B(3, 7), C(7, 7), X(-7, 0), Y(-7, 4), Z(1, 4)$$

حدّد المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان، وإذا كان إثبات تطابقهما غير ممكن فاكتب "غير ممكن".

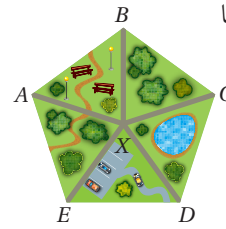
$$\triangle ABC, \triangle DBC \quad (24)$$



$$\triangle ABC, \triangle ADC \quad (23)$$



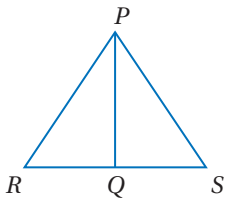
(25) متنزّهات: يظهر الرسم المجاور متنزّهًا



على صورة خماسي فيه خمسة ممرات مُشاة لها الطول نفسه، تؤدي إلى نقطة المركز. إذا كانت جميع الزوايا المركزية متساوية القياس، فأأي مسلّمة (نظرية) تستعمل لإثبات أن $\triangle ABX \cong \triangle DCX$ ؟

مثال 5

اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\overline{PQ}$ تنصف $\angle RPS$

$$\angle R \cong \angle S$$

المطلوب: إثبات أن

$$\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$$

البرهان التسلسلي:

$$\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$$

خاصية الانعكاس

$$\angle R \cong \angle S$$

معطى

$$\overline{PQ} \text{ تنصف } \angle RPS$$

معطى

$$\angle RPQ \cong \angle SPQ$$

تعريف منصف الزاوية

$$\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$$

AAS

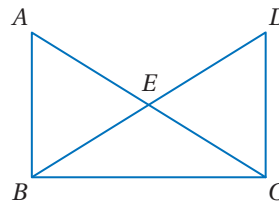
اكتب برهاناً ذا عمودين.

(26) المعطيات:

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$$

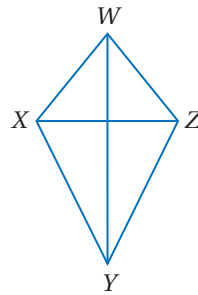
المطلوب: إثبات أن

$$\triangle ABE \cong \triangle CDE$$



(27) الطائرة الورقية: يظهر الشكل

المجاور طائرة عثمان الورقية. إذا علمت أن $\overline{WY}$ تنصف كلاً من $\angle XWZ, \angle XYZ$ ، فأثبت أن $\triangle WXY \cong \triangle WZY$.

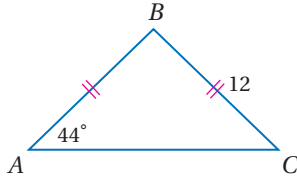


3-6

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (ص: 61-54)

مثال 6

أوجد كل قياس فيما يأتي:



(a) $m\angle B$

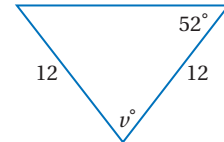
بما أن $AB = BC$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، وتطبيق نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون زاويتا القاعدة A, C متطابقتين؛ إذن $m\angle A = m\angle C$. استعمل نظرية مجموع قياس زوايا المثلث لكتابة معادلة. ثم حلها لتجد $m\angle B$.

$$\begin{aligned} \text{نظرية مجموع زوايا المثلث} \quad m\angle A + m\angle B + m\angle C &= 180 \\ m\angle A = m\angle C = 44^\circ \quad m\angle B + 44 + 44 &= 180 \\ \text{بسط} \quad m\angle B + 88 &= 180 \\ \text{اطرح 88 من الطرفين} \quad m\angle B &= 92^\circ \end{aligned}$$

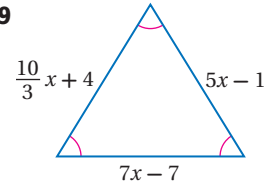
(b) AB

بما أن $AB = BC$ ، إذن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين. وبما أن $BC = 12$ ، فإن $AB = 12$ أيضًا.

