المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات 2

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الثانية

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة 1445 - 2023

توزع مجاناً ولا يباع
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ⓒ وزارة التعليم ، ١٤٤٤هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٢ التعليم الثانوي – نظام مسارات – السنة الثانية/ وزارة التعليم.– الرياض ، ١٤٤٤هـ
٤٦٩ ص ؛ ٢٧.٥ x ٢١سم
ردمك : ١ – ٤١٤ – ٥١١ – ٦٠٣ – ٩٧٨

١– الرياضيات – مكتب دراسية ٢– التعليم الثانوي – السعودية
أ. العنوان
ديوي٥١ ٠ ١٤٤٤ /٨٤٤٧

رقم الإيداع :١٤٤٤/٨٤٤٧
ردمك : ١ - ٤١٤ - ٥١١ - ٦٠٣ - ٩٧٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم
www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"

ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين والمعلمات، والطلاب والطالبات، وأولياء الأمور، وكل مهتم بالتربية والتعليم؛
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.

fb.ien.edu.sa

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، ممَّا يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، تحقيقًا لرؤية المملكة العربية السعودية ٢٠٣٠، لإعداد مناهج تعليمية متطورة وسعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية في مختلف المجالات العلمية والصحية والمالية والتنموية وبرؤية المملكة ٢٠٣٠.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممَّارسة، ممَّا يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلبة، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

فهرس أقسام الكتاب

القسم الأول 7

القسم الثاني 181

القسم الثالث 349

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

القسم الأول

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الفهرس

الفصل 1 الدوال والمتباينات

التهيئة للفصل 1 13
1-1 خصائص الأعداد الحقيقية 14
1-2 العلاقات والدوال 20
توسع 1-2 معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة 26
1-3 دوال خاصة 27
اختبار منتصف الفصل 33
1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا 34
1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا 39
توسع 1-5 معمل الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية 45
1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل 46
دليل الدراسة والمراجعة 52
اختبار الفصل 57
الإعداد للاختبارات المعيارية 58
اختبار تراكمي 60

الفصل 2 المصفوفات

التهيئة للفصل 2 63
2-1 مقدمة في المصفوفات 64
توسع 2-1 معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات 70
2-2 العمليات على المصفوفات 71
2-3 ضرب المصفوفات 77
اختبار منتصف الفصل 84
2-4 المحدِّدات وقاعدة كرامر 85
2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية 93
توسع 2-5 معمل الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة 99
دليل الدراسة والمراجعة 100
اختبار الفصل 103
الإعداد للاختبارات المعيارية 104
اختبار تراكمي 106

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



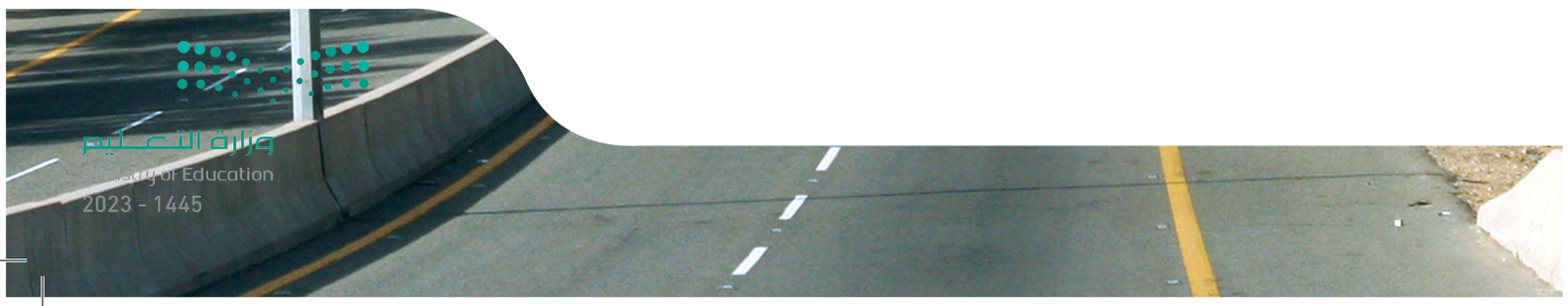


الفهرس

الفصل 3

كثيرات الحدود ودوالها

التهيئة للفصل 3 109
3-1 الأعداد المركبة 110
3-2 القانون العام والمميز 117
توسع 3-2 معمل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما 125
3-3 العمليات على كثيرات الحدود 127
3-4 قسمة كثيرات الحدود 133
اختبار منتصف الفصل 139
3-5 دوال كثيرات الحدود 140
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود 147
توسع 3-6 معمل الحاسبة البيانية: حل متباينات كثيرات الحدود 155
3-7 نظريتا الباقي والعوامل 156
3-8 الجذور والأصفار 162
دليل الدراسة والمراجعة 169
اختبار الفصل 173
الإعداد للاختبارات المعيارية 174
اختبار تراكمي 176
الصيغ والرموز 178



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- **الدوال وخصائصها.**
- **المتباينات وتمثيلها بيانيًّا.**
- **المصفوفات والعمليات عليها.**
- **كثيرات الحدود والعمليات عليها.**
- **نظريتا الباقي والعوامل واستعمالهما.**

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الجبرية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.



كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد
  اقرأ فقرة **والآن** .
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية ، واقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك
  على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم
  الرياضية فتجتنبها.
- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته
  من أفكار في **المطويات**
- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلِّها .
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفصل 1

الدوال والمتباينات
Functions and Inequalities



فيما سبق:
درستُ حل المعادلات والمتباينات الخطية.

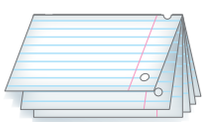
والآن:
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.
- أحل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا.
- أحل مسائل من واقع الحياة مستعملًا البرمجة الخطية.

لماذا؟
مصانع: تسعى المصانع عادة لتحقيق أعلى ربح ممكن، ويتطلب ذلك من إداراتها إتقان مهارات رياضية معينة لتخفيض التكلفة، وفي هذا الفصل ستتعلم كيفية زيادة الربح أو تقليل التكلفة لتحقيق أكبر ربح ممكن من خلال استعمال البرمجة الخطية.

المطويات منظم أفكار

الدوال والمتباينات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الدوال والمتباينات. مبتدئًا بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات.

1. **اطو** كل ورقة من المنتصف.
2. **قُصَّ** الأوراق مع خط الطي، ثم ثبت أنصاف الأوراق الست الناتجة لتحصل على كُتيبٍ صغير.
3. **قُصَّ** أطراف الأوراق، بحيث تترك سطرين من طرف الورقة الأولى و4 أسطر من طرف الورقة الثانية وهكذا.
4. **سمِّ** طرف كل ورقة برقم درس من دروس الفصل، واكتب عنوان الفصل.






وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي: (تستعمل مع الدروس 1-1 إلى 1-6)

1) $15.7 + (-3.45)$

2) $-18.54 - (-32.05)$

3) $(-9.8)(6.75)$

4) $4 \div (-0.5)$

5) $3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right)$

6) $\frac{54}{7} - \frac{26}{6}$

7) $\left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)$

8) $-3 \div \frac{7}{8}$

9) صناعات يدوية: تحتاج فاطمة إلى $\frac{7}{8}$ m من الخيوط لصنع رباط شعر، فكم مترًا من الخيوط يلزمها لصنع 12 رباطًا؟

أوجد قيمة كلِّ عبارة فيما يأتي إذا كانت: $a = -3, b = 4, c = -2$ (تستعمل مع الدروس 1-1 إلى 1-6)

10) $4a - 3$

11) $2b - 5c$

12) $b^2 - 3b + 6$

13) $\frac{2a + 4b}{c}$

14) اتصالات: تستعمل إحدى شركات الاتصالات العبارة $20 + 0.25m$ لإيجاد التكلفة بالريال لـ m من دقائق الاتصال. أوجد تكلفة 80 دقيقة اتصال.

مثِّل في المستوي كل مستقيم مما يأتي بيانيًّا: (يستعمل مع الدروس 3-1 إلى 6-1)

15) $y = 3$

16) $x + y = 1$

17) $3x - y = 6$

18) $x + 2y = 5$

19) $y = 4x - 1$

20) $5x - 4y = 12$

21) مشتريات: اشترى صلاح ثلاجة بالتقسيط، على أن يدفع 900 ريال دفعة أولى، ويدفع 400 ريال كل شهر. اكتب معادلة للمبلغ الكلِّي الذي سيدفعه بعد x شهرًا، ثم مثِّلها بيانيًّا.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد ناتج: $\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$.

$\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{3}{\cancel{16}_{4}}\right)\left(-\frac{\cancel{4}^{1}}{5}\right)$ — اقسم العددين 16 , 4 على قاسمهما المشترك الأكبر (4)

$= \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)$ — اضرب البسطين ← اضرب المقامين

$= \frac{-3}{20}$ — بسِّط

مثال 2

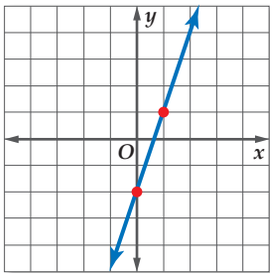
أوجد قيمة العبارة $3a^2 - 2ab + b^2$ إذا كانت: $a = 4$، $b = -3$

$$\begin{aligned} 3a^2 - 2ab + b^2 &= 3(4^2) - 2(4)(-3) + (-3)^2 \\ &= 3(16) - 2(4)(-3) + 9 \\ &= 48 - (-24) + 9 \\ &= 48 + 24 + 9 \\ &= 81 \end{aligned}$$

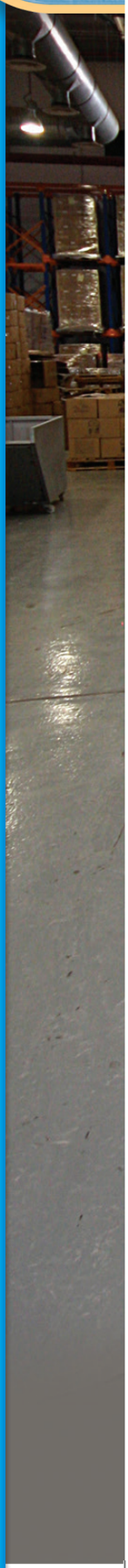
مثال 3

مثِّل في المستوي الإحداثي $y = 3x - 2$ بيانيًّا.

كوّن جدولًا يتضمن قيمتين على الأقل للإحداثي x، وأوجد الإحداثي y لكلٍّ منهما، ثم كوّن أزواجًا مرتبة ومثِّلها بيانيًّا.



x	y	(x, y)
0	−2	(0, −2)
1	1	(1, 1)



رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية
Properties of Real Numbers

فيما سبق:
درست الأعداد الحقيقية، والعمليات عليها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أصنّف الأعداد الحقيقية.
- أستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط قيم العبارات الجبرية.

المفردات
الأعداد الحقيقية
real numbers
الأعداد النسبية
rational numbers
الأعداد غير النسبية
irrational numbers
الأعداد الصحيحة
integers
الأعداد الكلية
whole numbers
الأعداد الطبيعية
natural numbers

لماذا؟
يبيع محل للأدوات الرياضية 3 أنواع من الكرات بالسعر نفسه. إن شراء عدة أنواع لكل منها السعر نفسه يسهل عليك إيجاد المبلغ الإجمالي للشراء، وذلك باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.



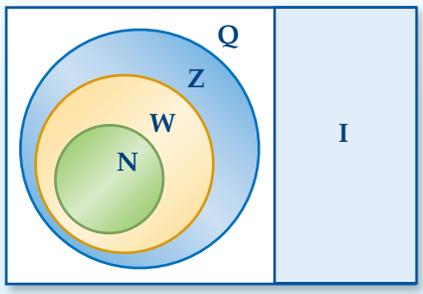
الأعداد الحقيقية: تتضمن **الأعداد الحقيقية** مجموعات مختلفة من الأعداد منها:
- **الأعداد النسبية** هي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$، حيث a وَ b عددان صحيحان، والعدد b لا يساوي صفرًا. وتكون الصورة العشرية للعدد النسبي إما عددًا عشريًّا منتهيًا أو دوريًّا.
- **الأعداد غير النسبية** وتكون الصورة العشرية للعدد غير النسبي ليست منتهية وليست دورية. لذا فإنّ الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة هي أعداد غير نسبية.
- مجموعة **الأعداد الصحيحة** هي : {... ,3− ,2− ,1− ,0 ,1 ,2 ,3 ,...}، ومجموعة **الأعداد الكلية** هي: {... ,4 ,3 ,2 ,1 ,0}. ومجموعة **الأعداد الطبيعية** هي: {... ,5 ,4 ,3 ,2 ,1}، وكل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية؛ وذلك لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$.

مفهوم أساسي
الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى مطويتك

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66...$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159...$ $\sqrt{3} = 1.73205...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$
N	الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$

الأعداد الحقيقيّة R



مثال 1
تصنيف الأعداد

حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

a) -23 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

b) $\sqrt{50}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

c) $-\frac{4}{9}$ مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

تحقق من فهمك

1A) -185 **1B)** $-\sqrt{49}$ **1C)** $\sqrt{95}$ **1D)** $\frac{6}{7}$

إرشادات للدراسة
تصنيف الأعداد
يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد، فمثلًا يُعدّ أي عدد طبيعي عددًا كليًّا وصحيحًا، ونسبيًّا، وحقيقيًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

خصائص الأعداد الحقيقية : يلخص الجدول الآتي بعض خصائص الأعداد الحقيقية:

ملخص المفهوم

خصائص الأعداد الحقيقية

أضف إلى مطويتك

لأي أعداد حقيقية a, b, c فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, a \neq 0$
الانغلاق	$(a + b)$ عدد حقيقي	$(a \cdot b)$ عدد حقيقي
التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$	

مثال 2 تمييز خصائص الأعداد الحقيقية

ما الخاصية الموضّحة في: $13 \cdot (4 \cdot 5) = (13 \cdot 4) \cdot 5$ ؟

الخاصية التجميعية في عملية الضرب.

وتنص الخاصية التجميعية لعملية الضرب على أن ناتج الضرب لا يتأثر بالطريقة التي يتم بها تجميع العوامل.

تحقق من فهمك

2) $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟

يمكنك إيجاد النظير الجمعي لأي عدد، والنظير الضربي لأي عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي والنظير الضربي

إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد، أمّا إشارة النظير الضربي لعدد فهي ذاتها إشارة ذلك العدد.

مثال 3 النظير الجمعي و النظير الضربي

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$

بما أن $-\frac{5}{8} + \frac{5}{8} = 0$، فإن النظير الجمعي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $\frac{5}{8}$

وبما أن $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{8}{5}\right) = 1$، فإن النظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $-\frac{8}{5}$

تحقق من فهمك

3A) 1.25

3B) $2\frac{1}{2}$

تتطلب الكثير من التطبيقات الحياتية التعامل مع الأعداد الحقيقية.

مثال 4 من واقع الحياة — خاصية التوزيع

مبيعات: يبين الجدول المجاور أسعار جهاز حاسوب وملحقاته في أحد العروض. فإذا زاد السعر الأصلي للجهاز وملحقاته، بنسبة 6% فأوجد قيمة هذه الزيادة.

الجهاز أو الملحق	السعر (بالريال)
حاسوب	1000
شاشة	600
آله طابعة	500
كاميرا رقمية	150
برمجيات ملحقة	300

يمكن إيجاد قيمة هذه الزيادة بطريقتين هما:

الطريقة 1: اضرب ثم اجمع .

اضرب كل قيمة في 6%، أو 0.06، ثم اجمع.

$$T = 0.06(1000) + 0.06(600) + 0.06(500) + 0.06(150) + 0.06(300)$$

$$= 60 + 36 + 30 + 9 + 18$$

$$= 153$$

الطريقة 2: اجمع ثم اضرب.

أوجد السعر الكلي لجهاز الحاسوب وملحقاته قبل الزيادة، ثم اضربه في العدد 0.06

$$T = 0.06(1000 + 600 + 500 + 150 + 300)$$

$$= 0.06(2550)$$

$$= 153$$

فتكون قيمة الزيادة 153 ريالًا. لاحظ أن النتيجة متساوية في الطريقتين.



الربط مع الحياة

زادت ملحقات أجهزة الحاسوب على نحو مطرد في السنوات الأخيرة، حتى أصبح الحاسوب يقوم مقام الكثير من الأجهزة الإلكترونية كآلات التصوير والتسجيل وغيرها.

تحقق من فهمك

اليوم	ساعات العمل
الأحد	4
الإثنين	3
الثلاثاء	2.5
الأربعاء	3
الخميس	4

4) أعمال: يتقاضى أحمد 20 ريالًا عن كل ساعة عمل في محل تجاري. فإذا كانت ساعات عمله في أحد الأسابيع هي 4, 3, 2.5, 3, 4 ، فما المبلغ الذي حصل عليه أحمد في ذلك الأسبوع؟

يمكنك استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط العبارات الجبرية.

مثال 5 تبسيط العبارات الجبرية

بسّط العبارة: $3(2q + r) + 5(4q - 7r)$

$$3(2q + r) + 5(4q - 7r) = 3(2q) + 3(r) + 5(4q) - 5(7r)$$ — خاصية التوزيع

$$= 6q + 3r + 20q - 35r$$ — اضرب

$$= 6q + 20q + 3r - 35r$$ — الخاصية التبديلية للجمع

$$= (6 + 20)q + (3 - 35)r$$ — خاصية التوزيع

$$= 26q - 32r$$ — بسّط

تحقق من فهمك

5) $3(4x - 2y) - 2(3x + y)$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال 1 حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) 62 **2)** $\frac{5}{4}$ **3)** $\sqrt{11}$ **4)** -12

مثال 2 ما الخاصية الموضّحة في كلٍّ ممَّا يأتي؟

5) $(6 \cdot 8) \cdot 5 = 6 \cdot (8 \cdot 5)$ **6)** $7(9 - 5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$

7) $84 + 16 = 16 + 84$ **8)** $(12 + 5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6$

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

9) -7 **10)** $\frac{4}{9}$ **11)** 3.8 **12)** $\sqrt{5}$

مثال 4 **13) تخفيضات:** يبين الجدول المجاور أسعار أربعة أصناف من الملابس في أحد العروض. فإذا زاد السعر الأصلي لكلٍّ منها بنسبة 8% فأوجد قيمة هذه الزيادة.

الصنف	السعر (بالريال)
قميص	40
بنطال	60
ثوب	100
معطف	200

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

14) $5(3x + 6y) + 4(2x - 9y)$ **15)** $6(6a + 5b) - 3(4a + 7b)$

16) $-4(6c - 3d) - 5(-2c - 4d)$ **17)** $-5(8x - 2y) - 4(-6x - 3y)$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

18) $-\frac{4}{3}$ **19)** -8.13 **20)** $\sqrt{25}$ **21)** $0.\overline{61}$

22) $\frac{9}{3}$ **23)** $-\sqrt{144}$ **24)** $\frac{21}{7}$ **25)** $\sqrt{17}$

مثال 2 ما الخاصية الموضّحة في كلٍّ ممَّا يأتي؟

26) $-7y + 7y = 0$ **27)** $8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8 + 5)\sqrt{11}$

28) $(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23)$ **29)** $\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{7}{22}\right) = 1$

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

30) -8 **31)** 12.1 **32)** -0.25

33) $\frac{6}{13}$ **34)** $-\frac{3}{8}$ **35)** $\sqrt{15}$

مثال 4 **36) ترشيد:** يبين الجدول المجاور أوجه إنفاق إحدى الأسر خلال شهر. إذا قررت الأسرة ترشيد إنفاقها بنسبة 15% من كل وجه لشراء سيارة جديدة، فما مقدار ما توفره في الشهر؟

وجه الإنفاق	المبلغ (بالريال)
الطعام والشراب	3000
المواصلات	1000
الفواتير	500
أخرى	750

وزارة التعليم
Ministry of Education
2017 - 1438

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

37) $8b - 3c + 4b + 9c$

38) $-2a + 9d - 5a - 6d$

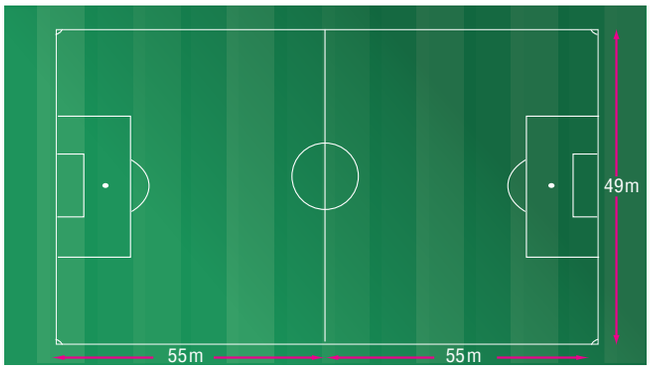
39) $4(4x - 9y) + 8(3x + 2y)$

40) $6(9a - 3b) - 8(2a + 4b)$

41) $-2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k)$

42) $-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z)$

43) كرة قدم: وضِّح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثلان مساحة الملعب في الشكل أدناه. ثم أوجد مساحته.



44) تخفيضات: يبين الجدول المجاور أسعار بعض الأجهزة الكهربائية في محل. فإذا انخفض سعرُ كلٍّ منها بنسبة 30٪، وأراد أحمد أن يشتري من ذلك المحل جهاز تسجيل ومكنسة ومروحة.

نوع السلعة	السعر (بالريال)
جهاز تسجيل	170
مكنسة	350
مروحة	110

a) وضِّح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي سيدفعه أحمد.

b) احسب المبلغ الذي سيدفعه أحمد بطريقتين مختلفتين مستعملاً خصائص العمليات على الأعداد.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

45) $\frac{1}{3}(5x + 8y) + \frac{1}{4}(6x - 2y)$

46) $\frac{2}{5}(6c - 8d) + \frac{3}{4}(4c - 9d)$

47) $-6(3a + 5b) - 3(6a - 8c)$

48) $-9(3x + 8y) - 3(5x + 10z)$

49) ديكور: يريد محمد شراء 5 ستائر لنوافذ منزله: نافذتان كبيرتان، و 3 نوافذ صغيرة . فإذا كانت النافذة الكبيرة تحتاج إلى ستارة طولها $3\frac{3}{4}$ m من القماش، في حين تحتاج النافذة الصغيرة إلى ستارة طولها $2\frac{1}{3}$ m من القماش.

a) كم مترًا من القماش يحتاج إليه محمد؟

b) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبين كيف يمكن لمحمد حساب كمية القماش التي يحتاج إليها ذهنيًّا.

50) تمثيلات متعددة: مستعملًا الأعداد: $\sqrt{36}, \frac{3}{8}, 0, \pi, 4.1, \frac{-15}{3}, 3, -\sqrt{6}$.

أجب عما يأتي:

a) جدوليًّا: نظِّم هذه الأعداد في جدول وفقًا لمجموعة الأعداد التي تنتمي إليها.

b) جبريًّا: اكتب كل عدد من الأعداد أعلاه على الصورة العشرية، ثم رتبها تصاعديًّا.

c) بيانيًّا: مثِّل هذه الأعداد على خط الأعداد.

d) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول ترتيب الأعداد الحقيقية باستعمال الصورة العشرية لها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مسائل مهارات التفكير العليا

51) ما العدد المختلف عن باقي الأعداد؟ وضِّح إجابتك.

$\sqrt{21}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{67}$	$\sqrt{81}$

52) **تحدٍّ:** أوجد قيمة العبارة $48(30r + 36t)$ بدلالة w، علمًا بأن $w = 12(5r + 6t)$.

53) **اكتشف الخطأ:** بسّطت كلٌّ من فاطمة وخديجة العبارة: $4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$. فهل أيٌّ منهما تبسيطها صحيح؟ وضِّح إجابتك.

فاطمة

$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$
$= 56a - 40b - 6b + 24a$
$= 80a - 46b$

خديجة

$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$
$= 56a - 40b - 6a - 24b$
$= 50a - 64b$

54) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

"العدد غير النسبي يتضمن رمز الجذر".

55) **مسألة مفتوحة:** حدِّد إذا كانت خاصية الانغلاق للضرب تنطبق على الأعداد غير النسبية. وإذا لم تكن كذلك، فأعط مثالًا مضادًّا.

56) **اكتب:** اشرح وأعطِ أمثلة توضّح أن عمليتي الطرح والقسمة لا تحققان الخاصية التبديلية.

تدريب على اختبار

57) ما الحد العاشر في المتتابعة $2, 4, 7, 11, 16, \ldots$ ؟

A 46 **B** 67 **C** 56 **D** 72

58) ما أبسط صورة للعبارة: $2(x - y) - 3(y - 2x)$؟

A $5x - 8y$ **B** $8x - 5y$ **C** $-4y$ **D** $-4x - 5y$

مراجعة تراكمية

59) أوجد قيمة: $8(4 - 2)^3$. (مهارة سابقة)

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

60) $(x + 2)(x - 3)$

61) $(b - 7)(b - 3)$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي؛ علمًا بأن $a = 3, b = \frac{2}{3}, c = -1.7$. (مهارة سابقة)

62) $\frac{1}{6}b + 1$

63) $\frac{a \cdot b}{c}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-2 العلاقات والدوال
Relations and Functions

فيما سبق:
درستُ تحديد كل من مجال ومدى علاقة معطاة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحلّل العلاقات والدوال.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.

المفردات

الدالة المتباينة
one-to-one function

العلاقة المنفصلة
discrete relation

العلاقة المتصلة
continuous relation

اختبار الخط الرأسي
vertical line test

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

رمز الدالة
function notation

لماذا؟

يبين الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة الرياض، لاحظ أن معدل كلٍّ من درجتي الحرارة الدنيا والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل معدلي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (20, 9).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة الرياض

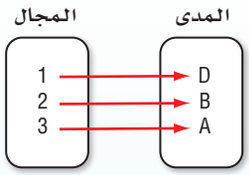
الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

العلاقات والدوال: تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

مفهوم أساسي الدالة المتباينة

أضف إلى مطويتك

الدالة المتباينة: هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى، وهذا يعني أنه لايمكن أن يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى.



مثال 1 المجال والمدى

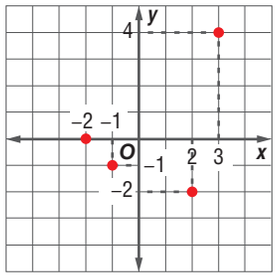
حدِّد مجال كلِّ علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالةً أم لا ، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا ؟

a) {(−6, −1), (−5, −9), (−3, −7), (−1, 7), (−6, −9)}

المجال = {−6, −5, −3, −1} المدى = {−9, −7, −1, 7}

هل هي دالة: لا، لأن العنصر 6− في المجال ارتبط بكل من العنصرين 9− ,1− في المدى.

b)



المجال = {−2, −1, 2, 3}

المدى = {−2, −1, 0, 4}

هذه العلاقة دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى. وهي متباينة؛ لأن كل عنصر من المدى ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال.

إرشادات للدراسة

العلاقة: تمثل العلاقة عادة على شكل أزواج مرتبة (x, y)، كما يمكن وصفها بعدة طرق أخرى، منها المخطط السهمي، والجدول، والتمثيل البياني.

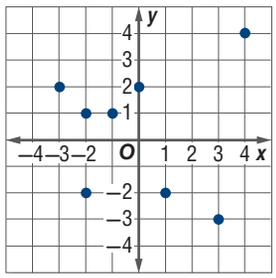
المجال: مجموعة إحداثيات x في الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

المدى: مجموعة إحداثيات y في الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

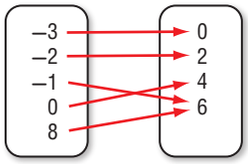
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

(1A



(1B



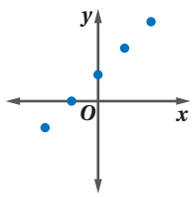
العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر المنفردة، وتمثل بيانيًّا بنقاطٍ منفصلةٍ، مثل العلاقة A أدناه تسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، والعلاقة التي يكون مجالها فترة جزئية من الأعداد الحقيقية وأمكن تمثيلها بيانيًّا بمستقيم أو بمنحنى متصل مثل العلاقة B أدناه، فإنها تكون **علاقة متصلة**.

إرشادات للدراسة

العلاقة المتصلة

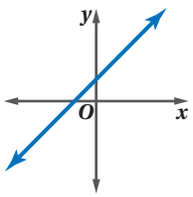
يمكنك تمثيل العلاقة المتصلة بيانيًّا دون رفع القلم عن الورقة.

العلاقة A



علاقة منفصلة

العلاقة B



علاقة متصلة

يمكنك استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع كل من العلاقات المتصلة والمنفصلة لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

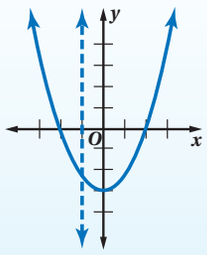
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

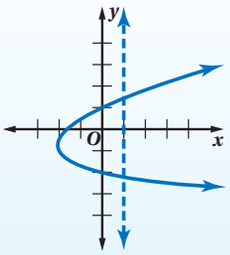
اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

النموذج:



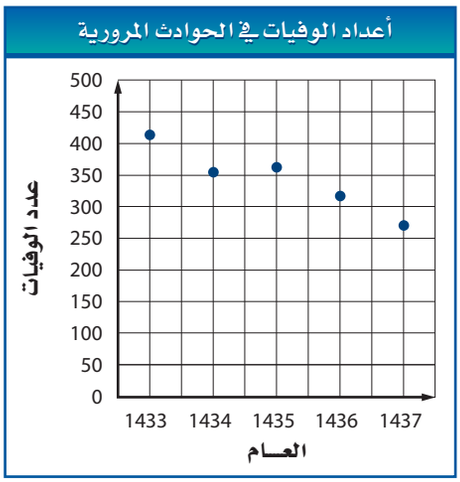
إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة فالعلاقة ليست دالة.



مثال 2 من واقع الحياة

تمييز العلاقة

حوادث المرور: يبين التمثيل البياني المجاور أعداد الوفيات في إحدى مدن المملكة نتيجة الحوادث المرورية من عام 1433 هـ إلى عام 1437 هـ، هل العلاقة التي يمثلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تمثل دالة؟



بما أن التمثيل البياني مكون من نقاط منفصلة، فالعلاقة منفصلة. وباستعمال اختبار الخط الرأسي نلاحظ أنه لا يمكن رسم أي خط رأسي يمر بأكثر من نقطة من نقاط التمثيل، إذن فالعلاقة تمثل دالة.



الربط مع الحياة

هل تعلم أن لكل 8 حوادث مرورية في المملكة العربية السعودية يحدث 6 إصابات، بينما النسبة العالمية إصابة واحدة لكل 8 حوادث؟!

تحقق من فهمك

2) عمال: إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 1433هـ إلى 1438هـ على الترتيب هو: 33, 34, 35, 36, 37, 38. مثّل هذه البيانات بيانيًّا، وهل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة أم متصلة. وهل تمثل دالة؟

معادلات العلاقات والدوال: يمكنك تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x , y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من خلال تمثيلها البياني.

إرشادات للدراسة

تمثيل الدالة بيانيًّا

لتمثل دالة ما بيانيًّا، أولًا يجب أن تحدّد مجالها (جميع قيم x التي تكون عندها الدالة معرفة أي قيم x التي تكون عندها $f(x) \in \mathbb{R}$، وهذا يمكّنك من معرفة بعض الأزواج المرتبة التي تسهّل عليك تمثيل الدالة بيانيًّا. ثم تحدّد مداها (جميع قيم y التي تقابل قيم x) ويكون من السهل إيجاد المدى من التمثيل البياني، ومن الجدير بالذكر أن المجال والمدى لجميع الدوال الخطية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

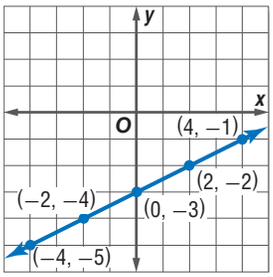
مثال 3

تمثيل العلاقة بيانيًّا

مثّل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها ومداها، وحدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

كوّن جدولًا لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثّل المعادلة بيانيًّا.

x	y
−4	−5
−2	−4
0	−3
2	−2
4	−1



مجال هذه العلاقة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية، لأن أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم.

التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تمثل دالة؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y،

وحيث إن كل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x، لذا فالدالة متباينة.

وبما أن التمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.

تحقق من فهمك

3) $y = x^2 + 1$

إذا كانت المعادلة تمثل دالة، فإن المتغير من المجال (غالبًا ما يكون x)، يسمى **المتغير المستقل**. والمتغير الثاني (غالبًا ما يكون y)، يسمى **المتغير التابع** لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير x.

المعادلات التي تمثل دوالّ تكتب عادة باستعمال **رمز الدالة**. فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = 5x - 1$. وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر -6 في مجال الدالة f، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$ ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد -6؛ لذا فإن $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلاً من y، ويُقرأ f لـ x؛ حيث f هو اسم الدالة وليس متغيرًا مضروبًا في x.

مثال 4 إيجاد قيمة الدالة

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

a) $f(6)$

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
عوّض	$f(6) = 2(6)^2 - 8$
$6^2 = 36$	$= 2(36) - 8$
بسّط	$= 72 - 8 = 64$

b) $f(2y)$

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
عوّض	$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$
$(2y)^2 = 2^2y^2$	$= 2(4y^2) - 8$
بسّط	$= 8y^2 - 8$

تحقق من فهمك

$g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$

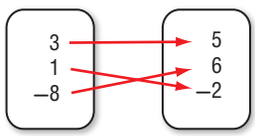
4A) $g(2.8)$

4B) $g(4a)$

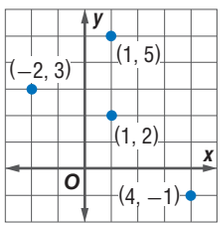
تأكد

مثال 1 حدِّد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

1)



2)



3)

x	y
−2	−4
1	−4
4	−2
8	6

مثال 2

4) كرة قدم: يبين الجدول المجاور متوسط عدد الأهداف التي أحرزها فريق كرة قدم في مبارياته خلال 4 مواسم ومتوسط أعمار الفريق في كل موسم.

الموسم	متوسط أعمار الفريق	متوسط عدد الأهداف في الموسم الواحد
1434–1435	22	16.2
1435–1436	23	24.1
1436–1437	24	27.2
1437–1438	25	23.5

a) مثِّل البيانات الواردة في الجدول بيانيًّا، على أن يمثل المحور الأفقي متوسط أعمار الفريق، والمحور الرأسي متوسط عدد الأهداف في كل مباراة.

b) حدِّد كلًّا من المجال والمدى.

c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟

d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضِّح إجابتك.

مثال 3 مثِّل كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها، ومداها، وحدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

5) $y = 5x + 4$ **6)** $y = -4x - 2$ **7)** $y = 3x^2$ **8)** $x = 7$

مثال 4 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

9) إذا كانت $f(x) = -4x - 8$ فإن $f(-3)$

10) إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$ فإن $g(5)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

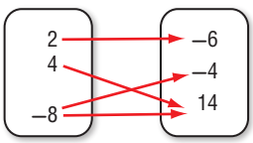
مثال 1

حدِّد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

11)

x	y
−0.3	−6
0.4	−3
1.2	−1

12)



13) $\{(3,-4),(-1,0),(3,0),(5,3)\}$

مثال 2

14) سكان: يبين الجدول المجاور عدد الذكور وعدد الإناث في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة لعام 1438هـ.

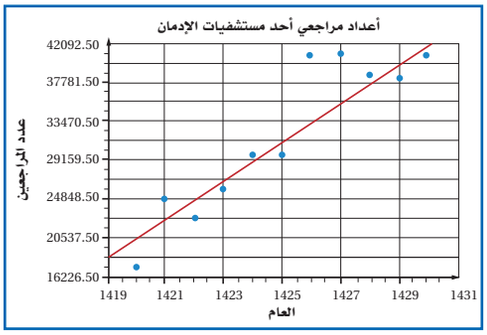
المنطقة الإدارية	عدد الذكور	عدد الإناث
المدينة المنورة	1194428	938251
حائل	386210	313564
تبوك	511413	398617
الجوف	289414	219061

a) مثّل البيانات الواردة في الجدول بيانيًّا على يمثل المحور الأفقي عدد الذكور والمحور الرأسي عدد الإناث.

b) حدِّد كلًّا من المجال والمدى.

c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟

d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضِّح إجابتك.



15) علاج: يبين التمثيل البياني المجاور أعداد مراجعي أحد مستشفيات الإدمان، هل العلاقة التي يمثلها اللون الأزرق منفصلة أم متصلة؟ وهل تمثل دالة؟



الربط مع الحياة

أطلقت الأمانة العامة للجنة الوطنية لمكافحة المخدرات؛ رقم مركز استشارات الإدمان (1955)، ضمن برامج المشروع الوطني للوقاية من المخدرات نبراس.

مثال 3

مثّل كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها ومداها، وحدِّد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد إن كانت منفصلة أم متصلة.

16) $y=-5x^2$ **17)** $y=4x^2-8$

مثال 4

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

18) $f(-8)$ إذا كانت $f(x)=5x^3+1$ **19)** $f(2.5)$ إذا كانت $f(x)=16x^2$

20) غوص: يبين الجدول المجاور مقدار الضغط الواقع على الغواص عند أعماق معينة تحت سطح الماء:

العمق (ft)	0	20	40	60	80	100
الضغط	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

a) مثّل العلاقة بيانيًّا.

b) حدِّد كلًّا من مجال العلاقة ومداها، وهل هي منفصلة أم متصلة؟

c) هل هذه العلاقة دالة أم لا؟ وضِّح إجابتك.

إذا كانت $f(x)=3x+2, g(x)=-2x^2, h(x)=-4x^2-2x+5$ ، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

21) $g(-6)$ **22)** $h(3)$ **23)** $h(8)$

24) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ **25)** $g\left(\frac{3}{2}\right)$ **26)** $h\left(\frac{1}{5}\right)$



الربط مع الحياة

الضغط الواقع على الغواص عندما يكون على عمق 10 أمتار تحت الماء يعادل ضعف الضغط الجوي على السطح تقريبًا.

27) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال الدوال المتباينة.

a) بيانيًّا: مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

$j(x)=x^2+2$ $h(x)=-x^2$ $g(x)=2^x$ $f(x)=x^2$

b) جدوليًّا: استعمل التمثيلات البيانية في الفرع **a** لعمل جدول يبين عدد المرات الممكن أن يقطع فيها أي خط أفقي، التمثيل البياني لكل دالة مما سبق.

c) تحليليًّا: حتى تكون الدالة متباينة يجب ألا يقطع أي خط أفقي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة. أي الدوال السابقة تحقق هذا الشرط وأيها لا تحققه؟

d) جدوليًّا: كوّن جدولًا، وصنّف فيه الدوال السابقة إلى متباينة أو غير متباينة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

28) يملك فهد 800 ريال، فإذا قرر أن يضيف إلى هذا المبلغ 200 ريال شهريًّا، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$ ؛ تمثل مقدار ما معه من نقود $p(t)$ بعد t شهرًا. فكم يكون معه بعد 8 أشهر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. فأيٌّ منهما حله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

أحمد

$$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$$
$$= -4(9d^2) - 6d + 1$$
$$= -36d^2 - 6d + 1$$

خالد

$$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$$
$$= 12d^2 - 6d + 1$$

30) **مسألة مفتوحة:** مثِّل كلًّا من العلاقات الآتية بيانيًّا:

a) سرعة سيارة متجهة نحو نقطة معينة وزمنها إذا علمت أنها توقفت عند إشارتين ضوئيتين.

b) طول شخص وعمره في الفترة من 5 سنوات إلى 60 سنة.

c) درجة الحرارة في أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 6 صباحًا إلى الساعة 11 مساءً.

31) **تحدَّ:** إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $f(b) = 31, g(b) = 51$ ، $g(a) = 33, f(a) = 19$. وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحقِّقان المعطيات السابقة.

32) **اكتب:** وضِّح كيف يحدِّد اختبار الخط الرأسي إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

تدريب على اختبار

33) تحتوي بركة سباحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة. فأي المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء g المتبقية في البركة بعد m دقيقة؟

A $g = 19500 - 6m$ **C** $g = \frac{19500}{6m}$

B $g = 19500 + 6m$ **D** $g = \frac{6m}{19500}$

34) إذا كان $g(x) = x^2$، فأي عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$؟

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 1-1)

35) $6(3a - 2b) + 3(5a + 4b)$ **36)** $-4(5x - 3y) + 2(y + 3x)$ **37)** $-7(2c - 4d) + 8(3c + d)$

حل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس 1-1)

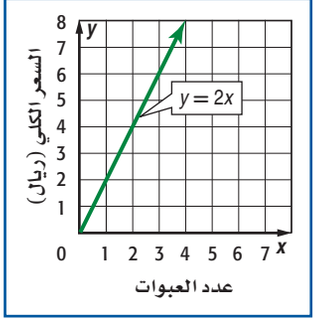
38) $4(2y - 3) + 5(3y + 1) = -99$ **39)** $8d - 4 + 3d = 2d - 100 - 7d$ **40)** $10y - 5 - 3y = 4(2y + 3) - 20$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الدوال المنفصلة والدوال المتصلة لحل مسائل حياتية.

تُباع عبوة العصير الواحدة من أحد الأنواع بسعر 2 ريال، ويمكن إيجاد سعر x عبوة عصير باستعمال الدالة المتصلة $y = 2x$ حيث y السعر الكلي بالريال. ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًّا كما هو موضّح في التمثيل المجاور.

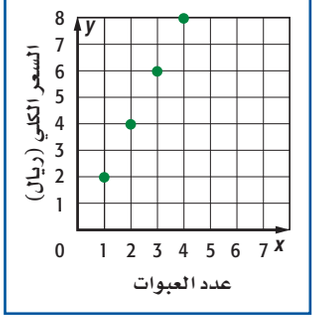
سعر عبوات العصير



بالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن أن ترى أن سعر عبوتي عصير يساوي 4 ريالات، وسعر 3 عبوات يساوي 6 ريالات وهكذا. يبين التمثيل البياني أن سعر 1.5 عبوة هو (1.5)2 ويساوي 3 ريالات. إلا أن عبوات العصير لا تُباع مملوءة جزئيًّا. فهذه الدالة تُمثل بدقة أكثر بدالة منفصلة.

التمثيل البياني المجاور هو تمثيل الدالة المنفصلة التي تمثل سعر عبوات العصير. والمجال في هذا التمثيل البياني مقبول ومنطقي في هذا الموقف.

سعر عبوات العصير

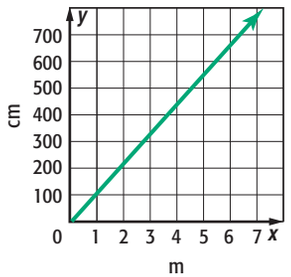


عند اختيار دالة منفصلة أو متصلة لتمثيل موقف من واقع الحياة يجب الأخذ بعين الاعتبار إذا كانت كل الأعداد الحقيقية تعد منطقية ومقبولة كعناصر في المجال أم لا.

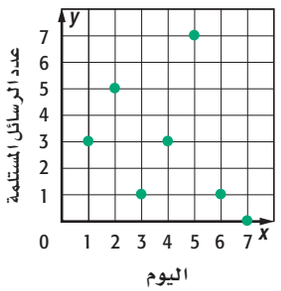
تمارين

بيِّن إذا كانت كل علاقة فيما يأتي متصلة أو منفصلة، وفسر إجابتك.

1) تحويل الوحدات



2) البريد الإلكتروني



3) y تمثل المسافة التي تقطعها سيارة في زمن مقداره x ساعة.

4) y تمثل العدد الكلي لراكبي لعبة العجلة الدوارة بعد x دورة من تشغيل اللعبة.

5) **اكتب:** مثالًا من واقع الحياة على دالة منفصلة وآخر على دالة متصلة، وفسر إجابتك.

1-3

دوال خاصة
Special Functions

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أكتب الدوال المتعددة التعريف وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وأمثّلها بيانيًا.

المفردات:
الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function
الدالة المتعددة التعريف الخطية
piecewise-linear function
الدالة الدرجية
step function
دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function
دالة القيمة المطلقة
absolute value function

لماذا؟

السمنة حالة مرضية يمكن تعريفها طبيًا أنها زيادة الدهون في الجسم، وتنتج السمنة عن أخذ مقدار طاقة أكبر من حاجة الجسم دون استهلاكها. ويبين الجدول المجاور نسب المصابات بالسمنة لفئات عمرية مختلفة في المملكة.

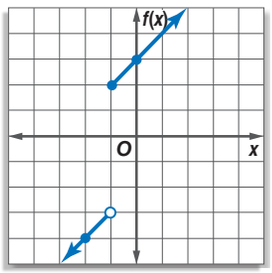
نسب المصابات بالسمنة في المملكة حسب الفئة العمرية		
من	إلى	النسبة
15	24	19%
25	34	38%
35	44	53%
45	54	58%
55	64	49%

المصدر: مسح المعلومات الصحية في المملكة، وزارة الصحة، 1435 هـ

الدالة المتعددة التعريف: الدالة التي تربط بين العمر ونسبة المصابات بالسمنة ليست خطية؛ لأن كل فترة من مجال الدالة معرّفة بعبارة مختلفة، فالدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر تسمى **دالة متعددة التعريف**. وعند تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًا توضع دائرة صغيرة مظلّلة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظلّلة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

مثال 1 تمثيل الدالة متعددة التعريف

مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} x-2 & , \ x < -1 \\ x+3 & , \ x \geq -1 \end{cases}$ بيانيًا.
ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.



الخطوة 1: مثّل $f(x) = x - 2$ بيانيًا عندما $x < -1$.

احسب قيمة المقدار $x - 2$ عندما $x = -1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أقل من -1 ولتكن -2

$f(x) = x - 2$ $\qquad$ $f(x) = x - 2$
$f(-1) = (-1) - 2 = -3$ $\qquad$ $f(-2) = (-2) - 2 = -4$

حدِّد النقطتين $(-2, -4)$, $(-1, -3)$ وصل بينهما بنصف مستقيم

وبما أن العدد -1 لا يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(-1, -3)$.

الخطوة 2: مثّل $f(x) = x + 3$ بيانيًا عندما $x \geq -1$.

احسب قيمة المقدار $x + 3$ عندما $x = -1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أكبر من -1 ولتكن 0

$f(x) = x + 3$ $\qquad$ $f(x) = x + 3$
$f(-1) = (-1) + 3 = 2$ $\qquad$ $f(0) = (0) + 3 = 3$

حدِّد النقطتين $(0, 3)$, $(-1, 2)$ وصل بينهما بنصف مستقيم.

وبما أن العدد -1 يحقق المتباينة، لذا نبدأ بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-1, 2)$.

وبما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x، لذا فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

قيم $f(x)$ للأزواج المرتبة في التمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من $3-$ وكل الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2، لذا فإن المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < -3 \text{ أو } f(x) \geq 2\}$

تحقق من فهمك

1) $f(x) = \begin{cases} x+2 & , \ x < 0 \\ x & , \ x \geq 0 \end{cases}$.

تمثّل الدوال المتعددة التعريف غالبًا بعدة دوال خطية. وتسمى حينئذٍ **الدالة المتعددة التعريف الخطية** .

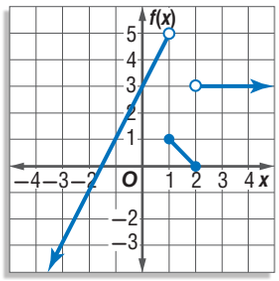
إرشادات للدراسة

تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانيًا

قد تكون الدوال المتعددة التعريف متصلة أو غير متصلة.

مثال 2 كتابة الدالة المتعددة التعريف

اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



اكتب الدالة التي تمثل كل جزء في التمثيل البياني.

الجزء الأيسر يمر بالنقطتين $(-2, -1), (0, 3)$ ، وميله $2 (= \frac{-1-3}{-2-0})$ ، وباستعمال صيغة الميل ونقطة مثلًا، فإن هذا الجزء تمثله الدالة $f(x) = 2x + 3$، $(f(x) - 3 = 2(x - 0))$ ، ولوجود دائرة غير مظللة عند النقطة $(1, 5)$، فإن هذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | x < 1\}$.

وبالطريقة نفسها فإن الجزء الأوسط تمثله الدالة $f(x) = -x + 2$.

وتوجد دائرتان مظللتان عند النقطتين $(1, 1)$ و $(2, 0)$، وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | 1 \le x \le 2\}$.

كذلك الجزء الأيمن تمثله الدالة $f(x) = 3$. وتوجد دائرة غير مظلّلة عند النقطة $(2, 3)$.

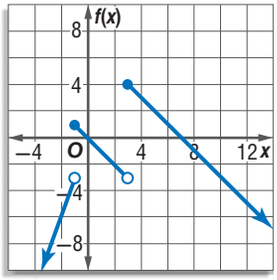
وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | x > 2\}$، ونكتب الدالة المتعددة التعريف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 , & x < 1 \\ -x + 2 , & 1 \le x \le 2 \\ 3 , & x > 2 \end{cases}$$

تحقق: يبين التمثيل البياني نصف مستقيم ميله موجب عندما تكون $x < 1$. ويبين أيضًا قطعة مستقيمة ميلها سالب عندما تكون $1 \le x \le 2$ ونصف مستقيم آخر ميله صفر عندما تكون $x > 2$. لذا يكون تعريف الدالة منطقيًّا للتمثيل البياني المعطى.

تحقق من فهمك

2) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



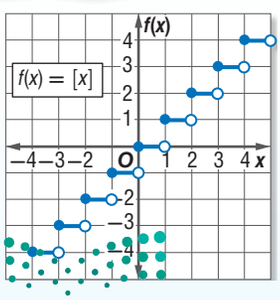
الدالة الدرجية: من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، وقد سُميت بهذا الاسم لأن تمثيلها البياني يشبه الدرج، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [x]$، هي مثال على الدالة الدرجية؛ حيث يعني الرمز $[x]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x. فعلى سبيل المثال: $[3.25] = 3$ وكذلك $[-4.6] = -5$.

مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح

أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = [x]$، وتُعرّف على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني: قطع مستقيمة أفقية.

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

المقطعان: $f(x) = 0$ حيث $0 \le x < 1 , x = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال الدالة الدرجية

عقار: يتقاضى مجمع للشقق المفروشة 300 ريال مقابل تأجير الشقة ليوم واحد أو جزء منه، و250 ريالًا مقابل تأجير الشقة ذاتها لأي يوم إضافي أو جزء منه. اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثلها بيانيًّا.

افهم: **المعطيات:** أجرة الشقة لليوم الأول أو لجزء منه هي 300 ريال، وأجرة أي يوم إضافي أو جزء منه بعد اليوم الأول 250 ريالًا.

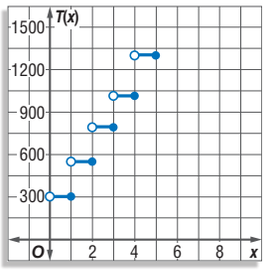
المطلوب: كتابة الدالة التي تمثل الموقف، وتمثيلها بيانيًّا.

خطط: كوِّن جدولًا يمثل الموقف؛ لتكتشف النمط، وتكتب الدالة وتمثلها بيانيًّا.

حل: إذا كان زمن التأجير أكبر من 0 يوم وأقل من أو يساوي يومًا، فإن الأجرة هي 300 ريال. وإذا كان الزمن أكبر من يوم وأقل من أو يساوي يومين فإن الأجرة هي 550 ريالًا وهكذا، لذا استعمل نمط الزمن مع الأجرة لعمل الجدول التالي، حيث x هي عدد أيام تأجير الشقة. و $T(x)$ هي أجرة الشقة، ثم مثّله بيانيًّا.

x	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$2 < x \le 3$	$3 < x \le 4$	$4 < x \le 5$
T(x)	300 ريال	550 ريالًا	800 ريال	1050 ريالًا	1300 ريال

وعليه فإن الدالة المطلوبة وتمثيلها البياني يكونان كما يلي:



$$T(x) = \begin{cases} 300 & 0 < x \le 1 \\ 550 & 1 < x \le 2 \\ 800 & 2 < x \le 3 \\ 1050 & 3 < x \le 4 \\ 1300 & 4 < x \le 5 \\ \vdots \end{cases}$$

تحقق: بما أن المجمع يحوّل أي كسر للعدد الصحيح التالي، فإن كل قطعة مستقيمة ستحتوي على دائرة غير مظلّلة عن يسارها، وأخرى مظلّلة عن يمينها كما في الشكل.

تحقق من فهمك

3) إعادة تدوير الورق: تدفع شركة لإعادة تدوير الورق 25 ريالًا عن كل صندوق من الورق يتم إحضاره للشركة ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل. اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثّلها بيانيًّا.



الربط مع الحياة

تقدر المخلفات الورقية في السعودية بـ 1.5 مليون طن سنويًا، يستغل منها في عمليات التدوير 700 ألف طن فقط.

المصدر: جريدة الاقتصادية/ العدد 6081، عام 1431هـ

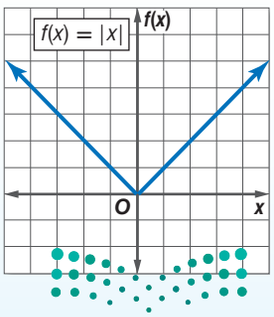
وهناك نوع آخر من الدوال المتعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

مفهوم أساسي — دالة القيمة المطلقة

أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = |x|$، وتُعرّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني: على شكل حرف V

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

المقطعان: $x = 0, f(x) = 0$

ولايمكن أن تكون: $f(x) < 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2024 - 1445

مثال 4 دالة القيمة المطلقة

مثّل الدالة $f(x) = |2x| - 4$ بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها.

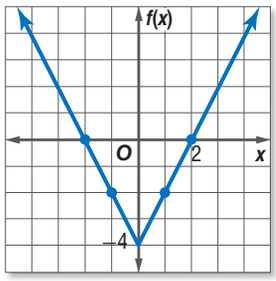
1) اجعل ما بداخل القيمة المطلقة يساوي الصفر، أي $2x = 0$ أو $x = 0$

2) كوّن جدولًا للقيم، يحوي قيمًا لِـ x أكبر من 0 وقيمًا أصغر من 0

x	$\|2x\| - 4$
−2	0
−1	−2
0	−4
1	−2
2	0

3) مثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي.

4) صل بين النقاط.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq -4\}$.

تحقق من فهمك

(4A) $f(x) = |x - 2|$

(4B) $f(x) = -|x| + 1$

تأكد

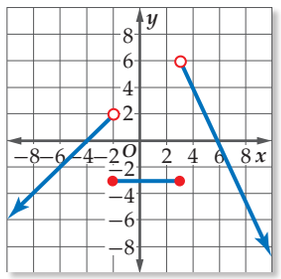
مثال 1 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

(1)
$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -4 \\ x, & -4 < x < 2 \\ -x+6, & x \geq 2 \end{cases}$$

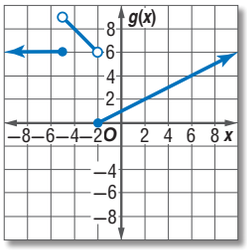
(2)
$$f(x) = \begin{cases} 8, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 4 \\ -4-x, & x \geq 4 \end{cases}$$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في كلٍّ ممَّا يأتي:

(3)



(4)



مثال 3

(5) محاضرات طبية: يريد أحد الأطباء إلقاء محاضرة حول العدوى في قاعة تتسع لِـ 250 شخصًا فقط، وكان عدد راغبي حضور المحاضرة أكثر من ذلك بكثير. مثّل بيانيًّا دالة متعددة التعريف تبين العلاقة بين عدد المحاضرات y التي يمكن أن يلقيها الطبيب، وعدد الحضور x.

المثالان 3, 4 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

(6) $g(x) = -2[x]$

(7) $h(x) = [x - 5]$

(8) $g(x) = |-3x|$

(9) $f(x) = 2|x|$

(10) $h(x) = |x + 4|$

(11) $s(x) = |-2x| + 6$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

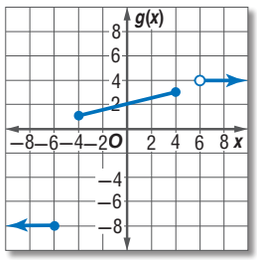
مثال 1 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

12) $f(x)=\begin{cases} -3x, & x \le -4 \\ x, & 0 < x \le 3 \\ 8, & x > 3 \end{cases}$

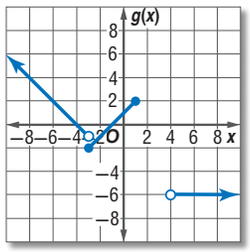
13) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x \le -6 \\ 5, & -6 < x \le 2 \\ -2x+1, & x > 4 \end{cases}$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في كلٍّ ممَّا يأتي:

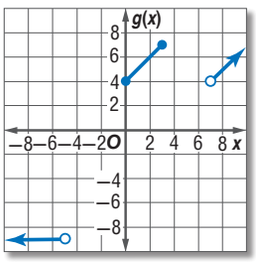
14)



15)



16)



مثال 3

17) جمعية خيرية: تقوم جمعية خيرية بجمع الصدقات لإيصالها إلى مستحقيها، وتتبرع الجمعية أيضًا بمبلغ مساوٍ لأي صدقة دون 100 ريال أو تساويها، كما تضيف الجمعية 100 ريال إلى أي صدقة تزيد على 100 ريال.

a) حدّد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف.

b) اكتب الدالة التي تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا.

المثالان 3, 4 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

18) $f(x)=[x]-6$

19) $h(x)=3[x]-8$

20) $f(x)=|x-5|$

21) $g(x)=|x+2|$

22) $h(x)=|2x|-8$

23) $k(x)=|-3x|+3$

24) $f(x)=2|x-4|+6$

25) $h(x)=-3|0.5x+1|-2$

استئجار الدبابات الشاطئية



الزمن t (ساعة)	السعر (بالريال)
$0 < t \le \frac{1}{2}$	60
$\frac{1}{2} < t \le 1$	100
$1 < t \le 2$	160
$2 < t \le 3$	240

26) ترفيه: يوضّح الجدول المجاور: تكلفة استئجار دباب شاطئ.

a) حدِّد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف.

b) اكتب الدالة التي تمثّل هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا.

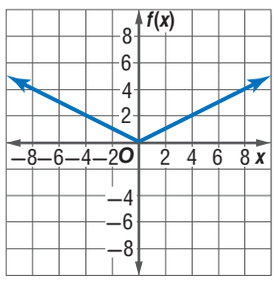


الربط مع الحياة

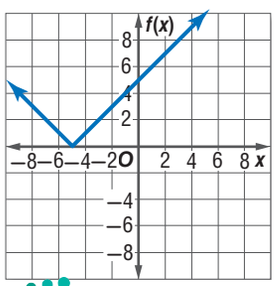
تهدف جمعيات البرّ بالمملكة إلى ترسيخ مبدأ التكافل الاجتماعي بين أفراد المجتمع وتحويله إلى واقع عملي من خلال رعاية المحتاجين وتخفيف معاناتهم بتوفير الغذاء والدواء واللباس والأثاث.

اكتب دالة القيمة المطلقة الممثلة بيانيًّا في كلٍّ ممَّا يأتي:

27)



28)



مثّل كُل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

29) $g(x) = \begin{cases} [x] , & x < -4 \\ x + 1 , & -4 \le x \le 3 \\ -|x| , & x > 3 \end{cases}$

30) $h(x) = \begin{cases} -|x| , & x < -6 \\ |x| , & -6 \le x \le 2 \\ |-x| , & x > 2 \end{cases}$

31) **تمثيلات متعددة:** لتكن $f(x) = |x| - 4 , g(x) = |3x|$

a) جدوليًّا: كوّن جدولًا لبعض قيم كلٍّ من $f(x)$ و $g(x)$ ما بين $x = 4 , x = -4$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من الدالتين بيانيًّا على مستوى إحداثي مختلف.

c) عدديًّا: احسب الميل بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول.

d) لفظيًّا: صف العلاقة بين ميل كل من جزأي دالة القيمة المطلقة.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **مسألة مفتوحة:** اكتب علاقة باستعمال القيمة المطلقة بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

33) **تحد:** مثّل المعادلة $|y| = 2|x + 3| - 5$ بيانيًّا.

34) **تبرير:** أعط مثالًا مضادًّا للجملة الآتية، وفسِّر إجابتك.

"حتى تجد أكبر عدد صحيح لعدد غير صحيح x، فإنك تقرِّب x إلى أقرب عدد صحيح"

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة قيمة مطلقة $f(x)$، تحقق $f(5) = -3$.

36) **اكتب:** اشرح من خلال مثال كيف تستعمل الدوال المتعددة التعريف لتمثيل مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار

37) **إجابة قصيرة:** ما العبارة التي تعطي الحد النوني للنمط في الجدول التالي؟

2	4	6	8	n
7	13	19	25	?

38) أيّ دالة مما يأتي يكون فيها $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1$؟

A $f(x) = 2x$

B $f(x) = |-2x|$

C $f(x) = [x]$

D $f(x) = [2x]$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x) = -2x^2 - 6x + 9 , g(x) = -x^2 , f(x) = -4x + 6$، فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 2-1)

39) $f(2c)$

40) $g(a + 1)$

41) $h(6)$

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-1)

42) $\sqrt{36}$

43) -3

44) $\frac{2}{5}$

45) $\sqrt{11}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) $\frac{25}{11}$

2) $-\frac{128}{32}$

3) $\sqrt{50}$

4) -32.4

5) اذكر الخاصية الموضحة في المعادلة الآتية:
$7(4 + 15) = 7 (4) + 15 (7)$؟

6) بسّط العبارة $-3(7a - 4b) + 2(-3a + b)$

7) **ملابس:** يريد سعد شراء 3 قمصان و3 بناطيل. فإذا كان سعر القميص الواحد 35 ريالًا. وسعر البنطال الواحد 55 ريالًا. فأوجد المبلغ الذي يدفعه سعد بطريقتين مستعملًا خاصية التوزيع.

8) **اختيار من متعدد:** أي العبارات التالية تكافئ $\frac{2}{3}(4m - 5n) + \frac{1}{5}(2m + n)$ ؟

A $\frac{46}{15}m - \frac{47}{15}n$

B $46m - 47n$

C $-\frac{mn}{15}$

D $\frac{5}{4}m - \frac{9}{8}n$

9) أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $\frac{7}{6}$.

10) حدِّد كلًّا من مجال العلاقة الآتية ومداها، ثم بين هل تمثل دالة أم لا: $\{(3, 2), (4, 1), (0, 3), (5, -2), (3, 7)\}$

11) مثّل المعادلة $y = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم بين إذا كانت تمثل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟ وهل هي منفصلة أم متصلة؟

إذا كان $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي :

12) $f(-2)$

13) $f(2y)$

14) $f(1.4)$

15) **اختيار من متعدد:** يقدر الدخل بالريال لسيارة أجرة بالدالة $f(x) = 0.35x + 49$، حيث x عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة. قدّر دخل السيارة إذا قطعت 250 km .

A 84 ريالاً

B 112.50 ريالاً

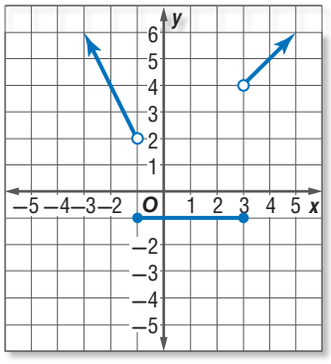
C 136.50 ريالاً

D 215 ريالاً

16) مثّل بيانيًّا الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \le x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

17) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا فيما يأتي:



18) حدّد كلًّا من المجال والمدى للدالة: $y = [x] + 2$.

19) مثّل الدالة $f(x) = |2x|$ ، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-4

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا
Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثّل المتباينات الخطية بيانيًّا .
- أمثّل متباينات القيمة المطلقة بيانيًّا .

المفردات

المتباينة الخطية
linear inequality

منطقة الحل
feasible region

الحد
boundary

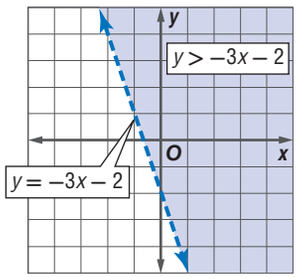
لماذا؟



دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير الطبيعي، ورصد لتلك الدعوة مبلغ 150 ريالًا فقط.

ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية: $6p + 5d \leq 150$ حيث p عدد الفطائر و d عدد أكواب العصير؛ للتأكد من أن سعر عدد معين من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا: تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على صورة منطقة مظلّلة تسمى **منطقة الحل**، فكل نقطة في المنطقة المظلّلة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** منطقة الحل وقد رُسِم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز $\leq$ أو $\geq$ فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذٍ يكون تمثيل المستقيم خطًّا متصلًا.

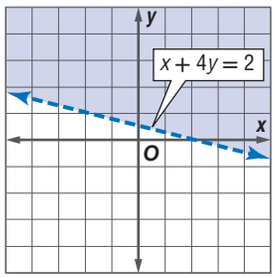
إرشادات للدراسة

حد المتباينة

إذا احتوت المتباينة على رمز $>$ أو $<$، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثّل بخط متقطع.

مثال 1 الحد المتقطع

مثّل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيًّا.



الخطوة 1: مثّل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$. وبما أن رمز المتباينة هو $>$ فإن الحد سيكون متقطعًا.

الخطوة 2: اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على حد المتباينة .

	المتباينة الأصلية
$0 + 4(0) \stackrel{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 0)$
$0 > 2$ ✗	

ظلّل المنطقة التي لا تحوي $(0, 0)$.

تحقق: يبين التمثيل البياني أن النقطة $(0, 3)$ تقع في منطقة الحل.

	المتباينة الأصلية
$0 + 4(3) \stackrel{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 3)$
$12 > 2$ ✓	

إذن، الحل صحيح.

تحقق من فهمك

(1A) $3x + \frac{1}{2}y < 2$

(1B) $-x + 2y > 4$



الربط مع الحياة

تزوّد معامل اللغات المتخصصة بأحدث الأجهزة التقنية والتجهيزات الإلكترونية والصوتية المتطورة التي تنمي مهارَتَي المحادثة والاستماع لدى الدارسين، وتؤهلهم لاكتساب اللفظ الصحيح.

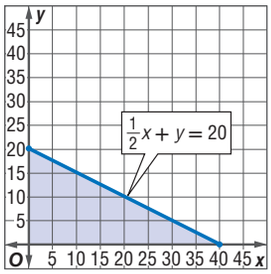
مثال 2 من واقع الحياة — الحد المتصل

رسم: يقدم مركز تدريب نوعين من دروس تعلم اللغة الإنجليزية، الأول: دروس مدتها 30 دقيقة للدرس الواحد، والثاني: دروس مدتها 60 دقيقة للدرس الواحد. وقرر مدير المركز ألا يزيد زمن دروس تعلم اللغة الإنجليزية على 20 ساعة أسبوعيًّا.

a) اكتب متباينة تمثّل عدد دروس تعلم اللغة الإنجليزية التي يمكن تقديمها أسبوعيًّا، ثم مثّلها بيانيًّا.

لتكن x عدد الدروس التي مدتها 30 دقيقة ($\frac{1}{2}$ ساعة)، و y عدد الدروس التي مدتها 60 دقيقة (ساعة واحدة). وبما أن مجموع زمن الدروس لا يزيد على 20 ساعة أسبوعيًّا، فهذا يعني إمكانية أن يساوي 20 ساعة. ولهذا فإن المتباينة تحتوي على الرمز $\leq$، ولذا يكون المستقيم الذي يمثّل الحد متصلًا. إذن المتباينة هي $\frac{1}{2}x + y \leq 20$.

الخطوة 1: مثّل الحد وهو المستقيم $\frac{1}{2}x + y = 20$ بيانيًّا.



الخطوة 2: اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على الحد.

المتباينة الأصلية $\frac{1}{2}x + y \leq 20$

$(x, y) = (0, 0)$ $\frac{1}{2}(0) + (0) \stackrel{?}{\leq} 20$

✓ $0 \leq 20$

ظلّل المنطقة في الربع الأول فقط التي تحوي $(0, 0)$؛ وذلك لأن كلا المتغيرين لايمكن أن يكون سالبًا.

b) هل يمكن أن يقدم المركز 25 درسًا من الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و 15 درسًا من الدروس التي مدتها 60 دقيقة خلال أسبوعٍ ما؟ فسّر إجابتك.

النقطة $(25, 15)$ تقع خارج المنطقة المظلّلة؛ لذا فهي لا تحقق المتباينة، وعليه، فلا يمكن أن يقدم المركز ذلك العدد من الدروس خلال أسبوعٍ ما.

تحقق من فهمك

2) ألعاب: مع صالح 60 ريالًا يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمن تذكرة كل لعبةٍ عاديةٍ 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا .

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا: تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية، مثّل بيانيًّا معادلة القيمة المطلقة المرتبطة، وبعد ذلك حدِّد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم حدِّد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

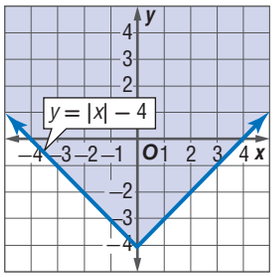
مثال 3 — تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا

مثّل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانيًّا.

مثّل المعادلة المرتبطة $y = |x| - 4$،

وبما أن المتباينة تحتوي على إشارة $\geq$، فإن الحد يكون متصلًا.

والآن اختبر النقطة $(0, 0)$.



المتباينة الأصلية $y \geq |x| - 4$

$(x, y) = (0, 0)$ $0 \stackrel{?}{\geq} |0| - 4$

✓ $0 \geq -4$

ظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة $(0, 0)$.

تحقق من فهمك

3A) $y \leq 2|x| + 3$

3B) $y \geq 3|x + 1|$

تأكـــد

مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

1) $y \leq 4$

2) $x > -6$

3) $x + 4y \leq 2$

4) $3x + y > -8$

مثال 2 **5) وقود:** مع عامر 120 ريالًا ، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك بالمبلغ المتبقي. فإذا كان سعر لتر الوقود 1.37 ريال، وسعر عبوة زيت المحرك 17 ريالًا.

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف، ثم مثلها بيانيًّا.

b) هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ 20 لترًا من الوقود وشراء 4 عبوات زيت محرك؟ فسر إجابتك.

مثال 3 مثّل المتباينتين الآتيتين بيانيًّا.

6) $y \geq |x + 3|$

7) $y - 6 < |x|$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

8) $x + 2y > 6$

9) $y \geq -3x - 2$

10) $2y + 3 \leq 11$

11) $4x - 3y > 12$

12) $6x + 4y \leq -24$

13) $y \geq \frac{3}{4}x + 6$

مثال 2 **14) مشتريات:** مع سعاد 200 ريالٍ. وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق. وعددًا من الكؤوس؛ لتجهز لمناسبة اجتماعية، فإذا كان سعر الطبق 15 ريالًا وسعر الكأس 5 ريالات، فأجب عمَّا يأتي:

a) اكتب متباينة تمثّل العدد الممكن شراؤه من الأطباق والكؤوس، ثم مثّلها بيانيًّا.

b) هل تستطيع سعاد شراء 10 أطباق وَ 10 كؤوس؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 3 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

15) $y > |3x|$ **16)** $y + 4 \le |x - 2|$ **17)** $y - 6 < |-2x|$

18) $y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right|$ **19)** $2y > |4x - 5|$ **20)** $-y \le |3x - 4|$

21) أعمال: يؤدي سعيد عملين ليحقق دخلًا أسبوعيًّا لا يقل عن 1500 ريالٍ، إذا كان الأجر الذي يتقاضاه عن كل ساعة موضّحا في الجدول المجاور، فأجب عمَّا يأتي:

العمل	الأجر في الساعة
بائع في محل تجاري/صباحًا	20 ريالاً
سائق خاص/ مساءً	25 ريالاً

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) هل سيحصل سعيد على المبلغ المطلوب إذا عمل 30 ساعة أسبوعيًّا في كل عمل؟

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

22) $y \ge |-2x - 6|$ **23)** $y \le |x - 3| + 4$ **24)** $y - 3 > -2|x + 4|$

25) زينة: تصنع ميساء عقودًا وأساور من الخرز، لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، y عدد العقود.

a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.



الربط مع الحياة

يصنع الخرز من طين ليِّن، حيث يجفف في فرن حرارته عالية، ويمكن تشكيله إلى أشكال عديدة.

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا.

26) $y \ge [x]$ **27)** $y < [x + 2]$ **28)** $y \ge |[x]|$

مسائل مهارات التفكير العليا

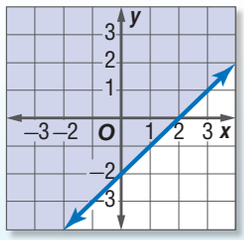
29) مسألة مفتوحة: استعمل القيمة المطلقة لتكوين متباينة على أن لا يقع حلها في الربعين الثاني أو الثالث.

30) تحد: مثّل المتباينة الآتية بيانيًّا:

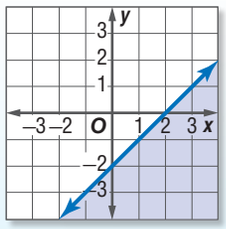
$$g(x) > \begin{cases} |x + 1|, & x \le -4 \\ -|x|, & -4 < x < 2 \\ |x - 4|, & x \ge 2 \end{cases}$$

31) اكتشف الخطأ: مثّل كل من زيد ومصعب المتباينة $x - y \geq 2$ بيانيًّا. فأيهما تمثيله صحيح؟ فسّر إجابتك.

زيد



مصعب



32) تبرير: متى يكون من الممكن تظليل منطقتين مختلفتين عند تمثيل متباينة القيمة المطلقة؟ فسر إجابتك.

33) اكتب: اذكر مثالاً لمتباينة قيمة مطلقة ليس لها حل. فسّر إجابتك.

تدريب على اختبار

34) أي النقاط الآتية تقع في منطقة حل المتباينة $y + 3x > -2$؟

A $(-3, 1)$

B $(1, -7)$

C $(0, 0)$

D $(-4, 0)$

35) أي الدوال الآتية مداها هو $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$؟

A $f(x) = -x$

B $f(x) = [x]$

C $f(x) = |x|$

D $f(x) = -|x|$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-1)

36) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x, & x > 3 \end{cases}$

37) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -3x, & x > 2 \end{cases}$

38) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -2 \\ x + 1, & 0 < x \leq 6 \\ x - 5, & x > 6 \end{cases}$

إذا كان:

$f(x) = 4x^2 - 10x$

$g(x) = -3x^2 + 2$

$h(x) = -7x + 8$

فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 2-1)

39) $f(-9)$

40) $g(-4)$

41) $h(12)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-5

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا

Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

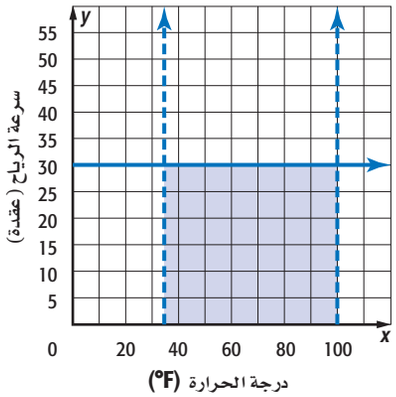
فيما سبق:
درست حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحل نظام متباينات خطية بيانيًا.
- أحدّد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل.

المفردات:
نظام المتباينات الخطية
system of linear inequalities

لماذا؟

تؤخذ الحالة الجوية بالاعتبار عند إطلاق المركبات الفضائية، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وأن لا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدة. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظام من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.



نظام المتباينات الخطية: حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

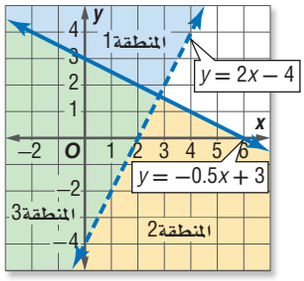
مفهوم أساسي — حل أنظمة المتباينات الخطية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 مثّل كل متباينة في النظام بيانيًا.

الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

مثال 1 — مناطق الحل المتقاطعة



حل النظام الآتي بيانيًا:

$$y > 2x - 4$$
$$y \le -0.5x + 3$$

بتمثيل المتباينتين بيانيًا نجد أن: حلُّ المتباينة $y > 2x - 4$ ← المنطقتان: 1 , 3

حلُّ المتباينة $y \le -0.5x + 3$ ← المنطقتان: 2 , 3

المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين ، وعليه فتكون هي منطقة حل النظام.

تحقق:

لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة حل النظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار. والتحقق من صحة الحل بتعويض (0, 0) بدلًا من x, y في كلتا المتباينتين.

$y > 2x - 4$
$0 \overset{?}{>} 2(0) - 4$
$0 \overset{?}{>} 0 - 4$
✓ $0 > -4$

$y \le -0.5x + 3$
$0 \overset{?}{\le} -0.5(0) + 3$
$0 \overset{?}{\le} 0 + 3$
✓ $0 \le 3$

تحقق من فهمك

(1A) $y \le -2x + 5$
$y > -\frac{1}{4}x - 6$

(1B) $y \ge |x|$
$y < \frac{4}{3}x + 5$

يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين، وعليه فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

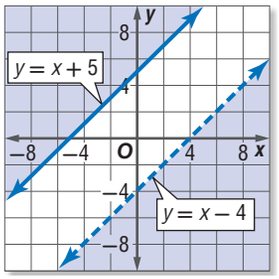
هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويرمز إليها بأحد الرمزين $\emptyset$ أو $\{\ \}$.

مثال 2 مناطق الحل غير المتقاطعة

حل النظام الآتي بيانيًّا:

$y \geq x + 5$

$y < x - 4$



بتمثيل المتباينتين بيانيًّا، نجد أن منطقتي الحل لا تتقاطعان، وبالتالي لا توجد نقاط مشتركة بينهما، ولذا فليس للنظام حل. ومجموعة الحل هي Φ.

تحقق من فهمك

2A) $y \geq -4x + 8$

$y < -4x + 4$

2B) $y \geq |x|$

$y < x - 6$

تستعمل أنظمة المتباينات الخطية في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة كتابة نظام من المتباينات

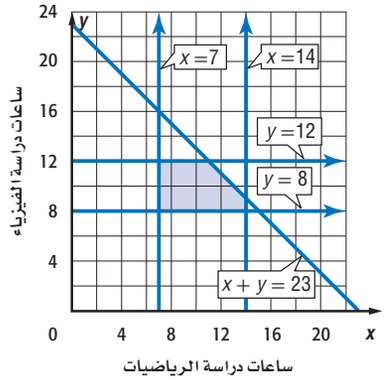
إدارة الوقت: **لدى فاطمة 25 ساعة على الأكثر للاستعداد لأداء 3 اختبارات في الرياضيات والفيزياء والتربية المهنية، فوضعت جدولًا زمنيًّا استعدادًا لذلك، فخصصت ساعتين لدراسة التربية المهنية، وخصصت من 7 إلى 14 ساعة لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من 8 إلى 12 ساعة. اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ومثّله بيانيًّا.**

الرياضيات: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الرياضيات x، فإن هذا العدد لا يقل عن 7 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة أي أن:

$$7 \leq x \leq 14$$

الفيزياء: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الفيزياء y، فإن هذا العدد لا يقل عن 8 ساعات ولا يزيد على 12 ساعة أي أن:

$$8 \leq y \leq 12$$



وبما أن إجمالي وقت الدراسة هو 25 ساعة ، ساعتان منها لدراسة مادة التربية المهنية، ويتبقى 23 ساعة على الأكثر لدراسة الرياضيات والفيزياء فإن:

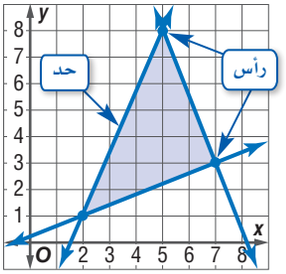
$$x + y \leq 23$$

مثّل المتباينات بيانيًّا. أي زوج مرتب في منطقة حل النظام يمثّل حلًّا للنظام؟ أحد الحلول الممكنة هو 10 ساعات لدراسة الفيزياء، و 11 ساعة لدراسة الرياضيات.

تحقق من فهمك

3) سفر: خرج مشاري وبدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة برًّا فتناوبا قيادة السيارة. فإذا كانت فترات قيادة مشاري للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن 4 ساعات، ولا تزيد على 8 ساعات، وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن ساعتين ولا تزيد على 5 ساعات، وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يوميًّا لا يزيد على 10 ساعات، فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ثم مثّله بيانيًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

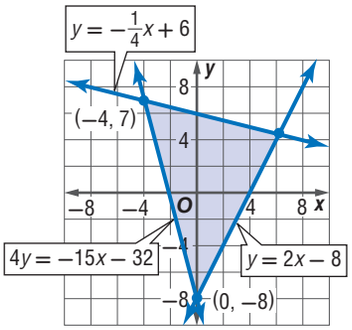


إيجاد رؤوس منطقة الحل: ينتج أحيانًا عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحدِّدة للمنطقة (الحدود).

مثال 4 إيجاد رؤوس منطقة الحل

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$y \geq 2x - 8, y \leq -\frac{1}{4}x + 6, 4y \geq -15x - 32$.



الخطوة 1: مثّل كل متباينة بيانيًّا.

الخطوة 2: من التمثيل البياني يمكنك إيجاد إحداثيات رأسين من رؤوس المثلث وهما الزوجان المرتبان $(-4, 7)$, $(0, -8)$.

الخطوة 3: أوجد إحداثيي الرأس الثالث بحل النظام المكون من المعادلتين الخطيتين:

$y = 2x - 8$, $y = -\frac{1}{4}x + 6$.

عوض عن y بقيمتها في المعادلة الثانية.

$2x - 8 = -\frac{1}{4}x + 6$ — عوّض عن y بـ $2x - 8$

$2x = -\frac{1}{4}x + 14$ — اجمع 8 لكلا الطرفين

$\frac{9}{4}x = 14$ — اجمع $\frac{1}{4}x$ لكلا الطرفين

$x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ — اضرب كلا الطرفين في العدد $\frac{4}{9}$

جد قيمة y.

$y = 2\left(6\frac{2}{9}\right) - 8$ — عوّض عن x بالعدد $6\frac{2}{9}$

$= 12\frac{4}{9} - 8$ — خاصية التوزيع

$= 4\frac{4}{9}$ — بسّط

إحداثيات رؤوس المثلث هي: $\left(6\frac{2}{9}, 4\frac{4}{9}\right), (0, -8), (-4, 7)$.

تحقق: قارن بين الإحداثيين اللذين وجدتهما، وبين إحداثيي الرأس الثالث في التمثيل البياني، ولاحظ أن الإحداثي x للرأس الثالث محصور بين العددين 7 , 6، لذا فإن القيمة $6\frac{2}{9}$ معقولة، وكذلك الإحداثي y محصور بين العددين 5 , 4 ، ولذا فإن القيمة $4\frac{4}{9}$ معقولة أيضًا.

تحقق من فهمك

(4A $y \geq -3x - 6$

$2y \geq x - 16$

$11y + 7x \leq 12$

(4B $5y \leq 2x + 9$

$y \leq -x + 6$

$9y \geq -2x + 5$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1442

تأكد

المثالان 2 , 1 حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

1) $y \le 6$
$y > -3 + x$

2) $y \le -3x + 4$
$y \ge 2x - 1$

3) $y > -2x + 10$
$y \le -3x - 3$

مثال 3

4) مشتريات: خصصت ليلى مبلغًا لايتجاوز 350 ريالًا لشراء نوعين من الأقلام، يباع الأول في رزم تضم الواحدة منها 10 أقلام وثمنها 35 ريالًا، ويباع الثاني في رزم تضم الواحدة منها 8 أقلام وثمنها 25 ريالًا. فإذا أرادت ليلى شراء 40 قلمًا على الأقل من كلا النوعين. فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ومثّله بيانيًّا

مثال 4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

5) $y \ge 2x + 1$
$y \le 8$
$4x + 3y \ge 8$

6) $y \ge -2x - 4$
$6y \le x + 28$
$y \ge 13x - 34$

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

7) $x < 3$
$y \ge -4$

8) $y > 3x - 5$
$y \le 4$

9) $y < -3x + 4$
$3y + x > -6$

10) $y \ge 0$
$y < x$

11) $6x - 2y \ge 12$
$3x + 4y > 12$

12) $-8x > -2y - 1$
$-4y \ge 2x - 5$

13) $5y < 2x + 10$
$y - 4x > 8$

14) $3y - 2x \le -24$
$y \ge \frac{2}{3}x - 1$

15) $y > -\frac{2}{5}x + 2$
$5y \le -2x - 15$

مثال 3

16) عمل جزئي: يعمل سعيد عملين جزئيين ويتقاضى على كل منهما أجرًا؛ فيتقاضى 20 ريالًا عن كل ساعة في العمل الأول، و 24 ريالًا عن كل ساعة في العمل الثاني، فإذا علمت أنه يعمل مدة لا تزيد على 25 ساعة في كلا العملين أسبوعيًّا. فاكتب نظامًا من متباينتين يبين عدد الساعات التي يعملها في كل من العملين؛ ليجمع مبلغًا لايقل عن 1850 ريالًا في 8 أسابيع، ثم مثّله بيانيًّا.

مثال 4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

17) $x \ge 0$
$y \ge 0$
$x + 2y < 4$

18) $y \ge 3x - 7$
$y \le 8$
$x + y > 1$

19) $x \le 4$
$y > -3x + 12$
$y \le 9$

20) $-3x + 4y \le 15$
$2y + 5x > -12$
$10y + 60 \ge 27x$

21) $8y - 19x < 74$
$38y + 26x \le 119$
$54y - 12x \ge -198$

22) $6y - 24x \ge -168$
$8y + 7x > 10$
$20y - 2x \le 64$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

23) اتصالات: يجري فهد مكالمات هاتفية من هاتفه المحمول مدتها لا تزيد على 800 دقيقة، بشرط أن لا يقل عدد دقائق الاتصال نهارًا عن ضعف عددها ليلًا، ولا يقل عدد دقائق الاتصال ليلًا عن 200 دقيقة. اكتب نظام متباينات يمثل الموقف، ومثّله بيانيًّا.

24) أشجار: تصنف الأشجار في الغابات تبعًا للارتفاع ومحيط الساق إلى أربع مجموعات، ويبين الجدول الآتي ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى الغابات:

المجموعة	الأشجار المسيطرة	الأشجار شبه المسيطرة	الأشجار المتوسطة السيطرة	الأشجار غير المسيطرة
الارتفاع (ft)	أكثر من 72	56–72	40–55	أقل من 39
محيط الساق (in)	أكثر من 60	48–60	34–48	أقل من 33

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثّل مدى كلٍّ من: الارتفاع h ومحيط الساق c للأشجار شبه المسيطرة ومثّله بيانيًّا.

b) ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها 48ft؟ وما المدى الذي يقع فيه محيط ساقها؟



الربط مع الحياة

تصنّف الأشجار في الغابات وفقًا لوصول الضوء إلى أوراقها إلى أربعة أصناف:
المسيطرة: أشجار يصل ضوء الشمس إلى أوراقها من أعلى فقط.
شبه المسيطرة: أشجار يصل ضوء الشمس إلى أوراقها من أعلى ومن الجوانب.
المتوسطة السيطرة: أشجار ارتفاعها بسيط ويصل ضوء الشمس إلى أوراقها من أعلى فقط.
غير المسيطرة: أشجار تنمو أسفل مستوى الأشجار الأخرى، وتكون تحت ظل الأشجار الأخرى.

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

25) $y \geq |2x + 4| - 2$
$3y + x \leq 15$

26) $y \geq |6 - x|$
$|y| \leq 4$

27) $|y| \geq x$
$y < 2x$

28) $y > -3x + 1$
$4y \leq x - 8$
$3x - 5y < 20$

29) $6y + 2x \leq 9$
$2y + 18 \geq 5x$
$y > -4x - 9$

30) $|x| > y$
$y \leq 6$
$y \geq -2$

31) $2x + 3y \geq 6$
$y \leq |x - 6|$

32) $8x + 4y < 10$
$y > |2x - 1|$

33) $y \geq |x - 2| + 4$
$y \leq [x] - 3$

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

34) $y \geq 2x - 12$
$y \leq -4x + 20$
$4y - x \leq 8$
$y \geq -3x + 2$

35) $y \geq -x - 8$
$2y \geq 3x - 20$
$4y + x \leq 24$
$y \leq 4x + 22$

36) $2y - x \geq -20$
$y \geq -3x - 6$
$y \leq -2x + 2$
$y \leq 2x + 14$

37) رياضة: يريد معلم التربية البدنية أن يختار من 10 إلى 15 لاعبًا ليشكل فريق كرة سلة على أن يكون اللاعبون من طلاب الصفين الثاني والثالث، ويكون عدد اللاعبين من الصف الثالث أكثر من لاعبي الصف الثاني. اكتب نظام متباينات يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.



38) إدارة الوقت: يستثمر رامي وقت فراغه في تلاوة القرآن الكريم وممارسة الرياضة. فإذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز 20 ساعة أسبوعيًّا، ويقضي من 4 إلى 10 ساعات منها في ممارسة الرياضة، ولا يقل زمن تلاوته للقرآن الكريم عن 10 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة. فاكتب نظام متباينات خطية يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

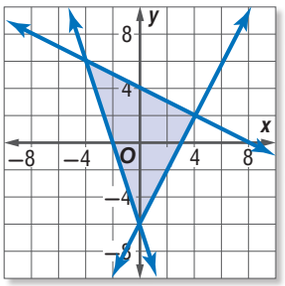
39) مسألة مفتوحة: اكتب نظامًا من متباينتين على أن يكون الحل:

a) في الربع الثالث فقط.

b) غير موجود.

c) واقعًا على مستقيم.

d) نقطة واحدة فقط.



40) تحدٍّ: في الشكل المجاور، اكتب نظام المتباينات التي تمثل المنطقة المظللة حلًّا له.

41) تبرير: هل الجملة الآتية صحيحة أم غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة فأعط مثالًا مضادًّا.

"النظام المكون من متباينتين خطيتين إما أن يكون ليس له حل أو أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول".

42) اكتب: وضِّح بخطوات مكتوبة طريقة تحديد منطقة التظليل عند حل نظام متباينات خطية بيانيًّا.

الربط مع الحياة

حثَّ الإسلام على استثمار الوقت والحرص عليه، قال صلى الله عليه وسلم: "لا تزولُ قدَما عبدٍ يومَ القيامةِ حتَّى يُسألَ عن عمرِهِ فيما أفناهُ، وعن علمِهِ فيمَ فعلَ، وعن مالِهِ من أينَ اكتسبَهُ وفيمَ أنفقَهُ، وعن جسمِهِ فيمَ أبلاهُ".

[رواه الترمذي].

تدريب على اختبار

43) يبين الجدول المجاور العلاقة بين x و y. فأيُّ المعادلات الآتية تمثل هذه العلاقة؟

x	y
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

A $y = 3x - 2$

B $y = 3x + 2$

C $y = 4x + 1$

D $y = 4x - 1$

44) إجابة قصيرة: إذا كانت $5y = 6z$, $3x = 2y$، فما قيمة x بدلالة z؟

مراجعة تراكمية

مثِّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-1)

45) $x + y \le 6$ **46)** $4x - 3y < 10$ **47)** $5x + 7y \ge -20$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 3-1)

48) $f(x) = |x - 3|$ **49)** $h(x) = [x] - 5$

إذا كان $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = 2x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس 2-1)

50) $g(-2)$ **51)** $f(-0.25)$ **52)** $g(-0.75)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

توسع
1-5 معمل الحاسبة البيانية
أنظمة المتباينات الخطية

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية لحل أنظمة متباينات خطية.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل أنظمة متباينات خطية بيانيًّا.

مثال حل نظام من متباينتين خطيتين

استعمل الحاسبة البيانية لحل النظام المكوَّن من المتباينتين الآتيتين:

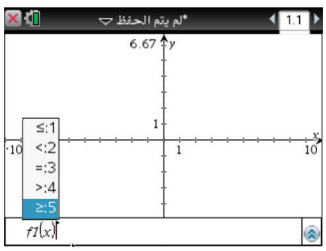
$y \geq -3x + 4$

$y \leq 2x - 1$

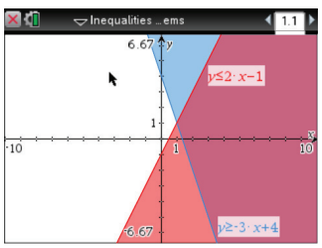
الخطوات:



- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on) .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد (مستعملًا الأسهم)
- من الشاشة الظاهرة اختر 2:اضافة تطبيق الرسوم البيانية (مستعملًا).



- اكتب المتباينة الأولى $y \geq -3x + 4$ ، وذلك بالضغط على مفتاح (del)، ثم اختر الإشارة ≥ مستعملًا الأسهم فتظهر $y \geq$ ، ثم أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط (enter) .
- اكتب المتباينة الثانية $y \leq 2x - 1$ بالضغط على المفتاح (tab) ثم المفتاح (del)، ثم اختر الإشارة ≤ مستعملًا الأسهم فتظهر $y \leq$ ، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط (enter) ، فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.



[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

لاحظ نمط التظليل فوق المستقيم $y = -3x + 4$ ، وتحت المستقيم $y = 2x - 1$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع نمطَي التظليل، وهي المنطقة التي تحوي جميع النقاط التي تحقق النظام $y \geq -3x + 4$, $y \leq 2x - 1$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل نظام من متباينتين مما يأتي:

1) $y \geq 3$ ، $y \leq -x + 1$

2) $y \geq -4x$ ، $y \leq -5$

3) $y \geq 2 - x$ ، $y \leq x + 3$

4) $y \geq 2x + 1$ ، $y \leq -x - 1$

5) $2y \geq 3x - 1$ ، $3y \leq -x + 7$

6) $y + 5x \geq 12$ ، $y - 3 \leq 10$

7) $5y + 3x \geq 11$ ، $3y - x \leq -8$

8) $10y - 7x \geq -19$ ، $7y - 5x \leq 11$

9) $\frac{1}{6}y - x \geq -3$ ، $\frac{1}{5}y + x \leq 7$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2024 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل
Optimization with Linear Programming

فيما سبق:
درست حل أنظمة متباينات خطية بيانيًا.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة الحل.
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات:
القيود constraints
البرمجة الخطية linear programming
محدودة bounded
غير محدودة unbounded
الحل الأمثل optimize

لماذا؟
يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة في اليوم الواحد من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالًا
كبير	800	1700	70 ريالًا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

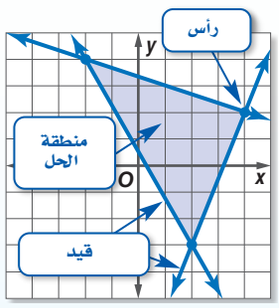
هناك **قيود** إضافية على إنتاج المصنع ناجمة عن الطلب والشحن وكفاءة المصنع. وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه المصانع في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه الأوضاع يمكن التعامل معها عادة باستعمال البرمجة الخطية.

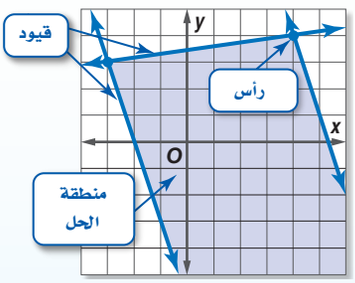
البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًا، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

مفهوم أساسي منطقة الحل

أضف إلى مطويتك



إذا كانت منطقة الحل **محدودة** (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل.



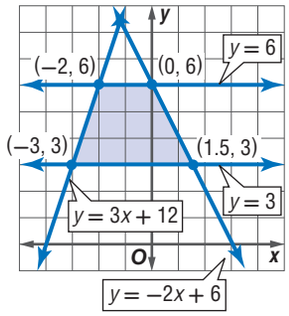
إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة**، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 1 منطقة الحل المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$
$$y \le 3x + 12$$
$$y \le -2x + 6$$
$$f(x, y) = 4x - 2y$$



الخطوة 1: مثّل المتباينات بيانيًّا، وحدّد إحداثيات الرؤوس.

الخطوة 2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	4x − 2y	f(x, y)	
(−3, 3)	4(−3) − 2(3)	−18	
(1.5, 3)	4(1.5) − 2(3)	0	← قيمة عظمى
(0, 6)	4(0) − 2(6)	−12	
(−2, 6)	4(−2) − 2(6)	−20	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة (1.5, 3)، والقيمة الصغرى للدالة تساوي 20− وتكون عند النقطة (2, 6−).

تحقق من فهمك

(1A) $-2 \le x \le 6$
$1 \le y \le 5$
$y \le x + 3$
$f(x, y) = -5x + 2y$

(1B) $-6 \le y \le -2$
$y \le -x + 2$
$y \le 2x + 2$
$f(x, y) = 6x + 4y$

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x , y . وتُقرأ f لـ x وَ y .

إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ مفتوحة وممتدة، فإنها تكون غير محدودة.

تنبيه

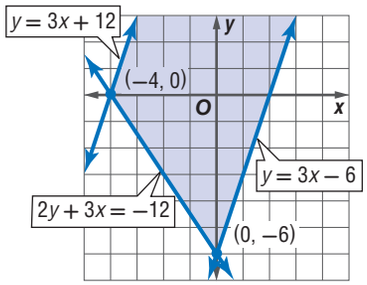
القيمة العظمى والصغرى

لا تفترض عدم وجود قيم عظمى أو صغرى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدِّد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.

مثال 2 منطقة الحل غير المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$2y + 3x \ge -12 \text{ , } y \le 3x + 12 \text{ , } y \ge 3x - 6 \text{ , } f(x, y) = 9x - 6y$$



مثّل المتباينات بيانيًّا، وأوجد قيمة الدالة عند كل رأس؛ لأن القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – تكون عند الرؤوس.

(x, y)	9x − 6y	f(x, y)
(−4, 0)	9(−4) − 6(0)	−36
(0, −6)	9(0) − 6(−6)	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة (6−, 0)، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي (8, 0) وتُعطي القيمة 48− للدالة وهي أقل من 36−.

تحقق من فهمك

(2A) $y \le 8$
$y \ge -x + 4$
$y \le -x + 10$
$f(x, y) = -6x + 8y$

(2B) $y \ge x - 9$
$y \le -4x + 16$
$y \ge -4x - 4$
$f(x, y) = 10x + 7y$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إيجاد الحل الأمثل: يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكنك الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.

الخطوة 3 مثل نظام المتباينات بيانيًّا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.

الخطوة 6 عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.



الربط مع الحياة

جاوز عدد مصانع الألبسة الجاهزة بالمملكة 300 مصنع، تغطي بإنتاجها المتميز نحو ثلث احتياجات السوق المحلية.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

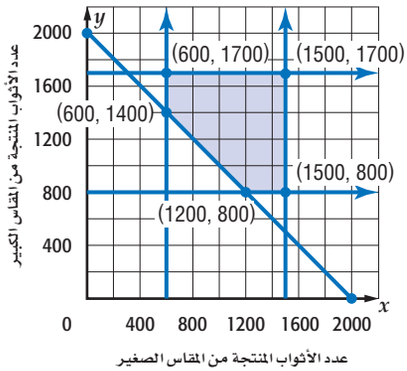
أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي يتطلب إنتاجها من المقاسين، لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

الخطوة 1: افرض أن x هي عدد الأثواب المنتجة من المقاس الصغير. y هو عدد الأثواب المنتجة من المقاس الكبير.

الخطوة 2:

$$600 \le x \le 1500$$
$$800 \le y \le 1700$$
$$x + y \ge 2000$$

الخطوتان 3 و 4: مثّل نظام المتباينات بيانيًّا كما في الشكل المجاور، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل.



الخطوة 5: الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي:

$$f(x, y) = 55x + 70y.$$

الخطوة 6:

(x, y)	55x + 70y	f(x, y)	
(600, 1700)	55(600) + 70(1700)	152000	
(600, 1400)	55(600) + 70(1400)	131000	
(1500, 1700)	55(1500) + 70(1700)	201500	← قيمة عظمى
(1500, 800)	55(1500) + 70(800)	138500	
(1200, 800)	55(1200) + 70(800)	122000	← قيمة صغرى

إرشادات للدراسة

منطقية الحل

اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

الخطوة 7: يجب إنتاج 1200 ثوبٍ من المقاس الصغير، و 800 ثوبٍ من المقاس الكبير لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

تحقق من فهمك

3) مجوهرات: تصوغ أسماء من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالًا. وأجرة صياغة السوار 30 ريالًا، وصاغت في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليها صياغتها لتحصل على أكبر أجر؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

المثالان 1 , 2 مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

1) $y \le 5$, $x \le 4$, $y \ge -x$, $f(x, y) = 5x - 2y$

2) $y \le -3x + 6$, $-y \le x$, $y \le 3$, $f(x, y) = 8x + 4y$

3) $y \ge -3x + 2$, $9x + 3y \le 24$, $y \ge -4$, $f(x, y) = 2x + 14y$

4) $-2 \le y \le 6$, $3y \le 4x + 26$, $y \le -2x + 2$, $f(x, y) = -3x - 6y$

5) $-3 \le y \le 7$, $4y \ge 4x - 8$, $6y + 3x \le 24$, $f(x, y) = -12x + 9y$

6) $y \le 2x + 6$, $y \ge 2x - 8$, $y \ge -2x - 18$, $f(x, y) = 5x - 4y$

مثال 3

7) ثقافة مالية: يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات 200 ساعة على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة 90 ساعة على الأكثر، ويبين الجدول الآتي عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج وضبط جودة نوعين من الغسالات.

الزمن اللازم لتصنيع الغسالة

	قسم الإنتاج	قسم ضبط الجودة
النوع الأول	5 ساعات	ساعتان
النوع الثاني	4 ساعات	ساعتان

a) اكتب نظام متباينات يمثّل هذا الموقف.

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا، وحدّد منطقة الحل.

c) حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

d) إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 ريالًا، ومن النوع الثاني 50 ريالًا، فاكتب دالة تمثل الربح الكلي لكلا النوعين.

e) ما عدد الغسالات التي يجب تصنيعها من كل نوع للحصول على أكبر ربح ممكن؟ وما هو هذا الربح؟

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

8) $-8 \le y \le -2$, $y \le x$, $y \le -3x + 10$, $f(x, y) = 5x + 14y$

9) $-3 \le x \le 2$, $y \ge -2x - 6$, $4y \le 2x + 32$, $f(x, y) = -4x - 9y$

10) $x + 4y \ge 2$, $2x + 4y \le 24$, $2 \le x \le 6$, $f(x, y) = 6x + 7y$

11) $x \ge -6$, $y + x \le -1$, $2x + 3y \ge -9$, $f(x, y) = -10x - 12y$

12) $x \ge -8$, $3x + 6y \le 36$, $2y + 12 \ge 3x$, $f(x, y) = 10x - 6y$

13) $y \ge |x - 2|$, $y \le 8$, $8y + 5x \le 49$, $f(x, y) = -5x - 15y$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2024 - 1445

14) $y \le x + 4$
$y \ge x - 4$
$y \le -x + 10$
$y \ge -x - 10$
$f(x, y) = -10x + 9y$

15) $-4 \le x \le 8$
$-8 \le y \le 6$
$y \ge x - 6$
$4y + 7x \le 31$
$f(x, y) = 12x + 8y$

16) $y \ge |x + 1| - 2$
$0 \le y \le 6$
$-6 \le x \le 2$
$x + 3y \le 14$
$f(x, y) = 5x + 4y$

مثال 3

17) صناعة: ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يباع النوع الأول بسعر 25 ريالًا، أما النوع الثاني فيباع بسعر 35 ريالًا. فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يوميًّا، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 وحدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة اللازم إنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟

18) طلاء: إذا كان الوقت المتاح لمعاذ لطلاء 45 جدارًا وسقفًا متساوون في المساحة في أحد المباني هو 20 يومًا، ويستطيع معاذ طلاء 2.5 جدار، أو سقفين في اليوم الواحد.

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثّل هذا الموقف.

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا، وحدِّد منطقة الحل وإحداثيات رؤوسها.

c) إذا كان معاذ يتقاضى 26 ريالًا عن طلاء الجدار، و 30 ريالًا عن طلاء السقف، فاكتب دالة تمثل المبلغ الكلي الذي سيتقاضاه.

d) ما عدد الجدران والأسقف التي عليه طلاؤها ليتقاضى أكبر مبلغ؟ وما هو هذا المبلغ؟



الربط مع الحياة

صدر نظام مكافحة المخدرات في المملكة العربية السعودية عام 1426هـ.

19) عقوبات: اكتب العبارة التالية باستخدام المتباينات، ثم مثلها بيانيًّا، وحدد مجموعة من الحلول الممكنة وفسرها.

«يُعاقب بالسجن مدة لا تقل عن خمس سنوات ولا تزيد عن خمس عشرة سنة، وبغرامة من ألف ريال إلى خمسين ألف ريال؛ كل من حاز مادة مخدرة أو باعها أو اشتراها أو نقلها».



الربط مع الحياة

تدوير المواد يحمي الإنسان، ويقلل الاستهلاك، ويرشد الطاقة، ويقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

20) شحن: يشحن مزارع منتجاته بالتعاون مع شركة شحن مختصة، وذلك في حاويات مبردة تبلغ حمولة الواحـــدة منها 4200 kg، وحجم الحيّز الذي توضع فيه البضائع بداخلها $480\ ft^3$، وتوضع المنتجات في أثناء الشحن في صناديق بمقاسين؛ صغيرة حجمها $3\ ft^3$ وتزن 25 kg، وكبيرة حجمها $5\ ft^3$، وتزن 50 kg، وأجرة شركة الشحن هي 5 ريالات عن كل صندوق من المقاس الصغير، و 8 ريالات عن كل صندوق من المقاس الكبير.

a) جد عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين لتكون الأجرة أكبر ما يمكن.

b) ما أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن؟

21) إعادة التدوير: يقوم مصنع بإعادة تدوير ما لايزيد على 1200 طن من البلاستيك شهريًّا لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لايقل عن 300 طن في صنع الحاويات الصغيرة وما لايقل عن 450 طنًّا في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحًا قدره 175 ريالًا لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 200 ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحاويات لتحقيق ذلك الربح؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

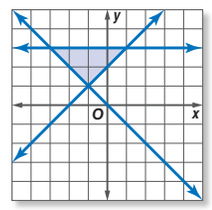
مسائل مهارات التفكير العليا

22) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظام متباينات خطية على أن تكون منطقة الحل محدودة وتقع في الربع الرابع فقط ومساحتها 20 وحدة مربعة.

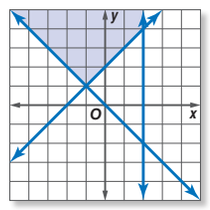
23) **تحد:** جد مساحة المنطقة المحدودة بالمتباينات : $y \geq |x| - 3, y \leq -|x| + 3, x \geq |y|$.

24) حدِّد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضِّح إجابتك.

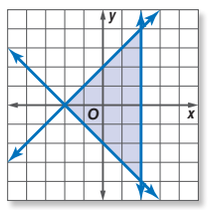
(a



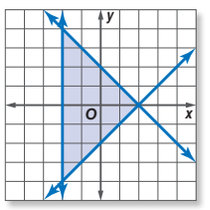
(b



(c



(d



25) **تبرير:** حدِّد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

"في المنطقة غير المحدودة لا يكون للدالة قيمة عظمى وقيمة صغرى في الوقت نفسه"

تدريب على اختبار

26) حصل عامل على مبلغ 1950 ريالًا أجرة تبليط مساحة من الأرضيات والجدران في أحد البيوت، فإذا كانت أجرة تبليط المتر المربع من الأرضيات 12 ريالًا، وأجرة تبليط المتر المربع من الجدران 15 ريالًا وكان عدد أمتار بلاط الأرضيات يقل عن 3 أمثال عدد أمتار بلاط الجدران بـ $16m^2$، فأي أنظمة المعادلات الآتية تمثّل هذا الموقف؟

A $x + y = 1950$ ، $3x = y$

B $12x + 15y = 1950$ ، $x + 16 = 3y$

C $2x + 3y = 15$ ، $x + y = 12$

D $x - y = 1950$ ، $12x + 15y = 3$

27) **هندسة:** أيٌّ مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16$, $y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.

مراجعة تراكمية

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 5-1)

28) $3x + 2y \geq 6$ ، $4x - y \geq 2$

29) $4x - 3y < 7$ ، $2y - x < -6$

30) $3y \leq 2x - 8$ ، $y \geq \frac{2}{3}x - 1$

حدّد مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد فيما يأتي: (الدرس 1-1)

31) -7

32) $-\frac{1}{3}$

33) $\sqrt{3}$

الفصل 1

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

خصائص الأعداد الحقيقية (الدرس 1-1)

- تُقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعتين، هما: مجموعة الأعداد النسبية (Q)، ومجموعة الأعداد غير النسبية (I). أما مجموعة الأعداد النسبية فتحوي: مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، ومجموعة الأعداد الكلية (W)، ومجموعة الأعداد الطبيعية (N).

العلاقات والدوال (الدرس 2-1)

- الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

دوال خاصة (الدرس 3-1)

- الدالة المتعددة التعريف: هي الدالة التي تكتب باستعمال أكثر من عبارة.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا (الدرس 4-1)

- يمكنك تمثيل المتباينة باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: مثّل المعادلة الخطية المرتبطة بها، وحدد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا.

الخطوة 2: اختر نقطة لا تقع على حد المتباينة واختبرها إن كانت تحقق المتباينة أم لا.

الخطوة 3: إذا كانت النقطة تحقق المتباينة، فظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة. وإلّا فظلّل المنطقة الأخرى.

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا (الدرس 5-1)

- يمكن إيجاد حل نظام متباينات خطية عن طريق تمثيل المتباينات بيانيًا وإيجاد منطقة الحل، وهي المنطقة المشتركة بين حلول متباينات النظام، وإذا لم يكن هناك منطقة مشتركة فإن مجموعة الحل هي ∅.

البرمجة الخطية والحل الأمثل (الدرس 6-1)

- إيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة في منطقة على المستوى الإحداثي يحددها نظام متباينات يمثل قيودًا على الدالة.
- إيجاد الحل الأمثل يعني إيجاد السعر أو الكمية التي تجعل الربح أكبر ما يمكن، أو التكلفة أقل ما يمكن.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات

الأعداد الحقيقية (14)
الأعداد النسبية (14)
الأعداد غير النسبية (14)
الأعداد الصحيحة (14)
الأعداد الكلية (14)
الأعداد الطبيعية (14)
الدالة المتباينة (20)
العلاقة المنفصلة (20)
العلاقة المتصلة (20)
اختبار الخط الرأسي (20)
المتغير المستقل (23)
المتغير التابع (23)
رمز الدالة (23)
الدالة المتعددة التعريف (27)
الدالة المتعددة التعريف
الخطية (28)
الدالة الدرجية (28)
دالة أكبر عدد صحيح (28)
دالة القيمة المطلقة (28)
المتباينة الخطية (34)
منطقة الحل (34)
الحد (34)
نظام المتباينات الخطية (39)
القيود (46)
البرمجة الخطية (46)
محدودة (46)
غير محدودة (46)
الحل الأمثل (48)

اختبار المفردات

حدد إذا كانت كل من العبارتين الآتيتين صحيحة أم خاطئة؟

1) $\sqrt{12}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية.

2) تحتوي مجموعة الأعداد النسبية على الكسور العشرية المنتهية والدورية.

اختر المصطلح المناسب بين الأقواس لإكمال كل جملة فيما يأتي:

3) تكون الدالة (منفصلة، متباينة) إذا كان كل عنصر في المجال مرتبطًا بعنصر مختلف في المدى، على أن لا يكون لأكثر من عنصر في المجال الصورة نفسها.

4) (مجال، مدى) العلاقة هو مجموعة إحداثيات x للأزواج المرتبة التي تكوّن العلاقة.

5) تُسمى الدالة التي تكتب باستعمال تعبيرين أو أكثر دالة (خطية، متعددة التعريف).

أكمل كل جملة فيما يأتي بالمصطلح المناسب:

6) _____ هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة تحت شروط معينة يُعبّر عنها بنظام من المتباينات.

7) إيجاد _____ يعني إيجاد السعر الأفضل أو التكلفة الأنسب باستعمال البرمجة الخطية.

8) تُسمى منطقة الحل المفتوحة _____.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مراجعة الدروس

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية (الصفحات: 14-19)

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد ممّا يأتي :

9) $1.\overline{3}$ **10)** $\sqrt{4}$ **11)** $-\frac{3}{4}$

بسّط كل عبارة مما يأتي :

12) $4x - 3y + 7x + 5y$

13) $2(a + 3) - 4a + 8b$

14) $4(2m + 5n) - 3(m - 7n)$

15) مال: اشترى سعد 3 شطائر بسعر 3.5 ريالات للشطيرة الواحدة، و 3 علب عصير بسعر 2.5 ريال للعلبة الواحدة.

a) استعمل خاصية التوزيع لتكتب عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي دفعه سعد.

b) أوجد المبلغ الذي دفعه سعد باستعمال خاصية التوزيع.

مثال 1

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{50}$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مثال 2

بسّط العبارة : $-4(a + 3b) + 5b$

$-4(a + 3b) + 5b = -4(a) + -4(3b) + 5b$ خاصية التوزيع

$= -4a - 12b + 5b$ اضرب

$= -4a - 7b$ بسّط

1-2 العلاقات والدوال (الصفحات: 20-25)

حدد مجال كلّ علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟

16) $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$

17) $\{(-3, 0), (0, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$

18) $\{(-4, 1), (3, 3), (1, 1), (-2, 5), (3, -4)\}$

19) $\{(7, -4), (5, -2), (3, 0), (1, 2), (-1, 4)\}$

إذا كانت $f(x) = -3x + 2$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

20) $f(4)$ **21)** $f(-3)$

22) $f(0)$ **23)** $f(y)$

24) $f(-a)$ **25)** $f(2w)$

26) مناسبات: تتقاضى مؤسسة لتجهيز المناسبات 100 ريالٍ عن توصيل اللوازم لمكان المناسبة، و 4 ريالات أجرة يومية عن كل كرسي. ويمكن تمثيل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند استئجار x كرسيًّا بالمعادلة: $y = 100 + 4x$. أوجد مجال هذه المعادلة ومداها، ثم حدد ما إذا كانت المعادلة دالة أم لا، وهل هي متصلة أم منفصلة؟

مثال 3

حدد مجال العلاقة

$\{(-4, 3), (-1, 0), (-2, 4), (3, -1), (2, 6)\}$ ومداها. ثم حدد إن كانت تمثّل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟

المجال: $\{-4, -2, -1, 2, 3\}$

المدى: $\{-1, 0, 3, 4, 6\}$

كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، مما يعني أن العلاقة تمثل دالة. العناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المدى، إذًا الدالة متباينة.

مثال 4

إذا كانت $f(x) = 4x - 3$، فأوجد $f(-2)$.