أوجد قيمة كل من المتغيرين فيما يأتي:

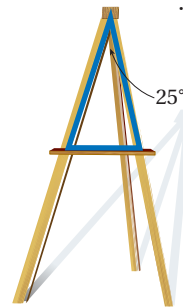


(29)



(28)

(30) رسم: يستعمل وليد حاملًا خشبيًا للرسم.



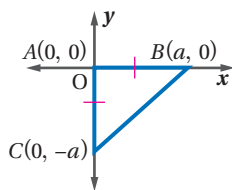
والقطعة الداعمة الأفقية في الحامل تشكل مثلثًا متطابق الضلعين مع الدعامتين الأماميتين كما في الشكل المجاور، ما قياس كل من زاويتي قاعدة المثلث؟

المثلثات والبرهان الإحداثي (ص: 67-62)

3-7

مثال 7

أرسم المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية وطول كل من ساقي القائمة يساوي a وحدة على الربع الرابع في المستوى الإحداثي، وحدد إحداثيات رؤوسه.



- اجعل نقطة الأصل رأسًا للزاوية القائمة في المثلث.
- اجعل أحد ضلعي القائمة على المحور x ، والضلع الآخر على المحور y .

- بما أن النقطة B على المحور x ، إذن إحداثياتها y يساوي صفرًا، وإحداثياتها x يساوي a .

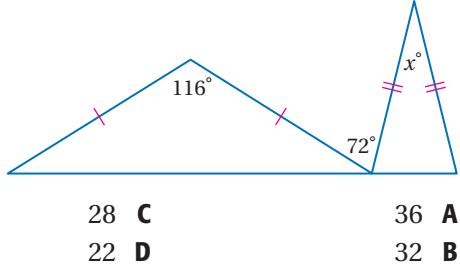
وبما أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، فإن C ستبعد عن نقطة الأصل a وحدة وإحداثياتها $(0, -a)$ ؛ لأنها تقع على الجزء السالب من المحور y ، وذلك لكي يكون المثلث في الربع الرابع.

(31) ارسم $\triangle MNO$ القائم الزاوية في M ، طول ضلعيه $a, 2a$.



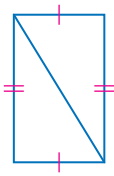
(32) جغرافيا: عيّن شاكر المدينة المنورة وبريدة وحائل كما هو مبين على الخريطة المجاورة. اكتب برهانًا إحصائيًا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

(10) اختيار من متعدد ما قيمة x في الشكل أدناه؟

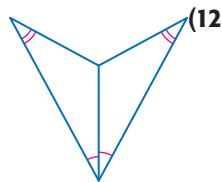


(11) إذا علمت أن: $T(-4, -2)$, $J(0, 5)$, $D(1, -1)$, $S(-1, 3)$ ، $E(3, 10)$, $K(4, 4)$ فحدد ما إذا كان $\triangle TJD \cong \triangle SEK$ أم لا، ووضح إجابتك.

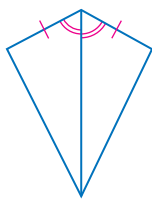
حدد النظرية أو المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل زوج من المثلثات متطابق. واكتب "غير ممكن" إذا تعذر إثبات التطابق.



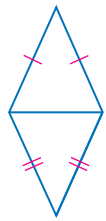
(13)



(12)



(15)

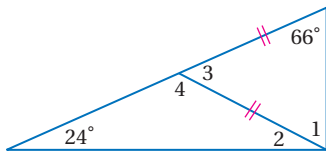


(14)

أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:

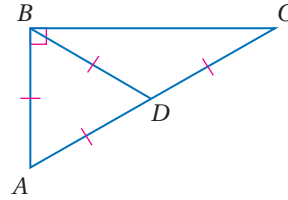
$\angle 1$ (16)

$\angle 2$ (17)



(18) برهان إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين وقائم الزاوية، وكانت M نقطة منتصف وتره $\overline{AB}$. فاكتب برهاناً إحصائياً لإثبات أن $\overline{CM}$ عمودية على $\overline{AB}$.