$f(-2) = 4(-2) - 3$ عوض عن x بـ -2

$= -8 - 3$ اضرب

$= -11$ بسّط

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

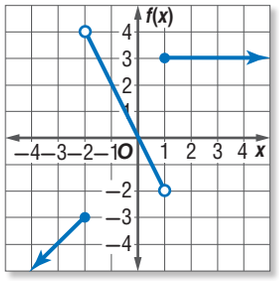
1-3 دوال خاصة (الصفحات: 27-32)

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها:

27) $f(x) = \begin{cases} -2x\,, x \le -1 \\ x + 1\,, -1 < x < 3 \\ x\,, x \ge 3 \end{cases}$

28) $f(x) = \begin{cases} -3\,, x < -1 \\ 4x - 3\,, -1 \le x \le 3 \\ x\,, x > 3 \end{cases}$

29) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



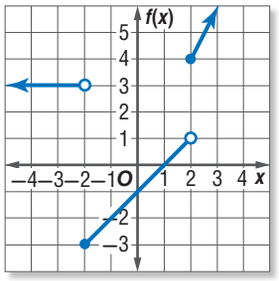
مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها:

30) $f(x) = [x] + 2$

31) $f(x) = [x + 3]$

مثال 5

اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



دالة الجزء الأيسر من التمثيل البياني هي $f(x) = 3$. الدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(-2, 3)$، تعني أن الدالة الخطية معرّفة عندما $x < -2$.

دالة الجزء الأوسط من التمثيل البياني هي $f(x) = x - 1$. وتعني كل من الدائرة المظلّلة عند النقطة $(-2, -3)$ والدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(2, 1)$، أن الدالة معرّفة عندما $-2 \le x < 2$.

دالة الجزء الأيمن من التمثيل البياني هي $f(x) = 2x$. والدائرة المظلّلة عند النقطة $(2, 4)$، تعني أن الدالة معرّفة عندما $x \ge 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3\,, x < -2 \\ x - 1\,, -2 \le x < 2 \\ 2x\,, x \ge 2 \end{cases}$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا (الصفحات: 38-34)

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

32) $x - 3y < 6$

33) $y \geq 2x + 1$

34) $2x + 4y \leq 12$

35) $y > -3x - 5$

36) $y > |2x|$

37) $y \geq |2x - 2|$

38) $y + 3 < |x + 1|$

39) $2y \leq |x - 3|$

40) شراء: وفّر بندر 46 ريالًا لشراء مجموعة من الدفاتر، والأقراص المدمجة، فإذا كان سعر الدفتر الواحد 4 ريالات، وسعر القرص المدمج 3 ريالات، اكتب متباينة تمثّل عدد الدفاتر والأقراص المدمجة التي يمكن شراؤها، ثم مثّلها بيانيًّا.

مثال 6

مثّل المتباينة $x - 2y > 6$ بيانيًّا.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة $>$ ، فإن حد المتباينة يكون متقطعًا، مثّل بيانيًّا المعادلة المرتبطة $x - 2y = 6$.

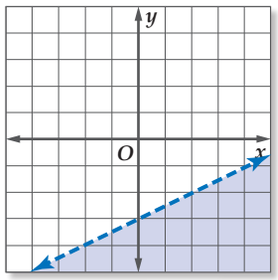
اختبر النقطة $(0, 0)$ التي لا تقع على حد المتباينة

$x - 2y > 6$

$0 - 2(0) \stackrel{?}{>} 6$

$0 > 6$ ✗

ظلِّل المنطقة التي لا تحوي $(0, 0)$



1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا (الصفحات: 44-39)

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا :

41) $y < 2x - 3$
$y \geq 4$

42) $|y| > 2$
$x > 3$

43) $y \geq x + 3$
$2y \leq x - 5$

44) $y > x + 1$
$x < -2$

45) مجوهرات: أمضى صائغ مجوهرات ما لا يزيد على 3 ساعات في صياغة الخواتم. فإذا كان الزمن الذي يتطلبه تجهيز المعدات 15 دقيقة، والزمن الذي تتطلبه صياغة الخاتم الواحد 25 دقيقة، فاكتب نظام متباينات يصف الموقف، ومثّله بيانيًّا.

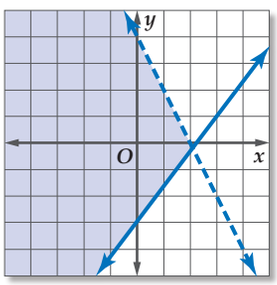
مثال 7

حل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$y \geq \frac{3}{2}x - 3$

$y < 4 - 2x$

منطقة الحل هي المنطقة التي كل نقطة من نقاطها تحقق كلتا المتباينتين، وهي المنطقة المظلّلة في الشكل أدناه.



1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل (الصفحات: 51-46)

46) تنسيق أزهار: يعمل جميل منسقًا للأزهار، ويقوم بتنسيق نوعين من باقات الأزهار. يحتاج النوع الأول منها إلى 18 دقيقة، والنوع الثاني إلى 10 دقائق. ولا يزيد عدد الباقات التي ينتجها أسبوعيًّا من النوع الثاني عن ضعف عدد باقات النوع الأول. فإذا كان جميل يعمل مدة لا تزيد على 40 ساعة أسبوعيًّا وكان ربحه في تنسيق الباقة من النوع الأول 10 ريالات، ومن النوع الثاني 25 ريالًا. فحدد عدد الباقات التي يجب عليه تنسيقها من كل نوع أسبوعيًّا ليحصل على أكبر ربح.

47) صناعة: ينتج مصنع نوعين من الأحذية على مرحلتين، ويحتاج الحذاء من النوع الأول إلى ساعتين في المرحلة الأولى وساعة واحدة في المرحلة الثانية، ويحقق ربحًا قدره 20 ريالًا. أما الحذاء من النوع الثاني فيحتاج إلى ساعة واحدة في المرحلة الأولى و 3 ساعات في المرحلة الثانية ويحقق ربحًا قدره 15ريالًا. فإذا كان مجموع ساعات العمل اليومي لموظفي المرحلة الأولى لا يزيد على 40 ساعة ولا يزيد على 60 ساعة لموظفي المرحلة الثانية، فما أكبر ربح يمكن أن تحققه الشركة يوميًّا؟ وما عدد الأحذية من كل نوع الذي يحقق هذا الربح؟

مثال 8

زراعة: يزرع فيصل ما لا يزيد على 300 شتلة من نوعين من الأشجار في مزرعته التي مساحتها $5184\ m^2$، حيث تحتاج الشجرة الواحدة من النوع (A) إلى مساحة $6\ m^2$، ومن النوع (B) إلى $24\ m^2$، وذلك لتوفير مسافة كافية بين الأشجار. إذا كان سعر الشتلة الواحدة من النوع (A) 8 ريالات، وسعر الشتلة الواحدة من النوع (B) 12 ريالًا. فما عدد الشتلات من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟

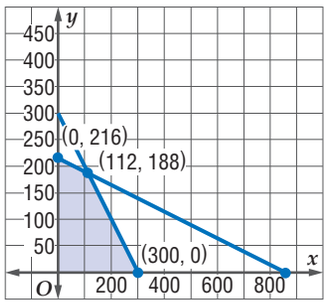
افرض أن x هي عدد الشتلات من النوع (A)، و y هي عدد الشتلات من النوع (B).

$$x \geq 0, y \geq 0$$
$$6x + 24y \leq 5184$$
$$x + y \leq 300$$

مثّل المتباينات بيانيًّا، ولاحظ أن النقاط (0, 0), (300, 0), (0, 216), (112, 188) تمثل رؤوس منطقة الحل .

دالة التكلفة هي : $f(x, y) = 8x + 12y$.

القيمة 3152 ريالًا هي القيمة العظمى للتكلفة وتحصل عند النقطة (112, 188). ولذلك إذا زرع فيصل 112 شتلة من النوع (A)، و 188 شتلة من النوع (B) فإن التكلفة تكون أكبر ما يمكن.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار الفصل

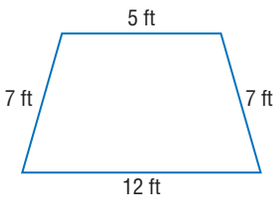
1) بسّط العبارة: $-4(3a+b)-2(a-5b)$.

2) **اختيار من متعدد:** إذا كان $3m+5=23$، فما قيمة $2m-3$؟

A 105 **C** 9

B $\frac{47}{3}$ **D** 6

3) **بستنة:** يريد عبد الله تصميم 3 أحواض للورود في حديقة منزله، فأحاط كلًّا منها بسياج. فإذا كانت الأحواض الثلاثة متطابقة ولها الشكل المجاور، فكم قدمًا من السياج يحتاج إليه لإحاطة الأحواض الثلاثة؟



4) إذا كان $y=-2$, $x=\frac{2}{3}$ فأوجد قيمة $\frac{3(x+y)}{4xy^2}$.

5) حدد مجال العلاقة المبينة في الجدول الآتي ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثّل دالة أم لا، وهل هي متباينة أم لا؟

x	y
−2	3
4	−1
3	2
6	3

إذا كانت $f(x)=-2x+3$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

6) $f(-4)$ **7)** $f(3y)$

8) **اختيار من متعدد:** إذا كانت تكلفة إنتاج x فطيرة جبن في أحد المخابز يُعبر عنها بالدالة $C(x)=6+0.75x$، فأوجد تكلفة إنتاج 20 فطيرة.

A 13.5 ريالاً **C** 21 ريالاً

B 28.61 ريالاً **D** 38.4 ريالاً

9) مثّل الدالة $f(x)$ بيانيًّا.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<-2\\ x+2, & -2\le x\le 2\\ 5, & x>2\end{cases}$$

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

10) $y\ge 4x-1$ **11)** $2x+6y<-12$

حلّ كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

12) $x+y\le 4$, $y\ge x$

13) $2x+3y>12$, $3x-y<21$

14) $x-y>0$, $4+y\le 2x$

15) $2y-5x\le 6$, $4x+y<-4$

16) **اختيار من متعدد:** استأجر خالد سيارة ليوم واحد من إحدى الشركات، فدفع 100 ريال أجرة يومية وريالًا واحدًا عن كل كيلومتر تقطعه السيارة بعد قطعها مسافة 200 كيلومتر، أما سعيد فاستأجر سيارة من شركة أخرى، ليوم واحد أيضًا فدفع 50 ريالًا أجرة يومية وريالين عن كل كيلومتر تقطعه السيارة بعد قطعها مسافة 200 كيلومتر. فما عدد الكيلومترات التي تجعل قيمة الاستئجار من الشركتين متساوية؟

A 292 **C** 304

B 250 **D** 275

17) **نجارة:** تصنع ورشة نجارة طاولات ومقاعد ثم تقوم بطلائها. ويبين الجدول الآتي الزمن الذي تتطلبه صناعة وطلاء كل من الطاولة والمقعد:

المنتج	زمن الصناعة بالساعات	زمن الطلاء بالساعات
مقعد	3	0.5
طاولة	2	1

إذا كان مجموع ساعات عمل فنيي صناعة المنتجات 108 ساعات يوميًّا، ومجموع ساعات عمل فنيي دهان المنتجات 20 ساعة يوميًّا، وكان ربح الورشة من الطاولة الواحدة 35 ريالًا، ومن المقعد الواحد 25 ريالًا فكم طاولة ومقعدًا يجب صنعهما يوميًّا ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

a) بفرض أن عدد الطاولات t، وعدد الكراسي c، اكتب نظام متباينات يمثل الموقف.

b) مثّل منطقة الحل بيانيًّا.

c) جد عدد الطاولات وعدد المقاعد التي يجب صنعها ليكون الربح أكبر ما يمكن. وما أكبر ربح؟

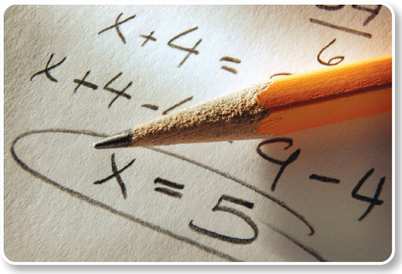
مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، وحدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

18) $-2x+y\le 5$, $4x+y\le 5$, $-3\le y\le 5$

$f(x,y)=4x-3y$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة



تتطلب منك الأسئلة ذات الإجابات القصيرة أن تقدم لها حلًّا، متضمنًا الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة وتُحدَّد درجاتها باستعمال سلالم التقدير.

وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
	المعايير	الدرجة
درجة كاملة	الإجابة صحيحة مدعمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	2
درجة جزئية	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. • الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	1 1
لا يستحق درجة	لم يُقدم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	0

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابة القصيرة

خطوة 1

اقرأ المسألة جيدًا؛ كي تفهم الشيء الذي تحاول حلَّه.

- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

خطوة 2

ضع خطّة وحل المسألة.

- فسّر تبريرك أو اعرض الطريقة التي ستتبعها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملًا مبيّنًا الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في حل السؤال، واكتب خطوات الحل.

قدّمت شركتا اتصالات عروضًا للجمهور على النحو التالي: قيمة الاشتراك الشهري للشركة A هي 14.5 ريالًا مضافًا إليه 0.05 ريال عن كل دقيقة اتصال، وقيمة الاشتراك الشهري للشركة B هو 20.00 ريالًا مضافًا إليه 0.04 ريال عن كل دقيقة اتصال. أوجد عدد الدقائق التي يمكن أن يستخدمها المشترك، بحيث يدفع المبلغ نفسه شهريًّا لكلا الشركتين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اقرأ السؤال بعناية؛ لديك معلومات عن شركتين مختلفتين للاتصالات، والعروض للاشتراكات الشهرية المقدمة من كلٍّ منها. حيث إن قيمة الفاتورة تعتمد على قيمةٍ ثابتةٍ للاشتراك الشهري، بالإضافة إلى مبلغ متغير يعتمد على عدد دقائق الاتصال، والمطلوب منك تحديد عدد الدقائق التي يمكن استخدامها من قبل المشترك لكلٍّ من الشركتين بحيث يدفع المبلغ نفسه، ويمكنك تكوين نظام معادلتين آنيتين وحله.

إجابة تستحق الدرجة الكاملة (2).

كوّن نظامًا من معادلتين، وحُلّه.

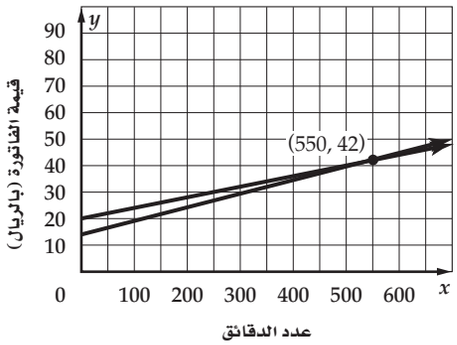
قيمة الفاتورة الشهرية = قيمة الاشتراك الشهري + تكلفة الدقيقة × عدد الدقائق.

افترض أن y = قيمة الفاتورة الشهرية، و x = عدد الدقائق المستعملة شهريًّا.

(الشركة A) $y = 14.5 + 0.05x$

(الشركة B) $y = 20 + 0.04x$

حل النظام بيانيًّا.



حَل النظام هو (550, 42) ، أي أن المشترك سيدفع 42 ريالًا إذا اتصل 550 دقيقة شهريًّا، سواءٌ أكان مشتركًا في الشركة A أو B .

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة، وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة، إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال، واكتب خطوات الحل:

1) اقترض عليٌّ ومحمود مبلغ 11000 ريال لشراء آلة زراعية لبدء مشروعهم التجاري لقص الحشائش في الحدائق، فإذا كانوا يتقاضون مبلغ 245 ريالًا أجرة من كل زبون لقص حشائش الحديقة الواحدة، ويدفعون 20.5 ريالًا بدل صيانة وثمنًا للمحروقات، فبعد كم حديقة سيبدؤون في تحقيق الربح.

2) يرغب خالد في شراء بعض الأدوات المدرسية بحيث لا يدفع أكثر من 50 ريالًا، فإذا كان ثمن المسطرة الواحدة 4.75 ريالات، وثمن القلم الواحد 6.5 ريالات، وأراد شراء قطعتين من كل نوع على الأقل، اكتب نظام المتباينات، ومثل منطقة الحل على المستوى الإحداثي. ثم أعط ثلاثة حلول مختلفة.

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$ ، فما قيمة $f(-3)$؟

A -7 **B** -1 **C** -6 **D** 4

2) يمكن حساب حجم المخروط الدائري القائم الذي ارتفاعه h وطول نصف قطر قاعدته r بضرب ثلث π في الارتفاع في مربع نصف قطر القاعدة. فأي المعادلات الآتية تمثل حجم المخروط المجاور؟



A $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ **B** $V = 3\pi r^3 h$ **C** $V = \frac{1}{3}\pi r h$ **D** $V = \frac{1}{3}\pi r h^2$

3) أي مجموعات الأعداد الآتية لا ينتمي إليها العدد 25-؟

A الأعداد الصحيحة

B الأعداد النسبية

C الأعداد الحقيقية

D الأعداد الكلية

4) مجال العلاقة الموضحة في الجدول الآتي هو:

x	y
-3	4
1	-1
2	0
6	-3

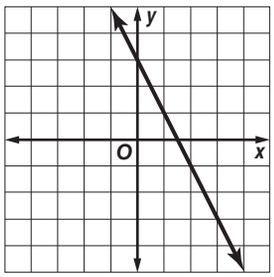
A {0, 1, 2, 4, 6}

B {-3, -1, 0, 4}

C {-3, 1, 2, 6}

D {-3, -1}

5) ميل المستقيم الممثل بيانيًّا على المستوى الإحداثي الآتي هو:

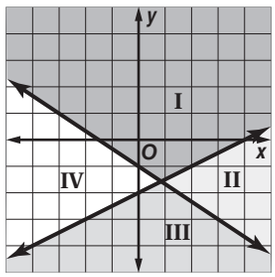


A -2 **B** $\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{1}{2}$ **D** 2

6) على الشكل أدناه منطقة حل النظام:

$y \leq \frac{1}{2}x - 2$

$y \leq -\frac{2}{3}x - 1$



A المنطقة I

B المنطقة II

C المنطقة III

D المنطقة IV

7) النقطة التي لا تمثل رأسًا لمنطقة حل النظام:

$x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 6$ هي:

A (0, 0) **B** (0, 3) **C** (0, 6) **D** (3, 0)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

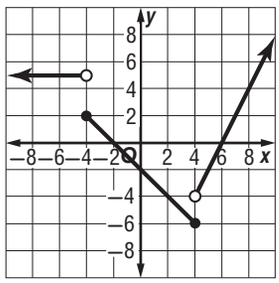
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

8) بسّط العبارة أدناه:

$-4(3a - b) + 3(-2a + 5b)$

9) اكتب معادلة الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



10) جد قيمة الدالة المتعددة التعريف في التمرين (9) عند $x = -3$.

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحلِّ:

11) مثّل المتباينة $y \geq |x| - 2$ بيانيًّا.

12) قدّر مدير مخبز الربح في كل قطعة كعك يبيعها بـ 0.45 ريال، ولكل فطيرة 0.5 ريال.

a) يأمل مدير المخبز أن يحصل على ربح لايقل عن 150 ريالًا من بيع الكعك والفطائر يوميًّا. افترض أن x عدد قطع الكعك المبيعة، و y عدد الفطائر المبيعة، اكتب متباينة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) إذا باع المخبز 180 قطعة كعك و 160 فطيرة في يوم ما، فهل سيحصل على الربح المطلوب؟ فسر إجابتك.

13) تُعد فاطمة نوعين من أطباق الحلوى؛ ويحتاج النوع الأول إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوبين من السكر، أما النوع الثاني فيحتاج إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوب واحد من السكر. فإذا كان لديها 40 كوبًا من الدقيق، و 15 كوبًا من السكر، وتكلفة إعداد طبق من النوع الأول 12 ريالًا، وطبق من النوع الثاني 8 ريالات.

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل عدد الأطباق التي يمكن لفاطمة إعدادها باستعمال الكميات المتوافرة.

b) مثّل نظام المتباينات الخطية الذي حصلت عليه في (a) بيانيًّا، واكتب إحداثيات نقاط رؤوس منطقة الحل.

c) اكتب دالة تمثل التكلفة .

d) ما عدد الأطباق من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟ وما التكلفة في هذه الحالة؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى ...	1-2	1-2	1-1	1-2	مهارة سابقة	1-5	1-6	1-1	1-3	1-3	1-4	1-6	1-6

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفصل 2

المصفوفات
Matrices



فيما سبق:

درستُ حل نظام من المعادلات .

والآن:

- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات.
- أحسب المحددات.
- أجد النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2.
- أستعمل المصفوفات لحل نظام من المعادلات.

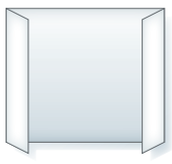
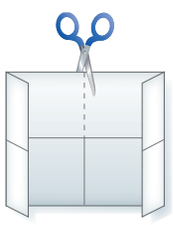
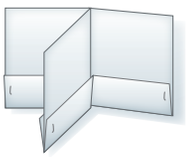
لماذا؟

تنظيم البيانات: غالبًا ما تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات، فمثلًا إذا نُظّم الطلاب المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلاب المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

المطويات منظم أفكار

المصفوفات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المصفوفات، مبتدئًا بورقة A4.

1. **اثنِ** حافة الورقة بعرض 2cm بموازاة الضلعين القصيرين.
2. **اطوِ** الورقة الناتجة إلى أرباع، ثم قصّ كما في الشكل.
3. **أعد** الطي، ثم ثبّت الجيوب مستعملًا الدبّاسة.
4. **اكتب** على كلِّ جيب عنوانًا لدرس من دروس الفصل، واكتب عنوان الفصل.


وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي: (يُستعمل مع الدروس 2-2 إلى 2-5)

1) 4 **2)** -15

3) 0.2 **4)** -1.35

5) $-\frac{3}{4}$ **6)** $2\frac{1}{3}$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (يُستعمل مع الدروس 2-1 إلى 2-5)

7) $6(x+2y)$

8) $4(x+5)-3$

9) $-4(3x)-(7x-6)$

10) $5(2x-5)-\frac{1}{3}(4x+1)$

11) $6(2x-1)-3(y-x)+0.5(4x-6)$

حل نظام المعادلتين في كلٍّ مما يأتي جبريًّا: (يُستعمل مع الدرس 2-5)

12) $2x-y=-1$ ، $y=x+3$

13) $2x-5y=-18$ ، $3x+4y=19$

14) $4y+6x=-6$ ، $5y-x=35$

15) $4x+2y=4$ ، $x=y-8$

16) جوائز: توزع مدرسة جوائز (حقائب وأقلام) كل عام على المتفوقين، بلغ إجمالي ثمنها هذا العام 534 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 30 ريالًا، وسعر القلم 9 ريالات، أمّا في العام السابق فبلغ إجمالي ثمن الجوائز 448 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 25 ريالًا، وسعر القلم 8 ريالات. اكتب نظامًا من معادلتين، ثم حله لتجد عدد الحقائب والأقلام المشتراة في كل عام، علمًا بأن الحقائب والأقلام لها العدد نفسه في العامين.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد -5

النظير الجمعي للعدد -5 هو العدد x ، بحيث إن $-5+x=0$؛ لذا فإن $x=5$.

النظير الضربي للعدد -5 هو العدد y، حيث إن $-5y=1$؛ لذا فإن $y=-\frac{1}{5}$.

مثال 2

بسّط العبارة : $\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$=\frac{3}{4}(8x)-\frac{3}{4}(4)+3x$ خاصية التوزيع

$=6x-3+3x$ بسّط

$=9x-3$ اجمع الحدود المتشابهة

مثال 3

حل نظام المعادلتين الآتي جبريًّا:

$3y=x-9$

$4x+5y=2$

بما أن معامل x في المعادلة الأولى هو 1، فاستعمل طريقة التعويض. أولًا: حل المعادلة بالنسبة للمتغير x.

$3y=x-9 \rightarrow x=3y+9$

$4(3y+9)+5y=2$ عوّض $3y+9$ بدلًا من x

$12y+36+5y=2$ خاصية التوزيع

$17y=-34$ اجمع الحدود المتشابهة

$y=-2$ بقسمة الطرفين على 17

ولإيجاد قيمة x ، استعمل المساواة $y=-2$ في المعادلة الأولى.

$3(-2)=x-9$ عوّض عن y بـ -2

$-6=x-9$ بالضرب

$3=x$ اجمع 9 للطرفين

فيكون الحل $(3,-2)$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-1 مقدمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

فيما سبق: درستُ حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول. (مهارة سابقة)

والآن:
- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على عناصر صفوف أو أعمدة مصفوفة لتحليل البيانات.

المفردات:
- **المصفوفة** matrix
- **العنصر** element
- **الرتبة** order
- **مصفوفة الصف** row matrix
- **مصفوفة العمود** column matrix
- **المصفوفة المربعة** square matrix
- **المصفوفة الصفرية** zero matrix
- **المصفوفات المتساوية** equal matrices

لماذا؟

هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

	النوع	سعة الذاكرة	السعر
العرض الأول	a	256	2600
العرض الثاني	b	256	2500
العرض الثالث	c	128	2420
العرض الرابع	d	64	2390

تنظيم البيانات: **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال حرف كبير تحته خط مثل $\underline{A}$ و $\underline{B}$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف — 4 أعمدة

العنصر 1− موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8 − موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.

يمكنك تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًّا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة $\underline{A}$ في الأعلى هي مصفوفة من النوع 3×4 أو من الرتبة 4×3؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{A}$، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{B}$.

مثال 1 رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلٍّ ممّا يأتي:

a) حدد رتبة المصفوفة $\underline{A}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}}_{\text{3 أعمدة}} \left\{ \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix} \right\} \text{صفّان}$$

بما أن $\underline{A}$ فيها صفان و3 أعمدة، فإن رتبتها 3×2.

b) ما قيمة العنصر a_{21}؟

$$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ \mathbf{9} & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

صف 2 ← 9 ← عمود 1

بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2، والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

تحقق من فهمك

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

1A) ما رتبة $\underline{B}$؟

1B) ما قيمة b_{32}؟

قراءة الرياضيات

يدل الرمز a_{ij} على العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفة $\underline{A}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

مصفوفة صف
تحوي صفًا واحدًا.
$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

مصفوفة عمود
تحوي عمودًا واحدًا.
$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

المصفوفة المربعة
عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.
$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

المصفوفة الصفرية
جميع عناصرها أصفار.
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ المصفوفتان متساويتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة
يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.

مثال 2 من واقع الحياة — تنظيم البيانات في مصفوفة

كرة قدم: رصد مدرب أحد فرق كرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات الموسم الحالي فكانت على النحو الآتي:

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 قطع تمريرات، 4 أهداف.	ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 قطع تمريرات، 11 هدفاً.	ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 قطع تمريرات، 4 أهداف.

a) نظّم البيانات في مصفوفة A ، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًّا حسب عدد التسديدات.

b) حدد رتبة المصفوفة. وما قيمة a_{23}؟

a)

	الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
ماجد	11	40	170	43	18
ياسر	4	30	20	31	20
معاذ	4	15	113	24	12

b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة ؛ لذا فإن رتبة المصفوفة 3×5 وقيمة العنصر a_{23} الموجودة في الصف 2 ، والعمود 3، هي 20.

تحقق من فهمك

2) بيتزا: يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من البيتزا بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

أسعار البيتزا (بالريال)

	كبيرة	وسط	صغيرة
ثمار البحر	35	24	13
الخضار	34	23	12
الدجاج	36	25	14
اللحم	37	27	15

A) نظّم هذه البيانات في مصفوفة A ، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًّا.

B) حدد رتبة المصفوفة.

C) ما قيمة العنصر a_{21}؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحليل البيانات: عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحيانًا معلومات ذات معنى. وفي أحيان أخرى لا تعطي أي معلومات ذات معنىً.

إرشادات للدراسة

عرض البيانات

يكون من الممكن أحيانًا تبديل عناصر الصفوف وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تمثل معلومات من واقع الحياة.

مثال 3 تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم، (في مثال 2) استعمال المصفوفة للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة:

	الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
	11	40	170	43	18
	4	30	20	31	20
	4	15	113	24	12

a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3 ، وفسر النتائج.

مجموع عناصر عمود 2 يساوي 98، وهو يمثل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال جميع المباريات.
مجموع عناصر عمود 3 يساوي 303، وهو يمثل العدد الكلي لتمريرات اللاعبين خلال جميع المباريات.

b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2 ويقسم المجموع على 3 ، فما الناتج؟

الناتج هو 33 تقريبًا.

c) هل كانت طريقة المدرب في حساب معدل تسديد اللّاعب في المباراة الواحدة صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

لا؛ لأن مجموع التسديدات في العمود 2 ليس لثلاث مباريات، ويتعين على المدرب بدلًا من ذلك قسمة مجموع عناصر العمود 2 على مجموع عناصر العمود 1 حيث سيكون المعدل الدقيق 1.96 (98 ÷ 50 = 1.96).

d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى ؟ فسِّر إجابتك.

لا؛ لأن عناصر الصف عبارة عن خمسة أنواع مختلفة من البيانات.

تحقق من فهمك

3) محافظات: يبين الجدول المجاور عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق مختلفة في المملكة		
المنطقة	محافظة فئة أ	محافظة فئة ب
الرياض	12	8
مكة المكرمة	9	7
المدينة المنورة	4	4
القصيم	5	7

المصدر: المملكة العربية السعودية، حقائق وأرقام، هيئة المساحة الجيولوجية السعودية، 1433 هـ

A) نظّم البيانات في مصفوفة .

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف يعطي بيانات ذات معنى؟

تأكد

مثال 1 حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

4) a_{32} **5)** a_{11} **6)** a_{33} **7)** a_{24}

المثالان 3 , 2 **8) زراعة:** يبين الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

a) نظّم البيانات في مصفوفة.

b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟

c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسِّر إجابتك.

d) اجمع عناصر كل عمود، وفسِّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

9) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$ **10)** $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ **11)** $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ **13)** $\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix} 115 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

15) a_{21} **16)** b_{22} **17)** b_{13} **18)** a_{12}

مثال 2 **19)** يبين الجدول أدناه النقاط التي حصل عليها ثلاثة طلاب في مسابقة علمية تقدم على 3 جولات، نظّم هذه البيانات في مصفوفة:

الاسم	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
سعود	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
مروان	187	189	211	587

مثال 3 **20) تخزين:** ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه 2000kg خلاص و 1200kg برحي و 500kg سكري، والثاني فيه 3000kg خلاص و 1175kg برحي و 2250kg سكري، والثالث فيه 2750kg خلاص و 1500kg برحي و 1700kg سكري.

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، وماذا يمثل هذا المجموع؟

c) أوجد مجموع عناصر كل صف، وماذا يمثل هذا المجموع؟

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

21) a_{32} **22)** b_{21} **23)** b_{12} **24)** a_{21}

25) حديد التسليح: يبين الجدول المجاور أسعار حديد التسليح حسب تقرير وزارة التجارة والاستثمار في مدينتي الرياض وجدة لأحد الأيام.

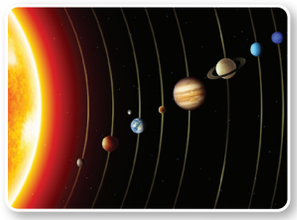
أسعار حديد التسليح (بالريال)		
المقاس	الرياض	جدة
8mm	2410	2455
14mm	2210	2255
16mm	2200	2245

a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة.

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة في الفرع a؟

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} x^2+4 & y+6 \\ x-y & 2-y \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

26) a_{11} **27)** a_{22} **28)** b_{31} **29)** b_{23}



الربط مع الحياة

بعد إعادة تعريف كلمة "كوكب" عام 2006 من قبل الاتحاد الفلكي الدولي، تبين أن بلوتو لم يعد يصنف كوكبًا؛ وذلك بسبب حجمه الصغير.

30) فلك: استعمل الجدول المجاور الذي يبين بُعد بعض الكواكب عن الأرض والشمس.

الكوكب	البُعد عن الشمس (مليون ميل)	البُعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	744
أورانس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

المصدر: fact Monster

a) نظّم المسافات في مصفوفة $\underline{A}$.

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

c) ما قيمة العنصر a_{42}؟

31) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال تأثير قلب الصفوف والأعمدة في المصفوفة. يبين الجدول المجاور عدد كلٍّ من التمريرات الحاسمة وعدد الأهداف لأربعة لاعبين في مباراة لكرة اليد.

الاسم	عدد التمريرات الحاسمة	عدد الأهداف
محمود	8	3
معاذ	6	5
صالح	1	8
عبدالله	4	2

a) جدوليًّا: نظّم البيانات في مصفوفة على أن يمثل عدد الأهداف وعدد التمريرات عمودها.

b) جبريًّا: أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

c) جدوليًّا: بدّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف.

d) جبريًّا: أوجد مجاميع عناصر كل صف.

e) تحليليًّا: هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وفسِّر إجابتك:

32) المصفوفة $\underline{C}$ مربعة ولها أربعة أعمدة، وتحوي العنصر c_{53}.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

33) اكتشف الخطأ: حددت كل من ياسمين وسارة العنصر b_{32} في المصفوفة $\underline{B} = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$، فهل توصلت إحداهما للحل الصحيح؟ فسِّر إجابتك.

ياسمين	سارة
قيمة العنصر b_{32} هي 5.	العنصر b_{32} غير موجود في المصفوفة B ، لأن B مصفوفة من النوع 3×2.

34) تحدٍّ: جد قيمة كلٍّ من المتغيرات z , y , x التي تحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 3x + 4z \\ 7x - 8z & 5y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z - 5x + 1 & 5y - 2x \\ 3y - 4z & 12x + 2y \end{bmatrix}$$

35) مسألة مفتوحة: أنشئ مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى.

36) اكتب: اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

تدريب على اختبار

37) مسح: نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

	ضد	مؤيد
المرشح الأول	771	1553
المرشح الثاني	1633	689
المرشح الثالث	229	2088

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي **ليس** صحيحًا؟

A هناك 771 صوتًا ضد المرشح الأول.

B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

مراجعة تراكمية

38) مجلس الإدارة: ترشح مسفر لمنصب رئيس مجلس الإدارة في إحدى الشركات الكبرى، وكان المُقترع يكتب ثلاثة أسماء بالترتيب على ورقة الاقتراع ، فيحصل المتنافس على 3 نقاط لكل مركز أول، ونقطتين لكل مركز ثان، ونقطة واحدة لكل مركز ثالث. وقد ورد اسم مسفر في 490 ورقة اقتراع للمراكز الثلاثة، وكان مجموع نقاطه 878 نقطة. فإذا علمت أن عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثاني أكثر بأربع أصوات من ضعف عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثالث، فكم عدد الأصوات التي حصل عليها من كل مركز؟ (مهارة سابقة)

39) ثقافة مالية: يبين الجدول المجاور تكلفة إنتاج كلٍّ من الشوكولاتة وكعكة الفواكه وسعر بيعها لدى مخبز. إذا علمت أن المخبز يبيع كعكة الشوكولاتة وكعكة الفواكه معًا في صناديق تحوي من 6 إلى 12 كعكة من كلا النوعين، بحيث يحوي كل صندوق ثلاث كعكات على الأقل من كل نوع. فما عدد كعكات كل صندوق من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 5-1)

النوع	كعكة الشوكولاتة	كعكة الفواكه
التكلفة	19 ريالًا	13 ريالًا
سعر البيع	44 ريالًا	39 ريالًا

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي إذا كان $w = 3 , x = -2 , y = 4 , z = 0.5$: (مهارة سابقة)

40) $4x - 6y + 2z$ **41)** $5w + 2(x - z) + 2y$ **42)** $4[3(2z + y) - 2(w + x)]$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها.

تُستعمل **الجداول الإلكترونية**، لتنظيم البيانات وعرضها، حيث يتم إدخالها في برنامج الجداول الإلكترونية في صفوف وأعمدة كما هو الحال في المصفوفات. وبعد ذلك يمكن استعمالها لعمل الرسوم أو إجراء الحسابات.

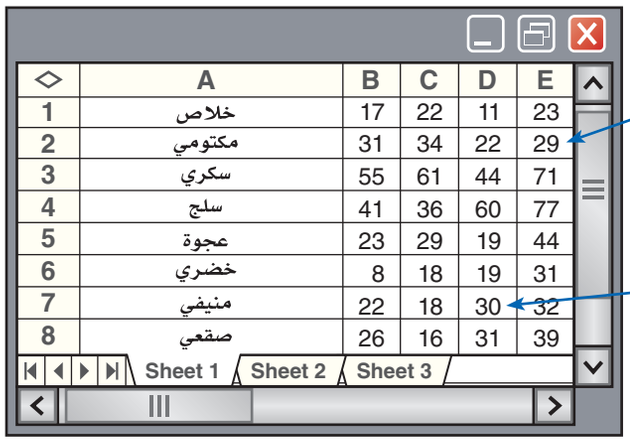
مثال

جمع محل لبيع التمور بيانات عن مبيعاته في أربعة أسابيع متتالية، ونظمها في الجدول المجاور. أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية .

مبيعات محل تمور خلال 4 أسابيع متتالية بالكيلوجرامات

نوع التمر	1	2	3	4
خلاص	17	22	11	23
مكتومي	31	34	22	29
سكري	55	61	44	71
سلج	41	36	60	77
عجوة	23	29	19	44
خضري	8	18	19	31
منيفي	22	18	30	32
صقعي	26	16	31	39

استعمل العمود A للنوع، والعمود **B** لمبيعات الأسبوع الأول ، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثاني، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث، والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.



يحوي كل صف مبيعات النوع نفسه من التمور ويمثل الصف **2** مبيعات التمر المكتومي.

تحوي كل خلية في الجدول جزءًا واحدًا من البيانات. حيث تحتوي الخلية **D 7** على القيمة **30** والتي تمثل عدد الكيلوجرامات المبيعة في الأسبوع الثالث من تمور منيفي.

تمارين:

1) أدخل البيانات الواردة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس في برنامج الجداول الإلكترونية.

2) قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية وتنظيمها في المصفوفة.

3) يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف والأعمدة في الجداول الإلكترونية باستعمال الأمر (SUM)

a) يمكنك إيجاد مجموع مدخلات العمود B باستعمال الصيغة =SUM(B1:B8) . أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا B9, C9, D9, E9 لتجد مجاميع مدخلات الأعمدة الأخرى. ماذا تمثل مجاميع مدخلات هذه الأعمدة؟

b) أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا F1 حتى F8 لإيجاد مجاميع مدخلات الصفوف 1 إلى 8. ماذا تمثل هذه المجاميع في هذه الحالة؟

c) أوجد مجموع مدخلات الصف 9، ومجموع مدخلات العمود F. ماذا تلاحظ؟ فسِّر إجابتك.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-2 العمليات على المصفوفات
Operations with Matrices

فيما سبق:
درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات. (الدرس 1-2)

والآن:
- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد ثابت.

المفردات:
جمع مصفوفتين
adding matrices
طرح مصفوفتين
subtracting matrices
ضرب المصفوفة في عدد ثابت
scalar multiplication

لماذا؟

لدى مؤسسة تجارية للمعدات الثقيلة فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض. وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	جدة		الشرقية		الرياض	
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	109500	1050	122000	1700	145000	1900
المعرض (2)	135000	1800	145500	1800	225000	2400
المعرض (3)	150500	1800	160000	1800	290000	2700

جمع المصفوفات وطرحها: يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

مفهوم أساسي — جمع المصفوفات وطرحها

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $\underline{A}, \underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $\underline{A} + \underline{B}$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في $\underline{A}$ و $\underline{B}$، وكذلك $\underline{A} - \underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز: لتكن: $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

فإن: $\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

مثال: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

إذا كان $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$
فإن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

مثال 1 — جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

a) $\underline{A} + \underline{B}$

$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ عوّض

$= \begin{bmatrix} 16+(-4) & 2+(-1) \\ -9+(-3) & 8+(-7) \end{bmatrix}$ اجمع العناصر المتناظرة

$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ بسّط

b) $\underline{B} - \underline{C}$

$\underline{B} - \underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ عوّض

بما أن المصفوفتين $\underline{C}, \underline{B}$ لهما رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $\underline{B} - \underline{C}$.

تحقق من فهمك

(1A) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

(1B) $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

الضرب في عدد ثابت: يمكنك ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **ضرب المصفوفة في عدد ثابت**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الضرب في عدد ثابت

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة $k\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $\underline{A}$ مضروبًا في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot \underline{A} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

إذا كان $k\underline{A} = \underline{B}$

فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

مثال 2

ضرب مصفوفة في عدد ثابت

إذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$، فجد $5\underline{R}$.

$$5\underline{R} = 5 \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$ عوّض

$$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$$ اضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد 5

$$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$ بسّط

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$، فأوجد $-4\underline{T}$

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص جمع المصفوفات

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k:

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$

خاصية التوزيع للضرب في عدد $k(\underline{A} + \underline{B}) = k\underline{A} + k\underline{B}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكنك إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

مثال 3 العمليات على المصفوفات

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4\underline{B} - 3\underline{A}$.

عوّض $-4\underline{B} - 3\underline{A} = -4\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

أوجد ناتج ضرب المصفوفات في الثوابت $= \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$

بسّط $= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$

اطرح العناصر المتناظرة $= \begin{bmatrix} 16 - (-27) & 32 - 36 \\ -8 - 6 & 12 - (-18) \end{bmatrix}$

بسّط $= \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$

تحقق من فهمك

3) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-6\underline{B} + 7\underline{A}$



الربط مع الحياة

المخطط المالي

يستعمل المخطّط المالي المصفوفات لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

يمكنك استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية.

مثال 4 استعمال العمليات على المصفوفات

أعمال: **ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية الدرس، وعبر عن معدل المبيعات والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.**

حتى يتم حساب المبيعات في خمسة أسابيع، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5 وجمع المصفوفات الناتجة معًا.

ضرب كل مصفوفة في 5 ثم الجمع $5\begin{bmatrix} 1900 & 145000 \\ 2400 & 225000 \\ 2700 & 290000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1700 & 122000 \\ 1800 & 145500 \\ 1800 & 160000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1050 & 109500 \\ 1800 & 135000 \\ 1800 & 150500 \end{bmatrix}$

تطبيق قاعدة الضرب في ثابت $= \begin{bmatrix} 9500 & 725000 \\ 12000 & 1\,125000 \\ 13500 & 1\,450000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8500 & 610000 \\ 9000 & 727500 \\ 9000 & 800000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5250 & 547500 \\ 9000 & 675000 \\ 9000 & 752500 \end{bmatrix}$

اجمع المصفوفات $= \begin{matrix} \text{المبيعات} & \text{النفقات} \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 23250 & 1882500 \\ 30000 & 2527500 \\ 31500 & 3002500 \end{bmatrix}$

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.

تحقق من فهمك

4) أعمال: استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات الشهري لجميع المعارض على فرض أن الشهر 30 يومًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال 1 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مثال 3 إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $\underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج كلٍّ مما يلي:

7) $4\underline{B} - 2\underline{A}$

8) $-8\underline{C} + 3\underline{A}$

مثال 4

9) درجات حرارة: تبين المصفوفة $\underline{L}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينةٍ ما. وتبين المصفوفة $\underline{H}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى (بالفهرنهايت) في تلك المدينة.

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة التي تمثل الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا.

10) $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

الأمثلة 2, 3, 4

12) مشروبات: يبين الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم، إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 50%.

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	3	4	5
شاي	2	3	4
قهوة	2	3	4
عصير	4	5	6

a) اكتب المصفوفة $\underline{C}$ التي تمثّل الأسعار الحالية .

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة $\underline{C}$ فيه لإيجاد المصفوفة $\underline{N}$ التي تمثّل الأسعار الجديدة؟

c) جد المصفوفة $\underline{N}$.

d) جد المصفوفة $\underline{C} - \underline{N}$. ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

13) $\begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & 76 & -13 \end{bmatrix}$

16) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix}$

17) $\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

18) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

19) كتب: تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، و5000 كتاب تاريخي و5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000 كتاب علمي، و10000 كتاب تاريخي و2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، و700 كتاب تاريخي، و800 كتاب أدبي.

a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وارمز إليها بالرموز $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$.

b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وعبِّر عن ذلك بمصفوفة.

c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C؟

d) أوجد المصفوفة $\underline{A} + \underline{B}$. هل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة ؟ فسِّر إجابتك.



الربط مع الحياة

وصل عدد مقتنيات مكتبات جامعة الملك سعود 874971 عنوانًا تقع في 2065863 مجلدًا ومادة من مختلف أوعية المعلومات، وبلغت المساحة الإجمالية للمكتبات $62634m^2$، مجهزة بكل تقنيات المكتبات الحديثة وتدير خدماتها آليًا.

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

20) $-3\begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix}$

21) $-4\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix}$

22) $-5\left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\right)$

23) $-6\left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix}\right)$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

24) $-2\begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix}$

25) $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا

26) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تبديلية .

27) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تجميعية .

28) تحد: إذا كانت:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, 3\underline{A} - 4\underline{B} + 6\underline{C} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد عناصر المصفوفة $\underline{C}$.

29) تبرير: حدِّد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين $\underline{A}$, $\underline{B}$ ، ثم فسِّر إجابتك.

a) إذا كانت $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة ، فإن $\underline{A} - \underline{B}$ معرّفة.

b) إذا كان k عددًا حقيقيًّا ، فإن $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرّفتان.

c) إذا كانت $\underline{B} - \underline{A}$ غير معرّفة ، فإن $\underline{A} - \underline{B}$ غير معرّفة.

d) إذا كانت $\underline{A}$ وَ $\underline{B}$ لهما عدد العناصر نفسه ، فإن $\underline{B} + \underline{A}$ معرّفة.

e) إذا كانت $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرفتين، فإن $k\underline{B} + k\underline{A}$ معرّفة.

30) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا على مصفوفتين $\underline{A}$ و $\underline{B}$، على أن تكون $4\underline{B} - 3\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

31) اكتب: اشرح كيف تجد $4\underline{D} - 3\underline{C}$ لأي مصفوفتين $\underline{C}$, $\underline{D}$ لهما الرتبة نفسها.

تدريب على اختبار

32) حل النظام الآتي:

$$0.06p + 4q = 0.88$$
$$p - q = -2.25$$

A $(-0.912, -1.338)$ **C** $(-2, 0.25)$

B $(0.912, -3.162)$ **D** $(-2, -4.25)$

33) رتبة المصفوفة: إذا كانت $\underline{A}$, $\underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة 3×5 ، فإن رتبة المصفوفة $\underline{A} - \underline{B}$ هي:

A 3×5 **C** 3×2

B 5×3 **D** 3×3

مراجعة تراكمية

إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & x \\ -2 & 9 & y \end{bmatrix}$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -5 & x \\ 8 & 4y \end{bmatrix}$ ، فحدِّد كل عنصر مما يأتي: (الدرس 2-1)

34) a_{32} **35)** c_{13} **36)** b_{23}

حل بيانيًّا النظام أدناه: (الدرس 5-1)

37) $4x + 2y > 8$
$4y - 3x \leq 12$

38) سكان: في إحصائية عام 1435هـ لأكبر 20 مدينة سعودية من حيث عدد السكان، بلغ عدد سكان مدينة الدمام 903597 نسمة، بما يزيد 333800 على عدد سكان مدينة تبوك. اكتب معادلة لإيجاد عدد سكان مدينة تبوك، ثم حلّها. (مهارة سابقة)

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-1)

39) $4(2x - 3y) + 2(5x - 6y)$

40) $-3(2a - 5b) - 4(4b + a)$

41) $-7(x - y) + 5(y - x)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

فيما سبق:
درستُ ضرب المصفوفات في عدد ثابت. (الدرس 2-2)

والآن:
- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

لماذا؟

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام B، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة P.

مصفوفة عدد الأقلام B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأسعار P

قلم الرصاص	الحبر السائل	الحبر الجاف
1	3	2

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$، فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$m \times r$ ، $r \times t$ متساويان — $m \times t$ رتبة AB

مثال 1 رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $\underline{A} \cdot \underline{B}$ في كلٍّ مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

a) $\underline{A}_{3\times 4} \cdot \underline{B}_{4\times 2}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$
$$3\times 4 \quad 4\times 2 \quad 3\times 2$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{A}$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{B}$، فإن مصفوفة حاصل الضرب $\underline{A} \cdot \underline{B}$ معرّفة، ورتبتها 3×2.

b) $\underline{A}_{5\times 3} \cdot \underline{B}_{5\times 4}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B}$$
$$5\times 3 \quad 5\times 4$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{A}$ لا يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{B}$، فإن مصفوفة حاصل الضرب $\underline{A} \cdot \underline{B}$ غير معرّفة.

تحقق من فهمك

1A) $\underline{A}_{4\times 6} \cdot \underline{B}_{6\times 2}$

1B) $\underline{A}_{3\times 2} \cdot \underline{B}_{3\times 2}$

إرشادات للدراسة

رمز المصفوفة
أحيانًا تكتب $\underline{A}_{m\times n}$ لتعبر عن مصفوفة $\underline{A}$ رتبتها $m\times n$.

يمكنك إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب المصفوفات

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة $\underline{AB}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة $\underline{A}$، بعناصر العمود r من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

الرموز:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times7 & 2\times6+3\times8 \\ 1\times5+4\times7 & 1\times6+4\times8 \end{bmatrix}$$

تنبيه!

المحافظة على التركيز

من السهل أن تفقد التركيز عند ضرب المصفوفات، وربما تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا تقوم بضربها عند إيجاد عناصر مصفوفة الضرب.

مثال 2

ضرب المصفوفات المربعة

أوجد $\underline{XY}$ إذا كانت $\underline{X} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\underline{XY} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1: اضرب عناصر الصف الأول في المصفوفة $\underline{X}$ في عناصر العمود الأول في المصفوفة $\underline{Y}$ بالترتيب، ثم اجمع نواتج الضرب، وضع النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من المصفوفة $\underline{XY}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6(-5)+(-3)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & \mathbf{6(-4)+(-3)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ \mathbf{-10(-5)+(-2)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & \mathbf{-10(-4)+(-2)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: بسّط المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & -10(-4)+(-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد $\underline{UV}$.

يمكنك استعمال ضرب المصفوفات في عدة مواقف حياتية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الربط مع الحياة

تدل البحوث الصحية والرياضية أن ممارسة السباحة نصف ساعة يوميًا تخفض ضغط الدم وتقوي القلب وتقلل معدل الكولسترول في الدم وتزيد كفاءة الدورة الدموية، وتحرق 500 : 250 سعرة حرارية؛ لذا تعدّ من أفضل الرياضات لتخفيض الوزن.

مثال 3 من واقع الحياة — ضرب المصفوفات

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لمن يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

افهم: **المعطيات:**

- جدول يبين عدد مرات حصول 4 فرق على المراكز الثلاثة الأولى في مسابقة للسباحة.
- عدد النقاط التي تحتسب للفريق في كل مركز.

المطلوب:

- تحديد الفريق الفائز.

خطط: يمكن إيجاد النقاط النهائية التي أحرزها كل فريق بضرب مصفوفة النتائج للفريق في مصفوفة عدد النقاط التي تحتسب لكلٍّ من المراكز (الأول والثاني والثالث).

حل: اكتب كلًّا من النتائج والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين، ورتب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة النتائج.

النتائج — النقاط

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underline{P} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين. $\underline{R}\,\underline{P}$

$$\underline{R}\,\underline{P} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7)+7(4)+3(2) \\ 8(7)+9(4)+1(2) \\ 10(7)+5(4)+3(2) \\ 3(7)+3(4)+6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كلٌّ من الفرق A, B, C, D على الترتيب؛ لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.

تحقق: المصفوفة $\underline{R}$ من الرتبة 4×3 ، والمصفوفة $\underline{P}$ من الرتبة 3×1 ؛ لذا فإن حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 4×1.

تحقق من فهمك

3) مبيعات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

خصائص ضرب المصفوفات: تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.

مثال 4 اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $\underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{G}\,\underline{H}$

$$\underline{G}\,\underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6-5 & 3-24-35 \\ 8+4+0 & 12+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

b) $\underline{HG}$

$$\underline{HG} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -10+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{HG} \neq \underline{GH}$.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{AB} = \underline{BA}$ ؟

اتضح في المثال 4 أن الخاصية الإبدالية لا تتحقق في ضرب المصفوفات. لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

إرشادات للدراسة

البرهان والأمثلة المضادة

لإثبات صحة خاصية في جميع الحالات، يجب إثبات صحتها في الحالة العامة. ولبيان أن خاصية ما ليست صحيحة يكفي إعطاء مثال مضاد لها.

مثال 5 اختبار خاصية التوزيع

إذا كانت $\underline{L} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \underline{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \underline{J} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{J}\,(\underline{K} + \underline{L})$

عوّض $\underline{J}(\underline{K} + \underline{L}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)$

اجمع المصفوفتين $= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

اضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} -2+8 & 2+12 \\ 5-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$

b) $\underline{JK} + \underline{JL}$

$$\underline{JK} + \underline{JL} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+4(-1) & 2(2)+4(3) \\ -5(3)+(-2)(-1) & -5(2)+(-2)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-4)+4(3) & 2(-1)+4(0) \\ -5(-4)+(-2)(3) & -5(-1)+(-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{J}(\underline{K} + \underline{L}) = \underline{JK} + \underline{JL}$.

تحقق من فهمك

5) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}, \underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فحدِّد ما إذا كانت المعادلة $(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \underline{SR} + \underline{TR}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا.

في المثال السابق كانت خاصية توزيع الضرب على الجمع صحيحة، ويمكنك إثبات أن هذه الخاصية صحيحة دائمًا إذا كانت عمليتا الضرب والجمع معرفتين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$، ولأي عدد k، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٍّ منها معرفتين:

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات	$(\underline{A}\underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\underline{C})$
الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد	$k(\underline{A}\underline{B}) = (k\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(k\underline{B})$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{C}\underline{A} + \underline{C}\underline{B}$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\underline{C} + \underline{B}\underline{C}$

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $\underline{A}_{2\times 4} \cdot \underline{B}_{4\times 3}$ **2)** $\underline{C}_{5\times 4} \cdot \underline{D}_{5\times 4}$ **3)** $\underline{E}_{8\times 6} \cdot \underline{F}_{6\times 10}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 3

12) لياقة بدنية: يبين الجدول المجاور عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية في المستويين الأول والثاني لدى أحد مراكز اللياقة البدنية في مدينة الرياض .

إذا كانت رسوم الاشتراك الأسبوعي 110 ريالات، ورسوم الاشتراك الشهري 165 ريالًا، ورسوم الاشتراك السنوي 439 ريالًا.

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية

الاشتراك	المستوى الأول	المستوى الثاني
الأسبوعي	35	28
الشهري	32	17
السنوي	18	12

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة تمثل رسوم الاشتراك فيها.

b) ما المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني.

المثالان 4 , 5 إذا كانت $\underline{Z} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \underline{X} = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$، فحدِّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

13) $\underline{X}\underline{Y} = \underline{Y}\underline{X}$ **14)** $\underline{X}(\underline{Y}\underline{Z}) = (\underline{X}\underline{Y})\underline{Z}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

15) $\underline{P}_{2\times 3}\cdot\underline{Q}_{3\times 4}$ **16)** $\underline{A}_{5\times 5}\cdot\underline{B}_{5\times 5}$ **17)** $\underline{M}_{3\times 1}\cdot\underline{N}_{2\times 3}$

18) $\underline{X}_{2\times 6}\cdot\underline{Y}_{6\times 3}$ **19)** $\underline{J}_{2\times 1}\cdot\underline{K}_{2\times 1}$ **20)** $\underline{S}_{5\times 2}\cdot\underline{T}_{2\times 4}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-10\\6\end{bmatrix}$ **22)** $\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -7\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-3 & -7\\-2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\9 & -3\end{bmatrix}$ **24)** $\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -3\\7 & -2\end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\-4 & -10 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & -9\end{bmatrix}$ **26)** $\begin{bmatrix}-6 & 4 & -9\\2 & 8 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\2\\4\end{bmatrix}$

27) $\begin{bmatrix}2 & 9 & -3\\4 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\-6 & 7\\-2 & 1\end{bmatrix}$ **28)** $\begin{bmatrix}-4\\8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$

مثال 3

29) أجنحة فندقية: لدى مؤسسة للأجنحة الفندقية 3 مبانٍ للإيجار، ويبين الجدول المجاور عدد الغرف في كل مبنى. فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا 220 ريالًا، وللغرفة التي تحوي سريرين 250 ريالًا، وللغرفة التي تحوي ثلاثة أسرَّة 360 ريالًا.

عدد الغرف			
المبنى	غرفة بسرير واحد	غرفة بسريرين	غرفة بثلاث أسرة
1	3	2	2
2	2	3	1
3	4	3	0

a) اكتب مصفوفة تمثّل عدد الغرف، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

b) اكتب مصفوفة تمثّل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

c) ما مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

المثالان 4 ، 5 إذا كانت $k=2$ ، $\underline{R}=\begin{bmatrix}4 & 6\\-6 & 4\end{bmatrix}$ ، $\underline{Q}=\begin{bmatrix}6 & 4\\-2 & -5\end{bmatrix}$ ، $\underline{P}=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$ ، فحدِّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

30) $k(\underline{P}\underline{Q})=\underline{P}(k\underline{Q})$ **31)** $\underline{P}\underline{Q}\underline{R}=\underline{R}\underline{Q}\underline{P}$

32) $\underline{P}\underline{R}+\underline{Q}\underline{R}=(\underline{P}+\underline{Q})\underline{R}$ **33)** $\underline{R}(\underline{P}+\underline{Q})=\underline{P}\underline{R}+\underline{Q}\underline{R}$



34) تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 زهرة جوري، و 150 زهرة نرجس، و 100 زهرة زنبق، وسعر شراء الزهرة من كل نوع مبين في الجدول المجاور، وكذلك سعر بيع الزهرة بعد تغليفها وتنسيقها في باقة.

الزهور	سعر الشراء	سعر البيع
جوري	0.50 ريال	3.00 ريالات
نرجس	1.5 ريال	6 ريالات
زنبق	2 ريال	7 ريالات

a) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور.

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور.

c) أوجد مقدار ربح المحل من بيع الزهور.

الربط مع الحياة

الزنبق يضم حوالي 110 أنواع أهمها الزنبق الأبيض. وتنمو الأزهار من بصيلات محرشفة، وتأخذ شكل الأبواق ولها ست بتلات.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

استعمل المصفوفات $\underline{Z}=\begin{bmatrix}-3\\x+y\end{bmatrix}$ ، $\underline{Y}=\begin{bmatrix}-5 & -1.5\\x+2 & y\\13 & 1.2\end{bmatrix}$ ، $\underline{X}=\begin{bmatrix}2 & -6\\3y & -4.5\end{bmatrix}$ ، لإيجاد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

35) $\underline{X}\underline{Y}$ **36)** $\underline{Y}\underline{X}$ **37)** $\underline{Z}\underline{Y}$ **38)** $\underline{Y}\underline{Z}$

39) $(\underline{Y}\underline{X})\underline{Z}$ **40)** $(\underline{X}\underline{Z})\underline{X}$ **41)** $\underline{X}(\underline{Z}\underline{Z})$ **42)** $(\underline{X}\underline{X})\underline{Z}$

مسائل مهارات التفكير العليا

43) تبرير: إذا كانت رتبة المصفوفة $\underline{A}\underline{B}$ هي 8×5 ، ورتبة المصفوفة $\underline{A}$ هي 6×5 ، فما رتبة المصفوفة $\underline{B}$؟

44) برهان: بين أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من النوع 2×2 .

a) خاصية التوزيع للضرب في عدد.
b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع.
c) الخاصية التجميعية للضرب.
d) الخاصية التجميعية للضرب في عدد.

45) مسألة مفتوحة: اكتب مصفوفتين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ على أن تكون $\underline{A}\underline{B}=\underline{B}\underline{A}$.

46) تحدٍّ: جد قيم a, b, c, d التي تجعل العبارة $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 11\\20 & 29\end{bmatrix}$ صحيحة.

47) اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات المبيعات للمكتبة.

تدريب على اختبار

48) في مشغل ثلاث آلات حياكة، فإذا كان إنتاج كل آلة في 3 أشهر كما في الجدول أدناه ، وسعر بيع القطعة الواحدة من إنتاج كل آلة معطى أيضًا، فما المبلغ الذي سيحصل عليه المشغل من مبيعات الأشهر الثلاثة؟

	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	سعر بيع القطعة
الآلة 1	26	19	36	28
الآلة 2	48	27	16	19
الآلة 3	36	11	18	31

A 6012 ريالًا **B** 5400 ريال
C 1221 ريالًا **D** 2320 ريالًا

49) رتبة المصفوفة: ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\\j & k & l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\4\\6\end{bmatrix}$$

A 1×4
B 3×3
C 4×1
D 4×3

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-2)

50) $4\begin{bmatrix}8 & -1\\-3 & -4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & 4\\6 & 3\end{bmatrix}$

51) $5\left(2\begin{bmatrix}-2 & -5\\-1 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & -2\\6 & 4\end{bmatrix}\right)$

52) $-4\left(\begin{bmatrix}8 & 9\\-5 & 5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-6 & -1\\6 & 3\end{bmatrix}\right)$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 2-1 إلى 2-3

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$، فحدد:

3) a_{21}

4) b_{22}

5) مبيعات: يبين الجدول الآتي مبيعات محلَّي ألبسة أطفال في أسبوعين مختلفين:

المحل	الأسبوع	الملابس المبيعة			
		قميص	بلوزة	قبعة	بنطال
A	1	25	14	18	5
	2	32	26	15	4
B	1	44	10	13	8
	2	18	38	17	2

a) اكتب مصفوفة تمثل مبيعات كل أسبوع.

b) جد مجموع مبيعات الأسبوعين باستعمال جمع المصفوفات.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

6) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

7) $-3\begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

8) $2\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

9) اختيار من متعدد: أوجد ناتج:

$2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

A $\begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

10) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

13) اختيار من متعدد: إذا كانت المصفوفة $\underline{XY}$ من النوع 2×3، والمصفوفة $\underline{X}$ من النوع 3×4، فما رتبة المصفوفة $\underline{Y}$؟

A 2×3

B 3×2

C 3×4

D 4×2

14) مبيعات: يبين الجدول الآتي موجودات محل ألبسة رياضية من القمصان والبناطيل بالدستة، وقد قرر صاحب المحل مضاعفة عدد القمصان والبناطيل قبيل فصل الصيف.

النوع	صغير	وسط	كبير
قميص	10	10	15
بنطال	25	35	45

a) اكتب مصفوفة $\underline{A}$ تمثّل عدد القمصان والبناطيل في المحل قبل مضاعفة العدد.

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة $\underline{A}$ لإيجاد المصفوفة $\underline{M}$ التي تمثل عدد القمصان والبناطيل بعد مضاعفته؟ جد $\underline{M}$.

c) ماذا تمثل المصفوفة $\underline{A} - \underline{M}$ في هذه الحالة؟

15) اختيار من متعدد: ناتج الضرب : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ يساوي:

A $\begin{bmatrix} 8 & -12 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

D عملية الضرب غير معرّفة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-4

المحدِّدات وقاعدة كرامر
Determinants and Cramer's Rule

فيما سبق:
درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحسب المحدِّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:
المحدِّدة
determinant
محدِّدة الدرجة الثانية
second-order determinant
محدِّدة الدرجة الثالثة
third-order determinant
قاعدة الأقطار
diagonal rule
مصفوفة المعاملات
coefficient matrix
قاعدة كرامر
Cramer's Rule

لماذا؟



لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، قام عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، تأكد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. وأنه من الممكن بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدِّدات لحساب مساحتها.

المحدِّدات: كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدِّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة هو: جميع عناصر المصفوفة التي تمتد من الزاوية اليسرى العلوية للزاوية اليمنى السفلى. أو جميع العناصر a_{ij} بحيث $i=j$.

مفهوم أساسي — محدِّدة الدرجة الثانية

أضف إلى مطويتك

التعبيراللفظي: يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرمـوز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

مثال 1 — محدِّدة الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - 8(-4)$ — تعريف محدِّدة الدرجة الثانية

$= 45 + 32$ — بسِّط

$= 77$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6)$ — تعريف محدِّدة الدرجة الثانية

$= 0 - 24$ — بسِّط

$= -24$

تحقق من فهمك

(1A) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

(1B) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

قراءة الرياضيات

المحدِّدات:
يرمز لمحدِّدة المصفوفة A بالرمز |A|

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3 × 3.

تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة 3 × 3 **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حساب محدِّدة المصفوفة 3 × 3

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة **3** من ناتج الخطوة **2** .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

$$a\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال 2

حساب محدِّدة المصفوفة 3 × 3

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

أولًا: باستعمال قاعدة الأقطار:

الخطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 & 4 & -8 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 9 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

الخطوة 2: جد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها.

$$-4(2)(3) = -24$$
$$5(6)(4) = 120$$
$$9(-3)(-8) = 216$$
$$4(2)(9) = 72$$
$$-8(6)(-4) = 192$$
$$3(-3)(5) = -45$$

الخطوة 3: اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة.

$$-24 + 120 + 216 = 312$$
$$72 + 192 + (-45) = 219$$

الخطوة 4: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$219 - 312 = -93$$

فتكون قيمة المحدِّدة هي -93

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ثانيًا: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 :

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times (-12) + 8 \times (-3) + 3 \times (-7) = -93$$

تحقق من فهمك

(2A $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(2B $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

تستعمل المحدِّدات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

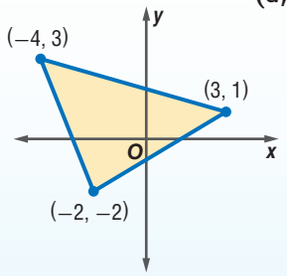
مفهوم أساسي

أضف إلى

مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A، حيث:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

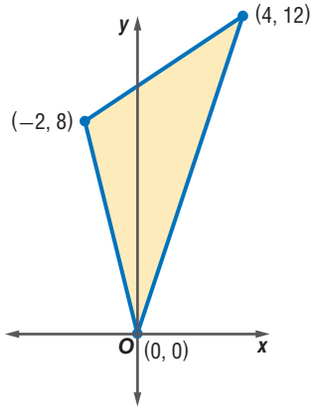
صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

مثال 3 من واقع الحياة

حساب مساحة المثلث باستعمال المحدِّدات

عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحدِّدات لإيجاد مساحة الإقليم.



$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$(a, b) = (0, 0)$
$(c, d) = (4, 12)$
$(e, f) = (-2, 8)$

قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

اجمع نواتج ضرب عناصر الأقطار

$$0 + 0 + 32 = 32 \qquad -24 + 0 + 0 = -24$$

قيمة A

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$



الربط مع الحياة

يعيش النمر في أقاليم قد تصل مساحتها إلى $100\,km^2$، ويحرس النمر إقليمه الذي يعيش فيه ويعرفه بتتبع أثره وأماكن روثه.

$= \left(\frac{1}{2}\right)[32 - (-24)] = 28$ بسّط

فتكون مساحة الإقليم الذي يعيش فيه النمر هي $28\ km^2$.

إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

تحقق من فهمك

3) خرائط: يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: (11, 9), (6, 4), (3, 15)، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة 0.5km. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

إرشادات للدراسة

المحدِّدات

تستعمل المحدِّدات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحدِّدات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحدِّدة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحدِّدة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مثال 4

حل نظام من معادلتين

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدِّدة مصفوفة المعاملات $\underline{C}$ صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $\begin{matrix} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = -29 \end{matrix}$

$\|\underline{C}\| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - (3)(-6) = 38$	احسب محدِّدة مصفوفة المعاملات	
$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\|\underline{C}\|}$	قاعدة كرامر	$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\|\underline{C}\|}$
$= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38}$	عوّض	$= \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38}$
$= \frac{5(-29) - 3(15)}{38}$	احسب المحدِّدات	$= \frac{15(4) - (-29)(-6)}{38}$
$= \frac{-145 - 45}{38}$	اضرب	$= \frac{60 - 174}{38}$
$= -\frac{190}{38}$	اجمع واطرح	$= -\frac{114}{38}$
$= -5$	بسّط	$= -3$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حل النظام هو: $(-3, -5)$

تحقق:

$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$ $\quad x = -3, y = -5$

$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$ بسّط

$15 = 15$ ✓

$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$ $\quad x = -3, y = -5$

$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$ بسّط

$-29 = -29$ ✓

تحقق من فهمك

(4A $7x + 3y = 37$, $-5x - 7y = -41$

(4B $8x - 5y = 70$, $9x + 7y = 3$

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell\ell z = p \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مثال 5

حل نظام من ثلاث معادلات

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $\begin{matrix} 4x + 5y - 6z = -14 \\ 3x - 2y + 7z = 47 \\ 7x - 6y - 8z = 15 \end{matrix}$

احسب محدّدة مصفوفة المعاملات $|\underline{C}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 621$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$

$= \dfrac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{621}$, $= \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{621}$, $= \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{621}$

$= \dfrac{3105}{621} = 5$, $= -\dfrac{1242}{621} = -2$, $= \dfrac{2484}{621} = 4$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

وعليه يكون حل النظام هو $(5, -2, 4)$

تحقق :

$$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14$$
$$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -14$$
$$-14 = -14 \quad ✓$$
$$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$$
$$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$$
$$15 = 15 \quad ✓$$
$$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$$
$$15 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$$
$$47 = 47 \quad ✓$$

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.

تحقق من فهمك

(5A) $3x + 5y + 2z = -7$
$-4x + 3y - 5z = -19$
$5x + 4y - 7z = -15$

(5B) $6x + 5y + 2z = -1$
$-x + 3y + 7z = 12$
$5x - 7y - 3z = -52$

تأكد

المثالان 1, 2

أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

(1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

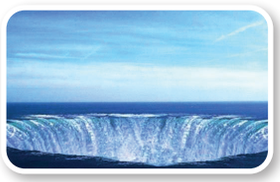
(6) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$



الربط مع الحياة

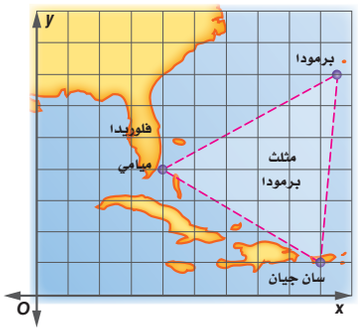
مثلث برمودا منطقة جغرافية في المحيط الأطلسي على شكل مثلث متساوي الأضلاع (كل ضلع نحو 1500 km)، ومساحته حوالي $1000000\ km^2$. وهي منطقة شهيرة بسبب مزاعم عن مخاطر وحوادث وقعت فيها ولم يُحَلّ اللغز حتى الآن.

مثال 3

(11) جغرافيا : استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:

a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.



مثال 4

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

(12) $4x - 5y = 39$
$3x + 8y = -6$

(13) $10c - 7d = -59$
$6c + 5d = -63$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

14) $4x - 2y + 7z = 26$
$5x + 3y - 5z = -50$
$-7x - 8y - 3z = 49$

15) $6x - 5y + 2z = -49$
$-5x - 3y - 8z = -22$
$-3x + 8y - 5z = 55$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$

18) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

21) $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix}$

مثال 3

22) علم الآثار: وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات $(5, 9)$ ، $(4, 7)$ ، $(0, 3)$ على الخريطة. فإذا كانت الإحداثيات بالأمتار . فجد مساحة المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط .

المثالان 4, 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

23) $6x - 5y = 73$
$-7x + 3y = -71$

24) $10a - 3b = -34$
$3a + 8b = -28$

25) $5x - 4y + 6z = 58$
$-4x + 6y + 3z = -13$
$6x + 3y + 7z = 53$

26) $8x - 4y + 7z = 34$
$5x + 6y + 3z = -21$
$3x + 7y - 8z = -85$

27) رحلة مدرسية: نظمت مدرسة ثانوية رحلة إلى المدينة المنورة التي تبعد 615 km عن المدرسة. فإذا كان معدل سرعة الحافلة على الطريق السريع 105 km/h ، ومعدل سرعتها داخل المدن 45 km/h، وكان زمن سير الحافلة 7 ساعات. فاستعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد ساعات سيرها على الطريق السريع، وعدد ساعات سيرها داخل المدن.



الربط مع الحياة

عثر الباحثون أثناء التنقيب في أحد الكهوف على بقايا بشرية، وقدَروا أنها ترجع إلى ما قبل 200000 سنة.

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

28) $3a - 5b - 9c = 17$
$4a - 3c = 31$
$-5a - 4b - 2c = -42$

29) $7x + 8y + 9z = -149$
$-6x + 7y - 5z = 54$
$4x + 5y - 2z = -44$

30) صناعة: ينتج مصنع 3 أحجام من علب الطلاء الفارغة، حجم صغير بتكلفة 1.15 ريال للعلبة، وحجم متوسط بتكلفة 1.75 ريال للعلبة، وحجم كبير بتكلفة 2.25 ريال للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الأحجام، بتكلفة إجمالية قدرها 2238.75 ريالًا.

a) استعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

b) إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح 1.25 ريال بعد زيادة قليلة في الحجم، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

31) بستنة: أراد حمد إنشاء حديقة مثلثية الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططًا على المستوى الإحداثي، فكانت إحداثيات رؤوس الحديقة على المستوى $(-1, 7), (2, 6), (4, -3)$. جد المساحة الحقيقية للحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل مترًا على الأرض.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) تحدٍّ: أوجد قيمة محدِّدة مصفوفة من النوع 3×3، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mn}=\begin{cases}0 & \text{إذا كان } m+n \text{ زوجيًّا}\\ m+n & \text{إذا كان } m+n \text{ فرديًّا}\end{cases}$$

33) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

a) المحدِّدة تساوي صفرًا.

b) المحدِّدة تساوي 25

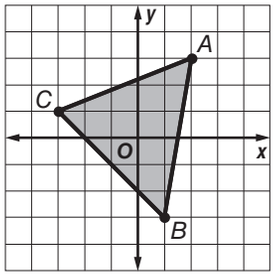
c) جميع العناصر أعداد سالبة والمحدِّدة تساوي -32

34) اكتب: صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين إذا كانت محدِّدة مصفوفة المعاملات تساوي صفرًا.

تدريب على اختبار

35) إجابة قصيرة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2، بحيث تكون جميع عناصرها أعدادًا سالبةً ومحدِّدتها تساوي 20.

36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدِّد إذا كانت مصفوفة الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة: (الدرس 3-2)

37) $\underline{A}_{4\times2}\cdot\underline{B}_{2\times6}$ **38)** $\underline{C}_{5\times4}\cdot\underline{D}_{5\times3}$ **39)** $\underline{E}_{2\times7}\cdot\underline{F}_{7\times1}$

حل كل نظام مما يأتي: (مهارة سابقة)

40) $2x-5y=-26$, $5x+3y=-34$

41) $4y+6x=10$, $2x-7y=22$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-5

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية
Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

فيما سبق:
درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2 × 2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها .

المفردات :
مصفوفة الوحدة
identity matrix
النظير الضربي للمصفوفة
inverse matrix
المعادلة المصفوفية
matrix equation
مصفوفة الثوابت
constant matrix
مصفوفة المتغيرات
variable matrix

لماذا؟



يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 2 × 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3 × 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي
المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}, \underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$ ، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

مثال 1 التحقق من النظير الضربي

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I}$.

اكتب المعادلة $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

اضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بما أن $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{I}$، فإن أيًّا منهما لا تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

b) $\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

كلٌّ من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F} = \underline{I}$

اكتب المعادلة $\underline{F} \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{15}{8}-\frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4}+\frac{6}{4} & -\frac{10}{8}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اضرب المصفوفتين

اكتب المعادلة $\underline{G} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{10}{8} & -\frac{15}{4}+\frac{30}{8} \\ \frac{3}{4}-\frac{6}{8} & -\frac{5}{4}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اضرب المصفوفتين

بما أن $\underline{I} = \underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F}$، فإن كلًّا من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ نظير ضربي للأخرى.

تحقق من فهمك

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

يمكنك استعمال المحدِّدات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

مفهوم أساسي النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدِّدة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب $\underline{A}^{-1}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 2 إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

a) $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

احسب المحدّدة $|\underline{P}| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$

بما أن قيمة المحدِّدة لا تساوي صفرًا، فإن $\underline{P}^{-1}$ موجودة .

تعريف النظير الضربي للمصفوفة من الرتبة 2 × 2 $\underline{P}^{-1} = \frac{1}{|\underline{P}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$|\underline{P}| = 3$ $= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

بسط $= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

تأكد: أوجد ناتجي ضرب المصفوفتين. وإذا كان كلٌّ من ناتجي الضرب يساوي I، فإن كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

$$\checkmark \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3}+\frac{10}{3} & \frac{35}{3}-\frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{10}{3}-\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $\underline{Q} = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

احسب المحدّدة $|\underline{Q}| = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$

بما أن قيمة المحدِّدة تساوي صفرًا ، فإن $\underline{Q}^{-1}$ ليس موجودًا.

تحقق من فهمك

2A) $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

2B) $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة 2 × 2.

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$ ، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$ ، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًا نجده كما في الخطوات 4 – 2.

2) بادل بين موضعي عنصري القطر الرئيس.

3) غيِّر إشارتي عنصري القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 3 ,2 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت: الثوابت في النظام فقط

مصفوفة المتغيرات: المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة المعاملات

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

ثم حُلَّ المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تُحَلُّ بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

المعادلة	
$ax = b$	
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	اضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد
$1x = \frac{b}{a}$	$\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}$, $\left(\frac{1}{a}\right)a = 1$
$x = \frac{b}{a}$	$\underline{I}\underline{X} = \underline{X}$, $1x = x$

$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$	
$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$	
$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$	
$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$	

لاحظ أن حَلَّ المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

مثال 3 من واقع الحياة

حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

سفر: **زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة، إذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 1.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 1.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زوَّد به سيارته من البنزين 100 لتر، بسعر إجمالي 149 ريال، فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟**

يُكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 100$$
$$1.50x + 1.45y = 149$$

الخطوة 1: اكتب المعادلة المصفوفية بافتراض أن x عدد لترات البنزين من المحطة الأولى، وy عدد لترات البنزين من المحطة الثانية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.50 & 1.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 149 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{1.50 - 1.45} \begin{bmatrix} 1.45 & -1 \\ -1.50 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05}\begin{bmatrix} 1.45 & -1 \\ -1.50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ 30 & -20 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: حُلَّ المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ 30 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 149 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix}$$

إذن الحل هو (80, 20)، وهذا يعني أن سلمان زوّد سيارته بـ80 لترًا من المحطة الأولى و 20 لترًا من الثانية.



الربط مع الحياة

هناك 90% من محطات الوقود العاملة في المملكة يُديرها أفراد يمتلكون هذه المحطات، بينما 10% فقط من هذه المحطات تُديرها شركات متخصصة في مجال تشغيل وإدارة محطات الوقود.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال 1 حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ **2)** $\underline{F}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\end{bmatrix}, \underline{G}=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&-1\end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

3) $\begin{bmatrix}6&-3\\-1&0\end{bmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix}-3&0\\5&2\end{bmatrix}$

مثال 3 **5) نقود:** مع أحمد 25 قطعة نقدية من فئة أرباع وأنصاف الريالات، بحيث تبلغ قيمة ما معه 8.5 ريالات. فما عدد الأرباع والأنصاف التي معه؟

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

6) $-2x+y=9$, $x+y=3$ **7)** $4x-2y=22$, $6x+9y=-3$ **8)** $-2x+y=-4$, $3x+y=1$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

9) $\underline{K}=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}, \underline{L}=\begin{bmatrix}0&1\\2&-1\end{bmatrix}$ **10)** $\underline{M}=\begin{bmatrix}0&2\\4&5\end{bmatrix}, \underline{N}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ **11)** $\underline{R}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \underline{S}=\begin{bmatrix}2&4\\4&2\end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

12) $\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$ **13)** $\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix}1&-1\\-6&-1\end{bmatrix}$ **15)** $\begin{bmatrix}-5&-4\\4&2\end{bmatrix}$

مثال 3 **16) مشتريات:** دفع سعد 225 ريالًا لشراء 5 أقلام حبر جافة وَ 6 أقلام حبر سائلة، بينما دفع ماجد 120 ريالًا لشراء 3 أقلام جافة من النوع نفسه وَ3 أقلام سائلة من النوع نفسه. فإذا كان سعر القلم الجاف x. وسعر القلم السائل y، فاستعمل معادلة مصفوفية؛ لإيجاد سعر القلم الجاف.

17) سكان: يبين الشكل الآتي نسبة الهجرة السنوية بين إحدى المدن وضواحيها.



اكتب مصفوفة تبين نسبة المهاجرين والباقين في كلٍّ من المدينة والضواحي.

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام إن أمكن فيما يأتي:

18) $-x+y=4$, $-x+y=-4$ **19)** $-x+y=3$, $-2x+y=6$ **20)** $x+y=4$, $-4x+y=9$

21) $3x+y=3$, $5x+3y=6$ **22)** $y-x=5$, $2y-2x=8$ **23)** $4x+2y=6$, $6x-3y=9$

24) $1.6y-0.2x=1$, $0.4y-0.1x=0.5$ **25)** $4y-x=-2$, $3y-x=6$ **26)** $2y-4x=3$, $4x-3y=-6$



الربط مع الحياة

تسعى حكومتنا الرشيدة إلى إقامة العديد من المشاريع في الضواحي بهدف وضع بنية تحتية فاعلة، مما يشجع على الهجرة العكسية أو هجرة السكان من المدن إلى الضواحي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1446

مسائل مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ: أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

28) تحدٍّ: صِفِ المعادلة المصفوفية لنظام معادلتين خطيتين بمتغيرين ذات العدد اللانهائي من الحلول.

29) تبرير: حدِّد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسِّر إجابتك.
"المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

30) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل.

31) اكتب: اشرح كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل أنظمة معادلات، ومتى يكون استعماله أكثر فاعلية.

تدريب على اختبار

32) إجابة قصيرة: تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 2 ريال، وحجم متوسط بسعر 3 ريالاتٍ، وحجم كبير بسعر 4 ريالاتٍ، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 150 ريالًا. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟

A 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

مراجعة تراكمية

جد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي: (الدرس 4-2)

33) $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$

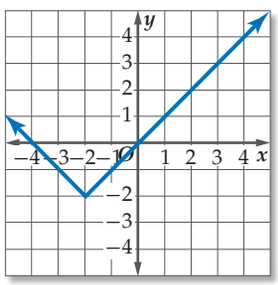
34) $\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$

35) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

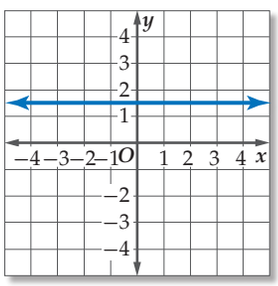
36) حليب: تنتج مزرعة أبقار 200 جالون على الأكثر من الحليب الطازج والحليب المبستر يوميًّا. فإذا كان كل زبون من زبائن المزرعة يحتاج إلى 15 جالونًا على الأقل من الحليب المبستر، و21 جالونًا على الأقل من الحليب الطازج يوميًّا، وكان ربح المزرعة في الجالون الواحد من الحليب المبستر 8.2 ريالات، ومن الحليب الطازج 7.5 ريالات. فكم عدد الجالونات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 6-1)

حدِّد نوع الدالة الممثلة بيانيًّا في كلّ مما يأتي: (الدرس 3-1)

37)



38)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire والمصفوفة الموسَّعة لحل نظام معادلات خطية.

يُمكنك حَلُّ نظام معادلات خطية باستعمال الحاسبة البيانية TI – nspire، إذ تحتوي **المصفوفة الموسعة** على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي إلى اليمين يحوي الثوابت، وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل تحديد حل نظامٍ من المعادلات.

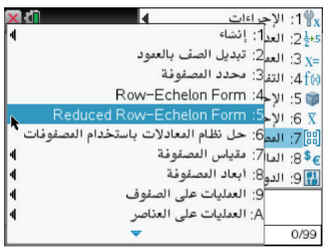
مثال

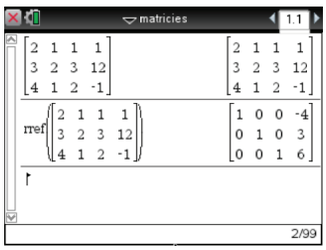
اكتب مصفوفةً موسعةً لنظام المعادلات الآتي، ثم حُلَّ هذا النظام باستعمال الحاسبة البيانية:

$$2x + y + z = 1$$
$$3x + 2y + 3z = 12$$
$$4x + y + 2z = -1$$









الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on).
- من الشاشة الظاهرة اختر A العمليات الحسابية ومنها اختر 1 مستند جديد
- اختر 1: إضافة تطبيق الحاسبة .
- اضغط على مفتاح (menu) ثم اختر 7: المصفوفات و المتجهات ومنها اختر 1: إنشاء ومنها 1: المصفوفة فتظهر شاشة نحدِّد من خلالها عدد الصفوف وعدد الأعمدة.
- أدخل عدد الصفوف ثم اضغط (tab) وأدخل عدد الأعمدة ثم اضغط (enter) .
- أدخل معاملات المتغيِّرات والثوابت مستعملًا (tab) للتنقل، ثم اضغط (enter) .
- اضغط (doc) واختر منها 1: ملف ثم 5: حفظ باسم... ثم سمّ الملف واضغط حفظ .
- اضغط (menu) ، ثم اختر 7: المصفوفات و المتجهات ومنها اختر 5: Reduced Row-Echelon Form .
- استعمل السهم لأعلى ▲ لتظلِّل المصفوفة الموسَّعة التي كتبتها ثم اضغط (enter) ثم (enter) مرة أخرى فيظهر الحل.

ادرس الشكل المختزل للمصفوفة، ولاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى تشكّل مصفوفة محايدة من الرتبة 3×3 ، وتستنتج من الصف الأول أن $x = -4$، ومن الصف الثاني أن $y = 3$، ومن الصف الثالث أن $z = 6$ ، وعليه يكون الحل $(-4, 3, 6)$.

تمارين:

اكتب مصفوفةً موسّعةً لكل نظام معادلات فيما يأتي، ثم حُلَّه باستعمال الحاسبة البيانية:

1) $3x + 2y = -4$
$4x + 7y = 13$

2) $4x + 6y = 0$
$8x - 2y = 7$

3) $6x - 4y + 2z = -4$
$2x - 2y + 6z = 10$
$2x + 2y + 2z = -2$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2024 - 1445

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المصفوفات (الدرس 2-1)

- المصفوفة: هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين.
- المصفوفات المتساوية لها الرتبة نفسها، وعناصرها المتناظرة متساوية.

العمليات على المصفوفات (الدرسان 2-2 و 2-3)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لهما الرتبة نفسها. وذلك بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها.
- لضرب مصفوفة في عدد ثابت k ، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.
- يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

المحددات وقاعدة كرامر (الدرس 2-4)

- قيمة محددة المصفوفة المربعة من الرتبة 2×2 تساوي حاصل ضرب عنصري القُطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القُطر الآخر.
- تستعمل المحددات في حل أنظمة المعادلات الخطية، وفي إيجاد مساحة مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه.

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الدرس 2-5)

- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار.
- تكون كل من المصفوفتين نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي مصفوفة الوحدة.
- لحل معادلة مصفوفية من الشكل $\underline{A}\underline{X} = \underline{B}$، أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم اضرب طرفي المعادلة فيه.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات

المصفوفة (64)
العنصر (64)
الرتبة (64)
مصفوفة الصف (65)
مصفوفة العمود (65)
المصفوفة المربعة (65)
المصفوفة الصفرية (65)
المصفوفات المتساوية (65)
جمع مصفوفتين (71)
طرح مصفوفتين (71)
ضرب المصفوفة في عدد ثابت (72)
المحددة (85)
محددة الدرجة الثانية (85)
محددة الدرجة الثالثة (86)
قاعدة الأقطار (86)
مصفوفة المعاملات (88)
قاعدة كرامر (88)
مصفوفة الوحدة (93)
النظير الضربي للمصفوفة (93)
المعادلة المصفوفية (95)
مصفوفة الثوابت (95)
مصفوفة المتغيرات (95)

اختبر مفرداتك

اختر الكلمة المناسبة من المفردات أعلاه لتكمل كل جملة فيما يأتي:

1) الترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين يسمى _____ .

2) عملية ضرب جميع عناصر المصفوفة في عدد تسمى _____ .

3) تُسمى المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات _____ .

4) كل قيمة في المصفوفة تُسمى _____.

5) يُسمى عدد الصفوف × عدد الأعمدة في المصفوفة _____ المصفوفة.

6) المصفوفة المربعة التي عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار هي _____ .

7) المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار هي _____ .

8) قيمة _____ المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ تساوي -1.

9) إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين هو مصفوفة الوحدة، فإن كلتا المصفوفتين تكون _____ للأخرى.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مراجعة الدروس

2-1 مقدمة في المصفوفات (الصفحات: 69-64)

10) نادٍ رياضي: يبين الجدول الآتي عدد المشتركين شهريًّا وسنويًّا في نادٍ رياضي في 3 رياضات مختلفة:

	اللياقة البدنية	السباحة	تخفيض الوزن
اشتراك شهري	31	108	64
اشتراك سنوي	68	9	42

a) نظّم بيانات الجدول في المصفوفة $\underline{A}$.

b) ما رتبة المصفوفة $\underline{A}$؟

c) ما قيمة العنصر a_{23}؟

d) ما قيمة العنصر a_{11}؟

e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول والثاني، وفسِّر النتائج.

مثال 1

متحف: يبين الجدول الآتي عدد زوار متحف في الفترة الصباحية والفترة المسائية خلال 3 أيام:

	اليوم الأول	اليوم الثاني	اليوم الثالث
الفترة الصباحية	37	19	26
الفترة المسائية	69	58	75

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الزوار. $\begin{bmatrix} 37 & 19 & 26 \\ 69 & 58 & 75 \end{bmatrix}$

b) ما رتبة المصفوفة؟ 2×3

c) اجمع عناصر كلٍّ من الصفين 1 و 2، وفسِّر النتائج.
مجموع عناصر الصف 1 هو 82، ويمثل عدد الزوار في الفترة الصباحية للأيام الثلاثة. ومجموع عناصر الصف 2 هو 202، ويمثل عدد الزوار في الفترة المسائية للأيام الثلاثة.

2-2 العمليات على المصفوفات (الصفحات: 76-71)

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

12) $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right)$

مثال 2

أوجد ناتج $2\underline{B} + 3\underline{A}$ إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$$3\underline{A} = 3\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, 2\underline{B} = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$2\underline{B} + 3\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

2-3 ضرب المصفوفات (الصفحات: 83-77)

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

13) $\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

15) مشتريات اشترى راشد 4 علب حليب، و 2 kg تفاحًا، و 3 kg بطاطس، وكيسًا واحدًا من الأرز، وتبين المصفوفة أدناه سعر علبة الحليب، والكيلوجرام الواحد من التفاح، والكيلوجرام الواحد من البطاطس، وكذلك سعر كيس الأرز.

أرز	بطاطس	تفاح	حليب
[25	3	10	15]

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد.

مثال 3

أوجد $\underline{X}\underline{Y}$ إذا كانت $\underline{Y} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{X} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\underline{X}\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix} \quad \text{اضرب الصفوف في الأعمدة}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix} \quad \text{بسّط}$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

2-4 المحددات وقاعدة كرامر (الصفحات: 92-85)

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات فيما يأتي:

18) $3x - y = 0$
$5x + 2y = 22$

19) $5x + 2y = 4$
$3x + 4y + 2z = 6$
$7x + 3y + 4z = 29$

20) حرف يدوية: صنعت شيماء 3 أساور، وعقدين بتكلفة مقدارها 85 ريالًا، وصنعت ليلى سوارين و 4 عقود بتكلفة مقدارها 110 ريالات. فإذا كان للعقود التي صنعتها كلٌّ منهما التكلفة نفسها، وكذلك الأساور. فجد تكلفة كلٍّ من العقد، والسوار.

مثال 4

أوجد قيمة: $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 2(-6)$ تعريف محددة الدرجة الثانية

$= 20 + 12 = 32$ بسّط

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام:
$2a + 6b = -1$, $a + 8b = 2$

$a = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر

$= \dfrac{-8 - 12}{16 - 6}$ احسب المحددات

$= \dfrac{-20}{10} = -2$ بسّط

$b = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر

$= \dfrac{4 + 1}{16 - 6}$ احسب المحددات

$= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ بسّط

الحل هو $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الصفحات: 98-93)

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

21) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

22) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

حل المعادلة المصفوفية فيما يأتي:

24) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

26) مشتريات: اشترى سعود 2 kg مكسرات و 2 kg قهوة بمبلغ 140 ريالًا. واشترى ناصر 3 kg مكسرات وكيلوجرامًا قهوة بمبلغ 170 ريالًا. فما سعر الكيلوجرام الواحد من كلا النوعين؟

مثال 6

حل المعادلة المصفوفية: $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$.

الخطوة 1: جد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{-12 - (-15)} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: حل المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 90 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

إذن الحل هو (30, 9).

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، فحدد قيمة كلِّ عنصر مما يأتي:

1) a_{22} **2)** a_{31}

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $-3\begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) مبيعات: تبيع مكتبة 3 مجموعات من كتب الأطفال. ويبين الجدول الآتي تكلفة كل مجموعة وسعر بيعها. فإذا باعت المكتبة 20 مجموعة من الكتب التربوية، و 32 مجموعة من الكتب العلمية، و14 مجموعة من القصص.

المجموعة	التكلفة	سعر البيع (ريال)
تربوية	100	120
علمية	90	110
قصص	130	150

a) نظّم البيانات في مصفوفات، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية.

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصلت عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة.

8) إذا كان $\underline{A}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \underline{C}=\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج $\underline{A}\underline{B} - \underline{A}\underline{C}$

9) استعمل المحددات لإيجاد مساحة $\triangle xyz$ الذي رؤوسه $x(1\ ,\ 2)\ ,\ y(3\ ,\ 6)\ ,\ z(-1\ ,\ 4)$.

10) اختيار من متعدد: أوجد قيمة محددة المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A -44 **C** $\frac{1}{44}$

B 44 **D** $-\frac{1}{44}$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

11) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **12)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

استعمل معادلة مصفوفية لحل نظام المعادلتين الآتي:

15) $2x - y = -9$

$x + 2y = 8$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات فيما يأتي:

16) $x - y + 2z = 0$

$3x + z = 11$

$-x + 2y = 0$

17) $6x + 2y + 4z = 2$

$3x + 4y - 8z = -3$

$-3x - 6y + 12z = 5$

أسئلة الإجابات الشبكية

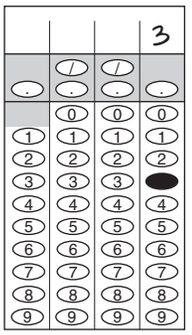
من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بالإضافة إلى أسئلة الاختيار من متعدد، وأسئلة الإجابات القصيرة، وأسئلة الإجابات المطولة، أسئلة الإجابات الشبكية. ويتطلب هذا النوع من الأسئلة كتابة الإجابة في نموذج خاص، وذلك بتظليل الدوائر التي تمثل الإجابات الصحيحة.

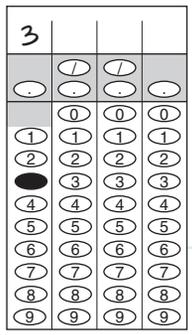
استراتيجيات حل أسئلة الإجابات الشبكية

الخطوة 1

اقرأ المسألة بإمعان، ثم حلّها.

- تأكد من أن إجابتك لها معنًى.
- إذا كان الوقت كافيًا، فتحقق من إجابتك.

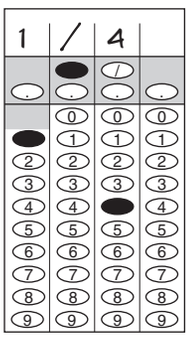


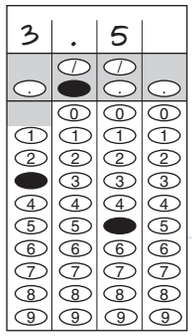


الخطوة 2

اكتب إجابتك في مربع الإجابة.

- اكتب عددًا واحدًا فقط أو رمزًا في كل مربع إجابة على نموذج الإجابة الشبكية.
- لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.
- يمكن أن تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كلية، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.





الخطوة 3

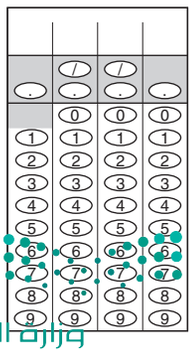
دوّن الإجابة في نموذج الإجابة الشبكية.

- ظلّل دائرة واحدة فقط لكل مربع إجابة، وتأكد من أنك ظللت قيمة مناظرة للتي في المربع.
- ظلّل بصورة واضحة وكاملة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

زوّد محمد سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من مكة المكرمة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 1.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 1.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زوّد به سيارته من البنزين 100 لتر بسعر إجمالي 147.25 ريالًا. فكم لتر بنزين زود به سيارته من كل محطة؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اقرأ المسألة جيدًا، إذ يمكن حلُّها باستعمال نظامٍ من معادلتين.

لتكن x تمثل عدد اللترات من المحطة الأولى، وَ y تمثل عدد اللترات من المحطة الثانية،

لذا يكتب نظام المعادلتبن الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 100$$

$$1.50x + 1.45y = 147.25$$

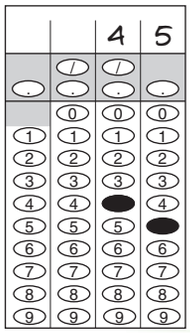
من الممكن حل هذا النظام جبريًّا، ولكن يمكن حلُّه بشكل أسرع وبطريقة أسهل باستعمال المصفوفات والحاسبة البيانية.

حل المسألة

أدخل كلًّا من مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت إلى الحاسبة البيانية، ثم أوجد الحل باستعمال النظير الضربي.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.50 & 1.45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 147.25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

إذن زوّد محمد سيارته بـ 45 لترًا من المحطة الأولى، و 55 لترًا من المحطة الثانية.



تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلِّها. انسخ نموذج الإجابة، واستعمله في الإجابة.

1) أوجد محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$.

2) أوجد محددة المصفوفة:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

الفصل 2

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$،

$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

فما قيمة $2\underline{A} + 3\underline{B}$ ؟

A $\begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} -5 & 15 & 30 \\ 15 & 25 & 15 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 15 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

2) أوجد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [\ 1 \quad 3\ ]$ ، إذا كان ذلك ممكنًا.

A $[\ -3\ ]$ **C** $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

B $[\ 11\ ]$ **D** الضرب غير معرف

3) في أيٍّ من الدوال الآتية يكون $f\left(\frac{-1}{3}\right) \neq 0$ ؟

A $f(x) = -|3x| + 1$

B $f(x) = [3x + 1]$

C $f(x) = |3x| + 1$

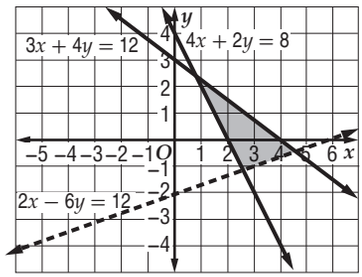
D $f(x) = [3x] + 1$

4) النقاط $D(-6, 2), E(3, 5), F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$، احسب مساحة هذا المثلث:

A 54.5 وحدة مربعة. **C** 60 وحدة مربعة.

B 58 وحدة مربعة. **D** 61.5 وحدة مربعة.

5) ما النظام الذي تمثل حله المنطقة المظللة في الشكل أدناه؟



A $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$

B $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

C $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$

D $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

6) ما رتبة المصفوفة: $\underline{D} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ؟

A 4×2 **C** 4×8

B 2×4 **D** 8×4

7) أيٌّ من الدوال الآتية يكون مداها: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$ ؟

A $f(x) = [x]$

B $f(x) = |- x + 1|$

C $f(x) = -|x|$

D $f(x) = -[x] + 1$

8) إذا كان $\underline{X} = \begin{bmatrix} a + b & 2 \\ 7 & c + d \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} 8 & d \\ b & a \end{bmatrix}$

وكانت $\underline{X} = \underline{Y}$ فإن قيمة c تساوي:

A -1

B 2

C -2

D 1

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

9) هل يوجد للمصفوفة $\underline{B}$ نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

10) احسب قيمة محددة المصفوفة:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

11) يستعمل حمد شبكة إحداثيات ليصمم أرضية جديدة في فناء منزله. فإذا كانت الأرضية تمثل حل نظام المتباينات $y \le -x + 32, x \ge 0, y \ge 0, x \le 16, y \le 20$، وكانت كل وحدة على شبكة الإحداثيات تمثل قدمًا واحدة على الأرض، فما مساحة الأرضية بالقدم المربعة؟

12) مع عمر 14 قطعة نقدية من فئة الريال، ونصف الريال. فإذا كانت القيمة الكلية لهذه القطع النقدية هي 10.5 ريالات، فاستعمل هذه المعلومات للإجابة عن كل سؤال مما يأتي:

a) افرض أن d تمثل عدد الريالات التي يملكها عمر، وq عدد أنصاف الريالات التي يملكها. اكتب نظام معادلات يمثّل هذه الحالة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن أن تستعمل لإيجاد قيم كلٍّ من d و q.

c) حل المعادلة المصفوفية في الفرع b باستعمال النظير الضربي. ما عدد الريالات وأنصاف الريالات التي يملكها عمر؟

13) مثل بيانيًّا نظام المتباينات الآتي، ثم حدد رؤوس منطقة الحل وجد القيمة العظمى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

$$x \ge 0, y \ge 0$$
$$x + 2y \le 14$$
$$3x + 4y \le 36$$
$$f(x, y) = 8x + 12y$$

14) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، ومتى لا يمكن ضربهما، وأعط مثالًا على ذلك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى...	2-2	2-3	1-3	2-4	1-5	2-1	1-4	2-1	2-5	2-4	1-5	2-5	1-6	2-3

الفصل 3

كثيرات الحدود ودوالها

Polynomials and Polynomial Functions



فيما سبق:
درستُ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا، وحل المعادلات التربيعية.

والآن:
- أتعرف الأعداد المركبة، وأجري العمليات عليها.
- أحل معادلات تربيعية.
- أجمع كثيرات الحدود وأطرحها وأضربها وأقسمها.
- أحلّل دوال كثيرات الحدود.
- أصف التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود، وأحل معادلات كثيرات الحدود.
- أجد عوامل دوال كثيرات الحدود وأصفارها.
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.

لماذا؟

مواصلات: يمكن استعمال دوال كثيرات الحدود لتحديد جداول انطلاق الحافلات، والطاقة الاستيعابية للطرق السريعة، والأنماط المرورية، ومتوسط تكاليف الوقود. وأسعار كلٍّ من السيارات الجديدة والمستعملة.

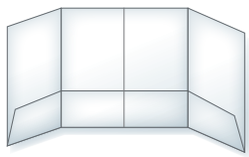
المطويات منظم أفكار

كثيرات الحدود ودوالها: اعمل المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود ودوالها، ابدأ بورقة A4.

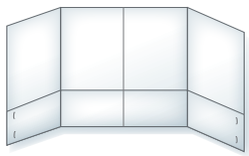
1. **اثن** الورقة بعرض 5cm بصورة موازية للضلع الأطول.



2. **اثن** الورقة بصورة موازية للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.



3. **ثبّت** الحافتين الطرفيتين للثنيه كما يظهر في الشكل أدناه.



4. **عنون** الأقسام الأربعة بالعناوين: الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أعد كتابة كلٍّ من العبارات الآتية في صورة جمع:

(يستعمل مع الدرس 3-4)

1) $-5 - 13$

2) $5 - 3y$

3) $5mr - 7mp$

4) $3x^2y - 14xy^2$

5) **محاضرات:** حضر 20 شخصًا محاضرة، ثم غادروا القاعة في مجموعات ثنائية، فغادرت منهم x مجموعة. اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع.

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس: (يستعمل مع الدرس 3-4)

6) $-4(a + 5)$

7) $-1(3b^2 + 2b - 1)$

8) $-\frac{1}{2}(2m - 5)$

9) $-\frac{3}{4}(3z + 5)$

10) **هدايا:** وزع معلم قلمًا وحقيبة على كل طالب في صفٍّ يضم 15 طالبًا. إذا كان ثمن القلم 8 ريالاتٍ، والحقيبة 18 ريالًا، فاكتب عبارة تمثل ثمن الأقلام والحقائب. استعمل خاصية التوزيع لحساب الثمن.

حل كل معادلة فيما يأتي: (يستعمل مع الدرس 3-7)

11) $x^2 + 2x - 8 = 0$

12) $x^2 - 5x + 6 = 0$

13) $x^2 - x - 20 = 0$

14) $x^2 - x = 0$

15) **فيزياء:** إذا سقط جسم من ارتفاع 50ft عن سطح الأرض فإن ارتفاعه عن سطحها بعد t ثانية يعبر عنه بالصيغة $h = -16t^2 + 50$. استعمل المعادلة $-16t^2 + 50 = 0$ لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى الأرض.

مراجعة سريعة

مثال 1

أعد كتابة العبارة $2xy - 3 - z$ على صورة جمع.

$2xy - 3 - z$	العبارة الأصلية
$= 2xy + (-3) + (-z)$	أعد الكتابة باستعمال الجمع

مثال 2

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة الآتية دون أقواس: $-3(a + b - c)$

$-3(a + b - c)$	العبارة الأصلية
$= -3(a) + (-3)(b) + (-3)(-c)$	خاصية التوزيع
$= -3a - 3b + 3c$	بسّط

مثال 3

حل المعادلة: $x^2 - 6x + 12 = 19$.

يمكن استعمال طريقة إكمال المربع.

$x^2 - 6x + 12 = 19$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 6x = 7$	اطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$	أضف 9 لكلا الطرفين
$(x - 3)^2 = 16$	حلّل $x^2 - 6x + 9$
$x - 3 = \pm 4$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = 3 \pm 4$	أضف 3 لكلا الطرفين

الحلان هما: $-1, 7$



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-1 الأعداد المركبة
Complex Numbers

فيما سبق:
درستُ تبسيط الجذور التربيعية.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أُجري العمليات على الأعداد التخيُّلية البحتة.
- أُجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات

الوحدة التخيُّلية
imaginary unit

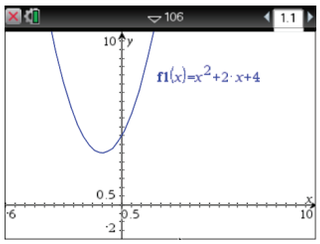
العدد التخيُّلي البحت
pure imaginary number

العدد المركب
complex number

المركبان المترافقان
complex conjugates

لماذا؟

بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لايقطع المحور x، لذا ليس للمعادلة جذور حقيقية، فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟



[−6, 10] scl: 0.5 by [−2, 10] scl: 0.5

للتأكد من ذلك استعمل الآلة الحاسبة بالضغط على مفتاح on، ومنها اختر 1 مستند جديد ثم اختر 1: إضافة تطبيق الحاسبة ثم اضغط menu واختر منها 3: العمليات الجبرية 3: ادوات كثيرات الحدود 2: الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود



ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط enter enter فيظهر على الشاشة كلمة **خطأ**، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيُّلية.

الأعداد التخيلية البحتة: قادت المعادلات "كالمعادلة السابقة" الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، ووحدتها التخيلية i ، حيث تعرف **الوحدة التخيُّلية** i على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن $i = \sqrt{-1}$ ، وهذا يعني أن $i^2 = -1$

والأعداد في الصورة $i\sqrt{3}$, $-2i$, $6i$، تسمى **أعدادًا تخيُّلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن: $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1} = bi$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

a) $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3}\\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}\\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\\ &= 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6}\\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2}\ \sqrt{6}\\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6}\\ &= 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt{-18}$

1B) $\sqrt{-125}$

تُحقق الأعداد التخيلية البحتة كلًّا من الخاصيتين (التجميعية والتبديلية) على الضرب، ويبين الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$	$i^6 = (i^2)^3 = -1$	$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 2 ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $-5i \cdot 3i$

$-5i \cdot 3i = -15i^2$	اضرب
$= -15(-1)$	$i^2 = -1$
$= 15$	بسّط

b) $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$	$i = \sqrt{-1}$
$= i^2\sqrt{90}$	اضرب
$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$	بسّط
$= -3\sqrt{10}$	اضرب

تحقق من فهمك

2A) $3i \cdot 4i$ **2B)** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ **2C)** i^{31}

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر التربيعي

راجع خصائص الجذر التربيعي التي درستها في الصف الثالث المتوسط.

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة : $4x^2 + 256 = 0$.

$4x^2 + 256 = 0$	المعادلة الأصلية
$4x^2 = -256$	اطرح **256** من كلا الطرفين
$x^2 = -64$	اقسم كلا الطرفين على **4**
$x = \pm\sqrt{-64}$	خاصية الجذر التربيعي
$x = \pm 8i$	$\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$

تحقق من فهمك

3A) $4x^2 + 100 = 0$ **3B)** $x^2 + 4 = 0$

العمليات على الأعداد المركبة : تتكون العبارة $2+3i$ من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما، وهما العدد الحقيقي 2 والعدد التخيُّلي $3i$، ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.

مفهوم أساسي الأعداد المركبة (C)

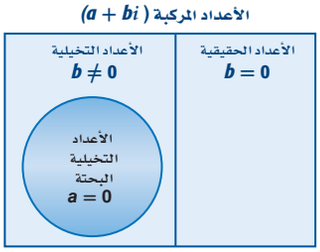
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a وَ b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

يوضِّح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًّا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتَي x، y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

ساو الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر، وكذلك الجزآن التخيليان.

الجزآن الحقيقيان	$3x - 5 = 7$	الجزآن التخيليان	$y - 3 = 6$
اجمع 5 لكلا الطرفين	$3x = 12$	اجمع 3 لكلا الطرفين.	$y = 9$
اقسم كلا الطرفين على 3	$x = 4$		

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمتي x، y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

ويمكنك استعمال كلٍّ من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمِّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمِّع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$	خواص التبديل والتجميع والتوزيع
$= 7 - 3i$	بسّط

b) $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$	خواص التبديل والتجميع والتوزيع
$= 1 - 2i$	بسّط

تحقق من فهمك

5A) $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ **5B)** $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

إرشادات للدراسة

المعاوقة :
في الأعداد المركبة تستعمل كلمة المعاوقة بدلًا من المقاومة.

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب يمكنك تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 6 من واقع الحياة
ضرب الأعداد المركبة

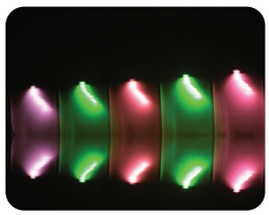
كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $2 + 4i$ أمبير، ومعاوقتها $9 - 3i$ أوم .

$V = C \cdot I$	الصيغة الرياضية
$= (2 + 4i) \cdot (9 - 3i)$	$C = 2 + 4i \, , I = 9 - 3i$
$= 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i)$	باستخدام طريقة التوزيع بالترتيب
$= 18 - 6i + 36i - 12i^2$	اضرب
$= 18 + 30i - 12(-1)$	$i^2 = -1$
$= 30 + 30i$	اجمع

وعليه فإن فرق الجهد هو $30 + 30i$ فولت.

تحقق من فهمك

6) كهرباء: أوجد فرق الجهد لتيار متناوب شدته $2 - 4i$ أمبير، ومعاوقته $3 - 2i$ أوم.



الربط مع الحياة

مصابيح الزينة من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

المصدر: كتاب الفيزياء المقرر للصف الثالث الثانوي، 1437هـ

يسمى العددان المركبان $a - bi \, , \, a + bi$ **مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا على الصورة $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

مثال 7
قسمة الأعداد المركبة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

a) $\frac{2i}{3 + 6i}$

$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \cdot \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$	$3 - 6i \, , \, 3 + 6i$ مترافقان مركّبان
$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$	اضرب
$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$	$i^2 = -1$
$= \frac{6i + 12}{45}$	بسّط
$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15} i$	اكتب الناتج على الصورة $a + bi$

b) $\frac{4 + i}{5i}$

$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$	اضرب في $i _ i$
$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$	اضرب
$= \frac{4i - 1}{-5}$	$i^2 = -1$
$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5} i$	اكتب الناتج على الصورة $a + bi$

تحقق من فهمك

7A) $\frac{-2i}{3 + 5i}$

7B) $\frac{2 + i}{1 - i}$

إرشادات للدراسة

قراءة الرياضيات

يمكنك حل الفرع b من المثال 7 بضرب كل من البسط والمقام في العدد $-5i$ ، ولكن للاختصار تم الضرب في العدد i فقط.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

تأكد

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

المثالان 1 , 2

1) $\sqrt{-81}$

2) $\sqrt{-32}$

3) $(4i)(-3i)$

4) $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

5) i^{40}

6) i^{63}

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي :

مثال 3

7) $4x^2 + 32 = 0$

8) $2x^2 + 24 = 0$

في كلٍّ معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي a , b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

9) $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

10) $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

الأمثلة 5 , 6 , 7

11) $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

12) $(7 + 4i) - (1 + 2i)$

13) $(6 - 8i)(9 + 2i)$

14) $(3 + 2i)(-2 + 4i)$

15) $\frac{3 - i}{4 + 2i}$

16) $\frac{2 + i}{5 + 6i}$

17) كهرباء: تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $3i - 5$ أمبير، وفي الجزء الآخر من الدائرة $9i + 7$ أمبير. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

تدرب وحل المسائل

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

المثالان 1 , 2

18) $\sqrt{-121}$

19) $\sqrt{-169}$

20) $\sqrt{-100}$

21) $\sqrt{-75}$

22) $(-3i)(-7i)(2i)$

23) $4i(-6i)^2$

24) i^{11}

25) i^{25}

26) $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$

27) $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي :

مثال 3

28) $4x^2 + 4 = 0$

29) $3x^2 + 48 = 0$

30) $2x^2 + 10 = 0$

31) $6x^2 + 108 = 0$

في كلٍّ معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي x،y الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

32) $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$

33) $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$

34) $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$

35) $(2x - 4y)i + x + 5y = 15 + 58i$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

الأمثلة 5 , 6 , 7

36 $(-3+i)+(-4-i)$

37 $(11-8i)-(2-8i)$

38 $(1+2i)(1-2i)$

39 $(3+5i)(5-3i)$

40 $(4-i)(6-6i)$

41 $\dfrac{2i}{1+i}$

42 $\dfrac{5}{2+4i}$

43 $\dfrac{5+i}{3i}$

44 $(4-6i)+(4+6i)$

45 $(8-5i)-(7+i)$

46 $(-6-i)(3-3i)$

47 $(1+i)(2+3i)(4-3i)$

48 $\dfrac{4-i\sqrt{2}}{4+i\sqrt{2}}$

49 $\dfrac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$

50 كهرباء: تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $8i+7$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $4i-13$ أوم. اجمع هذين العددين المركّبين لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

كهرباء: استعمل الصيغة $V = C \cdot I$، حيث V فرق الجهد، وC شدة التيار، و I المعاوقة في حل السؤالين 52 , 51 :

51 إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $3+6i$ أمبير، والمعاوقة $-5i$ أوم ، فكم يكون فرق الجهد ؟

52 إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $-20-12i$ فولت، والمعاوقة $-6-4i$ أوم ، فكم تكون شدة التيار؟

53 أوجد ناتج جمع $7+(4+5i)x-ix^2$ إلى $(2+6i)x-8i+3x^2$.

54 بسّط العبارة: $[(2+i)x^2-ix+5+i]-[(-3+4i)x^2+(5-5i)x-6]$

55 تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حدٍّ بعيد المستوى الحقيقي، وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية البحتة على المحور الرأسي.

a) بيانيًّا: مثّل العدد $3+4i$ بيانيًّا في المستوى المركب، وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(3, 4)$، وسمِّ تلك النقطة A.

b) بيانيًّا: مثّل العدد $-2-5i$ بيانيًّا في المستوى المركب وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-2, -5)$، وسمِّها B.

c) بيانيًّا: إذا كانت النقطتان A, B ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C .

d) تحليليًّا: ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A, B, C؟



الربط مع الحياة

الكهرباء هي عدد من التأثيرات الفيزيائية تشمل مجموعة متنوعة من الظواهر الناتجة عن وجود شحنة كهربائية وتدفّقها. وتضم هذه الظواهر: البرق، والكهرباء الساكنة، والمجال والحثّ الكهرومغناطيسيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

56) اكتشف الخطأ: قامت كلٌّ من صفاء ومنال بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$، فأيٌّ منهما على صواب؟ وضِّح إجابتك.