صنّف كلّ من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



$\triangle ABD$ (1)

$\triangle ABC$ (2)

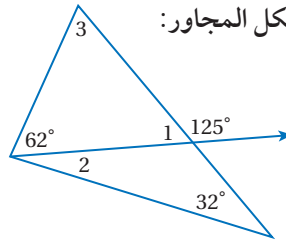
$\triangle BDC$ (3)

أوجد قياس كلّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور:

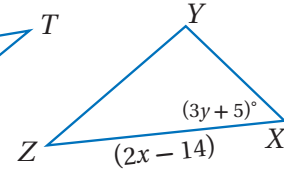
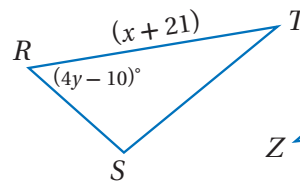
$\angle 1$ (4)

$\angle 2$ (5)

$\angle 3$ (6)



في المثلثين أدناه، إذا كان $\triangle RST \cong \triangle XYZ$ فأوجد:



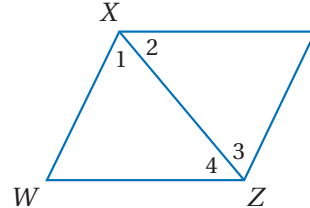
قيمة x . (7)

قيمة y . (8)

(9) برهان اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$, $\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle XWZ \cong \triangle ZYX$





الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة تتطلب منك أن تقدّم حلاً لها متضمناً الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة، وتحدد درجاتها باستعمال **سلالم التقدير**. وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
الدرجة	المعايير	
2	الإجابة صحيحة مدعّمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	
1	● الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. ● الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	درجة جزئية
0		لا يستحق درجة
	لم يُقدّم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

- اقرأ السؤال جيداً؛ كي تفهم الشيء الذي تحاول حله.
- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

الخطوة 2

- ضع خطة وحل المسألة.
- فسّر تبريرك، أو اعرض الطريقة التي ستتبعها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملاً مبيناً الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ السؤال الآتي، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال لحله. واكتب خطوات الحل.

ما محيط المثلث ABC متطابق الضلعين الذي قاعدته $\overline{BC}$ ؟



اقرأ السؤال بعناية. تعلّم من السؤال أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{BC}$ ، والمطلوب أن تجد محيط هذا المثلث.
ضع خطة وحل السؤال.

ضلعاً المثلث المتطابق الضلعين متطابقان.
لذا $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ أو $AB = AC$. والآن حل المعادلة لتجد قيمة x .

$$AB = AC$$

$$2x + 4 = 3x - 1$$

$$2x - 3x = -1 - 4$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

ثم أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

$$2(5) + 4 = 14 : \overline{AB}$$

$$3(5) - 1 = 14 : \overline{AC}$$

$$4(5 - 2) = 12 : \overline{BC}$$

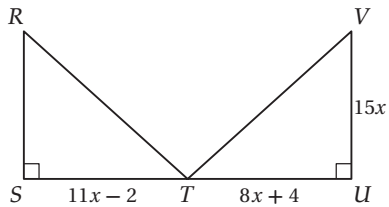
وبما أن $14 + 14 + 12 = 40$ ، إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 40 وحدة.

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة. وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة؛ إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

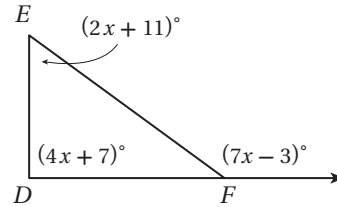
(3) يحتاج مزارع إلى إنشاء حظيرة مستطيلة الشكل لأغنامه، مساحتها 1000 m^2 ، ويريد أن يوفر المال عن طريق شراء أقل كمية ممكنة من السياج. إذا كانت أبعاد الحظيرة أعداداً صحيحة، فأوجد بُعدي القطعة التي تتطلب أقل كمية من السياج.

(4) في الشكل أدناه، $\triangle RST \cong \triangle VUT$. ما مساحة $\triangle RST$ ؟



اقرأ كل سؤال فيما يأتي، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال. واكتب خطوات الحل:

(1) صنف $\triangle DEF$ بحسب زواياه.



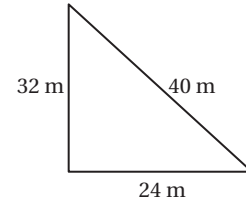
(2) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $(0, -2)$ ، $(2, 4)$.