صفاء	منال
$24i^3 = -24i$	$24i^3 = -24$

57) تحدٍّ: بسّط العدد المركب $(1 + 2i)^3$.

58) تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك:

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي"

59) مسألة مفتوحة: اكتب عددين مركّبين يكون ناتج ضربهما يساوي 20.

60) اكتب: وضِّح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية، وكيف تحدد إذا كان للمعادلة التربيعية حلول مركبة فقط أم لا ؟

تدريب على اختبار

61) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5 + 4i) - (x+yi) = (-1-3i)$ صحيحة؟

A $x = 6, y = 7$

B $x = 4, y = i$

C $x = 4, y = i$

D $x = 4, y = 7$

62) قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي:

A $36 - 27i$

B $9 + 36$

C $9 - 36$

D $-27 + 36i$

مراجعة تراكمية

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي مستعملًا التحليل إلى العوامل: (مهارة سابقة)

63) $2x^2 + 7x = 15$ **64)** $4x^2 - 12 = 22x$ **65)** $6x^2 = 5x + 4$

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا ممَّا يأتي، (إذا كان ذلك ممكنًا): (مهارة سابقة)

66) مجموعهما 3−، وناتج ضربهما 40 − .

67) مجموعهما 21−، وناتج ضربهما 108 .

هل تمثّل كلٌّ من ثلاثيات الحدود الآتية مربعًا كاملًا أم لا؟ (مهارة سابقة)

68) $x^2 + 16x + 64$ **69)** $x^2 - 12x + 36$

70) $x^2 + 8x - 16$ **71)** $x^2 + 5x + 6.25$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-2

القانون العام والمميز
The Quadratic Formula and the Discriminant

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المفردات
القانون العام
Quadratic Formula
المميز
discriminant

لماذا؟



أُطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$h = -4.9t^2 + 117t + 42$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$.

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: تمكنت سابقًا من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي، أو بإكمال المربع، أو باستعمال القانون العام؛ وهو قانون يمكن استعماله لحل أية معادلة تربيعية، ويمكن اشتقاق هذا القانون من خلال حل معادلة تربيعية على الصورة القياسية.

	الحالة العامة	مثال
معادلة تربيعية على الصورة القياسية	$ax^2 + bx + c = 0$	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
اقسم كلا الطرفين على a	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
اطرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
أكمل المربع	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
حلّل الطرف الأيسر	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
بسّط الطرف الأيمن	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$
خاصية الجذر التربيعي	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$
اطرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
بسّط	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال 1

معادلة لها جذران نسبيان

حل المعادلة: $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

أولًا اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدّد قيم كلٍّ من a,b,c .

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$x^2 - 10x = 11 \quad \rightarrow \quad 1x^2 - 10x - 11 = 0$$

ثم عوض بعد ذلك بتلك القيم في القانون العام.

القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

عوّض عن: a بالعدد 1، b بالعدد -10، c بالعدد -11: $= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$

اضرب: $= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$

بسّط: $= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$

$\sqrt{144} = 12$: $= \frac{10 \pm 12}{2}$

اكتب x على صورة معادلتين: $x = \frac{10 + 12}{2}$ أو $x = \frac{10 - 12}{2}$

بسّط: $= 11$ $\quad = -1$

وعليه يكون الحلان هما: $11، -1$.

تحقق: عوض كلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 10x = 11$	$x^2 - 10x = 11$
$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$	$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$
$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$	$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$
$11 = 11$ ✓	$11 = 11$ ✓

تحقق من فهمك

(1A) $x^2 + 6x = 16$

(1B) $2x^2 + 25x + 33 = 0$

عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا، فإننا نحصل على جذرٍ نسبيٍّ واحدٍ، ويكون حل المعادلة في هذه الحالة هو هذا الجذر النسبي، ولكنه مكرر مرتين .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



تاريخ الرياضيات

براهام جوبتا

(598-668 م) عالم رياضيات هندي، وهو أول من أوجد حلًا عامًّا للمعادلة التربيعية في الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمَّى الآن القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال 2 معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

حُلَّ المعادلة: $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدِّد قيم كلٍّ من a, b, c، وعوّض هذه القيم في القانون العام .

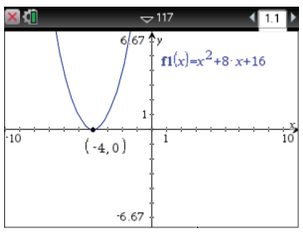
القانون العام $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

عوّض عن a بالعدد 1، وعن b بالعدد 8 ، وعن c بالعدد 16 $= \dfrac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$

بسّط $= \dfrac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$

$\sqrt{0} = 0$ $= \dfrac{-8}{2} = -4$

الحل هو -4 (مكرر مرتين) .



[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = x^2 + 8x + 16$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية الصفر في الحاسبة البيانية للحصول على قيمة صفر الدالة المرتبطة وهو: $x = -4$

تحقق من فهمك

(2A) $x^2 - 16x + 64 = 0$

(2B) $x^2 + 34x + 289 = 0$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها في الصورة الجذرية .

إرشادات للدراسة

إظهار كامل التمثيل البياني:

لإظهار التمثيل البياني للدالة كاملًا على الشاشة. اضغط مفتاح menu ومنها اختر 4: تكبير/تصغير النافذة ثم اختر 1: إعدادات النافذة لتحدد التدريج المناسب للمتغير y فاختر مثلًا

القيمة الصغرى لـ y: -15

و القيمة العظمى لـ y: 7

مثال 3 الجذور غير النسبية

حُلَّ المعادلة: $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

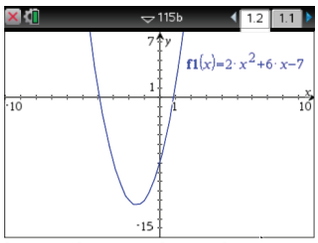
القانون العام $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

عوّض عن a بالعدد 2، وعن b بالعدد 6 ، وعن c بالعدد −7 $= \dfrac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$

بسّط $= \dfrac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$

$\sqrt{92} = \sqrt{4\,(23)} = 2\sqrt{23}$ $= \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$

الحلَّان التقريبيَّان هما: 0.9 ، −3.9



[−10, 10] scl: 1 by [−15, 7] scl: 1

تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = 2x^2 + 6x - 7$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية الصفر في الحاسبة البيانية للحصول على القيمتين التقريبيتين لصفرَي الدالة المرتبطة وهما: -3.9 , 0.9

تحقق من فهمك

(3A) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

(3B) $x^2 - 8x + 9 = 0$

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

تذكّر أن تكتب حلك في الصورة $a + bi$ ، وهذه الصورة تُسمّى الصورة القياسية للعدد المركب.

مثال 4 الجذور المركبة

حُلَّ المعادلة: $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

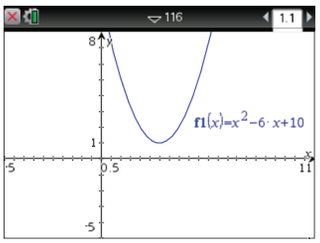
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بالعدد 1 ، وعن b بالعدد -6 ، وعن c بالعدد 10

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$ بسّط

$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i$

$$= 3 \pm i$$ بسّط

الحلّان هما: $3 + i$ ، $3 - i$ وهما عددان مركبان مترافقان.



[−5, 11] scl: 0.5 by [−5, 8] scl: 1

تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة أن الحلّين عددان مركبان، ولكن لا يساعدك التمثيل البياني على إيجادهما . وللتحقق من صحة الحلّين المركبين، عوّضهما في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 + i$
$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$	أوجد مفكوك $(3 + i)^2$ وخاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$
$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 - i$
$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$	أوجد مفكوك $(3 - i)^2$ وخاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط.
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

تحقق من فهمك

(4A $3x^2 + 5x + 4 = 0$

(4B $x^2 - 4x = -13$

الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية، لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. العبارة $b^2 - 4ac$ تسمى **المميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ← المميز

ويمكنك استعمال المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية وأنواعها، والجدول في الصفحة الآتية يلخص الأنواع الممكنة للجذور ، وذلك للتأكد من صحة حلك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إرشادات للدراسة

الجذور

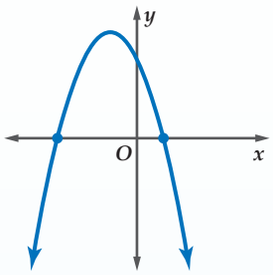
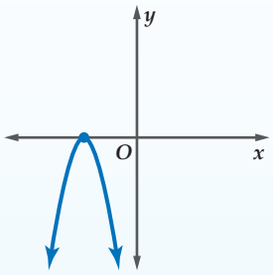
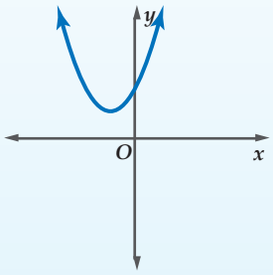
تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X.

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

المميز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b, c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي مكرر مرتين	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان مترافقان	

مثال 5

وصف الجذور

أوجد قيمة المميز لكلٍّ من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كلٍّ منهما وأنواعها:

a) $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7، b = -11، c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب؛ لذا يوجد جذران مركبان مترافقان.

b) $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1، b = 22، c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي صفرًا؛ لذا يوجد جذر حقيقي واحد مكرر مرتين.

تحقق من فهمك

5A) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

5B) $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، والجدول أدناه يلخص تلك الطرائق.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حل المعادلات التربيعية

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا مثال: $x^2 - 7x = 0$؛ أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 5x + 6 = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	عندما لايمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها. مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تأكد

الأمثلة 1,4 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $x^2 + 12x - 9 = 0$

2) $x^2 + 8x + 5 = 0$

3) $4x^2 - 5x - 2 = 0$

4) $9x^2 + 6x - 4 = 0$

5) $10x^2 - 3 = 13x$

6) $22x = 12x^2 + 6$

7) $-3x^2 + 4x = -8$

8) $x^2 + 3 = -6x + 8$

مثال 5 أجب عن الفرعين a،b لكلِّ معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

3) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

9) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

10) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

11) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

12) $5x^2 + 2x + 4 = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1,4

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

13) $x^2 + 45x = -200$

14) $4x^2 - 6 = -12x$

15) $5x^2 - 9 = 11x$

16) $12x^2 + 9x - 2 = -17$

مثال 5

أجب عن الفرعين a ، b لكلِّ معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

17) $2x^2 + 3x - 3 = 0$

18) $3x^2 - 3x + 8 = 0$

19) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

20) $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

21) $x^2 - 6x = -9$

22) $x^2 + 2x - 4 = -9$

23) $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

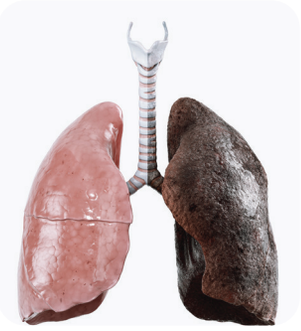
24) $5x^2 + 8x = 0$

25) $8x^2 = -2x + 1$

26) $4x - 3 = -12x^2$

27) $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

28) $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$



الربط مع الحياة

تأسس برنامج مكافحة التدخين التابع لوزارة الصحة في المملكة العربية السعودية في 1423/2/23هـ؛ لمكافحة التدخين بكافة أنواعه ووسائله. ويقدم خدماته في كافة المجالات التوعوية والعلمية والاستشارية المتعلقة بالتدخين وأضراره وطرق مكافحته في مدن ومحافظات المملكة.

المصدر: البوابة الإلكترونية لوزارة الصحة www.moh.gov.sa/depts/TCP/Pages/About.aspx

العام	عدد الإصابات لكل 100000
2000	92
2002	90
2004	85
2010	?
2017	?

29) التدخين: تبذل دول العالم جهودًا مكثفة للتوعية بأخطار التدخين، وقد أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام، وكانت نتائجها التقريبية كما في الجدول المجاور. ويمكن تمثيل العدد التقريبي للمصابين بالدالة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000.

a) احسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامَي 2010, 2017 .

b) استعمل القانون العام لإيجاد قيمة x عندما $y = 50$.

c) اعتمادًا على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ فسِّر إجابتك.

30) نظرية الأعداد: يعطَى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية n ، ... ،3 ،2 ،1 بالقانون $S = \frac{1}{2} n (n + 1)$. فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا بالعدد 1 مجموعها يساوي 666؟

31) ترفيه: يُعطى ارتفاع لعبة ترفيهية عن سطح الأرض وهي تتحرك بسرعة تصل إلى 80 $ft \backslash s$ بالدالة: $h = -16t^2 - 64t + 60$ ؛ حيث h الارتفاع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. فإذا علمت أنها ترتفع مسافة 60 ft ، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع 60 ft إلى 0 ft ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

32) اكتشف الخطأ: حددت كلٌّ من هدى وندى عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

هدى

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

وبما أن المميز موجب فللمعادلة حلان حقيقيان.

ندى

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

وبما أن المميز سالب فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

33) تحدٍّ: حل المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستعمال القانون العام.

34) تبرير: حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك:

a) إذا كانت إشارتا كلٍّ من المعاملَين a،c في المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة القياسية مختلفتين، فإن جذرَي المعادلة حقيقيان.

b) إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين.

35) اكتب: صف ثلاث طرائق مختلفة لحل المعادلة: $x^2 - 2x - 15 = 0$. وأيها تفضل؟ ولماذا؟

تدريب على اختبار

36) أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟

A $x^2 - 2x + 5 = 0$

B $x^2 - 2x - 5 = 0$

C $x^2 = 19$

D $x^2 - 8x = -16$

37) قيمة المميز للمعادلة $x^2 - 8x = 0$ هي:

A -64

B -8

C 8

D 64

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مما يأتي مربعًا كاملًا. ثم اكتبها على صورة مربع كامل: (مهارة سابقة)

38) $x^2 + 13x + c$ **39)** $x^2 + 2.4x + c$ **40)** $x^2 + \frac{4}{5}x + c$

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-3)

41) i^{26} **42)** $\sqrt{-16}$ **43)** $(4\sqrt{-9}) \cdot (2\sqrt{-25})$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أكتب المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

إذا علمت جذري معادلة تربيعية فإنه يمكنك كتابتها باستعمال مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

للمعادلةالتربيعية: $x^2 + 5x - 24 = 0$ جذران هما -8 , 3
ومجموعهما -5 ، وحاصل ضربهما -24.

مجموع الجذرين: $3 + (-8) = -5$ ← -5 هو النظير الجمعي لمعامل x

$x^2 + 5x - 24 = 0$

حاصل ضرب الجذرين: $3(-8) = -24$ ← -24 هو الحد الثابت

ويمكن تعميم ذلك لأية معادلة تربيعية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية، فإذا كان جذرا المعادلة التربيعية r_1 ، r_2 فإن:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{مجموع الجذرين}$$

$$= \frac{-2b + 0}{2a} = -\frac{b}{a} \quad \text{بسّط}$$

مجموع الجذرين يساوي $-\frac{b}{a}$

حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اضرب الجذرين}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \quad \text{اضرب}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \quad \text{الخاصية التوزيعية}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \text{بسّط}$$

حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{c}{a}$

مما سبق يمكن التوصل للقانون الآتي الذي يستعمل لكتابة أية معادلة تربيعية عُلِم جذراها.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما

إذا كان r_1 , r_2 **جذري المعادلة** $ax^2 + bx + c = 0$، $a \neq 0$

فإن $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$, $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.

النشاط 1 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها -7 , 2.

الخطوة 1 : أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = 2 + (-7)$$
$$= -5$$

الخطوة 2 : أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = 2\,(-7)$$
$$= -14$$

الخطوة 3 : اكتب المعادلة:

بما أن $-14 = \frac{c}{a}$, $-5 = -\frac{b}{a}$ ، فإذا كانت $a = 1$ فإن: $b = 5$ ، $c = -14$.

وبالتالي المعادلة : $x^2 + 5x - 14 = 0$ تحقق المطلوب.

النشاط 2 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{12}{5}$ ، $\frac{3}{4}$.

الخطوة 1 : أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= \frac{15}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{33}{20}$$

الخطوة 2 : أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= -\frac{36}{20}$$

الخطوة 3 : اكتب المعادلة:

بما أن $-\frac{36}{20} = \frac{c}{a}$, $-\frac{33}{20} = -\frac{b}{a}$ ؛ فإذا كانت $a = 20$ فإن: $b = 33$ ، $c = -36$.

وبالتالي المعادلة : $20x^2 + 33x - 36 = 0$ تحقق المطلوب.

تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العددان المعطيان في كل مما يأتي:

1) $-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ 2) $-7, \frac{2}{3}$ 3) $\pm\frac{2}{5}$ 4) $4 \pm \sqrt{3}$

5) $1 \pm \sqrt{6}$ 6) $\frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7}$ 7) $7 \pm 3i$ 8) $\overline{5} \pm 8i$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلًّا مما يأتي:

9) مجموع جذريها 4 ، وحاصل ضربهما $\frac{13}{12}$.

10) مجموع جذريها $\frac{5}{6}$ ، وحاصل ضربهما $\frac{5}{21}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-3

العمليات على كثيرات الحدود
Operations with Polynomials

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيم القوى.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى، وأقسمها وأبسّطها.
- أجمع كثيرات حدود، وأطرحها وأضربها.

المفردات:
التبسيط
simplifying
درجة كثيرة الحدود
Degree of a polynomial

لماذا؟



يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريبًا؛ إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ تقريبًا.

ما الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} \text{m}$ تقريبًا؟

ضرب وحيدات الحد وقسمتها تذكّر أن وحيدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة، وتتكون من حد واحد فقط. والجدول الآتي يلخص خصائص الأسس التي تساعد على ضرب وقسمة وحيدات الحد وتبسيطها، حيث إن عملية **تبسيط** عبارات تتضمن قوى تعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

ملخص المفهوم
أضف إلى مطويتك

خصائص الأسس

لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b:

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$، حيث $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسّ السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$، $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$، حيث $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0$، $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد من أنك قد كتبتها في أبسط صورة.

مفهوم أساسي

تبسيط وحيدات الحد

أضف إلى مطويتك

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أقواسًا أو أسسًا سالبة.

مثال 1

تبسيط العبارات

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

$(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2}) = 6ab^2\,c^{-2}$ — اضرب 2 في 3 ، واضرب a^{-2} في a^3

$= 6ab^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$ — تعريف الأسس السالبة

$= \frac{6ab^2}{c^2}$ — بسّط

b) $\frac{q^2r^4}{q^7r^3}$

$\frac{q^2r^4}{q^7r^3} = q^{2-7} \cdot r^{4-3}$ — قسمة القوى

$= q^{-5}r$ — اطرح الأسس

$= \frac{r}{q^5}$ — تعريف الأسس السالبة

c) $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3$

$\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3 = \frac{(-2a^4)^3}{(b^2)^3}$ — قوة ناتج القسمة

$= \frac{(-2)^3(a^4)^3}{(b^2)^3}$ — قوة ناتج الضرب

$= \frac{-8a^{12}}{b^6}$ — قوة القوة

إرشادات للدراسة

تحقق

يمكنك التحقق من إجابتك دائمًا باستعمال تعريف الأسس، فمثلًا:

$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}$

$= \frac{1}{q^5}$

تحقق من فهمك

1A) $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

1B) $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

1C) $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$

1D) $(-2x^3y^2)^5$

العمليات على كثيرات الحدود: **درجة كثيرة الحدود** المبسّطة هي أكبر درجة لوحيدات الحد المكوِّنة لها. فمثلًا درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

إرشادات للدراسة

كثيرات الحدود

تذكّر أن كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد، وتُسمى كل وحيدة حد منها حدًا في كثيرة الحدود. ودرجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

مثال 2 درجة كثيرة الحدود

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

a) $\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$

تعدّ هذه العبارة كثيرة حدود؛ لأن كل حد فيها هو وحيدة حد؛ ودرجة الحد الأول فيها تساوي $4 + 3 = 7$، ودرجة الحد الثاني 5؛ لذا فإن درجة كثيرة الحدود 7.

b) $\sqrt{x} + x + 4$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن $\sqrt{x}$ ليست وحيدة حد.

c) $x^{-3} + 2x^{-2} + 6$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن كلًّا من: x^{-3}, x^{-2} ليست وحيدة حد؛ حيث $x^{-2} = \frac{1}{x^2}, x^{-3} = \frac{1}{x^3}$، ووحيدات الحد لا تتضمن متغيرات في المقام.

تحقق من فهمك

2A) $\frac{x}{y} + 3x^2$

2B) $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$

يمكنك إجراء العمليات المطلوبة على كثيرات الحدود وتبسيطها تمامًا كما تبسّط وحيدة الحد، ثم تجمع الحدود المتشابهة.

إرشادات للدراسة

طرائق بديلة

لاحظ أن المثال 3a يستعمل طريقة الجمع الأفقي. على حين يستعمل المثال 3b طريقة الجمع الرأسي، وكلتاهما تؤدي إلى الإجابة الصحيحة.

مثال 3 جمع كثيرات الحدود وطرحها

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورةٍ:

a) $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

تخلّص من الأقواس وجمّع الحدود المتشابهة.

$(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$	العبارة الأصلية
$= 4x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 1$	وزّع العدد 1−
$= (4x^2 - 2x^2) + (-5x - 3x) + (6 + 1)$	جمّع الحدود المتشابهة
$= 2x^2 - 8x + 7$	اجمع الحدود المتشابهة

b) $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$

رتّب الحدود المتشابهة رأسيًّا، وأوجد ناتج الجمع.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x + 8 \\ (+)\ -4x^2 + 9x - 5 \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

تحقق من فهمك

3A) $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$

3B) $(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

يمكنك استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

مثال 4 ضرب وحيدة حدٍّ في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $3x(2x^2 - 4x + 6)$، واكتبه في أبسط صورة.

$3x(2x^2 - 4x + 6) = 3x(2x^2) + 3x(-4x) + 3x(6)$ خاصية التوزيع

$= 6x^3 - 12x^2 + 18x$ اضرب في وحيدة الحد

تحقق من فهمك

(4A) $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

(4B) $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

مثال 5 ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$، واكتبه في أبسط صورة.

$(n^2 + 4n - 6)(n + 2) = n^2(n + 2) + 4n(n + 2) + (-6)(n + 2)$ خاصية التوزيع

$= n^2 \cdot n + n^2 \cdot 2 + 4n \cdot n + 4n \cdot 2 + (-6) \cdot n + (-6) \cdot 2$ خاصية التوزيع

$= n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 8n - 6n - 12$ اضرب وحيدات الحد

$= n^3 + 6n^2 + 2n - 12$ اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

(5A) $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

(5B) $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

يمكنك استعمال كثيرات الحدود لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة كتابة عبارة كثيرة حدود

قيادة: **تتطلب أنظمة إحدى شركات النقل البري أن تكون مدة قيادة سائقي الشاحنات 10 ساعات يوميًّا، تتخللها فترة استراحة، فإذا قاد أحد سائقي الشركة شاحنته في فترة ما قبل الاستراحة بسرعة 90km/h ، وبعد الاستراحة بسرعة 100km/h ، فاكتب كثيرة حدود تمثل المسافة التي قطعها .**

التعبير اللفظي: قاد السائق سيارته بسرعة 90 km/h في فترة ما قبل الاستراحة ، و 100 km/h في فترة ما بعد الاستراحة.

المتغير: ليكن x عدد ساعات القيادة قبل الاستراحة.

العبارة: $90\ x + 100\ (10 - x)$

$90x + 100(10 - x) = 90x + 1000 - 100x$ خاصية التوزيع

$= 1000 - 10x$ اجمع الحدود المتشابهة

فتكون كثيرة الحدود هي $1000 - 10x$

تحقق من فهمك

(6) استثمار: استثمر فيصل مبلغ 90000 ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18%، والآخر مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي 42%، فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

إرشادات للدراسة

قانون المسافة

تذكّر أن:

المسافة = السرعة × الزمن



الربط مع الحياة

تعقد معظم الدول دورات تدريبية متخصصة واختبارات مشددة لقائدي الشاحنات للتأكد من مستوى تأهيلهم لقيادتها، وتوعيتهم بكيفية التعامل مع الطرق السريعة، بما يقلل المخاطر ويؤمن حركة السير.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$ **2)** $\frac{12x^4y^2}{2xy^5}$ **3)** $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$ **4)** $(6g^5h^{-4})^3$

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

5) $3x + 4y$ **6)** $\frac{1}{2}x^2 - 7y$ **7)** $x^2 + \sqrt{x}$ **8)** $\frac{ab^3 - 1}{az^4 + 3}$

الأمثلة 3 , 4 , 5 أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي واكتبه في أبسط صورة:

9) $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$ **10)** $(3a + 4b) + (6a - 6b)$

11) $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$ **12)** $(n - 9)(n + 7)$

مثال 6 **13) رياضة:** يمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 دقيقة يوميًّا. وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، أما عندما يرفع الأثقال فيحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. فإذا مارس رفع الأثقال x دقيقة في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم.

تمارين ومسائل

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

14) $(5x^3y^{-5})(4xy^3)$ **15)** $\frac{-y^3z^5}{y^2z^3}$ **16)** $\frac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2}$ **17)** $(n^5)^4$

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

18) $2x^2 - 3x + 5$ **19)** $a^3 - 11$ **20)** $\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$ **21)** $\sqrt{m - 7}$

الأمثلة 3 , 4 , 5 أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورة:

22) $(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12)$ **23)** $4x(2x^2 + y)$

24) $(x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$ **25)** $(a + b)(a^3 - 3ab - b^2)$

مثال 6 **26) مزرعة:** استأجر سلمان عاملين بالتناوب لتنسيق مزرعته، فإذا تقاضى الأول 200 ريالٍ عن كل يوم عمل، وتقاضى الثاني 150 ريالًا عن كل يوم عمل، واحتاجت المزرعة إلى 15 يوم عملٍ لتنسيقها، فاكتب كثيرة حدودٍ تمثل تكلفة تنسيق المزرعة إذا عمل الأول مدة x يومًا.

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

27) $\left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4$ **28)** $\left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2}$ **29)** $(a^2b^3)(ab)^{-2}$

30) $(-3x^3y)^2(4xy^2)$ **31)** $\frac{3c^2d(2c^3d^5)}{15c^4d^2}$ **32)** $\frac{1}{4}g^2(8g + 12h - 16gh^2)$

33) $x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1})$ **34)** $a^{-3}b^2(ba^3 + b^{-1}a^2 + b^{-2}a)$

35) $(n^2 - 7)(2n^3 + 4)$ **36)** $(2x - 2y)^3$



الربط مع الحياة

يصعب التنبؤ بالطقس على كوكب المريخ، نظرًا إلى بيئته المتقلبة. ويبدو أن فيه أعمق واد، وأكبر بركان في المجموعة الشمسية.

37) فلك: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس.

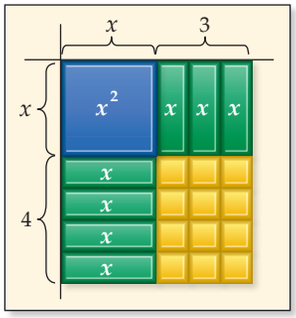
a) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من المجرة المذكورة إلى الأرض؟

b) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من الشمس إلى المريخ إذا كانت المسافة بينهما $2.28 \times 10^{11}\text{m}$؟

38) إذا كان $5^{k+7} = 5^{2k-3}$، فما قيمة k؟

39) ما قيمة k التي تجعل $q^{41} = q^{4k} \cdot q^5$ صحيحة؟

40) تمثيلات متعددة: استعمل النموذج المجاور الذي يمثل حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.



a) هندسيًّا: مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طوله في عرضه، أوجد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$ باستعمال النموذج.

b) جبريًّا: استعمل طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.

c) لفظيًّا: وضِّح كيف يمثّل النموذج كل حدّ في حاصل الضرب.

مسائل مهارات التفكير العليا

41) برهان: وضِّح كيف يمكن برهنة خاصية الأسس السالبة باستعمال خاصيتي قسمة القوى والقوة الصفرية؟

42) تحدٍّ: ما الذي يحدث للمقدار x^{-y} عندما تزداد قيمة y لكل $x > 1, y > 0$؟

43) تبرير: فسّر لماذا تكون العبارة 0^{-2} غير معرَّفة؟

44) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث عبارات مختلفة مكافئة لـ x^{12}.

45) اكتب: وضِّح لماذا تُعد خصائص الأسس مهمة في الفلك؟ وضمّن توضيحك طريقة إيجاد الزمن اللازم لوصول الضوء من مصدرٍ ما إلى أحد الكواكب.

تدريب على اختبار

46) إجابة قصيرة: بسّط المقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$.

47) أيّ مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود $x^3 - x^2 - 2x$؟

A x **B** $x + 1$ **C** $x - 1$ **D** $x - 2$

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (مهارة سابقة)

48) $12ax^3 + 20bx^2 + 32cx$

49) $x^2 + 2x + 6 + 3x$

50) $12y^2 + 9y + 8y + 6$

51) $2my + 7x + 7m + 2xy$

52) $8ax - 6x - 12a + 9$

53) $10x^2 - 14xy - 15x + 21y$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-4 قسمة كثيرات الحدود
Dividing Polynomials

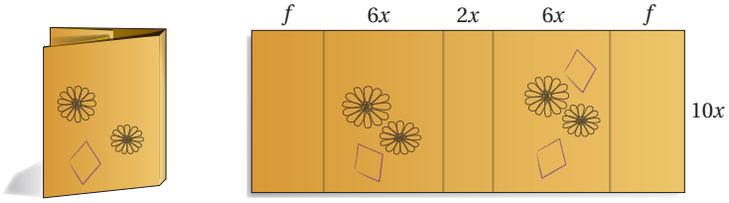
فيما سبق:
درست قسمة وحيدات الحد. (الدرس 3-3)

والآن:
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

المفردات:
القسمة التركيبية
Synthetic division

لماذا؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.



f = عرض الثنية

القسمة الطويلة: تعلمت في الدرس (3 – 3) قسمة وحيدات الحد، لذا يمكنك قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد مستعملاً المهارات نفسها .

مثال 1 قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

بسّط العبارة : $\dfrac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$.

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} = \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18x^2y}{3xy}$$ اقسم كل حد في البسط على المقام

$$= \frac{6}{3} \cdot x^{4-1}y^{3-1} + \frac{12}{3} \cdot x^{3-1}y^{2-1} - \frac{18}{3} \cdot x^{2-1}y^{1-1}$$ اقسم

$$= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x$$ $y^{1-1} = y^0 = 1$

تحقق من فهمك

(1A) $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

(1B) $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$

يمكنك استعمال عملية مشابهة للقسمة الطويلة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى. وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة.

مثال 2 قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{)\, x^2 + 3x - 40} \\ (-)\ x^2 - 5x \\ \hline 8x - 40 \\ (-)\ 8x - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

اضرب المقسوم عليه في x

اطرح

اضرب المقسوم عليه في 8

اطرح

ناتج القسمة هو $x + 8$، والباقي 0.

تحقق من فهمك

(2A) $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

(2B) $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:

- اكتب كثيرة الحدود في كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه، بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا حسب درجتها.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني ... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.

قد ينتج باقٍ عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية، فمثلًا عند إيجاد 3 ÷ 11 يكون الناتج 3 والباقي 2، وتكتب عادةً على الصورة $3+\frac{2}{3}$. ويمكنك كتابة نتيجة قسمة كثيرتي حدود مع باقٍ بالطريقة نفسها.

مثال 3 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2+7a-11)(3-a)^{-1}$ ؟

A $a+10-\frac{19}{3-a}$

B $-a+10$

C $-a-10+\frac{19}{3-a}$

D $-a-10-\frac{19}{3-a}$

إرشادات للدراسة

الاختيار من متعدد

يمكنك حذف بعض البدائل عن طريق اختيار قيمة للمتغير a ثم تعويض هذه القيمة في العبارة الأصلية وفي البدائل وإيجاد قيمة كل منها.

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن العامل الثاني مرفوع للأس 1−، فهذه إذن مسألة قسمة.

$$(a^2+7a-11)(3-a)^{-1}=\frac{a^2+7a-11}{3-a}$$

حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r|l} & -a-10 \\ \hline -a+3 & a^2+7a-11 \\ (-) & a^2-3a \\ \hline & 10a-11 \\ (-) & 10a-30 \\ \hline & 19 \end{array}$$

لتسهيل عملية القسمة، أعد كتابة $a-3$ على الصورة $-a+3$

$-a(-a+3)=a^2-3a$

$7a-(-3a)=10a$

$-10(-a+3)=10a-30$

$-11-(-30)=19$

ناتج القسمة هو $-a-10$، والباقي 19 .

لذا فإن $(a^2+7a-11)(3-a)^{-1}=-a-10+\frac{19}{3-a}$، ومن ثم تكون الإجابة هي البديل C.

تحقق من فهمك

3) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2+5r+7)(1-r)^{-1}$؟

A $-r-6+\frac{13}{1-r}$

B $r+6$

C $r-6+\frac{13}{1-r}$

D $r+6-\frac{13}{1-r}$

القسمة التركيبية: **القسمة التركيبية** هي طريقة مبسّطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مفهوم أساسي

القسمة التركيبية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x-r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4: كرر الخطوتين 3 , 2 على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 4 القسمة التركيبية

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم. واكتب الثابت r في الصندوق، وهو في هذا المثال 4. ثم اكتب المعامل الأول وهو 2 أسفل الخط الأفقي.

4	2	−13	26	−24
	2			

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في الثابت r:
$2(4) = 8$ ، واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.

4	2	−13	26	−24
	2 ↗	8		

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني:
$-13 + 8 = -5$

4	2	−13	26	−24
	2	−5		

الخطوة 4: اضرب المجموع وهو 5− في الثابت r: $-5 \times 4 = -20$ ،
واكتب الناتج أسفل المعامل التالي، ثم اجمع:
$26 + (-20) = 6$. اضرب المجموع وهو 6 في الثابت r:
$6(4) = 24$، واكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي،
ثم اجمع: $-24 + 24 = 0$.

4	2	−13	26	−24
	2	−5 ↗	6 ↗	0
		8	−20	24

إذن ناتج القسمة هو $2x^2 - 5x + 6$، والباقي 0.

تحقق: اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه، فيكون الناتج هو المقسوم.

$$\begin{array}{rl} & 2x^2 - 5x + 6 \\ & x - 4 \quad (\times) \\ \hline & -8x^2 + 20x - 24 \\ (+) \quad & 2x^3 - 5x^2 + 6x \\ \hline & 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24 \end{array}$$

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم
$2x^3 - 4x^2 + 6$
فاكتبه في صورة
$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$

تحقق من فهمك

4A $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

4B $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

4C $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

4D $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$

ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي الواحد، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية.

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

مثال 5 معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} = \frac{(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div 3}{(3x + 1) \div 3}$$

أعد كتابة العبارة ليكون معامل x في المقسوم عليه 1 وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على 3.

$$= \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

بسّط كلًّا من البسط والمقام

وبما أن المقسوم لا يحتوي حدًّا ثابتًا، فضع صفرًا مكانه.

$x - r = x + \frac{1}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$ $\rightarrow -\frac{1}{3}$

1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
1	-2	1	2	$-\frac{2}{3}$

وعليه فإن الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}}$. وأخيرًا بسّط الكسر

$$\frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \frac{3 \times \frac{2}{3}}{3 \times (x + \frac{1}{3})}$$

اضرب كلًّا من البسط والمقام في العدد 3

$$= \frac{2}{3x + 1}$$

بسّط

وعليه يكون الناتج هو: $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$.

تحقق: أوجد ناتج القسمة مستعملاً القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ 3x + 1 \overline{)\,3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x} \\ \underline{(-)\,3x^4 + x^3} \\ -6x^3 + x^2 + 7x \\ \underline{(-)\,-6x^3 - 2x^2} \\ 3x^2 + 7x \\ \underline{(-)\,3x^2 + x} \\ 6x \\ \underline{(-)\,6x + 2} \\ -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$. ✓

تحقق من فهمك

(5A) $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

(5B) $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

(5C) $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$

(5D) $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال 1 بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

1) $\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$

2) $(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$

المثالان 2, 4 استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

3) $(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$

4) $(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$

5) $(3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z + 3)$

6) $(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2)$

مثال 3

7) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$ ؟

A $-x - 7 + \frac{19}{4 - x}$ **B** $-x - 7$ **C** $x + 7 - \frac{19}{4 - x}$ **D** $-x - 7 - \frac{19}{4 - x}$

مثال 5 استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ مما يأتي :

8) $(10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5)$

9) $(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2)$

10) $\frac{12b^2 + 23b + 15}{3b + 8}$

11) $\frac{27y^2 + 27y - 30}{9y - 6}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

12) $\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$

13) $\frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy}$

14) $\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh}$

15) $\frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab}$

16) $\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2}$

17) $\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2}$

المثالان 2, 4 استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

18) $(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$

19) $(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1)$

20) $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$

21) $(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4)$

22) $\frac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y + 2}$

23) $(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2)$

مثال 3

24) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + x - 6)(2 - x)^{-1}$ ؟

A $x + 3$ **B** $-x - 1$ **C** $-x + 1$ **D** $-x - 3$

مثال 5 استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ مما يأتي :

25) $(6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2)$

26) $\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1}$

27) **هندسة:** صُمّم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بحيث ترتبط أبعاده بعلاقة معينة بدلالة المتغير x. فإذا كان حجم الصندوق $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$، وارتفاعه $x + 2$، فما عرض قاعدته، وماطولها؟

28) **فيزياء:** يرتبط فرق جهد التيار V بشدة التيار C، والقوة P بالمعادلة $V = \frac{P}{C}$. فإذا عُبّر عن القوة بالدالة $P(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$ ، وشدة التيار بالمعادلة $C = t + 4$، فاكتب عبارةً تمثل فرق الجهد V.

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي:

29) $(x^4 - y^4) \div (x - y)$

30) $(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd)$

31) $(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-4b)^{-1}$

32) $\frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4}$

33) $\frac{p^3 + 2p^2 - 7p - 21}{p + 3}$

34) $\frac{3z^5 - 5z^4 + z + 5}{z + 2}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

35) أعمال: يمكن تقدير عدد النسخ المبيعة من مجلة باستعمال المعادلة $n = \frac{3500a^2}{a^2 + 100}$ ؛ حيث a المبلغ الذي تنفقه المجلة على الإعلان بمئات الريالات، و n عدد النسخ المبيعة من المجلة.

a) أجرِ عملية القسمة المعبر عنها بالمقدار: $\frac{3500a^2}{a^2 + 100}$

b) كم نسخة بيعت من المجلة إذا أُنفق على الدعاية والإعلان 6000 ريال؟

36) تمثيلات متعددة: افترض أن مساحة مستطيل هي $2x^2 + 7x + 3$، وطوله $2x + 1$.

a) حسيًّا: مثّل الموقف باستعمال البطاقات الجبرية، ثم استعملها لإيجاد عرض المستطيل.

b) رمزيًّا: اكتب عبارةً جبريّةً تمثّل إيجاد عرض المستطيل .

c) جبريًّا: حل المسألة جبريًّا باستعمال القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة، وهل يتفق الحل باستعمال البطاقات الجبرية مع الحل الجبري؟



الربط مع الحياة

فن الإعلان جزء من النشاط الترويجي المتعدد العناصر، ولكنه يتفوق من حيث إمكانية تحقيقه اتصالًا على نطاق واسع جدًا في وقت محدود. ومع التطور التقني تطوّر تصميم وإخراج الدعاية والإعلانات. ومن أنواع الإعلانات: الإعلان المطبوع، الإعلان المباشر، الإعلان الخارجي، الإعلان المسموع/المرئي، الإعلان التفاعلي.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) اكتشف الخطأ: قسَّم كلٌّ من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$، فقال خليفة: إن الباقي 26، وقال جمال: إن الباقي -100. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

38) تحدٍّ: إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتجه عن العلاقة بينهما؟

39) تبرير: راجع أحد أسئلة القسمة في هذا الدرس، وبيّن العلاقة بين درجة كل من: المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة.

40) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة تتضمن قسمة كثيرتي حدود، بحيث يكون الباقي 3 .

41) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك.

$3xy + 6x^2$	$\frac{5}{x^2}$	$x + 5$	$5b + 11c - 9ad^2$

42) اكتب: استعن بالمعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، واكتب تعليمات متسلسلة لعمل غلاف لكتاب الرياضيات باستعمال قسمة كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

43) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $(-4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$؟

A $2x^2$ **C** $-10x^2 + 17x$

B $-10x^2$ **D** $2x^2 + 17x$

44) أيُّ كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟

A $x^3 + x^2 - 2x^4$ **C** $x^2 + x + 12^3$

B $-2x^2 - 3x + 4$ **D** $1 + x + x^3$

مراجعة تراكمية

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي: (الدرس 3-3)

45) $4a(2a - 3) + 3a(5a - 4)$ **46)** $(xy)^2(2xy^2z)^3$ **47)** $(3ab^2)^{-2}(2a^2b)^2$

إذا كان $f(x) = 4x + 3, h(x) = -2x^2 - 2x + 4$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

48) $f(-6)$ **49)** $h(3)$ **50)** $f(c)$ **51)** $h(2b + 1)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-3 إلى 3-4

بسط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{-81}$

2) $(15-3i)-(4-12i)$

3) i^{37}

4) $\frac{3-i}{2+5i}$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

5) $x^2-8x-9=0$

6) $-4.8x^2+1.6x+24=0$

بسط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

7) $(3x^2y^{-3})(-2x^3y^5)$

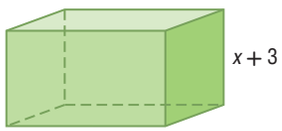
8) $4t(3rt-r)$

9) $3a^4b^3c _ 6a^2b^5c^3$

10) $(p^2r^3 _ pr^4)\,2$

11) $(4m^2-6m+5)-(6m^2+3m-1)$

12) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن حجم متوازي المستطيلات في الشكل أدناه هو $6x^3+19x^2+2x-3$، فأيُّ كثيرة حدود فيما يأتي تمثل مساحة قاعدته؟



A $6x^4+37x^3+59x^2+3x-9$

B $6x^2+x+1$

C $6x^2+x-1$

D $6x+1$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة)؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

13) $(4r^3-8r^2-13r+20) \div (2r-5)$

14) $3x^3 _ 16x^2 + 9x _ 24 __ x _ 5$

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $(4x^3-6x^2+6x-3) \div (2x-1)$

16) $(x^4+3x^3-2x^2-4x+10) \div (x+3)$

17) استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:
$(x\,2+2x-24) \div (x-4)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

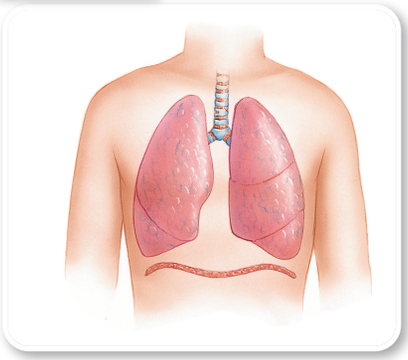
3-5 دوال كثيرات الحدود
Polynomial Functions

فيما سبق:
درست تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود.
- أتعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود، وأحدد عدد أصفارها الحقيقية.

المفردات:
كثيرة حدود بمتغير واحد polynomial in one variable
المعامل الرئيس leading coefficient
دالة كثيرة الحدود polynomial function
دالة القوة power function
سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior
صفر الدالة zero of a function

لماذا؟



يمكن تمثيل حجم الهواء في رئتي الإنسان خلال دورة تنفس مدتها t ثانية بالدالة: $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$، حيث v الحجم باللترات، t الزمن بالثواني. وهذه الدالة مثال على دالة كثيرة حدود.

دوال كثيرات الحدود: **كثيرة الحدود بمتغير واحد** هي عبارة جبرية على الصورة: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ، حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا، ودرجة كثيرة الحدود هي أسّ المتغير ذي أكبر أسّ فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

كثيرة الحدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x - 9$	1	4
التربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$	n	a_n

مثال 1 درجة كثيرة الحدود ومعاملها الرئيس

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

a) $8x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 5، لذا درجتها **5** ، والمعامل الرئيس8.

b) $12x^2 - 3xy + 8x$

هذه ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ فهناك متغيران هما y, x .

c) $3x^4 + 6x^3 - 4x^8 + 2x$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 8، لذا درجتها 8، والمعامل الرئيس -4.

تحقق من فهمك

1A) $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$ **1B)** $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$ **1C)** $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد، فمثلًا $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ دالة كثيرة حدود تكعيبية. وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود على الصورة $f(x) = ax^b$، حيث a عدد حقيقي، b عدد صحيح غير سالب، وتُسمى عندئذٍ **دوال القوة**.

إذا علمت عنصرًا في مجال دالة كثيرة حدود، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.



الربط مع الحياة

تصل سعة الرئة لدى الشخص البالغ السليم إلى 6 لترات تقريبًا.

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود

التنفس: ارجع إلى الفقرة في بداية الدرس، وأوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتان.

بتعويض العدد 2 في الدالة نجد $v(2)$، وهو حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتين.

$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$	الدالة الأصلية
$v(2) = -0.037(2)^3 + 0.152(2)^2 + 0.173(2)$	عوّض 2 بدلًا من t
$= -0.296 + 0.608 + 0.346$	بسّط
$= 0.658$ L	اجمع

تحقق من فهمك

2) **تنفس:** أوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 4 ثوانٍ.

يمكنك إيجاد قيم الدوال عند متغيرات وعبارات جبرية.

مثال 3 قيمة دالة كثيرة الحدود عند متغير

إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x - 3$، فأوجد: $f(3c - 4) - 5f(c)$.

لإيجاد قيمة $f(3c - 4)$، عوض $3c - 4$ بدلًا من x في الدالة $f(x)$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$	الدالة الأصلية
$f(3c - 4) = (3c - 4)^2 + 2(3c - 4) - 3$	عوّض $3c - 4$ بدلًا من x
$= 9c^2 - 24c + 16 + 6c - 8 - 3$	اضرب
$= 9c^2 - 18c + 5$	بسّط

لإيجاد قيمة $5f(c)$، عوض c بدلًا من x في الدالة $f(x)$، واضرب الناتج في العدد 5.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$	الدالة الأصلية
$5f(c) = 5(c^2 + 2c - 3)$	عوّض c بدلًا من x
$= 5c^2 + 10c - 15$	خاصية التوزيع

والآن أوجد قيمة $f(3c - 4) - 5f(c)$.

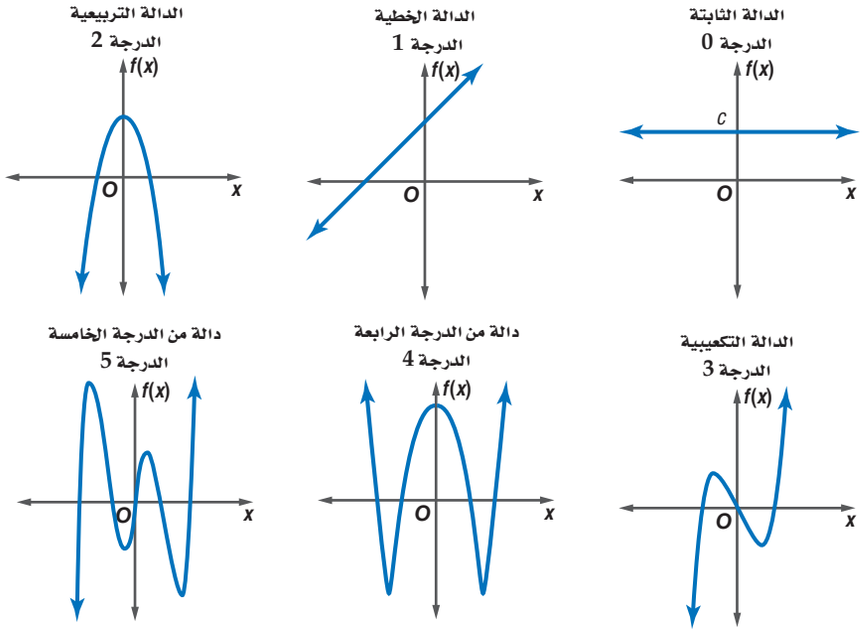
$f(3c - 4) - 5f(c) = (9c^2 - 18c + 5) - (5c^2 + 10c - 15)$	
$= 9c^2 - 18c + 5 - 5c^2 - 10c + 15$	خاصية التوزيع
$= 4c^2 - 28c + 20$	بسّط

تحقق من فهمك

3A) إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$.

3B) إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$، فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$.

التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود: إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر عدد المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.



مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ويُحدد **سلوك طرفي التمثيل البياني** للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$، أو سالب المالانهاية $(x \to -\infty)$ بكل من: درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيس لها.

قراءة الرياضيات

الرمزان $+\infty$, $-\infty$

نعبر عن التزايد غير المحدود لقيم المتغير x، باستعمال الرمز $+\infty$ ويُقرأ ما لا نهاية ويُكتب $x \to +\infty$،

كما نعبر عن التناقص غير المحدود لقيم المتغير x، باستعمال الرمز $-\infty$ ويُقرأ سالب ما لا نهاية ويُكتب $x \to -\infty$.

إرشادات للدراسة

سلوك طرفَي التمثيل البياني

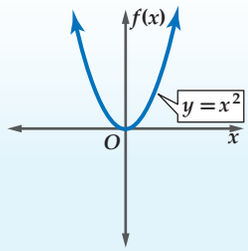
المعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني.

مفهوم أساسي — **سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود**

أضف إلى مطويتك

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: موجب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .

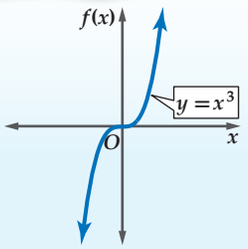
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في الاتجاه نفسه)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: موجب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

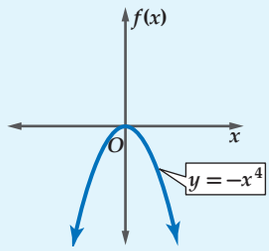
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في اتجاهين مختلفين)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: سالب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى

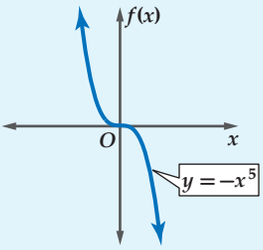
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في الاتجاه نفسه)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: سالب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

سلوك طرفي التمثيل البياني: (في اتجاهين مختلفين)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

صفر الدالة هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x، لذا فإنه يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها. تذكّر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار؛ ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار.

إرشادات للدراسة

الصفر المكرر

عندما يمس التمثيل البياني المحور x ، يكون للدالة صفران متساويان (صفر مكرر).

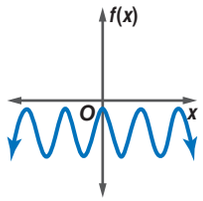
مفهوم أساسي

أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

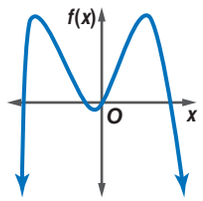
أضف إلى مطويتك

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة

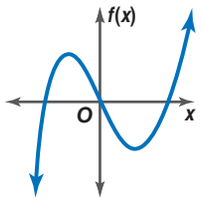


ليس لها أصفار حقيقية

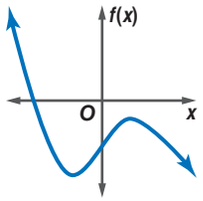


لها 4 أصفار حقيقية

كثيرتا حدود فرديتا الدرجة



لها 3 أصفار حقيقية



لها صفر واحد حقيقي

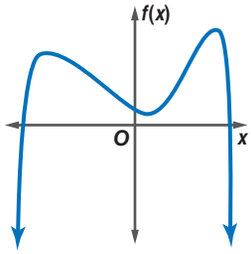
مثال 4

وصف دالة كثيرة الحدود من تمثيلها البياني

أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(a)

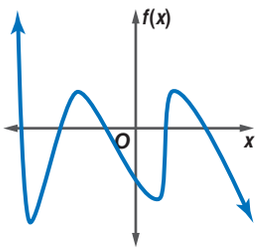


$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فالدالة زوجية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في نقطتين؛ لذا فللدالة صفران حقيقيان.

(b)



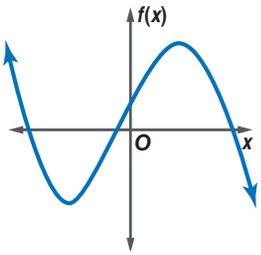
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

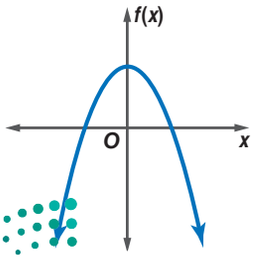
بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في 5 نقاط؛ لذا فللدالة 5 أصفار حقيقية.

تحقق من فهمك

(4A)



(4B)



تأكد

مثال1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

2) $-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22$

3) $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

4) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$

مثال2 أوجد $w(-4), w(5)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

5) $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$

6) $w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

مثال3 إذا كانت $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2,\ d(x) = 3x^2 + 6x - 10$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

7) $c(y^3)$

8) $-4[d(3z)]$

9) $6c(4a) + 2d(3a - 5)$

10) $-3c(2b) + 6d(4b - 3)$

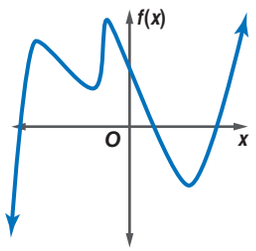
مثال4 أجب عن الفروع a – c لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

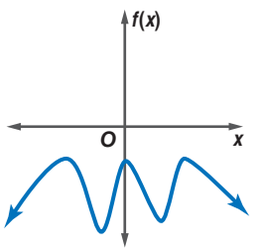
b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

11)



12)



تمارين ومسائل

مثال1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

13) $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$

14) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$

15) $8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9$

16) $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$

17) $13b^3 - 9b + 3b^5 - 18$

18) $(5 - 2y)(4 + 3y)$

19) $6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2$

20) $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$

مثال2 أوجد $p(3)$, $p(-6)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

21) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

22) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24$

23) $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$

24) $p(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2$

مثال 3 إذا كانت $c(x) = 2x^2 - 4x + 3\ ,\ d(x) = -x^3 + x + 1$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

25) $c(3a)$

26) $5d(2a)$

27) $c(b^2)$

28) $d(4a^2)$

29) $d(4y - 3)$

30) $c(y^2 - 1)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

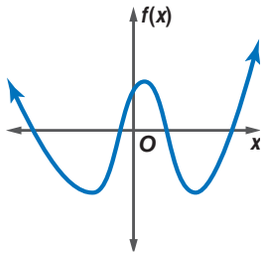
مثال 4 أجب عن الفروع من a–c لكل التمثيلات البيانية الآتية:

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

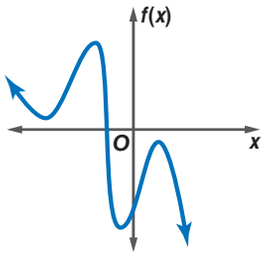
b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

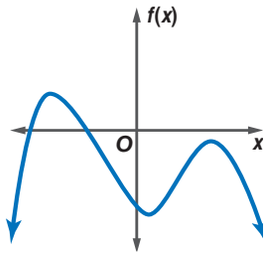
31)



32)



33)



34) فيزياء: تعطى الطاقة الحركية KE بالجول لجسم متحرك كتلته m kg بالدالة $KE(v) = 0.5mv^2$، حيث تمثل v سرعة الجسم بالأمتار لكل ثانية. أوجد الطاقة الحركية لعربة كتلتها 171 kg تسير بسرعة $11 m/s$.

أوجد $f(8), f(-2)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

35) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2$

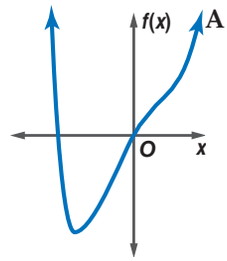
36) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18$

37) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 6x$

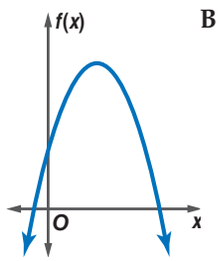
38) $f(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 10$

حدّد التمثيل البياني المناسب لكل دالة في الأسئلة (39–42) مستعملًا درجة كثيرة الحدود وسلوك طرفي التمثيل البياني لها.

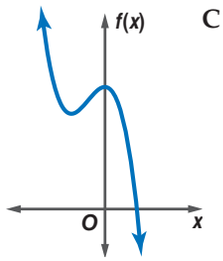
A



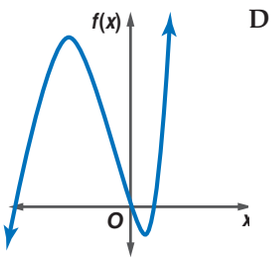
B



C



D



39) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

40) $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$

41) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$

42) $f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$

إذا كانت $c(x) = x^3 - 2x$, $d(x) = 4x^2 - 6x + 8$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

43) $3c(a - 4) + 3d(a + 5)$

44) $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

45) $5c(a^2) - 8d(6 - 3a)$

46) $-7d(a^3) + 6c(a^4 + 1)$

47) ملابس: تُمثل أرباح مصنع للملابس بدالة كثيرة الحدود $w(x) = -x^4 + 40x^2 - 144$، حيث x عدد قطع الملابس المبيعة بالألوف، و$w(x)$ ربح المصنع بألوف الريالات.

a) أنشئ جدولًا لتمثيل الدالة بيانيًّا، ثم مثِّلها (استعمل قيم x التالية: $-7, -6, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 6, 7$).

b) أوجد أصفار الدالة.

c) بين أي قيمتين يجب أن يبيع المصنع من قطع الملابس ليحقق ربحًا.

d) وضّح لماذا أُخذ صفران فقط بعين الاعتبار في الفرع c.



الربط مع الحياة

فن صناعة تصميم الملابس يعتمد على العلم والجمال، ويقوم على عدة عناصر تتكامل من حيث الخط والشكل واللون والنسيج، وتتناسق من حيث التصميم والابتكار ليحصل الفرد في النهاية على زي يُشعره بالتناسق، ويراعى مراحل ترتيب قياسية في مراحل إنتاج الملابس الجاهزة. وتنتج الملابس من الألياف الصناعية بجانب الألياف الطبيعية والمخلوطة ذات الطبيعة الخاصة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

48) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)(x+4)$.

a) تحليليًّا: حدد المقطع x والمقطع y والجذور، ودرجة الدالة $g(x)$، وصف سلوك طرفي تمثيلها البياني.

b) جبريًّا: اكتب الدالة بالصيغة القياسية.

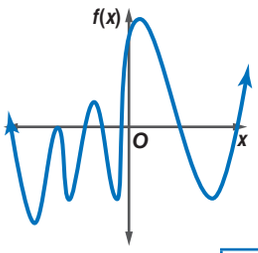
c) جدوليًّا: أنشئ جدولًا لتمثيل الدالة بيانيًّا، ثم مثِّلها.

d) بيانيًّا: مثِّل الدالة بيانيًّا بتعيين نقاط، والتوصيل بينها بمنحنى.

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة فيما يأتي:

49) $f(x) = -5x^4 + 3x^2$ **50)** $g(x) = 2x^5 + 6x^4$ **51)** $h(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x$

مسائل مهارات التفكير العليا



52) **اكتشف الخطأ:** حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ماجد	بدر
يوجد 8 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x 7 مرات، وأحد الجذور مكرر مرتين.	يوجد 7 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x سبع مرات.

53) **تحدٍّ:** إذا كانت $g(x)$ من عوامل $f(x)$، وكانت درجة $f(x)$ تساوي 5، ومعاملها الرئيس موجبًا، وكانت درجة $g(x)$ تساوي 3 ومعاملها الرئيس موجبًا، فصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$، وفسّر إجابتك.

54) **مسألة مفتوحة:** مثّل بيانيًّا كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها 8، وأحدها مكرر مرتين.

55) **اكتب:** صف المقصود بسلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود، وكيف يتم تحديده؟

تدريب على اختبار

56) ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟

A -11 **B** 1 **C** -1 **D** 11

57) إذا كان $i = \sqrt{-1}$ ، فإن $5i(7i)$ يساوي :

A 70 **B** 35 **C** -35 **D** -70

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي : (الدرس 4-3)

58) $\frac{16x^4y^3 + 32x^6y^5z^2}{8x^2y}$ **59)** $\frac{18ab^4c^5 - 30a^4b^3c^2 + 12a^5bc^3}{6abc^2}$ **60)** $\frac{18c^5d^2 - 3c^2d^2 + 12a^5c^3d^4}{3c^2d^2}$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها : (الدرس 3-3)

61) $8x^2 + 5x^4 - 6x + 4$ **62)** $9x^4 + 12x^6 - 16$ **63)** $3x^4 + 2x^2 - x^{-1}$

حل كلًّا من المعادلات الآتية مستعملًا القانون العام لحل المعادلة التربيعية: (الدرس 2-3)

64) $x^2 - x - 3 = 0$ **65)** $x + x^2 + 1 = 0$ **66)** $x^2 - 13x + 12 = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

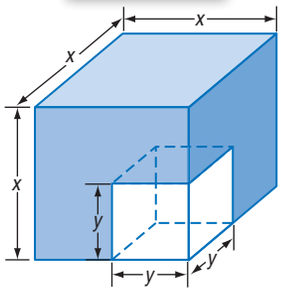
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود
Solving Polynomial Equations

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل. (الدرس 2 - 3)

والآن:
- أحلّل كثيرات الحدود.
- أحلّ معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

المفردات
كثيرة حدود أولية
prime polynomial
الصورة التربيعية
quadratic form

لماذا؟



قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطي حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية x^3-y^3.

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقًا أنه يمكنك تحليل كثيرات الحدود التربيعية تمامًا كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكنك تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية بقوانين خاصة.

مفهوم أساسي مجموع مكعبين والفرق بينهما

أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

إرشادات للدراسة

التحليل التام لكثيرات الحدود
يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًا إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حللت إلى أقصى درجة ممكنة.

مثال 1 مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

a $16x^4 + 54xy^3$

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(8x^3 + 27y^3)$ — أخرج العامل المشترك الأكبر

كل من $8x^3$ و $27y^3$ مكعب كامل، لذا تستطيع استعمال طريقة مجموع مكعبين.

$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$ — $8x^3 = (2x)^3$; $27y^3 = (3y)^3$

$= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$ — مجموع مكعبين

$= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ — بسّط

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ — اكتب العامل المشترك الأكبر

b $8y^3 + 5x^2$

الحد الأول مكعب كامل، لكن الحد الثاني ليس كذلك، لذا لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال طريقة مجموع مكعبين، ولا يمكن تحليلها كذلك بطرائق تحليل كثيرات الحدود التربيعية، أو بإخراج العامل المشترك الأكبر؛ لذا فهي كثيرة حدود أولية.

تحقق من فهمك

1A $5y^4 - 320yz^3$

1B $-54w^4 - 250wz^3$

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولًا عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد ما إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملًا واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال 2

التحليل بتجميع الحدود

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

$8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$	العبارة الأصلية
$= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy)$	جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر
$= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c)$	أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع
$= (4x + 3y)(2a + b + c)$	خاصية التوزيع

b) $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

$20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$	العبارة الأصلية
$= (20fy + 15gy - 10hy) + (-16fz - 12gz + 8hz)$	جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر
$= 5y(4f + 3g - 2h) - 4z(4f + 3g - 2h)$	أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع
$= (5y - 4z)(4f + 3g - 2h)$	خاصية التوزيع

تحقق من فهمك

2A) $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

2B) $13ax + 18bz - 15by - 14az$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: للتحقق من صحة إجابتك، اضرب العوامل لتتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

تُعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الأساسية لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر، أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكنك تحليلها اعتمادًا على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 3 التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $x^6 - y^6$

يمكن اعتبار كثيرة الحدود هذه فرقًا بين مربعين أو فرقًا بين مكعبين، وفي مثل هذه الحالة يجب أن يتم التحليل أولًا على اعتبار أنها فرق بين مربعين قبل التحليل على اعتبار أنها فرق بين مكعبين؛ تسهيلًا للتحليل.

$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ الفرق بين مربعين

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ مجموع مكعبين والفرق بين مكعبين

b) $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

بما أن كثيرة الحدود هذه من 6 حدود ، إذن حلل أولًا بتجميع الحدود.

$a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

$= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3)$ جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر

$= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9)$ أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

$= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9)$ خاصية التوزيع

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 - 6x + 9)$ الفرق بين مكعبين

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2$ ثلاثية حدود المربع الكامل

تحقق من فهمك

3A) $a^6 + b^6$

3B) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

إرشادات للدراسة

التحليل باستعمال الفرق بين مكعبين:

في مثال $3a$، إذا بدأت بالتحليل على اعتبار أن كثيرة الحدود المعطاة فرق بين مكعبين؛ فإنك تحصل على التحليل التالي:

$(x^2-y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

وهو تحليل غير تام ويصعب إتمامه.

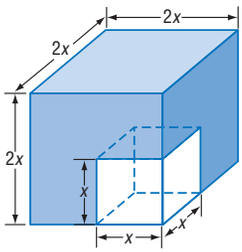
إرشادات للدراسة

تجميع 6 حدود أو أكثر

جمّع الحدود التي بينها أكبر عدد من العوامل المشتركة.

حل معادلات كثيرات الحدود: يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية.

مثال 4 من واقع الحياة حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل



هندسة: ارجع إلى فقرة لماذا في بداية هذا الدرس. إذا كان طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 7000cm^3، فما بُعدا المكعبين؟

بما أن طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير فيمكن أن يعبَّر عن طول ضلع المكعب الصغير بـ x، وطول ضلع المكعب الكبير بـ $2x$.

لاحظ أن حجم الجزء المتبقي يساوي حجم المكعب الكبير مطروحًا منه حجم المكعب الصغير.

$(2x)^3 - x^3 = 7000$ حجم الجزء المتبقي

$8x^3 - x^3 = 7000$ $8x^3 = (2x)^3$

$7x^3 = 7000$ بالطرح

$x^3 = 1000$ اقسم على 7 للطرفين

$x^3 - 1000 = 0$ اطرح 1000 من كلا الطرفين

$(x - 10)(x^2 + 10x + 100) = 0$ فرق بين مكعبين

$x - 10 = 0$ أو $x^2 + 10x + 100 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 10$ $x = -5 \pm 5i\sqrt{3}$

وبما أن العدد 10 هو الحل الحقيقي الوحيد. فإن طولي ضلعي المكعبين هما $10\text{cm}, 20\text{cm}$.

تحقق من فهمك

4) **هندسة:** إذا كان طول حرف المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 3250cm^3، فأوجد بُعدي المكعبين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

تستطيع أحيانًا أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلًا بفرض أن $u = x^2$، يمكنك كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$.
وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على **الصورة التربيعية**.

مفهوم أساسي — الصورة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: au^2+bu+c ، $a\neq0$ ، a,b,c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

مثال 5 — كتابة عبارات في الصورة التربيعية

اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين في الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

a) $150n^8 + 40n^4 - 15$

ابحث عن عاملين للعدد 150؛ أحدهما مربع كامل، وعن عاملين للعدد 40؛ أحدهما الجذر التربيعي لأحد عاملي العدد 150.

$150n^8 + 40n^4 - 15 = 6\times25n^8 + 8\times5n^4 - 15$ — $150 = 6\times25,\ 40 = 8\times5$

$= 6(5n^4)^2 + 8(5n^4) - 15$ — $25n^8 = (5n^4)^2$

b) $y^8 + 12y^3 + 8$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية؛ لأن $y^8 \neq (y^3)^2$.

تحقق من فهمك

5A) $x^4 + 5x + 6$ **5B)** $8x^4 + 12x^2 + 18$

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية

لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ u بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصًا بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 6 — حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

حل المعادلة: $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$.

$18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$	$18x^4 = 2(3x^2)^2$
$2u^2 - 7u + 3 = 0$	افرض أن $u = 3x^2$
$(2u - 1)(u - 3) = 0$	حلّل إلى العوامل
$u = \frac{1}{2}$ أو $u = 3$	خاصية الضرب الصفري
$3x^2 = \frac{1}{2}$ $\quad 3x^2 = 3$	عوّض $3x^2$ بدلًا من u
$x^2 = \frac{1}{6}$ $\quad x^2 = 1$	اقسم على 3
$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ $\quad x = \pm1$	أوجد الجذر التربيعي

حلول المعادلة هي: $-1, 1, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}$.

تحقق من فهمك

6A) $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$ **6B)** $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

الأمثلة 1-3 حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

1) $3ax + 2ay - az + 3bx$

2) $16g^3 + 2h^3$

3) $12qw^3 - 12q^4$

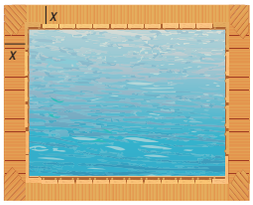
4) $a^6x^2 - b^6x^2$

5) $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

6) $8c^3 - 125d^3$

مثال 4

7) إنشاءات: صنع أنس ممرًّا خشبيًّا عرضه x ft حول بركة مستطيلة الشكل. فإذا كان طول البركة 40ft وعرضها 30 ft، ومساحتها مع الممر 2000ft^2، فما عرض الممر الخشبي؟



مثال 5 اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

8) $4x^6 - 2x^3 + 8$

9) $25y^6 - 5y^2 + 20$

مثال 6 حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

10) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

11) $y^4 - 18y^2 + 72 = 0$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

12) $8c^3 - 27d^3$

13) $64x^4 + xy^3$

14) $a^8 - a^2b^6$

15) $x^6y^3 + y^9$

16) $gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2$

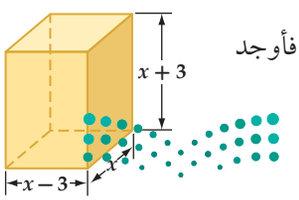
17) $18x^6 + 5y^6$

18) $8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2y^3 + 200x^3 - 10xy^3$

19) $12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2$

مثال 4

20) هندسة: إذا كان حجم المجسم المجاور يساوي $55x\text{cm}^3$ حيث $x > 0$، فأوجد كلًّا من قيمة x، وطول قاعدته وعرضها، وارتفاعه.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

مثال 5 اكتب كلَّ عبارة مما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

21) $x^4 + 12x^2 - 8$ **22)** $-15x^4 + 18x^2 - 4$ **23)** $8x^6 + 6x^3 + 7$

24) $5x^6 - 2x^2 + 8$ **25)** $9x^8 - 21x^4 + 12$ **26)** $16x^{10} + 2x^5$

مثال 6 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

27) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ **28)** $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$ **29)** $4x^4 - 14x^2 + 12 = 0$

30) $9x^4 - 27x^2 + 20 = 0$ **31)** $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$ **32)** $24x^4 + 14x^2 - 3 = 0$

حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

33) $x^4 - 625$ **34)** $x^6 - 64$ **35)** $x^5 - 16x$ **36)** $8x^5y^2 - 27x^2y^5$

37) $15ax - 10bx + 5cx + 12ay - 8by + 4cy + 15az - 10bz + 5cz$

38) $6a^2x^2 - 24b^2x^2 + 18c^2x^2 - 5a^2y^3 + 20b^2y^3 - 15c^2y^3 + 2a^2z^2 - 8b^2z^2 + 6c^2z^2$

39) $6x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 54x^3 + 99x^2 + 90x$

40) $20x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 500x^4 + 175x^3 + 150x^2$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

41) $x^4 + x^2 - 90 = 0$ **42)** $x^4 - 16x^2 - 720 = 0$ **43)** $x^4 - 7x^2 - 44 = 0$

44) $x^4 + 6x^2 - 91 = 0$ **45)** $x^3 + 216 = 0$ **46)** $64x^3 + 1 = 0$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

47) $8x^4 + 10x^2 - 3 = 0$ **48)** $6x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

49) $20x^4 - 53x^2 + 18 = 0$ **50)** $18x^4 + 43x^2 - 5 = 0$

51) $8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$ **52)** $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$

53) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ **54)** $4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0$

55) $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$ **56)** $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$

57) هندسة: منشور متوازي مستطيلات أبعاده $x - 2, x - 4, x - 6$ ، وحجمه $40x$ وحدة مكعبة.

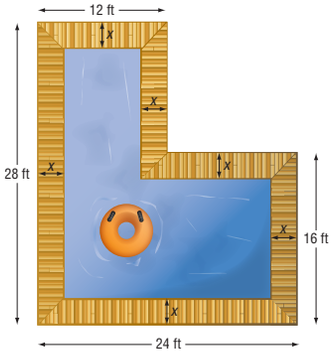
a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم المنشور.

b) حل المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل.

c) هل هناك قيم غير مقبولة للمتغير x عند حل المعادلة؟ وضِّح إجابتك.

d) ما أبعاد المنشور؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



58) تصميم: يريد سليمان أن يبني بركة سباحة وفق التصميم المجاور، حيث يحيط بها ممر خشبي بعرض ثابت.

a) إذا كانت مساحة سطح البركة فقط 336ft^2، فما قيمة x؟

b) إذا أصبحت قيمة x مثليها وذلك بتقليل مساحة سطح البركة، فما المساحة الجديدة لسطح البركة؟

c) إذا نصفت قيمة x بزيادة مساحة سطح البركة، فما مساحة سطح البركة فقط عندئذٍ؟

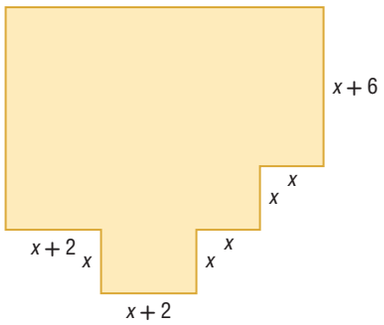
59) أحياء: قدّر حسام عدد الفيروسات في إحدى التجارب بالدالة: $P(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$، حيث t الزمن بالساعات، $P(t)$ عدد الفيروسات. فإذا أراد حسام أن يحدد الزمن الذي يصبح فيه عدد الفيروسات 8000 فيروس.

a) فأوجد قيمة t باستعمال التحليل إلى العوامل.

b) كيف أجريت عملية التحليل إلى العوامل؟

c) ماقيم t المقبولة؟ وما القيم غير المقبولة؟ وضِّح إجابتك.

60) تصميم المباني: يمثل الشكل المجاور مخطط شقة سكنية.



a) اكتب دالة بدلالة المتغير x تمثل مساحة الشقة.

b) إذا كانت مساحة الشقة 1366ft^2، فما قيمة x؟

حلّل كلَّ كثيرة حدود فيما يأتي تحليلًا تامًّا. وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

61) $x^6 - 4x^4 - 8x^4 + 32x^2 + 16x^2 - 64$ **62)** $y^9 - y^6 - 2y^6 + 2y^3 + y^3 - 1$

63) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

64) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 32ft و 40ft، تم توسعتها لتصبح مساحتها 4.5 أمثال مساحتها الأصلية بزيادة كل من طولها وعرضها بالمقدار نفسه.

a) ارسم شكلًا يمثل الموقف.

b) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل المساحة الجديدة، وحلها بالتحليل إلى العوامل.

c) مثّل الدالة بيانيًّا. **d)** ما الحل غير المقبول؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

65) **تحد:** حلّل المقدار $36x^{2n} + 12x^n + 1$ إلى عوامله.

66) **تبرير:** أعط مثالًا مضادًا للعبارة: $a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

67) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت الصورة التكعيبية لمعادلة هي: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$، فاكتب معادلة من الدرجة السادسة يمكن كتابتها على الصورة التكعيبية.

68) **اكتب:** وضِّح كيف يمكن أن يساعدك تمثيل دالة كثيرة حدود بيانيًّا على تحليلها؟

تدريب على اختبار

69) **إجابة قصيرة** حل المعادلة: $x^3 + 27 = 0$.

70) إذا كان الفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{12}, k$ مساويًا للفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$، فما قيمة k ؟

A $\frac{1}{60}$ **B** $\frac{1}{20}$ **C** $\frac{1}{15}$ **D** $\frac{13}{60}$

مراجعة تراكمية

حدّد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: (الدرس 5-3)

71) $4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x$ **72)** $-2x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 9$ **73)** $-x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7$

74) **كهرباء:** دائرة كهربائية تتكون من جزأين موصولين على التوالي؛ معاوقة الأول $4j + 3$ أوم، ومعاوقة الثاني $6j - 2$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لتجد المعاوقة الكلية لهذه الدائرة. (الدرس 3-1)

اقسم كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-4)

75) $(x^2 + 6x - 2) \div (x + 4)$ **76)** $(2x^2 + 8x - 10) \div (2x + 1)$ **77)** $(8x^3 + 4x^2 + 6) \div (x + 2)$

تحدَّ: أوجد حلول كل من المعادلتين:

78) $(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 4) - 2 = 0$

79) $(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

3-6 حل متباينات كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لإيجاد حلول تقريبية لمتباينة كثيرة الحدود.

يمكنك استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لحل متباينات كثيرات الحدود.

نشاط

حُلَّ المتباينة $x^4 + 2x^3 \le 7$

الطريقة 1 : تمثيل المعادلات المرتبطة بكل طرف بيانيًّا بشكل منفصل .

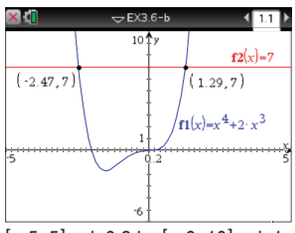
الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on) ثم اختر 1 مستند جديد
- اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية ، واكتب في الطرف الأيسر $x^4 + 2x^3$ بجانب $f1(x) =$، ثم اضغط مفتاح (enter) ليظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح (tab)؛ لكتابة الطرف الأيمن 7 بجانب $f2(x) =$ ، ثم اضغط مفتاح (enter) ليظهر التمثيل البياني.

ملاحظة: تدريج الآلة المعتاد على المحور y بين $(-6.67, 6.67)$، وحتى يظهر التمثيل للمعادلة $f2(x) = 7$ ، قم بالضغط على مفتاح (menu) واختر 4: تكبير/تصغير النافذة ومنها اختر 1: إعدادات النافذة... ؛ لتحديد التدريج المناسب لكلٍّ من x و y

- حدِّد نقاط التقاطع من خلال الضغط على مفتاح (menu) ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر منها 4: نقاط التقاطع ، وقم بالضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع لتظهر نقطة التقاطع، كرّر ذلك مع نقطة التقاطع الثانية فيكون الحل هو :

$-2.47 \le x \le 1.29$ تقريبًا.



[−5, 5] scl: 0.2 by [−6, 10] scl: 1

الطريقة 2 : تمثيل المعادلة المرتبطة بعد مساواتها بالصفر بيانيًّا.

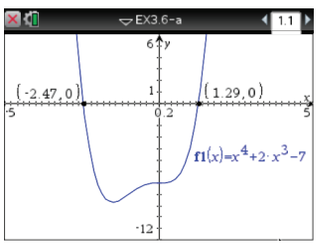
$$x^4 + 2x^3 = 7 \longrightarrow x^4 + 2x^3 - 7 = 0$$

الخطوات:

- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية .
- اكتب المعادلة المرتبطة $x^4 + 2x^3 - 7$ ، ثم اضغط مفتاح (enter) ليظهر التمثيل البياني.

ملاحظة: اختر التدريج المناسب.

- حدِّد أصفار المعادلة من خلال الضغط على مفتاح (menu) ، ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ، ثم اختر منها 1: أصفار الدالة، وقم بالضغط في أي نقطة من الشاشة مرورًا بنقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور x فيظهر صفر الدالة،كرّر ذلك مع النقطة الأخرى، ستظهر إحداثيات صفرَي الدالة، فيكون الحل هو : $-2.47 \le x \le 1.29$ تقريبًا.



[−5, 5] scl: 0.2 by [−12, 6] scl: 1

تمارين:

حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة :

1) $\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x \ge -9$

2) $x^3 - 9x^2 + 27x \le 20$

3) $x^3 + 1 \ge 4x^2$

4) $x^6 - 15 \le 5x^4 - x^2$

5) $\frac{1}{2}x^5 \ge \frac{1}{5}x^2 - 2$

6) $x^8 < -x^7 + 3$

7) $x^4 - 15x^2 > -24$

8) $x^3 - 6x^2 + 4x < -6$

9) $x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-7 نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factor Theorems

فيما سبق:
درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية.
(الدرس 3 - 3)

والآن:
- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أستعمل التعويض التركيبي لأحدّد ما إذا كانت ثنائية حدٍّ عاملًا من عوامل كثيرة حدود أم لا.

المفردات:
نظرية الباقي
Remainder Theorm
التعويض التركيبي
synthetic substitution
نظرية العوامل
Factor Theorm

لماذا؟

قدّر صاحب بقالة أرباحه السنوية بالدالة:
$S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، حيث x عدد السنوات منذ العام 1420هـ، وتمثل $S(x)$ قيمة الأرباح بمئات الريالات.

يمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير الأرباح في العام 1440هـ، بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

التعويض التركيبي: يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x-3 \overline{)\,-3x^2 + 5x + 4} \\ (-)\ -3x^2 + 9x \\ \hline -4x + 4 \\ (-)\ \ -4x + 12 \\ \hline -8 \end{array}$$

الطريقة 2: القسمة التركيبية

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 5 & 4 \\ 3 & & -9 & -12 \\ \hline & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8، وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$ عوّض العدد 3 بدلًا من x

$= -27 + 15 + 4$ اضرب

$= -8$ بسّط

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضِّح **نظرية الباقي**.

مفهوم أساسي — **نظرية الباقي** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$، وكذلك :

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x-r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x-4) \cdot (x+10) + 42$

إن عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية تسمى **التعويض التركيبي**، وهي طريقة سهلة لإيجاد قيم دوال كثيرات الحدود، خصوصًا عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 1 التعويض التركيبي

إذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$، فأوجد $f(4)$ باستعمال التعويض التركيبي.

بناءً على نظرية الباقي، فإن $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 4$.

4	3	−2	0	5	2
		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

بما أنه لا يوجد حد يحتوي على x^2، لذا ضع 0 للمحافظة على مكان عامل الحد x^2.

بما أن باقي القسمة يساوي 662 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 662$

وللتحقق نستعمل التعويض المباشر.

عوض عن x بالعدد 4 في دالة كثيرة الحدود.

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ الدالة الأصلية

$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$ عوّض العدد 4 بدلًا من x

$= 768 - 128 + 20 + 2 = 662$ بسّط

وعليه فإن $f(4) = 662$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى الإجابة نفسها من خلال التعويض المباشر .

تحقق من فهمك

1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$.

1B) إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $g(-1)$.

يمكنك استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي تكون فيها حسابات التعويض المباشر معقدة.

مثال 2 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة

مبيعات: **ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. ما قيمة الأرباح في العام 1440 هـ؟**

أوجد ناتج قسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 20$ مستعملًا القسمة التركيبية.

20	0.02	−0.52	4.03	0.09	77.54
		0.4	−2.4	32.6	653.8
	0.02	−0.12	1.63	32.69	731.34

تقدر الأرباح بـ 73134 ريالًا تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) مدارس: يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى المناطق منذ عام 1427 هـ، حيث تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلاب بالعشرات، قدّر عدد طلاب المنطقة عام 1442 هـ.

عوامل كثيرات الحدود: تبيّن القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضِّح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي — **نظرية العوامل**

أضف إلى مطويتك

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة.

مثال 3 **استعمال نظرية العوامل**

حدّد ما إذا كان $x - 5$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

الخطوة 1: استعمال نظرية العوامل

بناءً على نظرية العوامل تكون ثنائية الحد $x - 5$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(5) = 0$، ولإيجاد $P(5)$، يمكنك استعمال التعويض التركيبي.

5	1	-7	7	15
		5	-10	-15
	1	-2	-3	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا؛ أي أن $P(5) = 0$ ، فإن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود.

الخطوة 2: تحليل كثيرة الحدود

بما أن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود؛ لذا يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على النحو الآتي: $(x - 5)(x^2 - 2x - 3)$. وتكون $x^2 - 2x - 3$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على $(x - 5)$.

تحقق مما إذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل أم لا.

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ حلّل ثلاثية الحدود

وعليه فإن $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x - 5)(x + 1)(x - 3)$

تحقق: يمكنك التحقق من إجابتك بضرب العوامل ومقارنة كثيرة الحدود الناتجة بكثيرة الحدود الأصلية.

تحقق من فهمك

3) حدد ما إذا كان $x - 2$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطًا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملا كثيرة الحدود $x^3 + x^2 - x + 15$ هما $x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال 1 أوجد $f(-2)$, $f(4)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$

2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$

مثال 2

3) جوارح: يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390 هـ، فما العدد التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1443 هـ؟

مثال 3 **في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى، حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:**

4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$

5) $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$

6) $3x^3 + 10x^2 - x - 12; x - 1$

7) $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15; x + 3$

تمارين ومسائل

مثال 1 أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

8) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

9) $f(x) = x^2 - 8x + 6$

10) $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 12$

11) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$

12) $f(x) = x^3 - 5x + 2$

13) $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15$

14) $f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$

15) $f(x) = x^4 - 6x - 8$

مثال 2

16) وقود: يقدر استهلاك سيارة للوقود (بالميل لكل جالون) وفقًا للدالة $f(x) = 0.00000056x^4 - 0.000018x^3 - 0.016x^2 + 1.38x - 0.38$، حيث x سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة. حدد استهلاك السيارة للوقود إذا سارت بالسرعات الآتية 40mi/h, 50mi/h, 60mi/h.

مثال 3 **في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى. حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:**

17) $x^3 - 3x + 2; x + 2$

18) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16; x + 2$

19) $x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$

20) $x^3 - x^2 - 5x - 3; x - 3$

21) $2x^3 + 17x^2 + 23x - 42; x - 1$

22) $2x^3 + 7x^2 - 53x - 28; x - 4$

23) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3; x - 1$

24) $x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 2$

25) $6x^3 - 25x^2 + 2x + 8; 2x + 1$

26) $16x^5 - 32x^4 - 81x + 162; 2x - 3$

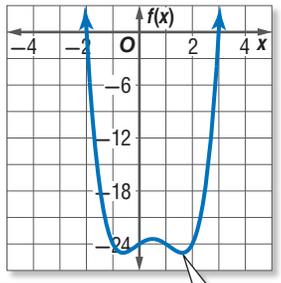
27) زوارق: تحرك زورق بخاري من السكون في اتجاه معاكس للأمواج، فإذا كانت سرعته بالأقدام لكل ثانية تعطى بالدالة $f(t) = -0.04t^4 + 0.8t^3 + 0.5t^2 - t$، حيث t الزمن بالثواني.

a) أوجد سرعة الزورق بعد مرور زمن: 1s, 2s, 3s.

b) إذا استغرق الزورق، 6s ليقطع المسافة بين عوامتين، فأوجد $f(6)$ مستعملاً التعويض التركيبي. ووضّح ماذا يعني ذلك.

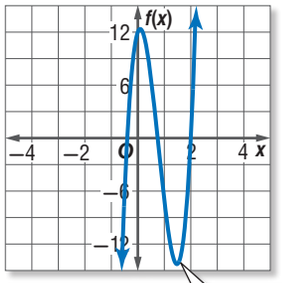
استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

28)



$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

29)



$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

30) **تمثيلات متعددة:** لتكن الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$.

a) جبريًّا: إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل هذه الدالة، فأوجد كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة هذه الدالة على $(x - 2)$.

b) جدوليًّا: كوّن جدول قيم لكثيرة الحدود التي وجدتها في الفرع "a" حيث $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

c) تحليليًّا: اعتمادًا على جدول القيم الذي كوَّنته، ما الاستنتاجات التي يمكن أن نتوصل إليها حول بقية عوامل الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$؟ وضِّح إجابتك.

d) بيانيًّا: مثّل الدالة الأصلية بيانيًّا لتؤكد الاستنتاجات التي توصلت إليها.

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كلٍّ مما يأتي يساوي 3:

31) $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

32) $(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$

33) $(x^2 + 5x + 7) \div (x - k)$

34) $(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$

تنبيه!

التعويض التركيبي

تذكر أنه في التعويض التركيبي يتم قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد على الصورة $(x - a)$. وفي هذه الحالة استعمل a، وإذا كانت ثنائية الحد على الصورة $(x + a)$، فاستعمل $-a$.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **تبرير:** إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

a) الباقي يساوي صفرًا؟

b) الباقي يساوي 1؟

c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفرًا؟

36) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تكعيبية يكون باقي قسمتها على $x - 2$ يساوي 8، وباقي قسمتها على $x - 3$ يساوي -5.

37) **اكتب:** وضِّح لماذا تعد نظرية العوامل حالة خاصة من نظرية الباقي؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدريب على اختبار

38) أيٌّ مما يأتي هو تحليل للعبارة $27x^3 + y^3$ ؟

A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

39) ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 - i)(4 + i)$؟

A 15

B $16 - i$

C 17

D $17 - 8i$

مراجعة تراكمية

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي: (الدرس 2-3)

40) $x^4 - 4x^2 - 21 = 0$

41) $x^4 - 6x^2 = 27$

42) $4x^4 - 8x^2 - 96 = 0$

حُلَّ كلًّا من النظامين الآتيين بيانيًّا: (مهارة سابقة)

43)
$y = 3x - 1$
$y = -2x + 4$

44)
$3x + 2y = 8$
$-4x + 6y = 11$

إذا كان $d(x) = 3x^2 - 6x + 4$, $c(x) = x^2 - 2x$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

45) $c(a + 2) - d(a - 4)$

46) $c(a - 3) + d(a + 1)$

47) $c(-3a) + d(a + 4)$

48) $3d(3a) - 2c(-a)$

49) $c(a) + 5d(2a)$

50) $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-8 الجذور والأصفار
Roots and Zeros

فيما سبق:
درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية. (الدرس 2 - 3)

والآن:
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية للدالة.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.

المفردات:
النظرية الأساسية في الجبر
Fundamental Theorem of Algebra

لماذا؟



يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالةَ: $g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$، لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات، حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.

ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

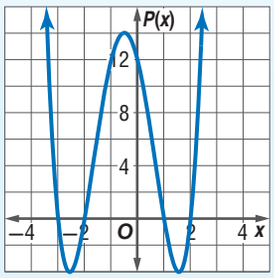
أنواع الجذور تعلمت سابقًا أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًّا تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x.

ملخص المفهوم
أضف إلى مطويتك

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:
- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x.

مثال: افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي: $-3, -2, 1, 2$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

مفهوم أساسي
أضف إلى مطويتك

النظرية الأساسية في الجبر

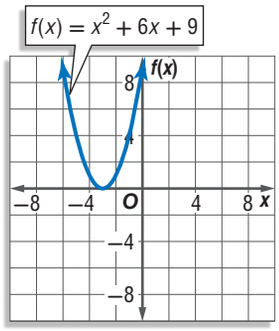
كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 1 تحديد عدد الجذور وأنواعها

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

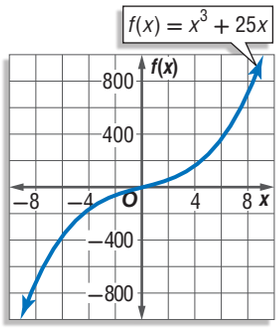


$x^2 + 6x + 9 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 3)^2 = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 3 = 0$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = -3$	أوجد قيمة x

وبما أن العامل $(x + 3)$ مكرر مرتين في تحليل كثيرة الحدود، فإن -3 جذر مكرر مرتين. أي للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين هو -3 .

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يمس المحور x عندما $x = -3$. فإن -3 جذر مكرر مرتين. ✓

b) $x^3 + 25x = 0$



$x^3+25x=0$	المعادلة الأصلية
$x\,(x^2+25)=0$	حلّل إلى العوامل
$x = 0$ أو $x^2 + 25 = 0$	خاصيّة الضرب الصفري
$x^2 = -25$	اطرح **25** من كلا الطرفين
$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$	خاصية الجذر التربيعي، ثم التبسيط

للمعادلة ثلاثة جذور: جذر حقيقي واحد هو 0، وجذران تخيليان هما $5i$, $-5i$.

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x عندما $x = 0$ ،
فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًّا واحدًا هو 0. ✓

تحقق من فهمك

1A) $x^3 + 2x = 0$ **1B)** $x^4 - 16 = 0$ **1C)** $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا.

اختبر حَلَّ كلِّ معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6 = 0$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 = 0$	$-2x^5 - 3x^2 + 8 = 0$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

وبالمثل دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار المركبة.

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.

مفهوم أساسي

قانون ديكارت للإشارات

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.



تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت

(1650 – 1596 م)، فيلسوف، ورياضي، وفيزيائي فرنسي، يلقب بـ"أبو الفلسفة الحديثة". له تأثير واضح في علم الرياضيات؛ فقد اخترع نظامًا رياضيًا شكّل أساس الهندسة التحليلية سمّي باسمه وهو نظام الإحداثيات الديكارتية.

مثال 2

إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية لدالة

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة

$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$.

بما أن درجة الدالة $f(x)$ تساوي 6، فإن لها 6 أصفار: حقيقية أو تخيلية أو كليهما. استعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = \underset{\text{لا}}{x^6} + \underset{\text{نعم}}{3x^5} - \underset{\text{لا}}{4x^4} - \underset{\text{نعم}}{6x^3} + \underset{\text{نعم}}{x^2} - \underset{\text{نعم}}{8x} + 5$$

$$+\ +\quad +\ -\quad -\ -\quad -\ +\quad +\ -\quad -\ +$$

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون: 4 أو 2 أو 0.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5$$

$$= \underset{\text{نعم}}{x^6} - \underset{\text{لا}}{3x^5} - \underset{\text{نعم}}{4x^4} + \underset{\text{لا}}{6x^3} + \underset{\text{لا}}{x^2} + \underset{\text{لا}}{8x} + 5$$

$$+\ -\quad -\ -\quad -\ +\quad +\ +\quad +\ +\quad +\ +$$

نجد أن هناك تغيرين في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون: 2 أو 0.

أنشئ جدولاً يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية يساوي العدد 6 مطروحًا منه مجموع عدد الأصفار الحقيقية
4	2	0
	0	2
2	2	2
	0	4
0	2	4
	0	6

تحقق من فهمك

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة.

$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$.

تعلمت سابقًا أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائمًا، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلًا إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$، فإن تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

تنبيه!

أصفار الدوال

لن تناقش الحالة التي يكون فيها الحد الثابت مساويًا للصفر في هذا الدرس.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي نظرية الأصفار المركبة المترافقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

مثال 3 استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $i - 5$, -1 من أصفارها .

افهم: **المعطيات:** العددان $i - 5$ ، -1 من أصفار كثيرة حدود.

المطلوب: كتابة دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والعددان $i - 5$ ، -1 من أصفارها.

خطط: بما أن $i - 5$ صفر للدالة، فإن $i + 5$ أيضًا صفر للدالة بحسب نظرية الأصفار المركبة المترافقة.

لذا فإن $x - (5 + i)$, $x - (5 - i)$, $x + 1$ عوامل لكثيرة الحدود.

حل: اكتب المعادلة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

اكتب الدالة	$P(x) = (x + 1)\,[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$
أعد تجميع الحدود	$= (x + 1)\,[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$
الفرق بين مربعين	$= (x + 1)\,[(x - 5)^2 - i^2]$
أوجد مربع الحدين	$= (x + 1)\,[(x^2 - 10x + 25 - (-1)]$
بسّط	$= (x + 1)\,(x^2 - 10x + 26)$
اضرب	$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$
اجمع الحدود المتشابهة	$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$

تحقق: بما أن هناك 3 أصفار، فإن دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة، ولذا فإن $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، وأصفارها هي: $5 + i$, $5 - i$, -1 .

تحقق من فهمك

3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $1 + 2i$, -1 من أصفارها.

إرشادات للدراسة

استعمال الأصفار لكتابة الدالة

إن أي دالة على الصورة $f(x) = a(x^3 - 9x^2 + 16x + 26)$، (حيث a عدد صحيح لا يساوي الصفر)، تحقق المعطيات الواردة في المثال 3، ولكن اعتبر أن $a = 1$ للتسهيل فقط.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

تأكد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

2) $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$

3) $16x^4 - 81 = 0$

4) $0 = x^3 - 8$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي :

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

6) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7$

7) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4$

8) $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

9) $4, -1, 6$

10) $3, -1, 1, 2$

11) $-2, 5, -3i$

12) $-4, 4 + i$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

13) $4x^2 + 1 = 0$

14) $2x^2 - 5x + 14 = 0$

15) $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

16) $8x^3 - 27 = 0$

17) $16x^4 - 625 = 0$

18) $x^3 - 6x^2 + 7x = 0$

19) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

20) $x^5 + 2x^3 + x = 0$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي :

21) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

22) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$

23) $f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$

24) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$

25) $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24$

26) $f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

27) $5, -2, -1$

28) $-4, -3, 5$

29) $-1, -1, 2i$

30) $-3, 1, -3i$

31) $0, -5, 3 + i$

32) $-2, -3, 4 - 3i$

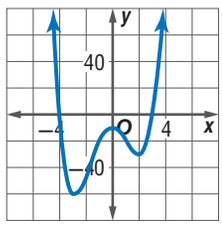
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

a) $-3, 4, i, -i$

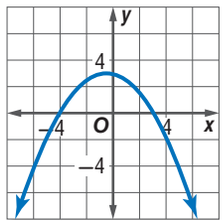
b) $-4, 3$

c) $-4, 3, i, -i$

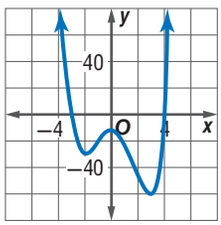
33)



34)

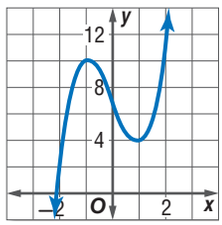


35)



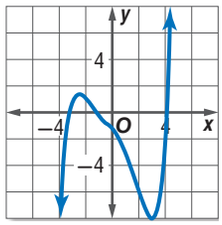
حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ من الدالتين الممثلتين بيانيًّا فيما يأتي، ووضِّح إجابتك:

36)



الدرجة : 3

37)



الدرجة : 5

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **مسألة مفتوحة:** في كل مما يأتي، مثِّل بيانيًّا دالة كثيرة حدود بحيث يكون لها :

a) 3 أصفار حقيقية وصفران تخيليان **b)** 4 أصفار حقيقية **c)** صفران تخيليان

39) **تحدٍّ:** اكتب معادلة على صورة حاصل ضرب عوامل دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة، لها صفران تخيليان، وصفر غير صحيح، وصفران غير نسبيين، ووضِّح إجابتك .

40) حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخريات، ووضِّح إجابتك:

$r^3 - 8 = 0$ $r^2 - 1 = 0$ $r^3 + 1 = 0$ $r^4 + 1 = 0$

41) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا لكل عبارة فيما يأتي:

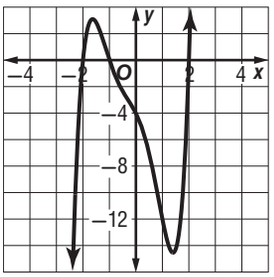
a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.

b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

42) **اكتب:** وضِّح لزميلك كيف تستعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة الممكنة لدالة كثيرة الحدود: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

تدريب على اختبار

43) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟



A $x - 2$ **B** $x - 1$

C $x + 2$ **D** $x + 1$

مراجعة تراكمية

أوجد $f(4)$, $f(-8)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي مستعملًا التعويض التركيبي: (الدرس 3-7)

44) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$

45) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x$

46) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4$

حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية: (الدرس 3-6)

47) $x^6 - y^6$

48) $4x^2y + 8xy + 16y - 3x^2z - 6xz - 12z$

49) $5a^3 - 30a^2 + 40a + 2a^2b - 12ab + 16b$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الأعداد المركبة (الدرس 3-1)

- i هي الوحدة التخيلية، $i^2 = -1$ ، $i = \sqrt{-1}$
- العدد المركب هو أيُّ عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيان، ويسمى a الجزء الحقيقي، وb الجزء التخيُّلي.

القانون العام والمميز (الدرس 3-2)

- القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

العمليات على كثيرات الحدود (الدرسان 3-3, 3-4)

- عند الجمع أو الطرح: أجمِّع الحدود المتشابهة.
- عند الضرب: أستعمل خاصية التوزيع.
- عند القسمة: أستعمل القسمة الطويلة أو التركيبية.

دوال كثيرات الحدود (الدرس 3-5)

- تعرَّف دالة كثيرة الحدود بأنها دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد.

حل معادلات كثيرات الحدود (الدرس 3-6)

- يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال العامل المشترك الأكبر أو تجميع الحدود، أو بإحدى طرائق تحليل الدالة التربيعية.

نظريتا الباقي والعوامل (الدرس 3-7)

- نظرية الباقي: إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$.
- نظرية العوامل: تكون ثنائية الحد $x - a$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذًا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

الجذور، والأصفار (الدرس 3-8)

- نظرية الأصفار المركبة المترافقة: إذا كان $a + bi$ صفرًا للدالة، فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

الوحدة التخيلية (110)
العد التخيلي البحت (110)
العدد المركب (111)
المركبان المترافقان (113)
القانون العام (117)
المميز (120)
التبسيط (127)
درجة كثيرة الحدود (129)
القسمة التركيبية (134)
كثيرة حدود بمتغير واحد (140)
المعامل الرئيس (138)
دالة كثيرة الحدود (141)
دالة القوة (141)
سلوك طرفي التمثيل البياني (142)
صفر الدالة (142)
كثيرة الحدود الأولية (147)
الصورة التربيعية (150)
نظرية الباقي (156)
التعويض التركيبي (156)
نظرية العوامل (158)
النظرية الأساسية في الجبر (162)

اختبر مفرداتك

بيّن ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) العدد 6i تخيلي بحت

2) يسمى القانون: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالمميز

3) يُسمّى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية المعامل الرئيس.

4) تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها كثيرة حدود بمتغير واحد.

5) دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد.

6) تبسيط عبارات تتضمن قوى، يعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

7) القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

8) $(x^3)^2 + 3x^3 - 8 = 0$ هي دالة قوة.

مراجعة الدروس

3-1 الأعداد المركبة (الصفحات: 110-116)

بسّط كلًّا مما يأتي:

9) $\sqrt{-8}$ **10)** $(2-i)+(13+4i)$

11) $(6+2i)-(4-3i)$ **12)** $(6+5i)(3-2i)$

13) كهرباء: تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $2i+3$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $3i-4$ أوم. اجمع هذين العددين لتجد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

14) $2x^2+50=0$ **15)** $4x^2+1=0$

مثال 1

حل المعادلة: $3x^2+12=0$

$3x^2+12=0$	المعادلة الأصلية
$3x^2=-12$	اطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2=-4$	اقسم كلا الطرفين على 3
$x=\pm\sqrt{-4}$	خاصية الجذر التربيعي
$x=\pm 2i$	$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$

3-2 القانون العام والمميز (الصفحات: 117-124)

أجب عن الفروع a–c لكلِّ معادلة تربيعية فيما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

16) $x^2-10x+25=0$ **17)** $x^2+4x-32=0$

18) $2x^2+3x-18=0$ **19)** $4x^2-4x+1=0$

20) فيزياء: قذف محمد كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft/s. إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض (h) بالأقدام يعطى بالمعادلة $h=-16t^2+40t+5$، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الأرض.

مثال 2

حل المعادلة: $x^2-4x-45=0$

$a=1, b=-4, c=-45$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	القانون العام
$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-45)}}{2(1)}$	a = 1, b = -4, c = -45
$=\frac{4\pm 14}{2}$	بسّط
$x=\frac{4+14}{2}$, $x=\frac{4-14}{2}$	اكتب على صورة معادلتين
$=9$, $=-5$	بسّط

إذن الحلّان هُمَا: $-5, 9$.

3-3 العمليات على كثيرات الحدود (الصفحات: 127-132)

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

21) $\frac{14x^4y}{2x^3y^5}$

22) $3t(tn-5)$

23) $(4r^2+3r-1)-(3r^2-5r+4)$

24) $(x^4)^3$

25) $(m+p)(m^2-2mp+p^2)$

26) $3b(2b-1)+2b(b+3)$

مثال 3

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(-4a^3b^5)(5ab^3)$

$(-4a^3b^5)(5ab^3)=(-4)(5)a^{3+1}b^{5+3}$	اضرب القوى
$=-20a^4b^8$	بسّط

b) $(2x^2+3x-8)+(3x^2-5x-7)$

$(2x^2+3x-8)+(3x^2-5x-7)$

$=(2x^2+3x^2)+(3x-5x)+[-8+(-7)]$

$=5x^2-2x-15$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

3-4 قسمة كثيرات الحدود (الصفحات: 133-138)

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

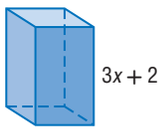
27 $\dfrac{12x^4y^5 + 8x^3y^7 - 16x^2y^6}{4xy^5}$

28 $(6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2)$

29 $(a^4 + 5a^3 + 2a^2 - 6a + 4)(a + 2)^{-1}$

30 $(4a^6 - 5a^4 + 3a^2 - a) \div (2a + 1)$

31 **هندسة:** حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور يساوي $3x^3 + 11x^2 - 114x - 80$ وحدة مكعبة، فما مساحة القاعدة؟



مثال 4

بسّط العبارة: $(6x^3 - 31x^2 - 34x + 22) \div (2x - 1)$.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 14x - 24 \\ 2x-1 \overline{)\ 6x^3 - 31x^2 - 34x + 22} \\ (-)\ 6x^3 - 3x^2 \\ \hline -28x^2 - 34x + 22 \\ (-)\ -28x^2 + 14x \\ \hline -48x + 22 \\ (-)\ -48x + 24 \\ \hline -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $3x^2 - 14x - 24 - \dfrac{2}{2x-1}$.

3-5 دوال كثيرات الحدود (الصفحات: 140-146)

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

32 $5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1$

33 $6xy^2 - xy + y^2$

34 $12x^3 - 5x^4 + 6x^8 - 3x - 3$

أوجد $p(x + h)$, $p(-2)$ لكلِّ دالة فيما يأتي :

35 $p(x) = x^2 + 2x - 3$

36 $p(x) = 3x^2 - x$

37 $p(x) = 3 - 5x^2 + x^3$

مثال 5

حدّد درجة كثيرة الحدود $4x^3 + 3x^2 - 7x^7 + 4x - 1$ ؟ وما معاملها الرئيس؟

أكبر أس يساوي 7 ؛ لذا فدرجة كثيرة الحدود تساوي 7، والمعامل الرئيس هو -7.

مثال 6

إذا كان $p(x) = 3x + 2x^2 - x^3$، فأوجد $p(a - 2)$.

$$\begin{aligned} p(a-2) &= 3(a-2) + 2(a-2)^2 - (a-2)^3 \\ &= 3a - 6 + 2a^2 - 8a + 8 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) \\ &= -a^3 + 8a^2 - 17a + 10 \end{aligned}$$

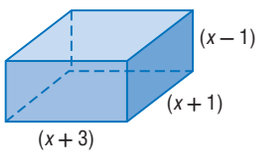
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود (الصفحات: 147-154)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

38 $x^3 + 2x^2 - 35x = 0$

39 $8x^4 - 10x^2 + 3 = 0$

40 **هندسة:** إذا كان حجم المنشور في الشكل الآتي يساوي $315\ \text{in}^3$. فأوجد كلًّا من قيمة x وطول المنشور وعرضه وارتفاعه.



مثال 7

حلّ المعادلة: $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$.

$(x^2 - 4)(4x^2 - 9) = 0$ — حلّل إلى العوامل

$x^2 - 4 = 0$ أو $4x^2 - 9 = 0$ — خاصية الضرب الصفري

$x^2 = 4$ $\quad x^2 = \dfrac{9}{4}$ — أضف 9 لكلا الطرفين، ثم اقسم على 4

$x = \pm 2$ $\quad x = \pm\dfrac{3}{2}$ — أوجد الجذر التربيعي

الحلول هي: $-2, 2, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

3-7 نظريتا الباقي والعوامل (الصفحات: 156-161)

أوجد $f(4)$, $f(-2)$ لكلِّ دالة فيما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

41 $f(x) = x^2 - 3$

42 $f(x) = x^2 - 5x + 4$

43 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

44 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

45 $3x^3 + 20x^2 + 23x - 10,\ x + 5$

46 $2x^3 + 11x^2 + 17x + 5,\ 2x + 5$

47 $x^3 + 2x^2 - 23x - 60,\ x - 5$

مثال 8

حدد ما إذا كان $x - 6$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود:
$x^3 - 2x^2 - 21x - 18$

6	1	−2	−21	−18
		6	24	18
	1	4	3	0

$x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود؛ لأن باقي قسمة كثيرة الحدود عليه يساوي صفرًا.

3-8 الجذور والأصفار (الصفحات: 162-168)

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

48 $f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2$

49 $f(x) = -4x^4 - 2x^3 - 12x^2 - x - 23$

50 $f(x) = x^6 - 5x^3 + x^2 + x - 6$

51 $f(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$

52 $f(x) = -2x^6 + 4x^4 + x^2 - 3x - 3$

مثال 9

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 26x - 48$.

تتغير إشارة الدالة $f(x)$ مرة واحدة؛ لذا يوجد صفر حقيقي موجب واحد.

تتغير إشارة الدالة $f(-x)$ ثلاث مرات؛ لذا يوجد للدالة صفر واحد، أو ثلاثة أصفار حقيقية سالبة.

الدالة ليس لها أصفار تخيلية، أو لها صفران تخيليان.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار الفصل

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\frac{2-i}{1+3i}$

2) $(2+3i)-(2-3i)$

3) $(3-i)\cdot(4+2i)$

بسّط كلًّا مما يأتي:

4) $(3a)^2(7b)^4$

5) $(7x-2)(2x+5)$

6) $(2x^2+3x-4)-(4x^2-7x+1)$

7) $(4x^3-x^2+5x-4)+(5x-10)$

8) $(x^4+5x^3+3x^2-8x+3)\div(x+3)$

9) $(3x^3-5x^2-23x+24)\div(x-3)$

10) إذا كانت $c(x)=3x^3+5x^2-4$ ، فما قيمة $4c(3b)$؟

حلّل كلَّ كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

11) $8y^4+x^3y$

12) $2x^2+2x+1$

13) $a^2x+3ax+2x-a^2y-3ay-2y$

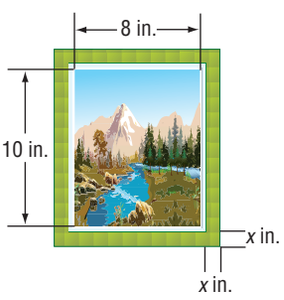
حل كلًّا من المعادلات الآتية:

14) $8x^3+1=0$

15) $x^4-11x^2+28=0$

16) حل المعادلة الآتية باستعمال القانون العام: $x^2-4x+3=0$

17) **إطارات:** إذا كانت مساحة الصورة وإطارها في الشكل الآتي $168\ \text{in}^2$، فما عرض الإطار؟



18) **اختيار من متعدد:** إذا كان $f(x)=x^4-3x^3+5x-3$، فما قيمة $f(-2)$؟

A 37 **B** 27 **C** −33 **D** −21

19) فيما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها . أوجد عواملها الأخرى:

$2x^3+15x^2+22x-15\ ;\ x+5$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

20) $p(x)=x^3-x^2-x-3$

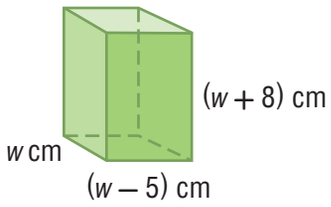
21) $p(x)=2x^6+5x^4-x^3-5x-1$

أوجد جميع أصفار كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

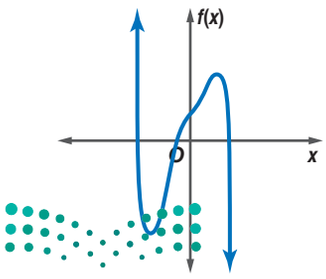
22) $p(x)=x^3-4x^2+x+6$

23) $p(x)=x^3+2x^2+4x+8$

24) **هندسة:** إذا كان حجم المنشور المتوازي المستطيلات الموضَّح بالشكل أدناه $612\ \text{cm}^3$، فأوجد أبعاده.



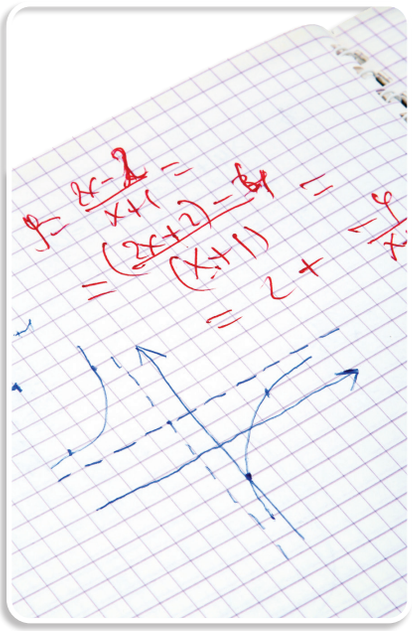
25) صف سلوك طرفي التمثيل البياني الآتي، وحدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية. واذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

رسم شكل

يعدُّ رسم الشكل طريقة مفيدة في حل المسألة، فهو يعطي تصورًا لكيفية الحل، لذا ارسم شكلًا يمثّل المسألة في ورقة مسودة أو في ورقة الإجابة (إذا سمح بذلك).



استراتيجيات لرسم شكل

خطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

واسأل نفسك الأسئلة الآتية:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما المجاهيل التي يُراد نمذجتها وإيجادها؟

خطوة 2

ارسم شكلًا وضع عليه المسميات والبيانات على أن يكون:

- واضحًا ودقيقًا ما أمكن.
- تشتمل المسميات التي توضع على الشكل على جميع معطيات المسألة.

خطوة 3

حل المسألة.

- استعمل الشكل لمساعدتك على نمذجة المسألة بمعادلة، ثم حلّها.
- تحقق من معقولية إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، واستعمل المعلومات المعطاة لحلّها.

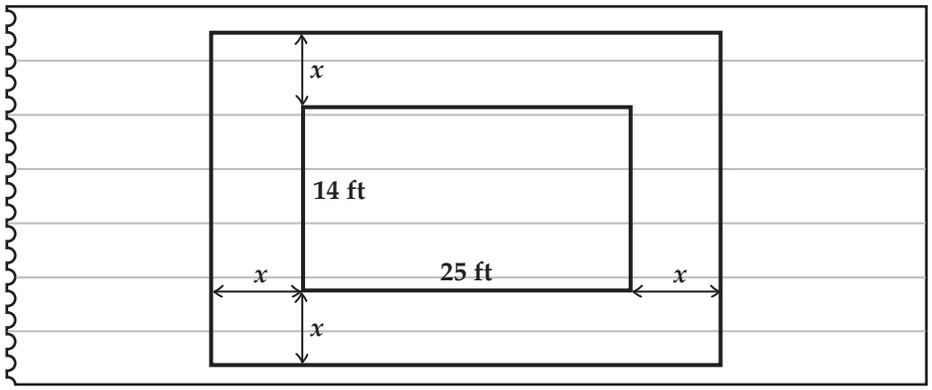
لدى فيصل بركة سباحة سطحها على شكل مستطيل أبعاده 14 ft, 25 ft، وأراد أن يرصف حولها ممرًّا متساوي العرض، إذا كانت مساحة سطح البركة مع الممرِّ $672\ ft^2$، فما عرض الممرِّ؟

A 2.75 ft **C** 3.25 ft

B 3 ft **D** 3.5 ft

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ارسم شكلًا ليساعدك على تصوُّر المسألة، وافترض أن x يمثل عرض الممرِّ غير المعلوم.