أسئلة الاختيار من متعدد

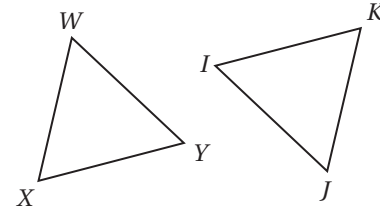
اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(1) يصنف المثلث المرسوم أدناه بحسب أضلاعه بأنه:



- A متطابق الأضلاع
B متطابق الضلعين
C قائم الزاوية
D مختلف الأضلاع

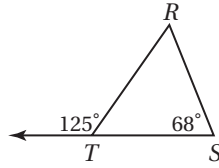
(2) في المثلثين أدناه إذا كان: $\overline{WX} \cong \overline{JK}$, $\overline{YX} \cong \overline{IK}$, $\angle X \cong \angle K$:



فأيُّ العبارات الآتية تعبر عن تطابق هذين المثلثين؟

- A $\triangle WXY \cong \triangle KIJ$
B $\triangle WXY \cong \triangle IKJ$
C $\triangle WXY \cong \triangle JKI$
D $\triangle WXY \cong \triangle IJK$

(3) ما قياس الزاوية R في الشكل أدناه؟

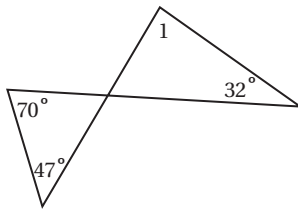


- A 57°
B 59°
C 65°
D 68°

(4) افترض أن قياس إحدى زاويتي القاعدة في مثلث متطابق الضلعين يساوي 44° ، فما قياس زاوية رأس المثلث؟

- A 108°
B 92°
C 56°
D 44°

(5) أوجد $m\angle 1$ ؟



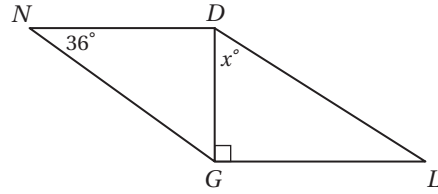
- A 85°
B 63°
C 47°
D 32°



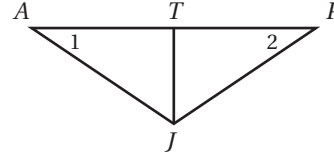
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(6) إذا كان $\triangle NDG \cong \triangle LGD$ في الشكل أدناه، فما قيمة x ؟

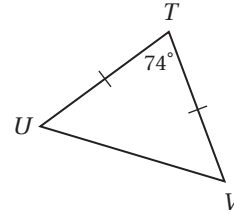


(7) في الشكل أدناه $\overline{JT} \perp \overline{AP}$ ، $\angle 1 \cong \angle 2$



حدّد نظرية التطابق التي تبين أن $\triangle PTJ \cong \triangle ATJ$ باستعمال المعطيات الواردة في السؤال فقط، ووضح إجابتك.

(8) أوجد $m\angle TUV$ في الشكل أدناه.



(9) أثبت الجملة "يتطابق مثلثان إذا تطابق ضلعان وزاوية غير محصورة بينهما من المثلث الأول مع نظائرها من المثلث الثاني" إذا كانت صحيحة بكتابة برهان حرّ، أو ارسم شكلاً يبيّن عدم صحتها.

(10) إذا علمت أن $\triangle EFG \cong \triangle DCB$ ، فاكتب الزوايا والأضلاع المتناظرة في المثلثين.

أسئلة ذات إجابات مطولة

(11) أجب عن الأسئلة a-d؛ لتحصل على برهان إحداثيٍّ للعبارة الآتية:

المثلث الذي رؤوسه $A(0, 0)$ ، $B(2a, b)$ ، $C(4a, 0)$ هو مثلث متطابق الضلعين.

(a) عيّن الرؤوس على ورقة رسم بيانيّ

(b) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثّل AB .

(c) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثّل BC .

(d) استعمل النتائج التي توصّلت إليها في الفرعين c، b؛ لتدوّن استنتاجك عن $\triangle ABC$.



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...

فعد إلى الدرس...

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
3-7	3-3	3-4	3-6	3-5	3-3	3-2	3-6	3-2	3-3	3-1