طول البركة مع الممرِّ يساوي $25 + 2x$ ، وعرضها مع الممرِّ يساوي $14 + 2x$.

اضرب العبارتين السابقتين لإيجاد مساحة سطح البركة والممر معًا، وساوِ الناتج بالقيمة المعطاة وهي $672\ ft^2$ ثم حُلَّها لإيجاد x.

$$(25 + 2x)(14 + 2x) = 672$$
$$350 + 78x + 4x^2 = 672$$
$$4x^2 + 78x - 322 = 0$$
$$x = -23 \text{ أو } x = 3.5$$

وبما أن عرض الممرِّ لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن القيمة الأنسب هي 3.5 ft

إذن الإجابة الصحيحة هي D

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة من المسألتين الآتيتين، وحدد المطلوب واستعمل المعطيات المعطاة لحلها:

1) لدى مزارع سياج طوله 240 ft، ويريد أن يحيط به حديقة مستطيلة الشكل على أن يكون جدار منزله أحد جوانبها. فما أكبر مساحة ممكنة للحديقة؟

A $7200\ ft^2$

B $4960\ ft^2$

C $3600\ ft^2$

D $3280\ ft^2$

2) يتم تصنيع الحلقات المعدنية بعمل ثقب في رقاقة معدنية دائرية. إذا صنعت حلقة بعمل ثقب عند مركز رقاقة معدنية قطرها 1.8 in، وكانت مساحة سطح الحلقة $0.65\pi\ in^2$ ، فما نصف قطر الثقب؟

A 0.35 in

B 0.38 in

C 0.40 in

D 0.42 in

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) أبسط صورة للمقدار $(5n^2 + 11n - 6) - (2n^2 - 5)$ هي:

A $3n^2 + 11n - 11$

B $3n^2 + 11n - 1$

C $7n^2 + 11n - 11$

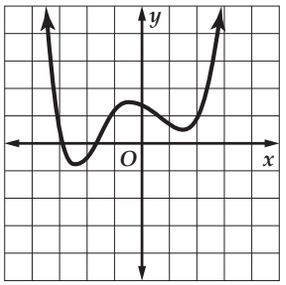
D $7n^2 + 11n - 1$

2) أيٌّ مما يأتي ليس حلاً للمعادلة: $x^3 - 37x - 84 = 0$ ؟

A -4 **C** 6

B -3 **D** 7

3) كم صفرًا حقيقيًّا لدالة كثيرة الحدود الممثلة بيانيًّا أدناه؟



A 2 **C** 4

B 3 **D** 5

4) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي، فإن قيمة x تساوي:

A $\frac{4}{3}$

B $\frac{4}{5}$

C $-\frac{4}{3}$

D $-\frac{4}{5}$

5) استعمل عبد الرحمن الدالة:
$P(x) = -0.000047x^2 + 0.027x + 3$
لتقدير عدد سكان المدينة التي يسكنها ما بين عامي 1400، 1440هـ؛ حيث x عدد السنوات منذ عام 1400هـ، P عدد السكان بالملايين. فما قيمة $P(20)$ التي تمثل عدد سكان هذه المدينة عام 1420هـ ؟

A 2 مليون تقريبًا

B 2.5 مليون تقريبًا

C 3 ملايين تقريبًا

D 3.5 ملايين تقريبًا

6) أبسط صورة للمقدار $\frac{2}{1-5i}$ هي:

A $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

B $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

C $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

D $2 - \frac{2}{5}i$

7) ما قيمة مميِّز المعادلة: $x^2 - x - 20 = 0$ ؟

A 9 **C** 5

B 81 **D** -4

8) إذا كان $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، $\underline{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت $\underline{X}$ مصفوفة رتبتها 2×2 بحيث $\underline{X} = 2\underline{A} - \underline{B}$ فإن:

A $\underline{X} = 3\,\underline{B}$

B $\underline{X} = 2\,\underline{A}$

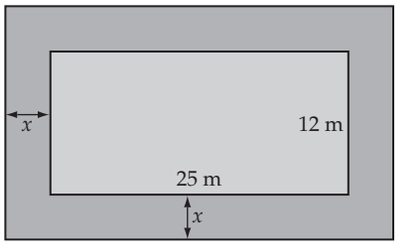
C $\underline{X} = -2\,\underline{B}$

D $\underline{X} = 3\,\underline{A}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

أسئلة ذات إجابات قصيرة

9) يبين الشكل الآتي حديقة محاطة بممر عرضه x مترًا. فإذا علمت أن مساحة الحديقة مع الممر $558\ m^2$ ، فأوجد عرض الممر بالأمتار.



10) حلّل المقدار: $64a^4 + ab^3$ تحليلًا تامًّا، وبيّن خطوات الحلّ.

11) بسّط المقدار:

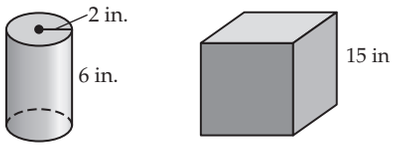
$$\frac{3x^3 - 4x^2 - 28x - 16}{x + 2}$$

واكتب إجابتك على صورة حاصل ضرب عوامل مبينًا خطوات الحل.

12) ما قيمة a في المعادلة المصفوفية الآتية؟

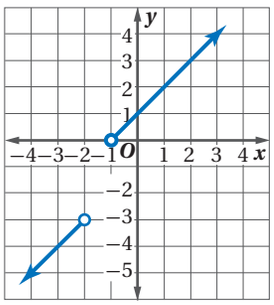
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

13) يريد صالح أن يملأ الإناء المكعب بالماء مستعملًا العلبة الأسطوانية في الشكل أدناه. فكم مرة يستعمل العلبة؟



أسئلة ذات إجابات مطولة

14) اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس ...	3-3	3-6	3-8	2-5	3-5	3-1	3-2	2-2	3-6	3-5	3-4	2-5	3-8	1-3

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

المسافة بين نقطتين	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثانية	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$
مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$	$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$
الضرب بثابت	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثالثة (قاعدة الأقطار)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

كثيرات الحدود

مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$
مربع المجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مكعب المجموع	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
مربع الفرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
مكعب الفرق	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
حاصل ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

الإحصاء والاحتمال

$$n! = n\,(n-1)\,.\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1$$

$$0! = 1$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$P(B/A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

المتتابعات والمتسلسلات

الحد النوني في المتتابعة الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
الحد النوني في المتتابعة الهندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع حدود المتتابعة الحسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ or $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
مجموع حدود المتتابعة الهندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ or $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

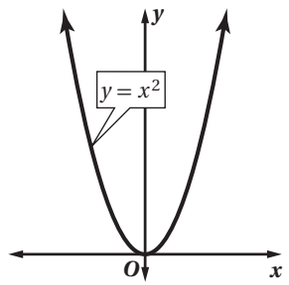
الصيغ

حساب المثلثات

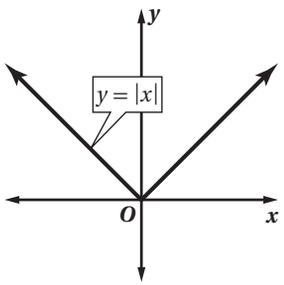
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
الدوال المثلثية	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
متطابقات مثلثية	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

الدوال الرئيسة (الأم)

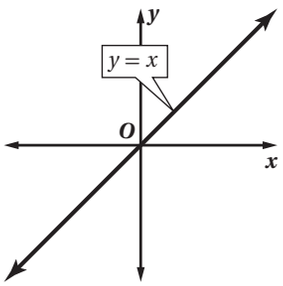
الدوال التربيعية



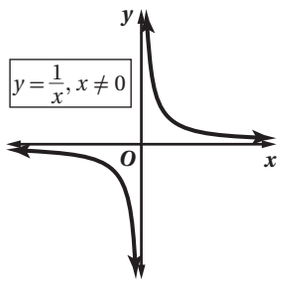
دوال القيمة المطلقة



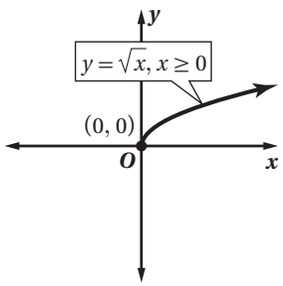
الدوال الخطية



دوال المقلوب



دوال الجذر التربيعي



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$	$\underline{A}^{-1}$
النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{A}$	$-\underline{A}$
مصفوفة الوحدة	$\underline{\mathrm{I}}$
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
المتوسط	$\overline{x}$
الانحراف المعياري	s
الحادثة المتممة	A'
احتمال الحادثة A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\cot(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\csc(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec(x)$
معكوس دالة الجيب	$\sin^{-1} x$
معكوس دالة جيب التمام	$\cos^{-1} x$
معكوس دالة الظل	$\tan^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
أصغر من	$<$
أصغر من أو يساوي	$\leq$
أكبر من	$>$
أكبر من أو يساوي	$\geq$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	i
تركيب الدالتين f و g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\underline{A}_{m \times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	aij
محددة المصفوفة $\underline{A}$	$\lvert \underline{A} \rvert$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

القسم الثاني

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الفهرس

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

التهيئة للفصل الرابع 187
4-1 العمليات على الدوال 188
4-2 العلاقات والدوال العكسية 195
توسع 4-2 معمل الحاسبة البيانية: الدالة العكسية 200
4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي 201
4-4 الجذر النوني 206
توسع 4-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًا 211
اختبار منتصف الفصل 212
4-5 العمليات على العبارات الجذرية 213
4-6 الأسس النسبية 219
4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية 225
توسع 4-7 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الجذرية 231
دليل الدراسة والمراجعة 233
اختبار الفصل 238
الإعداد للاختبارات المعيارية 239
اختبار تراكمي 241

الفصل 5 العلاقات والدّوال النّسبية

التهيئة للفصل الخامس 245
5-1 ضرب العبارات النّسبية وقسمتها 246
5-2 جمع العبارات النّسبية وطرحها 255
5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا 261
اختبار منتصف الفصل 267
5-4 تمثيل الدّوال النّسبية بيانيًا 268
توسع 5-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل الدّوال النّسبية بيانيًا 274
5-5 دوال التغيُّر 275
5-6 حل المعادلات والمتباينات النّسبية 281
توسع 5-6 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات النّسبية 287
دليل الدراسة والمراجعة 289
اختبار الفصل 293
الإعداد للاختبارات المعيارية 294
اختبار تراكمي 296



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الفهرس

الفصل 6

المتتابعات والمتسلسلات

التهيئة للفصل السادس 299

6-1 المتتابعات بوصفها دوال 300

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية 306

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية 314

اختبار منتصف الفصل 320

6-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية 321

توسع 6-4 معمل الحاسبة البيانية: نهاية المتتابعة 327

6-5 نظرية ذات الحدين 328

توسع 6-5 معمل الجبر: التوافيق ومثلث باسكال 332

6-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيِّ 333

دليل الدراسة والمراجعة 337

اختبار الفصل 341

الإعداد للاختبارات المعيارية 342

اختبار تراكمي 344

الصيغ والرموز 346



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ستركز في دراستك لهذا الكتاب على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- **العلاقات والدوال العكسية والجذرية.**
- **العلاقات والدّوال النّسبية وخصائصها.**
- **المتتابعات والمتسلسلات والعمليات عليها.**

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الجبرية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.



كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد

  اقرأ فقرة **والآن** .

- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية، واقرأ تعريف كل منها.

- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.

- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات** .

- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك

  على حل هذه التمارين وما شابهها.

- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.

- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.

- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.

- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.

- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائمًا لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم

  الرياضية فتجتنبها.

- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته

  من أفكار في **المطويات** .

- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلّها.

- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفصل 4

العلاقات والدوال العكسية والجذرية
Inverses and Radical Functions and Relations



فيما سبق

درست تبسيط كثيرات الحدود.

والآن

- أجد معكوس دالة، وتركيب دالتين.
- أمثّل بيانيًّا دوال ومتباينات الجذر التربيعي وأحلّلها.
- أبسّط معادلات تتضمن جذورًا وأسسًا نسبية وأحلّها.

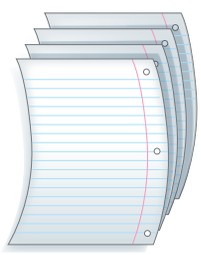
لماذا؟

إدارة الموارد المالية:
يعد ربط إدارة الموارد المالية بالرياضيات مهارة، وإذا أتقنتها فإنك ستستفيد منها في مجالات حياتك المختلفة. إن تعلم إدارة مواردك المالية يساعدك على وضع ميزانية والعيش ضمن حدودها، وسوف تتعرض في هذا الفصل لمواقف مالية مثل: التوفير، التضخم، صرف العملة.

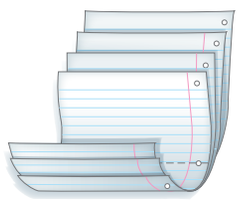
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوال العكسية والجذرية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

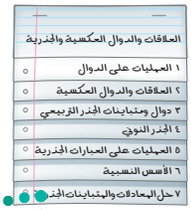
1. **ثبّت** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، بحيث تعلو كل ورقة الورقة التي أمامها بمقدار 2.5 سم.



2. **اطو** أسفل الورقات الأربع إلى أعلى، وحاذِ الحوافَ بحيث تكون المسافات بين نهايات جميع الأوراق متساوية.



3. **عندما** تتأكد من تساوي المسافات بين الحواف، اثنِ الأوراق جيدًا، ثم ثبتها على طول خط الطي، ثم اقلب المطوية واكتب عنوان الفصل وعناوين الدروس كما في الشكل.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الرابع

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي: (يستعمل مع الدرس 2-4)

1) $\sqrt{28}$

2) $\sqrt{\frac{25}{4}}$

3) طاقة حركية: يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة $v = \sqrt{\frac{2KE}{m}}$، حيث (KE) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (m) إلى كتلة الكرة. بسّط هذه المعادلة معتبرًا كتلة الكرة $50\,\text{kg}$.

بسّط كلًّا من العبارات الآتية مستعملًا القسمة التركيبية: (يستعمل مع الدروس 4-4 إلى 6-4)

4) $(5x^2 - 22x - 15) \div (x - 5)$

5) $(3x^2 + 14x - 12) \div (x + 4)$

6) $(2x^3 - 7x^2 - 36x + 36) \div (x - 6)$

7) $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 18x + 15) \div (x - 3)$

8) مبيعات: يمكن تقدير عدد السلع المبيعة من متجر بالمعادلة $n = \frac{4000x^2}{x^2 + 50}$، حيث x تمثل المبلغ الذي أُنفق بمئات الريالات على الدعاية، n عدد السلع المبيعة.

a) أجرِ عملية القسمة المشار إليها بالعبارة $\frac{4000x^2}{x^2 + 50}$

b) ما العدد التقريبي للسلع التي ستباع، إذا أنفق المتجر 1000 ريال على الدعاية؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط العبارة $\sqrt{\frac{45}{20}}$.

$\sqrt{\frac{45}{20}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$ — اضرب في $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$

$= \frac{\sqrt{900}}{20}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{30}{20}$ — أوجد قيمة $\sqrt{900}$

$= \frac{3}{2} = 1.5$ — بسّط

مثال 2

بسّط العبارة $(3x^4+4x^3+x^2+9x-6) \div (x + 2)$، مستعملًا القسمة التركيبية.

$x - r = x + 2$، لذلك $r = -2$.

-2	3	4	1	9	-6
	↓	-6	4	-10	2
	3	-2	5	-1	-4

النتيجة هي: $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - \frac{4}{x+2}$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-1

العمليات على الدوال
Operations on Functions

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

المفردات

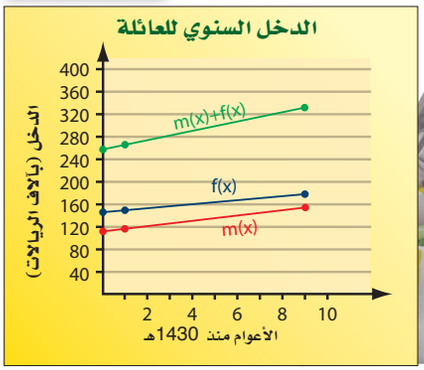
تركيب دالتين

composition of functions

لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1430هـ؛ حيث $f(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.





العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x$, $g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x+5) = x+5$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x+5) = 3x-5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x+5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

مثال 1 جمع الدوال وطرحها

إذا كان $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 2x + 1$، فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي:

a) $(f+g)(x)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ — جمع دالتين

$= (x^2 - 4) + (2x + 1)$ — عوِّض

$= x^2 + 2x - 3$ — بسِّط

b) $(f-g)(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ — طرح دالتين

$= (x^2 - 4) - (2x + 1)$ — عوِّض

$= x^2 - 2x - 5$ — بسِّط

تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 + 5x - 2$, $g(x) = 3x - 2$

1A) $(f+g)(x)$

1B) $(f-g)(x)$

في المثال 1، الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز ∩.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = x^2 + 7x + 12$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ضرب دالتين

$= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$ عوّض

$= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$ خاصية التوزيع

$= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$ بسّط

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ قسمة دالتين

$= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}, x \neq \frac{4}{3}$ عوّض

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا، فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

تنبيه!

قسمة دالتين

بما أنه قد تم تعلُّم قسمة كثيرات الحدود في الفصل 3، فإنه سيُكتفي عند إيجاد ناتج قسمة دالتين (في هذا الدرس) بكتابتهما في صورة دالة نسبية، وتحديد مجالها من دون إجراء عملية القسمة.

تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 - 7x + 2, g(x) = x + 4$

2A $(f \cdot g)(x)$

2B $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

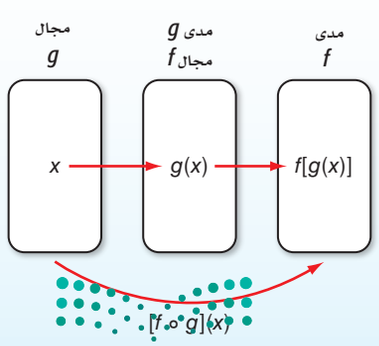
مفهوم أساسي تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

النموذج:



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

a) $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

لإيجاد $f \circ g$، أوجد قيم $g(x)$ أولًا، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لإيجاد $f[g(x)]$

$f[g(10)] = f(14) = 9$ **$g(10) = 14$**
$f[g(9)] = f(0) = 13$ **$g(9) = 0$**
$f[g(8)] = f(15) = 11$ **$g(8) = 15$**
$f[g(5)] = f(1) = 8$ **$g(5) = 1$**

$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$

لإيجاد $g \circ f$، أوجد قيم $f(x)$ أولًا ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g ، لإيجاد $g[f(x)]$

$g[f(14)] = g(9) = 0$ **$f(14) = 9$**
$g[f(15)] = g(11)$ **$f(15) = 11$**
$g[f(1)] = g(8) = 15$ **$f(1) = 8$**
$g[f(0)] = g(13)$ **$f(0) = 13$**

$g(11)$ غير معرّفة
$g(13)$ غير معرّفة

وبما أن 13 , 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $g \circ f$ غير معرّفة عند $x = 11$ و $x = 13$ وبما أن $g[f(14)] = 0, g[f(1)] = 15$ ، فإن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$.

b) $f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب دالتين	$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= f(4x)$	عوّض	$= g(2x - 5)$
$= 2(4x) - 5$	عوّض	$= 4(2x - 5)$
$= 8x - 5$	بسّط	$= 8x - 20$

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$, $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

3B) $f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

إرشادات للدراسة

التركيب
كن حذرًا من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الربط مع الحياة

في أعقاب الأزمة المالية العالمية عام 2009م، هبطت مبيعات كبرى شركات صناعة السيارات الأمريكية بصورة كبيرة بلغت 53% في أكبر انخفاض لها منذ 42 عامًا، مما اضطر هذه الشركات إلى خفض حجم إنتاجها بمقدار 40%.

مثال 4 من واقع الحياة

استعمال تركيب دالتين

سيارات: استعمل تركيب دالتين لحل المسألة الآتية: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافًا إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

افهم: **المعطيات:**
- نسبة التخفيض من قيمة كل سيارة 12%، وقيمة الخصم 1500 ريال.
- سعر السيارة التي يريد أحمد شراءها 64500 ريال.

المطلوب: هل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

خطط: افترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة، و$d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم؛ إذن $(r \circ d)(x)$ تمثل السعر إذا طبق التخفيض قبل الخصم، و $(d \circ r)(x)$ تمثل السعر إذا طبق الخصم قبل التخفيض.

حل: اكتب معادلتين لدالتي التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخفض المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة. فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x = 0.88x$$

يخصم الوكيل1500 ريال من سعر كل سيارة جديدة؛ لذا فإن دالة الخصم هي:

$$r(x) = x - 1500$$

إذا طُبّق التخفيض قبل الخصم، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[r \circ d](64500)$.

$$[r \circ d](x) = r[d(x)]$$

$$[r \circ d](64500) = r[d(64500)]$$

$$= r[0.88\ (64500)]$$

$$= r(56760)$$

$$= 56760 - 1500 = 55260$$

أما إذا طُبّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[d \circ r](64500)$.

$$[d \circ r](x) = d[r(x)]$$

$$[d \circ r](64500) = d[r(64500)]$$

$$= d(64500 - 1500)$$

$$= d(63000)$$

$$= 0.88\ (63000)$$

$$= 55440$$

وبما أن $[r \circ d](64500) = 55260$, $[d \circ r](64500) = 55440$.

فإن السعر النهائي للسيارة سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق: تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبته 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر؛ لذا ستكون قيمة التخفيض أعلى.

تحقق من فهمك

4) تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالًا، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيُّهما يعطي سعرًا أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

تأكد

المثالان 2 , 1 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $f(x)=x+2$, $g(x)=3x-1$

2) $f(x)=x^2-5$, $g(x)=-x+8$

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $f=\{(2,5),(6,10),(12,9),(7,6)\}$, $g=\{(9,11),(6,15),(10,13),(5,8)\}$

4) $f=\{(-5,4),(14,8),(12,1),(0,-3)\}$, $g=\{(-2,-4),(-3,2),(-1,4),(5,-6)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا.

5) $f(x)=-3x$, $g(x)=5x-6$

6) $f(x)=x+4$, $g(x)=x^2+3x-10$

مثال 4

7) ادِّخار: يُقتطع ما نسبته 8% من راتب موظف للادِّخار. ويستطيع الموظف أن يختار بحيث يكون الاقتطاع قبل تسديده قسطًا آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. فإذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط 9500 ريال، فهل يكون ادّخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط أم بعده؟ وضِّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

8) $f(x)=x-1$, $g(x)=5x-2$

9) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x+1$

10) $f(x)=3x^2-4$, $g(x)=x^2-8x+4$

11) رياضة المشي: يمشي راشد على ممر متحرك. فإذا كانت سرعته يُعبر عنها بالدالة: $I(x)=3x-4$، وسرعة الممر المتحرك يعبر عنها بالدالة: $W(x)=4x+7$، حيث x الزمن بالثواني.

a) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا كان يمشي في اتجاه سير الممر المتحرك؟

b) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا مشى في عكس اتجاه سير الممر المتحرك؟

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

12) $f=\{(-8,-4),(0,4),(2,6),(-6,-2)\}$, $g=\{(4,-4),(-2,-1),(-4,0),(6,-5)\}$

13) $f=\{(5,13),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$, $g=\{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

14) $f=\{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$, $g=\{(-6,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$

15) $f=\{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-4)\}$, $g=\{(5,-4),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

16) $f(x)=2x^2-x+1$, $g(x)=4x+3$

17) $f(x)=4x-1$, $g(x)=x^3+2$

18) $f(x)=2x^2$, $g(x)=8x^2+3x$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 4

19) صناعة: ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة: $r(x) = 6.5x$، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة: $c(x) = 0.75x + 1850$.

a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبِّر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان.

b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و1000 فنجان و5000 فنجان.

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299 ريالًا، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

a) اكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$ ، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان $t(x)$.

b) أيّ الدالتين الآتيتين يمثّل سعر التلفاز النهائي: $[p \circ t](x)$، أم $[t \circ p](x)$؟ وضِّح إجابتك.

c) كم سيدفع سامر ثمنًا للتلفاز؟



الربط مع الحياة

الخاصية المميزة للشاشات المسطحة HDTV هي أن نسبة عرضها إلى ارتفاعها هي 16:9، فتوفر للمشاهد صورة أوضح.

إذا كان $g(x) = x - 3$ ، $f(x) = x^2 + x - 12$. فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي، وحدد مجالها:

21) $(f - g)(x)$ **22)** $2(g \cdot f)(x)$ **23)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$ ، $g(x) = -2x + 1$ ، $f(x) = 5x$ فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

24) $g[h(3)]$ **25)** $h[f(-5)]$ **26)** $h[f(9)]$

27) $f[g(3a)]$ **28)** $f[h(a + 4)]$ **29)** $g[f(a^2 - a)]$

30) تمثيلات متعددة: لتكن: $f(x) = x^2, g(x) = x$.

a) جدوليًّا: أنشئ جدولًا يبين بعض قيم الدوال: $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا الدوال $f(x), g(x), (f + g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

C) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا الدوال $f(x), g(x), (f - g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) لفظيًّا: صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

31) توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1434 هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين:

عدد الرجال: $y = 7x + 6$

عدد النساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1434 هـ ، وy تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1434 هـ.

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟

إذا كان $h(x) = x^2 - 2x + 1$ ، $g(x) = -4x + 3$ ، $f(x) = x + 2$ فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

32) $(f \cdot g \cdot h)(3)$ **33)** $[(f + g) \cdot h](1)$ **34)** $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(6)$

35) $[f \circ (g \circ h)](2)$ **36)** $[g \circ (h \circ f)](-4)$ **37)** $[h \circ (f \circ g)](5)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

مسائل مهارات التفكير العليا

38) مسألة مفتوحة: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](4) = 0$.

39) اكتشف الخطأ: تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$ ، حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$. من منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

ريم

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$$
$$= x^4 + 18x^2 + 72$$

العنود

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 2x + 56$$

40) تحدٍّ: إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}, g(x) = \sqrt{x^6}$ فحدد مجال كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

a) $[g \circ g](x)$ **b)** $[f \circ f](x)$

41) تبرير: حدد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسِّر إجابتك.

a) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة f أو جزءًا منه.

b) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة g أو جزءًا منه.

42) اكتب: وضِّح لماذا نقوم بتركيب دالتين. وأعطِ مثالًا من واقع الحياة يمكنك حلّه باستعمال تركيب دالتين.

تدريب على اختبار

43) إذا كان $h(x) = 2(x + 5)^2, g(x) = x^2 + 9x + 21$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟

A $k(x) = -x^2 - 11x - 29$

B $k(x) = x^2 + 11x + 29$

C $k(x) = x + 4$

D $k(x) = x^2 + 7x + 11$

44) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي:

A 38

B 43

C 86

D 261

مراجعة تراكمية

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية، لكلٍّ من الدوال الآتية: (مهارة سابقة)

45) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ **46)** $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3$

47) صندوق أبعاده 12in, 16in, 18in . ما المقدار الثابت من الطول الذي يجب إضافته إلى كلٍّ بعد من أبعاده، ليصبح حجمه 5985in^3؟ (مهارة سابقة)

حل كلَّ معادلة فيما يأتي، بالنسبة للمتغير المبين إزاء كل منها: (مهارة سابقة)

48) $5x - 7y = 12, x$ **49)** $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ **50)** $(x + 2)^2 - (y + 5)^2 = 4, y$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-2

العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

فيما سبق

درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن

- أجد كلًّا من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدّد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

لماذا؟



يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267\ r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75\ d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة .

السعودية	أمريكا
	0.267
3.75	

أمريكا	السعودية
0.267	
	3.75

إيجاد العلاقة العكسية: تذكّر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. **والعلاقة العكسية** هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكنك الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب في العلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي — العلاقة العكسية

أضف إلى مطويتك

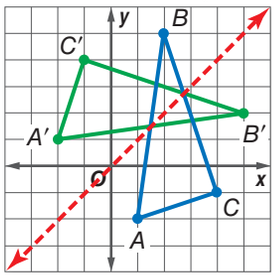
التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$

مثال 1 — إيجاد العلاقة العكسية

هندسة: يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(1, -2), (2, 5), (4, -1)\}$.
أوجد العلاقة العكسية لها، ثم مثّل بيانيًّا العلاقة والعلاقة العكسية لها على مستوى إحداثي واحد، واذكر التحويل الهندسي الذي يحوّل العلاقة المعطاة إلى العلاقة العكسية لها.



مثّل العلاقة بيانيًّا. ولإيجاد العلاقة العكسية قم بتبديل إحداثيات الأزواج المرتبة. فتكون العلاقة العكسية هي: $\{(-1, 4), (5, 2), (-2, 1)\}$. وبتمثيل هذه الأزواج المرتبة للعلاقة العكسية بيانيًّا يتضح أنها تمثل رؤوس $\triangle A'B'C'$ بعد انعكاس رؤوس $\triangle ABC$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

1) هندسة: إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-3, -6), (-8, -6), (-8, -3)\}$، تمثّل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة ومعكوسها، وإذا كان معكوس الدالة يمثل دالةً أيضًا، فإنه يسمى **دالة عكسية**. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خواص الدالة العكسية

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

أوجد $f(6)$. أوجد $f^{-1}(2)$.

$f(x) = x - 4$ $f^{-1}(x) = x + 4$

$f(6) = 6 - 4 = 2$ $f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

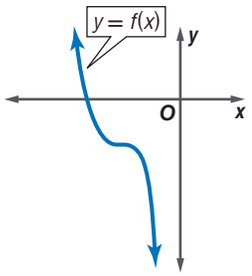
وبما أن كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

قراءة الرياضيات

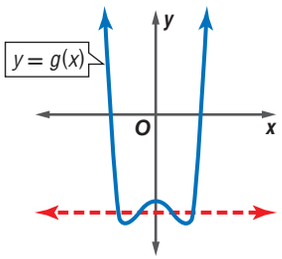
الدالة العكسية

f^{-1} يقرأ الدالة العكسية للدالة f. تذكّر أن (-1) ليس أسًّا.

اختبار الخط الأفقي: إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكّر أنه يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكنك استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة (الدالة متباينة)؛ لذا يمثّل معكوس الدالة $y = f(x)$ دالة أيضًا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة (الدالة ليست متباينة)؛ لذا لا يكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالةً.

يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

مثال 2

إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا

أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

a) $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1: أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y

$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$

الخطوة 2: بدِّل بين كلٍّ من المتغير x والمتغير y في المعادلة $x = 2y - 5$

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = 2y - 5$

$x + 5 = 2y$ أضف 5 للطرفين

$\frac{x+5}{2} = y$ اقسم الطرفين على 2

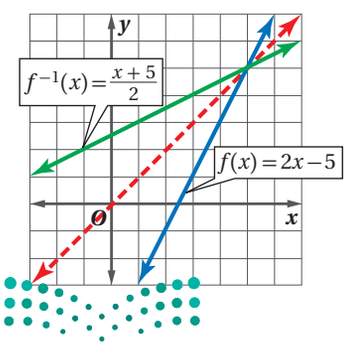
الخطوة 4: ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y، إذا كان المعكوس دالةً.

بما أن الدالة $f(x)$ خطية، وباستعمال اختبار الخط الأفقي، تجد أن معكوسها هو دالة أيضًا، لذا يمكنك استعمال الرمز $f^{-1}(x)$

$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

فتكون الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x - 5$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

والتمثيل البياني للدالة $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هي انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 5$ حول المستقيم $y = x$.



إرشادات للدراسة

رمز الدالة العكسيّة

بما أن معكوس الدالة $f(x)$ في الفرع a من المثال 2 هو دالة أيضًا، لذا تم التعبير عنها بـ $f^{-1}(x)$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

b $f(x) = x^2 + 1$

الخطوة 1: $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 1$

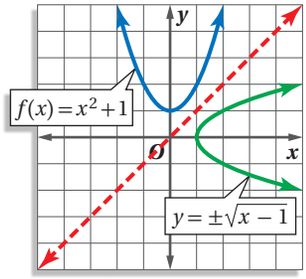
الخطوة 2: $x = y^2 + 1$

الخطوة 3: $x = y^2 + 1$

اطرح 1 من كلا الطرفين $x - 1 = y^2$

خُذ الجذر التربيعي للطرفين $\pm\sqrt{x-1} = y$

الخطوة 4: $y = \pm\sqrt{x-1}$



مثّل بيانيًّا $y = \pm\sqrt{x-1}$ بإجراء انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ حول المستقيم $y = x$.

ارشادات للدراسة

الدوال

معكوس الدالة f في الفرع b لا يمثل دالة؛ لأنه لا يحقق اختبار الخط الرأسي، أو لأن الدالة f لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

تحقق من فهمك

2A $f(x) = \frac{x-3}{5}$

2B $f(x) = 3x^2$

التأكد من الدالة العكسية: يمكنك تحديد ما إذا كانت دالتان، كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كلٍّ من تركيبَيهما.

مفهوم أساسي — **الدالة العكسية**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون كلٌّ من الدالتين f, g دالة عكسيةً للأخرى، إذا وفقط إذا كان تركيب كلٍّ منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = (x)$.

الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

مثال 3 — **التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى**

في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

a $f(x) = 3x + 9, g(x) = \frac{1}{3}x - 3$

تأكد بأن تركيب الدالتين $g(x), f(x)$ يساوي الدالة المحايدة.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{3}x - 3\right) = 3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) + 9 = x - 9 + 9 = x$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)] = g(3x + 9) = \frac{1}{3}(3x + 9) - 3 = x + 3 - 3 = x$$

إذن تمثل كلٌّ من الدالتين دالة عكسية للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

تنبيه!

الدالة العكسية

تأكد أن التركيبين $[g \circ f](x)$ و $[f \circ g](x)$ يساوي كلّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$؛ وذلك لتكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

b $f(x) = 4x^2, g(x) = 2\sqrt{x}$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] = f(2\sqrt{x}) = 4(2\sqrt{x})^2 = 4(4x) = 16x$$

بما أن $[f \circ g](x) \neq x$، فإن الدالتين $g(x)$ و $f(x)$ لا تمثل كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى.

تحقق من فهمك

3A $f(x) = 3x - 3, g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

3B $f(x) = 2x^3 - 1, g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2019 1445

تأكد

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

1) $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$ **2)** $\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كلٍّ من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

3) $f(x) = -3x$ **4)** $g(x) = 4x - 6$ **5)** $h(x) = x^2 - 3$

مثال 3 في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

6) $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$

7) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $g(x) = 2x - \frac{4}{3}$

8) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

9) $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$ **10)** $\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

11) $f(x) = x + 2$ **12)** $g(x) = 5x$ **13)** $l(x) = -2x + 1$

14) $h(x) = \frac{x - 4}{3}$ **15)** $k(x) = -\frac{5}{3}x - 8$ **16)** $h(x) = x^2 + 4$

17) $f(x) = 5x^2$ **18)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ **19)** $f(x) = (x + 1)^2 + 3$

مثال 3 في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$

21) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$, $g(x) = -3x + 9$

22) $f(x) = \frac{x + 10}{8}$, $g(x) = 8x - 10$

23) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$

24) $f(x) = (x + 6)^2$, $g(x) = \sqrt{x} - 6$

25) $f(x) = 2\sqrt{x - 5}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$



26) وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل l لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(l) = 12l$، وكان سعر اللتر كما هو موضح في الشكل المجاور.

a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين

b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلو متر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية.

27) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$.

a) أوجد معكوس الدالة.

b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحتها 36cm^2.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحدد ما إذا كان معكوس كلِّ دالة من الدوال الآتية دالة أيضًا أم لا:

28) $f(x) = x^3 - 8$ **29)** $h(x) = 2x^2$ **30)** $g(x) = 3x + 7$

31) درجات الحرارة: تستعمل الصيغة $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجة الحرارة السيليزية إلى درجة الحرارة الفهرنهايتية.

a) أوجد $F^{-1}(x)$. ثم بيِّن أن $F^{-1}(x)$ و $F(x)$ تمثل كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى.

b) فيم تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟

32) تمثيلات متعددة: تأمل الدالة $y = x^n$، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) بيانيًّا: مثِّل الدوال $y = x^n$ بيانيًّا للقيم $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) جدوليًّا: ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدوال دوال أيضًا؟ سجل نتائجك في جدول.

c) تحليليًّا: استنتج قيم n التي يكون عندها معكوس الدوال $f(x) = x^n$ دوال أيضًا، على فرض أن n عدد كلي.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) تبرير: حدد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك.

"إذا كانت العلاقة لا تمثل دالة، فإن معكوسها لا يمثل دالةً أيضًا."

34) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على دالة، ودالتها العكسية . وتحقق من أن كلًّا منهما دالة عكسية للأخرى.

35) تحدٍّ: أعطِ مثالًا على دالة معكوسها الدالة نفسها.

36) اكتب: إذا كان لديك تركيب لدالتين، كل منهما دالة عكسية للأخرى. فلماذا تكون قيمة تركيب الدالتين عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا؟

تدريب على اختبار

37) إذا كان $g(x) = -x + 1$, $f(x) = x^2 + 3$، فأيٌّ مما يأتي يمثل $f[g(x)]$؟

A $x^2 - x + 2$ **C** $-x^3 + x^2 - 3x + 3$

B $-x^2 - 2$ **D** $x^2 - 2x + 4$

38) أيُّ الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$ ؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$ **C** $g(x) = 2x + 5$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$ **D** $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 2$, $f(x) = 3x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس: 1-4)

39) $g[f(3)]$ **40)** $f[h(-2)]$ **41)** $h[g(1)]$

42) مساحة: قطعة أرض على شكل شبه منحرف، طول قاعدتها الأطول يزيد بمقدار 8 ft على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر، ويزيد ارتفاعها قدمًا واحدةً على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر. ما أبعاد قطعة الأرض إذا كانت مساحتها 4104ft^2؟ (مهارة سابقة)

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

43) $(3 + 4i)(5 - 2i)$ **44)** $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ **45)** $\frac{1 + i}{1 - i}$ **46)** $\frac{4 - 3i}{1 + 2i}$

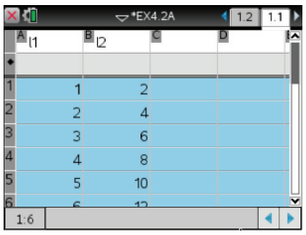
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

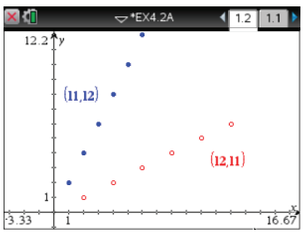
الهدف
أقارن دالةً بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire.

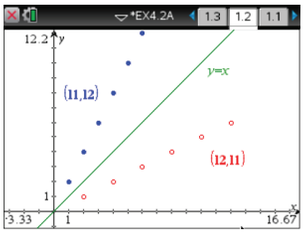
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لمقارنة دالة بمعكوسها، باستعمال التمثيلات البيانية.

نشاط 1 تمثيل المعكوس بيانيًّا باستعمال الأزواج المرتبة

مثّل الدالة: $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$ ومعكوسها بيانيًّا.





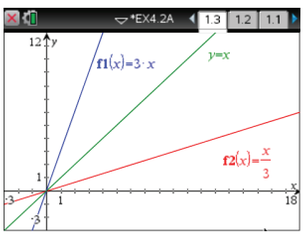


الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on) .
- من الشاشة الظاهرة اختر (1 مستند جديد) ، ومنها اختر (4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات) فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز $l1$ ثم اضغط (enter) ، واكتب في أعلى العمود B الرمز $l2$ ثم اضغط (enter) .
- أدخل قيم x في العمود $l1$ بالترتيب، وقيم y في العمود $l2$.
- اضغط مفتاح (on) واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط (enter) فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على (menu) واختر منها (3 :إدخال/تحرير الرسم البيا) ومنها اختر (5: التمثيل النقطي المبعثر) ، فتظهر شاشة تتضمن مستوى إحداثيًّا أسفله إشارة لقيم x, y .
- اضغط مفتاح (var) واختر $l1$ الموجودة عند x ثم تحرك بالسهم عند y ، ثم اضغط مفتاح (var) مرّةً ثانيةً واختر $l2$ ، ثم اضغط (enter) .
- اضغط (tab) ، ثم أعد الخطوة السابقة باختيار $l2$ عند x ، و $l1$ عند y ثم اضغط (enter) .
- اضغط (menu) ثم اختر منها (3 :إدخال/تحرير الرسم البياني) ومنها اختر (2: معادلة) ومنها (1: مستقيم)، ثم أدخل الدالة $f1(x) = x$ ثم اضغط (enter).
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط (menu) ومنها (4: تكبير/تصغير النافذة) واختر منها (6: تكبير/تصغير الربع الأول) .

نشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًّا باستعمال صيغة الدالة

مثّل الدالة $f(x) = 3x$ ودالتها العكسية $g(x) = \frac{x}{3}$ بيانيًّا.



يمكن استعمال الآلة في تمثيل الدالة ومعكوسها بالضغط على المفاتيح من اليمين إلى اليسار:

(on) (1 مستند جديد) (2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية)

ثم كتابة الدالتين $f2(x) = 3x, f3(x) = \frac{x}{3}$ كما مرّ سابقًا، ارسم المعادلة $y = x$ بالضغط على (menu) ثم اختر (2: معادلة) ومنها اختر (1: مستقيم) ثم أدخل المعادلة $y = x$، فيظهر التمثيل المطلوب.

تمارين: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدالة $f(x)$، ومعكوسها $g(x)$، و $[f \circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $f(x) = 5x$
2) $f(x) = x - 3$
3) $f(x) = 2x + 1$
4) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
5) $f(x) = x^2$
6) $f(x) = x^2 - 3$

7) ما العلاقة بين التمثيل البياني لدالة والتمثيل البياني لمعكوسها ؟

8) **خمن:** ماذا يساوي $[(f \circ g)](x)$ لأيِّ دالة $f(x)$ ودالتها العكسية $g(x)$ ؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-3

دوال ومتباينات الجذر التربيعي
Square Root Functions and Inequalities

فيما سبق

درست تبسيط عبارات تحتوي جذورًا تربيعية. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثل بيانيًا دوال الجذور التربيعية وأحلّلها.
- أمثل بيانيًا متباينات الجذور التربيعية.

المفردات

دالة الجذر التربيعي
square root function

الدالة الجذرية
radical function

متباينة الجذر التربيعي
square root inequality

لماذا؟

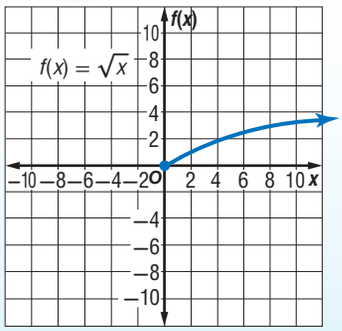


يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ، حيث T الزمن الدوري بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تُسمى **دالة الجذر التربيعي**. وهي نوع من أنواع **الدالة الجذرية**.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك



الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x)=\sqrt{x}$
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$
المقطعان:	$x=0, f(x)=0$
غير معرّفة عندما:	$x<0$
سلوك الدالة عند طرفيها:	$x \to 0, f(x) \to 0$
	$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة.

مثال 1 — تعيين المجال والمدى

عين كلًّا من المجال والمدى للدالة: $f(x)=\sqrt{x+4}$.

مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط القيم التي يكون ما تحت الجذر عندها غير سالب.

$x+4 \geq 0$ — اكتب المتباينة

$x \geq -4$ — اطرح 4 من الطرفين

وبالتالي فالمجال هو: $\{x \mid x \geq -4\}$.

وبما أن $\sqrt{x+4} \geq 0$ دائمًا، وتزيد قيم الدالة بتزايد قيم x، فإن أقل قيمة للدالة تكون عندما $x+4=0$؛ أي عندما $x=-4$؛ لذا فإن $f(-4)$ تمثل الحد الأدنى للمدى.

$(f(-4)=\sqrt{-4+4}=0)$

لذلك، فالمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

تحقق من فهمك

1A) $f(x)=\sqrt{x-3}$

1B) $f(x)=\sqrt{x+6}+2$

يمكنك تمثيل دالة الجذر التربيعي بيانيًّا، بتحديد القيم الصغرى لها، وعمل جدول لبعض قيم x وقيم $f(x)$ المقابلة لها.

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا

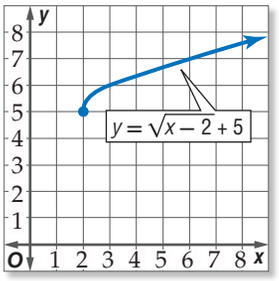
مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

a) $y = \sqrt{x-2} + 5$

القيمة الصغرى للدالة عند $(2, 5)$. اعمل جدولًا من قيم x ، حيث $x \geq 2$، ومثّل الدالة بيانيًّا. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف، فكلما زادت x، زادت y.

المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$ ، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4

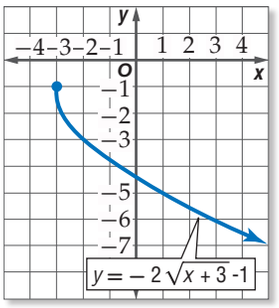


b) $y = -2\sqrt{x+3} - 1$

القيمة الصغرى لمجال الدالة هي -3. اعمل جدولًا من قيم x ، حيث $x \geq -3$، ومثّل الدالة بيانيًّا.

المجال هو $\{x \mid x \geq -3\}$ ، المدى هو $\{y \mid y \leq -1\}$.

x	y
−3	−1
−2	−3
−1	−3.8
0	−4.5
1	−5
2	−5.5
3	−5.9



تحقق من فهمك

2A) $f(x) = 2\sqrt{x+4}$

2B) $f(x) = -3\sqrt{x-1} + 2$

إرشادات حل المسألة

عمل جدول

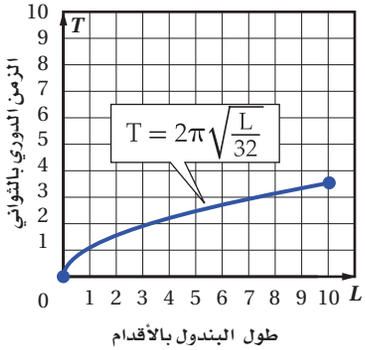
يعد عمل جدول طريقة جيدة لترتيب الأزواج المرتبة؛ لدراسة سلوك التمثيل البياني للدالة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال التمثيل البياني لتحليل دوال الجذر التربيعي

فيزياء: بالرجوع إلى فقرة لماذا؟ بداية هذا الدرس، يمكنك تحديد الزمن الدوري للبندول T بالثواني باستعمال الدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ حيث تمثل L طول البندول بالأقدام.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \leq L \leq 10$.

L	T
0	0
2	1.57
4	2.22
6	2.72
8	3.14
10	3.51



b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8 أقدام؟

بناءً على التمثيل البياني والجدول فإن الزمن الدوري يكون 3.14 ثوانٍ تقريبًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

3) صوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $f = 200\sqrt{m_t}$، حيث f تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، m_t كتلة ثقل قوة الشّد مقيسة بالرطل. مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le m_t \le 10$، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشّد 3 أرطال.

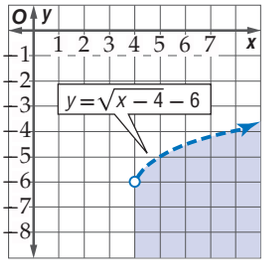
متباينات الجذر التربيعي: **متباينة الجذر التربيعي** هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانيًّا تمامًا مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مثال 4 تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًّا

مثّل المتباينة $y < \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

مثّل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

المجال هو $\{x \mid x \ge 4\}$. وبما أن المتباينة تحوي «y أقل من»، فإن التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.



تحقق: اختر نقطة في المنطقة المظللة، وتأكد أنها تحقق المتباينة.

اختبر $(7, -5)$:

$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{7-4} - 6$

$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{3} - 6$

$-5 < -4.27$ ✓

تحقق من فهمك

4A) $f(x) \ge \sqrt{2x+1}$

4B) $f(x) < -\sqrt{x+2} - 4$

تأكد

مثال 1 عيّن المجال والمدى لكلِّ دالة فيما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x}$

2) $f(x) = \sqrt{x-5}$

3) $f(x) = \sqrt{x+8} - 2$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

4) $f(x) = \sqrt{x} - 2$

5) $f(x) = 3\sqrt{x-1}$

6) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$

7) $f(x) = -\sqrt{3x-5} + 5$

مثال 3 **8) محيطات:** يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال الدالة: $v = 356\sqrt{d}$، حيث تمثل v السرعة بالكيلومترات لكل ساعة، و d متوسط عمق الماء بالكيلومترات. إذا كانت سرعة الموجة 145 km/h، فما متوسط عمق الماء ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر.

مثال 4 مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

9) $f(x) \ge \sqrt{x} + 4$

10) $f(x) \le \sqrt{x-6} + 2$

11) $f(x) < -2\sqrt{x+3}$

12) $f(x) > \sqrt{2x-1} - 3$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

تدرب وحل المسائل

مثال 1 عيِّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

13) $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ **14)** $f(x) = \sqrt{x} - 6$ **15)** $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

16) $f(x) = \sqrt{6x}$ **17)** $f(x) = -\sqrt{5x}$ **18)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

19) $f(x) = \sqrt{x-4} - 10$ **20)** $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ **21)** $f(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$

مثال 3

22) القفز بالمظلات: إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى بالدالة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$، فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟

23) ألعاب: إذا كانت سرعة العربة الدوّارة V في مدينة الألعاب في أثناء نزولها من أعلى قمة تعطى بالدالة: $V = \sqrt{{v_0}^2 + 64h}$، حيث v_0 السرعة الابتدائية بالأقدام لكل ثانية، و h الارتفاع الرأسي بالأقدام. أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة 90 ft/s عندما تصل أدنى مستوى لها.

a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند القمة هي 10 ft/s ، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف.

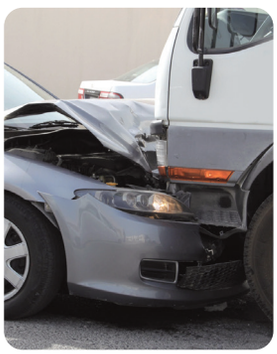
b) حتى يتحقق ما يريده المصمم، كم يجب أن يكون ارتفاع القمة، إذا كانت سرعة العربة الابتدائية عند القمة 10ft/s ؟

مثال 4 مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

24) $y < \sqrt{x-5}$ **25)** $y > \sqrt{x+6}$

26) $y \geq -4\sqrt{x+3}$ **27)** $y > 2\sqrt{x+7} - 5$

28) $y \geq 4\sqrt{x-2} - 12$ **29)** $y \leq 6 - 3\sqrt{x-4}$



30) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعمال الدالة: $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك الذي يصف حالة سطح الطريق، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افترض أن $f = 0.6$.

a) أوجد سرعة سيارة طول أثر احتكاك عجلاتها بالأرض 25ft.

b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة 35 mil/h، فكم قدمًا تحتاج لتقف وقوفًا تامًّا؟

c) إذا تضاعفت سرعة سيارة مرة واحدة، فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ مرة واحدة؟ وضح إجابتك.

31) عيِّن المجال والمدى للدالة: $f(x) = -\sqrt{x-6} + 5$، ثم مثلها بيانيًّا.

الربط مع الحياة

توصلت دراسة إلى أن السبب الأول لحوادث السيارات بين أوساط الشباب يعود إلى استخدام الهاتف الجوال أثناء القيادة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مسائل مهارات التفكير العليا

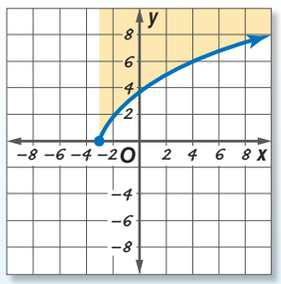
32) تحدٍّ: اكتب معادلة لدالة جذر تربيعي مجالها $\{x \mid x \geq -4\}$، ومداها $\{y \mid y \leq 6\}$، وتمر بالنقطة $(5, 3)$.

33) تبرير: ما قيم a الصحيحة الموجبة التي تجعل مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[a]{x}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ؟

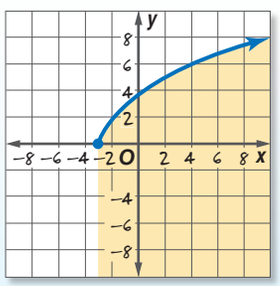
34) اكتب: وضِّح لماذا لا تمثل $y = \pm\sqrt{x}$ دالة؟

35) اكتشف الخطأ: مثَّل كلٌّ من عبد الرحمن وعبد العزيز المتباينة $y \leq \sqrt{5x + 15}$. فأيُّهما إجابته صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

عبد الرحمن



عبد العزيز



تدريب على اختبار

36) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{-64x^6}{8x^3}$, $x \neq 0$:

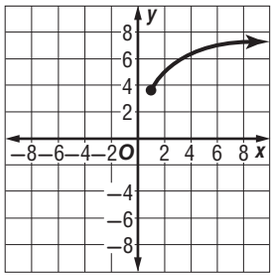
A $8x^2$

B $8x^3$

C $-8x^2$

D $-8x^3$

37) يمثّل الشكل المجاور التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. فأيٌّ ممَّا يأتي صحيح؟



I) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

II) الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

III) المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريبًا

A I فقط **B** II, III فقط **C** I, II, III **D** III فقط

مراجعة تراكمية

في كلِّ زوج مما يأتي حدد هل كلّ دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا ؟ (الدرس: 2-4)

38) $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}x$

39) $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{16}$

40) $f(x) = \frac{3x + 2}{5}$, $g(x) = \frac{5x - 2}{3}$

41) زمن: إذا كانت الدالة: $h = \frac{m}{60}$ تستعمل لتحويل الدقائق m إلى ساعات h ، والدالة: $d = \frac{h}{24}$ تستعمل لتحويل الساعات h إلى أيام d، فاكتب دالة يمكن استعمالها لتحويل الدقائق إلى أيام. (مهارة سابقة)

حدد ما إذا كان كلُّ عدد مما يأتي نسبيًّا أو غير نسبي: (مهارة سابقة)

42) 6.34

43) 3.787887888...

44) 5.333...

45) 125

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-4 الجذر النوني
nth Root

فيما سبق

درست دوال الجذر التربيعي.

والآن

- أبسّط عبارات جذرية.
- أستعمل الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات

الجذر النوني
*n*th root

رمز الجذر
radical sign

الدليل
index

ما تحت الجذر
radicand

الجذر الرئيس
principal root

لماذا؟



لوحظ تزايد عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالدالة $c = \sqrt[5]{b^2}$، حيث b عدد الدراجات، c عدد الحوادث.

تبسيط الجذور: يعدُّ إيجاد الجذر التربيعي لعددٍ عمليةً عكسية لتربيعه. فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a. وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد **الجذر النوني** للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

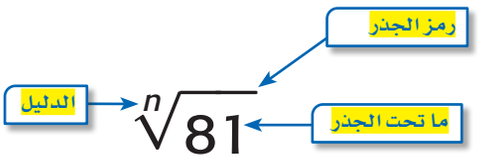
يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني:

مفهوم أساسي — **تعريف الجذر النوني** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a ، b ، ولأيِّ عدد صحيح n ، $n > 1$ إذا كان $a^n = b$ ، فإن a هو جذر نوني للعدد b.

مثال: بما أن $81 = (-3)^4$، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81 .

يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.



بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و -8؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، ويكون n عددًا زوجيًّا، فإن الجذر غير السالب يسمى **الجذر الرئيس**.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{25}$ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$-\sqrt{25} = -5$ ، $-\sqrt{25}$ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ، $\pm\sqrt{25}$ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الجذر النوني الحقيقي

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًّا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	

مثال 1

إيجاد الجذور

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\pm\sqrt{16y^4}$

$\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$

$= \pm 4y^2$

الجذران التربيعيان لـ $16y^4$ هما $\pm 4y^2$.

b) $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

$-\sqrt{(x^2-6)^8} = -\sqrt{[(x^2-6)^4]^2}$

$= -(x^2-6)^4$

معكوس الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2-6)^8$ هو $-(x^2-6)^4$.

c) $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

$\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$

$= 3a^4b^5$

الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

d) $\sqrt[7]{128}$

$\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$

الجذر السابع لـ 128 هو 2

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt[3]{8x^6}$

1B) $-\sqrt{(y+7)^{16}}$

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وأسّ ما تحت الجذر عددًا زوجيًّا، وكان أسّ الناتج عددًا فرديًّا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالبًا.

مثال 2

التبسيط باستعمال القيمة المطلقة

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\sqrt[4]{y^4}$

$\sqrt[4]{y^4} = |y|$

بما أن y من الممكن أن تكون سالبة فالجذر الرئيس لهذه العبارة يساوي القيمة المطلقة لـ y.

b) $\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}}$

$\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}} = 2|(x^2-3)^3|$

بما أن دليل الجذر (العدد 6) عدد زوجي، وأس العبارة x^2-3 (العدد 3) عدد فردي فيجب استعمال رمز القيمة المطلقة.

تحقق من فهمك

2A) $\sqrt{36y^6}$

2B) $\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$

إرشادات للدراسة

دليل الجذر

إذا كان n عددًا فرديًّا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًّا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة: تذكَّر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها في صورة كسور عشرية منتهية أو دورية، تُسمى أعدادًا غير نسبية. وغالبًا ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.



الربط مع الحياة

تشير الإحصاءات في الولايات المتحدة إلى وقوع أكثر من 500 ألف حادث اصطدام للدراجات الهوائية والسقوط من عليها وإصابة راكبيها سنويًا، منهم أكثر من 11 ألف طفل ومراهق، مما يرفع تكلفة العلاج إلى ما يجاوز 200 مليون دولار سنويًا. ويُنصح بارتداء الخوذة لأهميتها لحماية رؤوس راكبي الدراجات الهوائية عند تعرضهم لحوادث السقوط.

مثال 3 من واقع الحياة — تقريب الجذور

حوادث الدراجات: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، وb تمثل عدد الدراجات الهوائية، فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريقٍ ما، إذا عُلم أن 1000 دراجة تمرُّ خلاله كل شهر.

افهم: **المعطيات:**
- $c = \sqrt[5]{b^2}$ توضح العلاقة بين عدد الدراجات الهوائية (b) التي تمر في طريق، وعدد الحوادث (c). بينها وبين السيارات
- عدد الدراجات الهوائية التي تمر خلال الطريق كلَّ شهر هو 1000 دراجة.

المطلوب: تقدير عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات في هذا الطريق خلال شهر.

خطّط: عوض عن b (عدد الدراجات الهوائية) بالعدد 1000.

حل:

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$= \sqrt[5]{1000^2}$ — $b = 1000$

≈ 15.85 — باستعمال الحاسبة

فهناك 16 حادثًا تقريبًا كل شهر على ذلك الطريق.

تحقق

$15.85 \stackrel{?}{=} \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 15.85$

$15.85^5 \stackrel{?}{=} b^2$ — ارفع الطرفين للأس 5

$1000337 \stackrel{?}{=} b^2$ — بسّط

$1000 \approx b$ ✓ — خُذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريقٍ ما في أحد الأشهر يساوي 21 حادثًا، فقدر عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر.

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$21 = \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 21$

$21^5 = b^2$ — ارفع الطرفين للأس 5

$4084101 = b^2$ — بسّط

$2021 \approx b$ — خُذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

إذن عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر هو 2021 دراجةً تقريبًا.

تحقق من فهمك

3A) قياس: يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها، باستعمال الدالة $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$، حيث V تمثل حجم الكرة. أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200\,\text{in}^3$.

3B) قياس: إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5\,\text{in}^2$، فأوجد حجم الكرة.

تأكد

المثالان 2 , 1 بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

1) $\pm\sqrt{100y^8}$

2) $-\sqrt{49u^8v^{12}}$

3) $\sqrt{(y-6)^8}$

4) $\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}}$

5) $\sqrt[3]{-125}$

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

7) قمر اصطناعي: إذا كان نصف القطر r لمدار قمر اصطناعي تلفزيوني يُعطى بالدالة $r = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$؛ حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني، M كتلة الأرض، t الزمن اللازم لإكمال القمر الاصطناعي دورة واحدة حول الأرض، فأوجد نصف قطر مدار القمر الاصطناعي إذا كانت :

$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2,\ M = 5.98 \times 10^{24}\,kg,\ t = 2.6 \times 10^6 s$

مثال 3 استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

8) $\sqrt{58}$ **9)** $-\sqrt{76}$ **10)** $\sqrt[5]{-43}$ **11)** $\sqrt[4]{71}$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

12) $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}}$ **13)** $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$ **14)** $\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$

15) $\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ **16)** $\sqrt[5]{-243}$ **17)** $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$

18) $\sqrt[6]{x^{18}}$ **19)** $\sqrt[3]{a^{12}}$ **20)** $\sqrt[4]{81(x+4)^4}$

21) $\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}}$ **22)** $\sqrt[8]{x^{16}y^8}$ **23)** $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$

مثال 3

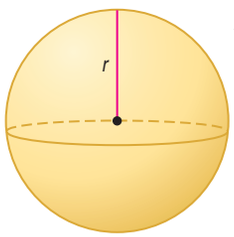
24) شحن: يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروبًا في مكعب عدد ثابت F؛ أيْ أن $N = V \cdot F^3$. فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي $0.8\,ft^3$ ، والحجم الجديد يساوي $21.6\,ft^3$؟

25) هندسة: يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$، حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة . أوجد طول ضلع مكعب حجمه $512\,cm^3$.

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

26) $-\sqrt{150}$ **27)** $\sqrt{0.43}$ **28)** $\sqrt[5]{-4382}$ **29)** $\sqrt[6]{(8912)^2}$

30) هندسة: يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



a) أوجد نصف قطر كلٍّ من الكرات ذات الأحجام الآتية:
$1000\,cm^3, 8000\,cm^3, 64000\,cm^3$.

b) ما مقدار التغيّر في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

31) $\sqrt{196c^6d^4}$ **32)** $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$ **33)** $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$

34) فيزياء: طوَّر جوهانز كيبلر (Johannes kepler) القانون $d = \sqrt[3]{6t^2}$، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس ، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كان كوكب المريخ يستغرق 687 يومًا أرضيًّا ليدور حول الشمس، فكم يبعد المريخ عن الشمس؟



الربط مع الحياة

الأيض metabolism هو جميع العمليات الكيميائية التي ينتج عنها بناء أو تحليل المواد الغذائية داخل جسم الكائن الحي.

35) أحياء: يبين قانون كليبر (kleiber) $P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$، العلاقة بين كتلة كائن حي m بالكيلوجرام ومتوسط الأيض اليومي له P بالسعرات الحرارية. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول المجاور.

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التمساح	72
الدولفين	156
الفيل	2300

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستعمل في هذا السؤال كلًّا من: $f(x) = x^n, g(x) = \sqrt[n]{x}$ لاستكشاف المعكوس.

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا لكلٍّ من $f(x), g(x)$ مستعملًا $n = 3, n = 4$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من المعادلتين السابقتين بيانيًّا.

c) تحليليًّا: أيُّ المعادلتين السابقتين تمثل دالة؟ وأيّها تمثل دالة متباينة؟

d) تحليليًّا: ما قيم n التي يكون عندها كلٌّ من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى؟

e) لفظيًّا: ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول $g(x) = \sqrt[n]{x}$ و $f(x) = x^n$، لقيم n الزوجية الموجبة، وقيم n الفردية الموجبة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **تحدٍّ:** ما قيم x التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة $x > \sqrt[3]{x}$؟

38) **مسألة مفتوحة:** أوجد عددًا يكون جذره التربيعي الرئيس وجذره التكعيبي عددين صحيحين.

39) **اكتب:** وضّح متى يكون استعمال رمز القيمة المطلقة ضروريًّا عند إيجاد الجذر النوني؟ ولماذا؟

40) **تحدٍّ:** حل المعادلة: $\frac{-5}{\sqrt{a}} = -125$

تدريب على اختبار

41) أيُّ الآتية هو الأقرب إلى قيمة المقدار $\sqrt[3]{7.32}$؟

A 1.8

B 1.9

C 2

D 2.1

42) قيمة $\sqrt[4]{256x^8y^{16}}$ هي:

A $16x^8y^{16}$

B $16x^2y^{16}$

C $4x^2y^4$

D $4x^4y^4$

مراجعة تراكمية

مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-4)

43) $y = \sqrt{x-5}$

44) $y = \sqrt{x} - 2$

45) $y = 3\sqrt{x} + 4$

46) **صحة:** تبلغ كتلة طفل وُلد حديثًا $7\frac{1}{2}$ أرطال، وطوله 19.5in. فإذا كان الكيلوجرام الواحد يساوي 2.2 رطل تقريبًا، والسنتمتر الواحد يساوي 0.3937in تقريبًا. فأوجد كتلة المولود بالكيلوجرامات وطوله بالسنتمترات. (الدرس 2-4)

بسّط كلًّا ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

47) $(11x^2 + 13x - 15) - (7x^2 - 9x + 19)$

48) $(2a^2 + 6)^2$

أوجد حاصل الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

49) $(x + 4)(x + 5)$

50) $(x + 2y)(x - y)$

51) $2(w + z)(w - 4z)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

4-4 تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًّا.

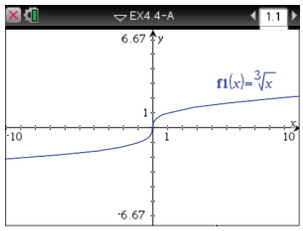
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذور النونية بيانيًّا.

مثال 1 تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

مثِّل $y = \sqrt[3]{x}$ بيانيًّا.

- استعمل المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار.

- أدخل الدالة الجذرية بالضغط على مفتاح ctrl ثم مفتاح ^ ، ثم أدخل الدالة. ثم اضغط enter فيظهر تمثيلها البياني.



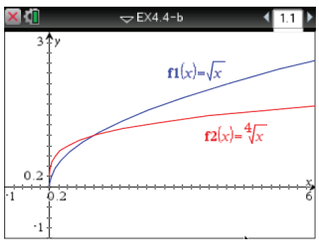
[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

مثال 2 دوال الجذور النونية المختلفة الدليل

مثّل الدالتين: $y = \sqrt{x}$ وَ $y = \sqrt[4]{x}$ بيانيًّا .

أدخل المعادلة $f1(x) = \sqrt{x}$ ومثلها مستعملًا الخطوات السابقة، ثم أدخل المعادلة $f2(x) = \sqrt[4]{x}$ فيظهر التمثيل البياني المجاور.

ملاحظة: اختر التدريج المناسب.

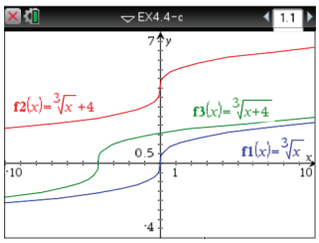


[−1, 6] scl: 0.2 by [−1, 3] scl: 0.2

مثال 3 دوال الجذور النونية المختلفة فيما تحت الجذر

مثِّل الدوال الثلاث: $y = \sqrt[3]{x} + 4$, $y = \sqrt[3]{x + 4}$, $y = \sqrt[3]{x}$ بيانيًّا .

باستعمال الخطوات السابقة يظهر التمثيل البياني المجاور.



[−10, 10] scl: 1 by [−4, 7] scl: 0.5

تمارين:

مثّل كلَّ دالةٍ مما يأتي بيانيًّا:

1) $y = \sqrt[4]{x}$
2) $y = \sqrt[4]{x + 2}$
3) $y = \sqrt[4]{x} + 2$
4) $y = \sqrt[5]{x}$
5) $y = \sqrt[5]{x - 5}$
6) $y = \sqrt[5]{x} - 5$

7) ما تأثير جمع أو طرح عددٍ ثابتٍ لما تحت الجذر في التمثيل البياني لدالة الجذر النوني؟

8) ما تأثير جمع أو طرح عددٍ ثابتٍ لدالة الجذر النوني في تمثيلها البياني؟

اختبار منتصف الفصل

الدروس 4-1 إلى 4-4

إذا كان $g(x) = 5x - 2$, $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

1) $(f+g)(x)$ **2)** $(f-g)(x)$

3) $(f \cdot g)(x)$ **4)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

5) $[f \circ g](x)$ **6)** $[g \circ f](x)$

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدِّد هل كلَّ دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، ووضِّح إجابتك:

7) $f(x) = 2x + 16$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 8$

8) $g(x) = 4x + 15$, $h(x) = \frac{1}{4}x - 15$

9) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = 5 + x^{-2}$

10) $g(x) = -6x + 8$, $h(x) = \frac{8 - x}{6}$

أوجد معكوس كلِّ دالة مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $h(x) = \frac{2}{5}x + 8$ **12)** $f(x) = \frac{4}{9}(x - 3)$

13) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ **14)** $f(x) = \frac{x + 12}{7}$

15) تنسيق حدائق: تتقاضى مؤسسة لتنسيق الحدائق 25 ريالًا أجرة للمعدات، إضافة إلى 15 ريالًا عن كل ساعة عمل. وتمثل الدالة $f(h) = 15h + 25$ تكلفة العمل لمدة h ساعة.

a) أوجد $f^{-1}(h)$. وماذا تمثل $f^{-1}(h)$؟

b) إذا كانت أجرة تنسيق حديقة 85 ريالًا، فكم عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة؟

مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

16) $y < \sqrt{x - 5}$ **17)** $y \le -2\sqrt{x}$

18) $y > \sqrt{x + 9} + 3$ **19)** $y \ge \sqrt{x + 4} - 5$

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدِّد مجال كل منهما ومداها:

20) $y = 2 + \sqrt{x}$ **21)** $y = \sqrt{x + 4} - 1$

22) اختيار من متعدد: ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x + 5}$؟

A $\left\{x \middle| x > \frac{5}{2}\right\}$ C $\left\{x \middle| x \ge \frac{5}{2}\right\}$

B $\left\{x \middle| x > -\frac{5}{2}\right\}$ D $\left\{x \middle| x \ge -\frac{5}{2}\right\}$

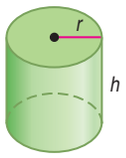
بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\sqrt{121a^4b^{18}}$ **24)** $\sqrt{(x^4 + 3)^{12}}$

25) $\sqrt[3]{27(2x - 5)^{15}}$ **26)** $\sqrt[5]{-(y - 6)^{20}}$

27) $\sqrt[3]{8(x + 4)^6}$ **28)** $\sqrt[4]{16(y + x)^8}$

29) اختيار من متعدد: نصف قطر الأسطوانة أدناه يساوي ارتفاعها. ويمكن إيجاد نصف قطرها r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$، حيث V حجم الأسطوانة. ما نصف القطر التقريبي للأسطوانة إذا كان حجمها $500\,\text{in}^3$؟



A 2.53 in

B 5.42 in

C 7.94 in

D 24.92 in

30) إنتاج: إذا كانت تكلفة إنتاج p قطعة بالريالات في مصنع يعبّر عنها بالدالة: $C(p) = 5p + 60$. وكان عدد القطع المنتجة في نهاية h ساعة عمل يُعبَّر عنه بالدالة: $P(h) = 40h$.

a) أوجد $C[p\,(h)]$.

b) أوجد تكلفة الإنتاج في نهاية 8 ساعات عمل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-5

العمليات على العبارات الجذرية
Operations with Radical Expressions

فيما سبق
درستُ تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني. (الدرس 4-4)

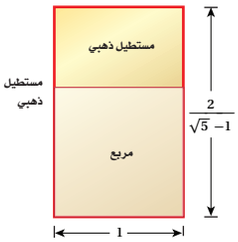
والآن
- أبسّط عبارات جذرية.
- أجمع عبارات جذرية وأطرحها وأضربها وأقسمها.

المفردات
إنطاق المقام
rationalizing the denominator

الجذور المتشابهة
like radical expressions

المرافق
conjugate

لماذا؟



عُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا. وستتعلم في هذا الدرس تبسيط عبارات جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

تبسيط العبارات الجذرية: يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذورًا نونية باستعمال خواص العمليات عليها.

مفهوم أساسي — خاصية ضرب الجذور

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a , b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، إذا كانت n عددًا زوجيًّا وكان a , b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًّا.

مثالان: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

ولكي تكون العبارة الجذرية التي تتضمن جذورًا في أبسط صورة، يجب ألا يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب في صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثال 1 — تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية الضرب

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{32x^8}$

$\sqrt{32x^8} = \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot (x^4)^2}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{2}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 4x^4\sqrt{2}$ — بسّط

b) $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$

$\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot (a^6)^4 (b^3)^4 \cdot b}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة للأس 4

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{(a^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^3)^4} \cdot \sqrt[4]{b}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 2a^6|b^3|\sqrt[4]{b}$ — بسّط

ولا ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة في هذه الحالة؛ لأنه حتى يكون $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$ معرّفًا، يجب أن تكون b موجبة.

لذا فإن $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = 2a^6b^3\sqrt[4]{b}$.

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt{12d^3c^{12}}$ $\qquad$ **1B)** $\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$

خاصية قسمة الجذور هي خاصية أخرى تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خاصية قسمة الجذور

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a, b، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$، إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

مثالان: $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق.

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

إرشادات للدراسة

الجذور الدقيقة

يسهل إيجاد الجذور بصورة دقيقة عندما تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر، فمثلًا:

$\sqrt{25a^4} = 5a^2$

مثال 2

تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية القسمة

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$

$\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2 \cdot y}}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{y}}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}}$ — بسّط

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ — إنطاق المقام

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y^4}$ — $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

b) $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

$\sqrt[4]{\frac{6}{5x}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3x^3}}{\sqrt[4]{5^3x^3}}$ — إنطاق المقام

$= \frac{\sqrt[4]{6 \cdot 5^3x^3}}{\sqrt[4]{5x \cdot 5^3x^3}}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{\sqrt[4]{5^4x^4}}$ — اضرب

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{5x}$ — $\sqrt[4]{5^4x^4} = 5x$

تحقق من فهمك

2A) $\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}}$ $\qquad$ **2B)** $\sqrt[5]{\frac{3}{4y}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

فيما يأتي ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية:

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

مثال 3 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية: $5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2}$.

$5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{-12ab^4 \cdot 18a^2b^2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^2 \cdot 3 \cdot ab^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2}$ حلّل الثوابت

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3 \cdot a^3b^6}$ جمّع العوامل في صورة أسس تكعيبية

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ بسّط

$= -90ab^2$ اضرب

تحقق من فهمك

(3A) $6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3}$

(3B) $2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2}$

يمكنك جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحيدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

متشابهان: $\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$

مثال 4 جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{98} - 2\sqrt{32}$.

$\sqrt{98} - 2\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 7^2} - 2\sqrt{4^2 \cdot 2}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 7\sqrt{2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$ بسّط العبارات الجذرية

$= 7\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$ اضرب

$= -\sqrt{2}$ $(7 - 8)\sqrt{2} = (-1)(\sqrt{2})$

تحقق من فهمك

(4A) $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$

(4B) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128}$

إرشادات للدراسة

جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط كل جذر على حدة قبل محاولة تجميع الجذور المتشابهة.

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة نفسها المتبعة في جمع وحيدات الحد وطرحها، فإنه يمكنك أيضًا ضرب الجذور باستعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيتي حد.

مثال 5 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)$.

$(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6) = 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\cdot(-6) + 5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\cdot(-6)$ خاصية التوزيع

$= 12\sqrt{3\cdot 2} - 24\sqrt{3} + 15\sqrt{2^2} - 30\sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 12\sqrt{6} - 24\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{2}$ بسّط

تحقق من فهمك

5A $(6\sqrt{3}-5)(2\sqrt{5}+4\sqrt{2})$ **5B** $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(7\sqrt{2}+3\sqrt{3})$

إرشادات للدراسة

المُرافق

حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد نسبي دائمًا.

تعتبر كلٌّ من ثنائيتي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية مرافقة للأخرى. ويمكنك استعمال **المرافق** لإنطاق المقام.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال المرافق لإنطاق المقام

هندسة: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، واستعمل المرافق لإنطاق المقام وتبسيط العبارة الجذرية: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$ $\sqrt{5}+1$ مرافق لـ $\sqrt{5}-1$

$= \frac{2\sqrt{5}+2(1)}{(\sqrt{5})^2+1(\sqrt{5})-1(\sqrt{5})-1(1)}$ اضرب واستعمل خاصية التوزيع

$= \frac{2\sqrt{5}+2}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}$ بسّط

$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$ اطرح

$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ بسّط

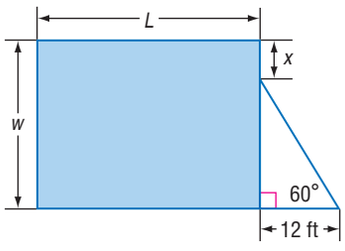
إرشادات للدراسة

يمكنك إيجاد ناتج $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ مباشرة باستعمال الفرق بين مربعين بالشكل:

$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$
$= (\sqrt{5})^2 - (1)^2$
$= 5 - 1 = 4$

تحقق من فهمك

6) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل في الشكل المجاور تساوي $900\ \text{ft}^2$، فاكتب معادلة تمثل طول المستطيل L بدلالة x، ثم بسطها.



تأكد

الأمثلة 1-5 بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

1) $\sqrt{36ab^4c^5}$ **2)** $\sqrt{144x^7y^5}$ **3)** $\frac{\sqrt{c^5}}{\sqrt{d^9}}$ **4)** $\sqrt[4]{\frac{5x}{8y}}$

5) $5\sqrt{2x}\cdot 3\sqrt{8x}$ **6)** $3\sqrt[3]{36xy}\cdot 2\sqrt[3]{6x^2y^2}$

7) $\sqrt[4]{3x^3y^2}\cdot\sqrt[4]{27xy^2}$ **8)** $5\sqrt{32}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

9) $(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})$

10) $(8\sqrt{3}-2\sqrt{2})(8\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

11) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+3}$

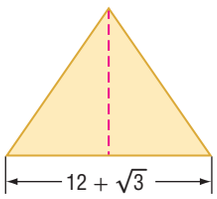
12) $\dfrac{8}{\sqrt{6}-5}$

13) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$

14) $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$

مثال 6

15) **هندسة:** أوجد ارتفاع المثلث في الشكل المجاور في أبسط صورة إذا كانت مساحته $189+4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.



تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

16) $\sqrt{72a^8b^5}$

17) $\sqrt{9a^{15}b^3}$

18) $\sqrt{18a^6b^3c^5}$

19) $\sqrt{\dfrac{7x}{10y^3}}$

20) $\dfrac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{5y}}$

21) $\sqrt[4]{\dfrac{7x^3}{4b^2}}$

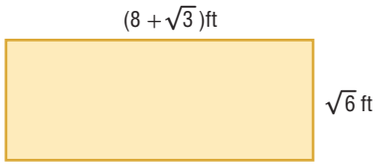
22) $3\sqrt{5y}\cdot 8\sqrt{10yz}$

23) $2\sqrt{32a^3b^5}\cdot\sqrt{8a^7b^2}$

24) $3\sqrt{90}+4\sqrt{20}+\sqrt{162}$

25) $4\sqrt{28}-8\sqrt{810}+\sqrt{44}$

26) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور واكتبه في أبسط صورة. ثم أوجد مساحته واكتبها في أبسط صورة.



المثالان 5, 6

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

27) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{6}+3\sqrt{12})$

28) $(6\sqrt{3}+5\sqrt{2})(2\sqrt{6}+3\sqrt{8})$

29) $\dfrac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

30) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

31) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$

32) $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

33) $\sqrt[3]{-54x^6y^{11}}$

34) $\sqrt[4]{\dfrac{12x^3y^2}{5a^2b}}$

35) $\dfrac{\sqrt[3]{36xy^2}}{\sqrt[3]{10xz}}$

36) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

37) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

38) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$



الربط مع الحياة

التفاح يطفو على الماء لأن نسبة الهواء فيه 25% من حجمه.

39) **تفاح:** يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالدالة $d=\sqrt[3]{3w}$، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات.

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي، حيث b عدد زوجي:

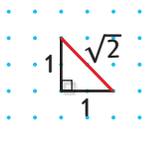
40) $\sqrt[b]{a^b}$

41) $\sqrt[b]{a^{4b}}$

42) $\sqrt[b]{a^{2b}}$

43) $\sqrt[b]{a^{3b}}$

44) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا السؤال العمليات على الجذور المتشابهة.



a) **عدديًّا:** انقل الشكل المجاور على ورقة نقطية. واستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الحمراء يساوي $\sqrt{2}$ وحدة.

b) **بيانيًّا:** زد طول القطعة المستقيمة الحمراء ليصبح $\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

c) **تحليليًّا:** استعمل الشكل الذي رسمته لتبين أن: $\sqrt{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{2+2}=2$.

d) **بيانيًّا:** استعمل الورقة النقطية لرسم مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$ وحدة.

e) **عدديًّا:** برهن على أن مساحة المربع تساوي $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ وحدة مربعة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

مسائل مهارات التفكير العليا

45) اكتشف الخطأ: بسّط كلّ من خالد وناصر العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$، فأيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

خالد

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2}$$
$$= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$$
$$= 34\sqrt{2}$$

ناصر

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2}$$
$$= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$$
$$= 118\sqrt{2}$$

46) تحدٍّ: بيّن أن $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ هو جذر تكعيبي للعدد 1.

47) تبرير: ما قيم a، التي تجعل العبارة الجذرية $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$ عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر إجابتك.

48) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا غير الواحد الصحيح بحيث يكون كلٌّ من جذوره: التربيعي، والتكعيبي، والرابع عددًا كليًّا موجبًا.

49) اكتب: وضّح متى يكون وضع رمز القيمة المطلقة ضروريًّا، أو غير ضروري في ناتج تبسيط الجذر النوني لعبارة ما .

تدريب على اختبار

50) أيّ العبارات الجذرية الآتية تكافئ العبارة الجذرية $\sqrt{180a^2b^8}$؟

A $5\sqrt{6}|a|b^4$ **B** $6\sqrt{5}|a|b^4$ **C** $3\sqrt{10}|a|b^4$ **D** $36\sqrt{5}|a|b^4$

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

51) $\sqrt{81x^6}$ **52)** $\sqrt[3]{729a^3b^9}$ **53)** $\sqrt{(g+5)^2}$

54) مثّل المتباينة $y \le \sqrt{x-2}$ بيانيًّا. (مهارة سابقة)

حل كلَّ معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

55) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ **56)** $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$ **57)** $27x^3 + 1 = 0$

58) قوارب: تربح شركة لصناعة القوارب، 5000 ريال من صنع القارب الصغير، و 9000 ريال من صنع القارب الكبير. فإذا زاد عدد ما أنتجته الشركة من القوارب الصغيرة 5 قوارب على عدد القوارب الكبيرة خلال فصلي الصيف والربيع. وربحت مقابل ذلك 81000 ريال. فكم عدد القوارب التي أنتجتها الشركة من كل نوع؟ (مهارة سابقة)

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $3\left(\frac{1}{8}\right)$ **60)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ **61)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{5}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-6

الأسس النسبية
Rational Exponents

فيما سبق

درست استعمال خصائص الأسس. (مهارة سابقة)

والآن

- أكتب عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.
- أُبسّط عبارات أسية أو جذرية.

لماذا؟



يمكن أن تستعمل الصيغة $P = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتمادًا على التضخم المالي، حيث P يمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r يمثل معدَّل التضخم السنوي، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلًا يمكن أن تستعمل الصيغة:

$$P = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الثمن المستقبلي لجهاز تبريد ماء في ستة أشهر.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية: تعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أسًّا نسبيًّا كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$ اكتبه على صورة حاصل ضرب

$$= b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$ اجمع الأسس

$$= b^1 = b$$ بسّط

لذا فإن $b^{\frac{1}{2}}$ هو عدد مربعه يساوي b؛ إذن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{1}{n}}$)

التعبير اللفظي: لأيِّ عدد حقيقي b، وأيِّ عدد صحيح موجب n، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$، إلا إذا كانت $b < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر النوني يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$ ، $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

مثال 1 الصورتان الجذرية والأسية

a) اكتب $x^{\frac{1}{6}}$ على الصورة الجذرية.

$x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

b) اكتب $\sqrt[4]{z}$ على الصورة الأسّية.

$\sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

تحقق من فهمك

1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية.

1B) اكتب $\sqrt[8]{c}$ على الصورة الأسّية.

وبشكل عام يمكنك تقديم التعريف العام الآتي للأسس النسبية:

مفهوم أساسي — **الأسس النسبية ($b^{\frac{x}{y}}$)**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ لأيِّ عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا ، ولأي عددين صحيحين x, y بحيث $y > 1$، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًّا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركّبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{-16})^3 = (4i)^3 = -64i$ $\quad 27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

كما أن القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية السالبة.

مثال 2 إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية

أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}}$ $\qquad$ **b)** $216^{\frac{2}{3}}$

$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}$	$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$		$216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}}$	$216 = 6^3$
$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}}$	$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$		$= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}}$	خاصية قوة القوة
$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}$	$81 = 3^4$		$= 6^2$	ضرب الأسس
$= \frac{1}{3}$	بسّط		$= 36$	بسّط

تحقق من فهمك

2A) $-3125^{-\frac{1}{5}}$ $\qquad$ **2B)** $256^{\frac{3}{8}}$

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية

ثقافة مالية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وافترض أن الثمن الحالي لجهاز تبريد الماء هو 390 ريالًا. فكم سيزيد الثمن خلال ستة أشهر إذا كان معدَّل التضخم المالي السنوي 5.3% ؟

$P = c(1 + r)^n$	الصيغة
$= 390(1 + 0.053)^{\frac{1}{2}}$	$c = 390, r = 0.053, n = \frac{6 \text{ أشهر}}{12 \text{ شهرًا}} = \frac{1}{2}$
≈ 400.20	استعمل الحاسبة

$400.20 - 390.00 = 10.20$ إذن سيزيد ثمن جهاز تبريد الماء بعد ستة أشهر بمقدار 10.20 ريالات تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) ثقافة مالية: افترض أن ثمن لتر الحليب الآن 4 ريالات. فكم سيزيد الثمن بعد تسعة أشهر، إذا كان معدَّل التضخم المالي السنوي 5.3%؟

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل عبارة على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحة موجبة. لذلك أنت في حاجة إلى إنطاق المقام أحيانًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 4 تبسيط عبارات بأسس نسبية

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

a) $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

$a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{6}{7}}$ جمع الأسس

b) $b^{-\frac{5}{6}}$

$b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}}$ $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$= \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$ اضرب في $\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{6}{6}}}$ $b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b}$ $b^{\frac{6}{6}} = b^1 = b$

c) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2}$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} \cdot \frac{3x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} - 2}$ $3x^{\frac{1}{2}} - 2$ مرافق لـ $3x^{\frac{1}{2}} + 2$

$= \frac{3x^{\frac{2}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x^{\frac{2}{2}} - 4}$ اضرب

$= \frac{3x - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x - 4}$ بسّط

تحقق من فهمك

4A) $p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}}$

4B) $r^{-\frac{4}{5}}$

4C) $\frac{y^{\frac{1}{2}} + 2}{y^{\frac{1}{2}} - 2}$

عند تبسيط عبارة جذرية اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكّر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

مثال 5 تبسيط العبارات الجذرية

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

a) $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ الأسس النسبية

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ $27 = 3^3$

$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ خاصية قوة القوة

b) $\sqrt[4]{9g^2}$

$\sqrt[4]{9g^2} = (9g^2)^{\frac{1}{4}}$ الأسس النسبية

$= [(3g)^2]^{\frac{1}{4}}$ $9g^2 = (3g)^2$

$= (3g)^{\frac{1}{2}}$ خاصية قوة القوة

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تحوي أسسًا نسبية، اترك الأسس على الصورة النسبية بدلًا من كتابة العبارة على الصورة الجذرية.

$= 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$ خاصية قسمة قوتين

$= 3^{\frac{1}{4}}$ بسّط

$= \sqrt[4]{3}$ أعد كتابة العبارة على الصورة الجذرية

$= \sqrt{3g}$ أعد كتابة العبارة على الصورة الجذرية

تحقق من فهمك

(5A $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}}$

(5B $\sqrt[3]{16x^4}$

إرشادات للدراسة

العبارات الجذرية والأسية

اكتب العبارة بعد تبسيطها (الناتج النهائي) على الصورة التي كان عليها قبل التبسيط؛ أيْ إذا بدأت بعبارة جذرية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الجذرية، وإذا بدأت بعبارة تتضمن أسسًا نسبية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الأسية.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

عبارات تتضمن أسسًا نسبية

تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا.
- دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

تأكد

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كلٍّ مما يأتي:

(1 $10^{\frac{1}{4}}$ **(2** $x^{\frac{3}{5}}$ **(3** $\sqrt[3]{15}$ **(4** $\sqrt[4]{7x^6y^9}$

مثال 2 أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

(5 $343^{\frac{1}{3}}$ **(6** $32^{-\frac{1}{5}}$ **(7** $125^{\frac{2}{3}}$ **(8** $\frac{24}{4^{\frac{3}{2}}}$

مثال 3 **(9 قياس:** إذا علمت مساحة مربع هي A ، فإنه يمكن إيجاد طول ضلعه ℓ باستعمال القانون $\ell = A^{\frac{1}{2}}$. فإذا علمت أن مساحة حديقة مربعة الشكل 169m^2، فما طول ضلعها؟

المثالان 4, 5 بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

(10 $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ **(11** $\frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ **(12** $\frac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c}{b^{\frac{1}{3}}}$

(13 $\sqrt[3]{64z^6}$ **(14** $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}}$ **(15** $\frac{g^{\frac{1}{2}}-1}{g^{\frac{1}{2}}+1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسّية في كلٍّ مما يأتي:

(16 $8^{\frac{1}{5}}$ **(17** $(x^3)^{\frac{3}{2}}$ **(18** $\sqrt{17}$ **(19** $\sqrt[4]{625x^2}$

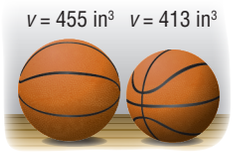
مثال 2 أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

(20 $27^{\frac{1}{3}}$ **(21** $256^{\frac{1}{4}}$ **(22** $16^{-\frac{1}{2}}$ **(23** $(-27)^{-\frac{2}{3}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 3

24) كرة سلة: يوجد حجمان لكرة السلة؛ حجم كبير وآخر صغير، كما في الصورة جانبًا. فإذا كان نصف قطر الكرة r التي تسع V وحدة مكعبة من الهواء يُعبَّر عنه بالعلاقة $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$، فأجب عمَّا يأتي:



a) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الصغير.

b) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الكبير.

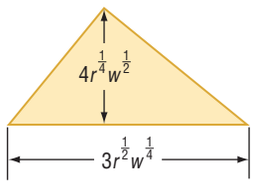
المثالان 4, 5

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

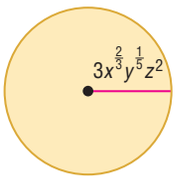
25) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$ **26)** $y^{-\frac{4}{5}}$ **27)** $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[6]{3}}$ **28)** $\sqrt[4]{25x^2}$ **29)** $\frac{x^{\frac{1}{4}} + 2}{x^{\frac{1}{4}} - 2}$

هندسة: أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي:

30)



31)



32) ما أبسط صورة للعبارة $18^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 32^{\frac{1}{2}}$ ؟

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

33) $a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}}$ **34)** $\left(y^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ **35)** $\sqrt[6]{216}$ **36)** $w^{-\frac{7}{8}}$



37) محميات: إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا كان في المحمية 100 غزال، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبَّر عنه بالصيغة $D = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$، فأجب عما يأتي:

a) كم سيصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟

b) اعمل جدولًا يحدد عدد الغزلان في كل سنة من السنوات الخمس القادمة.

c) مثّل بيانيًّا بيانات الجدول الذي كوّنته في الفرع **b**.

d) قرِّر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني: هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

الربط مع الحياة

الطريقة الأكثر دقة لتحديد عمر بعض أنواع الغزلان هي النظر إلى مقطع عرضي لإحدى أسنانه، حيث تنمو كل فصل شتاء طبقة كلسية تكسو السن على شكل حلقة، وكل حلقة تمثل سنة كما هو الحال في حلقات جذع الشجرة.

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

38) $\frac{f^{-\frac{1}{4}}}{4f^{\frac{1}{2}} \cdot f^{-\frac{1}{3}}}$ **39)** $\frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} + 2}$ **40)** $\frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ **41)** $\sqrt{23} \cdot \sqrt[3]{23^2}$

42) $\sqrt{\sqrt{81}}$ **43)** $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$ **44)** $\frac{xy}{\sqrt[3]{z}}$ **45)** $\frac{8^{\frac{1}{6}} - 9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

46) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال الدالتين:

$f(x) = x^3, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

x	f(x)	g(x)
−2		
−1		
0		
1		
2		

a) جدوليًّا: انسخ الجدول المجاور، وأكمله.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا كلًّا من: $f(x)$, $g(x)$.

c) لفظيًّا: ما التحويل الهندسي الذي يصف العلاقة بين تمثيليهما البيانيين؟

وزارة التعليم
Ministry of Education

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة $-x^{-2} = (-x)^{-2}$ صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك.

48) **اكتشف الخطأ:** بسَّط كل من محمود وعلي العبارة $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟

محمود

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$= x^{\frac{5}{4}}$$

علي

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}}$$
$$= x^{\frac{3}{2}}$$

49) **مسألة مفتوحة:** أوجد عبارتين مختلفتين على الصورة $x^{\frac{1}{a}}$ بحيث تكون قيمة كلٍّ منهما 2 .

50) **اكتب:** وضِّح كيف يمكن أن يكون استعمال الأسس النسبية لتبسيط عبارة أسهل من استعمال الجذور.

تدريب على اختبار

51) تكون العبارة $\sqrt{56-c}$ مساويةً لعدد صحيح موجب عندما تكون قيمة c هي:

A 8 **B** -8 **C** 56 **D** 36

52) ما قيمة p التي تحقق المعادلة: $p = 3^3 \cdot 3^5$؟

A 2^{-3} **B** 3^{-2} **C** 3^2 **D** 2^3

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 5-4)

53) $\sqrt{243}$ **54)** $\sqrt[3]{16y^3}$ **55)** $3\sqrt[3]{56y^6z^3}$

56) **فيزياء:** تعطى سرعة الصوت في سائل بالعلاقة $s = \sqrt{\frac{B}{d}}$، حيث B معامل تغيّر حجم السائل، d كثافة السائل. أما بالنسبة للماء، فإن $B = 2.1 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2}, d = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$. أوجد سرعة الصوت في الماء لأقرب متر لكل ثانية. (الدرس: 5-4)

أوجد $p(x+h)$, $p(-4)$ لكلِّ دالة مما يأتي: (مهارة سابقة)

57) $p(x) = x - 2$ **58)** $p(x) = -x + 4$ **59)** $p(x) = 6x + 3$

60) $p(x) = x^2 + 5$ **61)** $p(x) = x^2 - x$ **62)** $p(x) = 2x^3 - 1$

أوجد $(\frac{f}{g})(x)$, $(f.g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$ لكلِّ دالتين فيما يأتي: (الدرس: 1-4)

63) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

64) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8 - x$

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي: (الدرس: 5-4)

65) $(\sqrt{x-3})^2$ **66)** $(\sqrt[3]{3x-4})^3$ **67)** $(2\sqrt{x}-5)^2$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

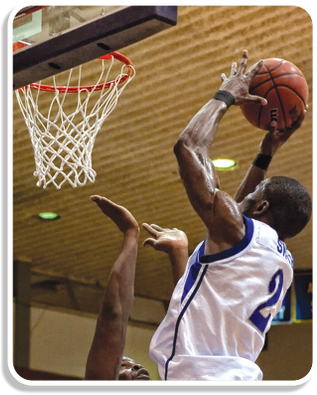
4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية
Solving Radical Equations and Inequalities

فيما سبق
درست حل معادلات كثيرات الحدود. (مهارة سابقة)

والآن
- أحل معادلات تحتوي جذورًا.
- أحل متباينات تحتوي جذورًا.

المفردات
المعادلة الجذرية
radical equation
الحل الدخيل
extraneous solution
المتباينة الجذرية
radical inequality

لماذا؟



عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمنًا معينًا في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام، وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$.

إذا عُلم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريبًا، فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزته؟

حل المعادلات الجذرية: تحتوي **المعادلات الجذرية** على عبارات جذرية يكون المتغير فيها تحت الجذر. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين.

مفهوم أساسي حل المعادلات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.

الخطوة 2: ارفع طرفَي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر.

الخطوة 3: حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلًّا دخيلًا**.

مثال 1 حل معادلات جذرية

حلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $\sqrt{x+2} + 4 = 7$

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{x+2} = 3$	اطرح 4 من الطرفين لفصل الجذر
$(\sqrt{x+2})^2 = 3^2$	ربّع الطرفين للتخلص من الجذر
$x + 2 = 9$	أوجد مربع الطرفين
$x = 7$	اطرح 2 من الطرفين

تحقق:

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{7+2} + 4 \stackrel{?}{=} 7$	عوض عن x بالعدد 7
$\checkmark \quad 7 = 7$	بسّط

b) $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{x-12})^2 = (2-\sqrt{x})^2$	ربّع الطرفين
$x - 12 = 4 - 4\sqrt{x} + x$	أوجد مربع الطرفين
$-16 = -4\sqrt{x}$	اطرح $x + 4$ من الطرفين لفصل الجذر
$4 = \sqrt{x}$	اقسم الطرفين على -4
$16 = x$	ربّع الطرفين

وزارة التعليم
Ministry of Education

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

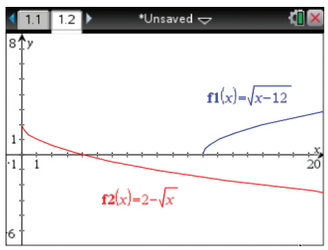
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتحقق من حل المعادلة، مثّل كل طرف من أطراف المعادلة الأصلية بيانيًا، ثم ابحث عن نقاط التقاطع.

تحقق: $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{16-12} \stackrel{?}{=} 2 - \sqrt{16}$

$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2 - 4$

$2 \neq -2$



يكون حل هذه المعادلة دخيلًا. والتمثيلان البيانيان للمعادلة $y = \sqrt{x-12}$، والمعادلة $y = 2 - \sqrt{x}$ لا يتقاطعان، وهذا يؤكد أنه لا يوجد حل حقيقي.

تحقق من فهمك

(1A) $5 = \sqrt{x-2} - 1$

(1B) $\sqrt{x+15} = 5 + \sqrt{x}$

للتخلص من الجذر التربيعي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 2، وللتخلص من الجذر التكعيبي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 3.

مثال 2 حل معادلة جذر تكعيبي

حل المعادلة: $2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$.

للتخلص من الأس $\frac{1}{3}$ (الجذر التكعيبي) يجب أولًا جعل المقدار المرفوع للأس $\frac{1}{3}$ في طرف لوحده، ثم رفع طرفي المعادلة للأس 3.

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 4$	أضف 4 للطرفين
$(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$	اقسم الطرفين على 2
$\left[(6x-3)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = 2^3$	كعّب الطرفين
$6x - 3 = 8$	أوجد مكعب الطرفين
$6x = 11$	أضف 3 للطرفين
$x = \frac{11}{6}$	اقسم الطرفين على 6

تحقق:

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$	المعادلة الأصلية
$2\left(6 \cdot \frac{11}{6} - 3\right)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$	عوض عن x بالعدد $\frac{11}{6}$
$2(8)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$	بسّط
$2(2) - 4 \stackrel{?}{=} 0$	الجذر التكعيبي للعدد 8 هو 2
$0 = 0$ ✓	اطرح

تحقق من فهمك

(2A) $(3n+2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$

(2B) $3(5y-1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أيًّا كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي عبارة ارفعه للأس n.

مثال 3 على اختبار

ما حلُّ المعادلة $3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$؟

A -1 **B** 1 **C** 5 **D** 11

$3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$	المعادلة الأصلية
$3(\sqrt[4]{2n+6}) = 6$	أضف **6** للطرفين
$\sqrt[4]{2n+6} = 2$	اقسم الطرفين على **3**
$(\sqrt[4]{2n+6})^4 = 2^4$	ارفع الطرفين للأس **4**
$2n + 6 = 16$	أوجد ناتج كل من الطرفين
$2n = 10$	اطرح **6** من الطرفين
$n = 5$	اقسم الطرفين على **2**

إذن الجواب هو C.

تحقق من فهمك

3) $4(3x+6)^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$

A $x = 7$ **B** $x = 25$ **C** $x = 29$ **D** $x = 37$

إرشادات الاختبار

تعويض البدائل

يمكنك أيضًا حلّ سؤال الاختبار بتعويض كل البدائل المعطاة لقيمة n في المعادلة، لاختيار الحلّ الصحيح منها وهو الذي يحقق المعادلة.

حلُّ المتباينات الجذرية: **المتباينة الجذرية** هي متباينة تحوي عبارات جذرية، ويكون المتغير فيها تحت الجذر. ولحلّ متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

حلُّ المتباينات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا، فعيِّن قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.

الخطوة 2: حل المتباينة جبريًّا.

الخطوة 3: حدّد حل المتباينة من الخطوتين السابقتين، ثم اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل.

مثال 4

حل المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$

الخطوة 1: بما أن ما تحت الجذر التربيعي يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفرًا، فحل أولًا $5x - 10 \ge 0$ لتعين قيم المتغير x التي تجعل الطرف الأيسر من المتباينة معرّفًا.

$5x - 10 \ge 0$	المعادلة الأصلية
$5x \ge 10$	أضف **10** للطرفين
$x \ge 2$	اقسم الطرفين على **5**

الخطوة 2: حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$

$3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{5x - 10} \le 5$	اطرح **3** من الطرفين لفصل الجذر
$5x - 10 \le 25$	ربع الطرفين للتخلص من الجذر
$5x \le 35$	أضف **10** للطرفين
$x \le 7$	اقسم الطرفين على **5**

إرشادات الاختبار

المتباينات الجذرية

- بما أن الجذر التربيعي الرئيس لا يكون سالبًا أبدًا، فإن المتباينات التي تبسط إلى الصورة: $\sqrt{ax+b} \le c$ حيث c عدد سالب، ليس لها حل، والتي تُبسَّط إلى الصورة $\sqrt{ax+b} > c$ تكون مجموعة حلها هي مجموعة الأعداد الحقيقية.
- إذا كان طرفا المتباينة موجبين، فإنه يمكنك تربيع الطرفين مع بقاء الرمز $\le$ كما هو.

الخطوة 3: يتَّضح من الخطوتين السابقتين أن حل المتباينة هو $2 \le x \le 7$. ويمكنك اختبار بعض قيم x للتأكد من الحل. استعمل ثلاث قيم؛ إحداها أقل من 2، والأخرى تقع بين 2 و 7، والثالثة أكبر من 7. ثم نظم النتائج في جدول:

$x = 9$	$x = 4$	$x = 0$
$3 + \sqrt{5(9) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✗ $8.92 \le 8$ وبما أن $8 \not\ge 8.92$، فإن المتباينة لا تتحقق.	$3 + \sqrt{5(4) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✓ $6.16 \le 8$ وبما أن $8 \ge 6.16$، فإن المتباينة تتحقق.	$3 + \sqrt{5(0) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✗ $3 + \sqrt{-10} \le 8$ وبما أن $\sqrt{-10}$ ليس عددًا حقيقيًا فإن المتباينة لا تتحقق.

تم التحقق من حل المتباينة. والقيم التي تقع في الفترة $2 \le x \le 7$ فقط هي التي تحقق المتباينة.

تحقق من فهمك

(4A) $\sqrt{2x + 2} + 1 \ge 5$

(4B) $\sqrt{4x - 4} - 2 < 4$

تأكد

المثالان 1, 2 حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

(1) $\sqrt{x - 4} + 6 = 10$

(2) $\sqrt{x + 13} - 8 = -2$

(3) $8 - \sqrt{x + 12} = 3$

(4) $\sqrt[3]{x - 2} = 3$

(5) $(x - 5)^{\frac{1}{3}} - 4 = -2$

(6) $(4y)^{\frac{1}{3}} + 3 = 5$

(7) $\sqrt{y} - 7 = 0$

(8) $2 + 4z^{\frac{1}{2}} = 0$

(9) $5 + \sqrt{4y - 5} = 12$

(10) $\sqrt{2t - 7} = \sqrt{t + 2}$

(11) فيزياء: يعطى الزمن الدوري للبندول بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T الزمن الدوري للبندول بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، والذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانيةٍ مربعةٍ.

a) ما الزمن الدوري لبندول ضخم طوله 73 ft ؟

b) يريد صانع ساعات أن يصنع بندولًا يستغرق 5 s لإتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

مثال 3 **(12) اختيار من متعدد:** حلّ المعادلة $(2y + 6)^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$ هو:

A $y = 1$ B $y = 5$ C $y = 11$ D $y = 15$

مثال 4 حلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

(13) $\sqrt{3x + 4} - 5 \le 4$

(14) $\sqrt{b - 7} + 6 \le 12$

(15) $2 + \sqrt{4y - 4} \le 6$

(16) $\sqrt{3a + 3} - 1 \le 2$

(17) $1 + \sqrt{7x - 3} > 3$

(18) $\sqrt{3x + 6} + 2 \le 5$

(19) $-2 + \sqrt{9 - 5x} \ge 6$

(20) $6 - \sqrt{2y + 1} < 3$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

21) $6+\sqrt{3x+1}=11$

22) $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$

23) $\sqrt{x-15}=3-\sqrt{x}$

24) $2+\sqrt{3y-5}=10$

25) $\sqrt{7a-2}=\sqrt{a+3}$

26) $\sqrt{b-6}+\sqrt{b}=3$

27) فيزياء: تصف الصيغة: $t=\frac{1}{4}\sqrt{d-h}$ الزمن t بالثواني اللازم لوصول جسم إلى الارتفاع h عن سطح الأرض عند سقوطه من ارتفاع قدره d متر عن سطح الأرض، إذا سقطت مفاتيح بدر من ارتفاع 65 m من أعلى العجلة الدوارة في مدينة الألعاب، فما ارتفاع المفاتيح عن سطح الأرض بالأمتار بعد مرور ثانيتين؟

مثال 2 حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

28) $(5n-6)^{\frac{1}{3}}+3=4$

29) $(6q+1)^{\frac{1}{4}}+2=5$

30) $(4z-1)^{\frac{1}{5}}-1=2$

31) $3(x+5)^{\frac{1}{3}}-6=0$

32) $\sqrt[3]{4n-8}-4=0$

33) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}}=1$

مثال 3 **34) اختيار من متعدد:** حَلّ المعادلة: $\sqrt[4]{y+2}+9=14$ هو:

A 23 **B** 53 **C** 123 **D** 623

مثال 4 حُلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

35) $\sqrt{2x+14}-6\geq 4$

36) $10-\sqrt{2x+7}\leq 3$

37) $6+\sqrt{3y+4}<6$

38) $\sqrt{2y+5}+3\leq 6$

39) $-2+\sqrt{8-4z}\geq 8$

40) $-3+\sqrt{6a+1}>4$

41) فيزياء: الصيغة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ تُمثل الزمن الدوري للبندول بالثواني، حيث L طول البندول بالأقدام. احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 ثانية لإتمام دورته.

42) أسماك: يمكن تقريب العلاقة بين طول سمكة وكتلتها بالمعادلة: $L=0.46\sqrt[3]{M}$، حيث L الطول بالأمتار، M الكتلة بالكيلوجرامات. حلّ هذه المعادلة بالنسبة للمتغير M.

43) زمن التحليق: عُد إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وصف كيف يرتبط ارتفاع القفزة بزمن التحليق. واكتب توضيحًا مفصلًا لكيفية تحديد ارتفاع قفزةٍ زمنُ تحليقها 0.98 ثانية.

44) رفع الأثقال: يمكن استعمال الصيغة $M=512-146230B^{-\frac{8}{5}}$؛ لتقدير الكتلة العظمى M التي يستطيع رافع أثقال كتلته B كيلوجرام رفعها. استخدم هذه الصيغة في إيجاد كتلة رافع أثقال يستطيع رفع 470 kg على الأكثر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

45) تحدٍّ: قالت عائشة: إنه بإمكانها الحكم بعدم وجود حلٍّ حقيقي للمعادلة $(x+5)^{\frac{1}{4}}=-4$ دون حلها. فهل ما تقوله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

46) أي معادلة مما يأتي ليس لها حلٌّ؟

$\sqrt{x-1}+3=4$	$\sqrt{x+1}+3=4$
$\sqrt{x-2}+7=10$	$\sqrt{x+2}-7=-10$

47) **تبرير:** حدد ما إذا كانت $x=\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x}$ ، صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وذلك إذا كان x عددًا حقيقيًّا. ووضِّح إجابتك.

48) **مسألة مفتوحة:** اختر عددًا كليًّا، واعمل بشكل عكسي، لكتابة معادلتين جذريتين يكون حلّهما ذلك العدد الكلي، بحيث تكون إحداهما معادلة جذر تربيعي، والأخرى معادلة جذر تكعيبي.

49) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة يمكن حلّها برفع كلا الطرفين للأس المعطى:

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{7}{8}$

50) **تحدٍّ:** حَلّ المعادلة: $7^{3x-1}=49^{x+1}$. (إرشاد: $b^x=b^y$ إذا وفقط إذا كان $x=y$).

51) **اكتب:** وضِّح العلاقة بين دليل جذر المتغير في المعادلة الجذرية والأس الذي ترفع طرفي المعادلة له عند حلّها.

تدريب على اختبار

52) أيُّ المجموعات الآتية تمثل دالة؟

A $\{(3,0),(-2,5),(2,-1),(2,9)\}$

B $\{(-3,5),(-2,3),(-1,5),(0,7)\}$

C $\{(2,5),(2,4),(2,3),(2,2)\}$

D $\{(3,1),(-3,2),(3,3),(-3,4)\}$

53) **إجابة قصيرة:** محيط مثلث متطابق الضلعين 56 in. فإذا كان طول أحد الضلعين المتطابقين 20 in، فما طول الضلع الثالث؟

54) ما حلّ المعادلة $\sqrt{x+5}+1=4$ ؟

A 4 **B** 10 **C** 11 **D** 20

مراجعة تراكمية

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس: 6-4)

55) $27^{-\frac{2}{3}}$ **56)** $9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{5}{3}}$ **57)** $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

58) **هندسة:** العبارتان $8x^2y^2$ ، $4x^2y^2$ تمثلان طولي ساقي الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية، أوجد عبارةً ثالثةً تمثل طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس، ثم بسّطها. (الدرس: 6-4)

أوجد معكوس كلِّ دالةٍ مما يأتي: (الدرس: 2-4)

59) $y=3x-4$ **60)** $y=-2x-3$ **61)** $y=x^2$ **62)** $y=(2x+3)^2$

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

63) $\frac{3}{10}=\frac{12}{25}a$ **64)** $\frac{6}{7}=9m$ **65)** $\frac{9}{8}b=18$ **66)** $\frac{1}{3}p=\frac{5}{6}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحل معادلات ومتباينات جذرية.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل المعادلات والمتباينات الجذرية، وإحدى طرق الحل هي إعادة كتابة المعادلة أو المتباينة، بحيث يكون أحد طرفَيها صفرًا، ثم استعمال ميزة **التقاطع** في الحاسبة لإيجاد الحل.

مثال 1 المعادلة الجذرية

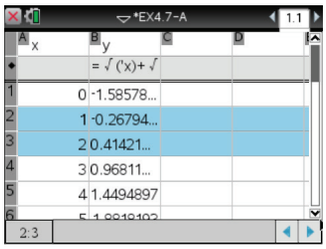
حُلَّ المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 3$

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة.

- اطرح العدد 3 من طرفَي المعادلة لتحصل على المعادلة:
$\sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3 = 0$

الخطوة 2 استعمل جدولًا وقدّر الحلّ.

- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار:
on ← 1 مستند جديد ← 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات



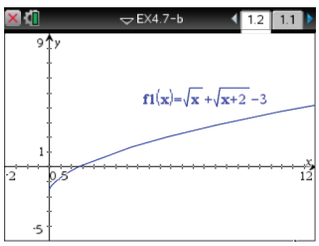
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x، ثم أدخل قيمًا تختارها لِـ x .
- سمِّ رأس العمود B بالرمز y، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$، ثم اضغط enter فتظهر شاشة اختر منها مرجع المتغير
ثم اضغط enter لتحصل على الجدول المطلوب.

بما أن إشارة الدالة تتغير من سالبٍ إلى موجبٍ بين $x = 1$, $x = 2$ فهناك حلٌّ بين العددين 1 , 2

الخطوة 3 استعمل ميزة أصفار الدالة لإيجاد الحلّ.

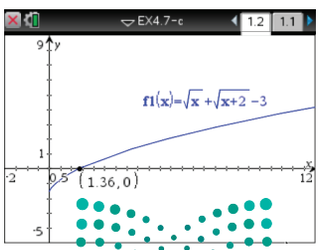
- اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار:
on ← 1 مستند جديد ← 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية

- اكتب الدالة: $f1(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$
ثم اضغط enter فيظهر التمثيل البياني المجاور.



[−2, 12] scl: 0.5 by [−5, 9] scl: 1

- حدِّد أصفار الدالة بالضغط على مفتاح menu:
ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر 1: أصفار الدالة وقم بالضغط في أي نقطة من الشاشة مرورًا بنقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور x، فيظهر إحداثيات صفر الدالة.
ثم الضغط على كلٍّ من منحنى الدالة والمحور x، فيظهر صفر الدالة كما في الشكل المجاور.



[−2, 12] scl: 0.5 by [−5, 9] scl: 1

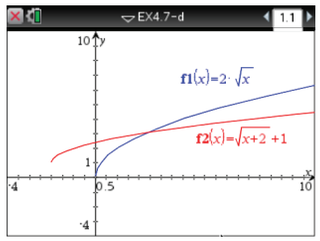
فيكون الحل هو 1.36 تقريبًا، وهو يقع بين العددين 1, 2 كما تبين في الخطوة 2

مثال 2 المتباينة الجذرية

حُلَّ المتباينة: $2\sqrt{x} > \sqrt{x+2} + 1$

الخطوة 1 ارسم طرفي المتباينة

- مثّل المعادلة المرتبطة بالطرف الأيسر $f1(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًّا، والمعادلة المرتبطة بالطرف الأيمن $f2(x) = \sqrt{x+2} + 1$ بيانيًّا فتظهر الشاشة التالية:

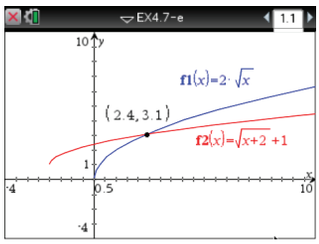


[−4, 10] scl: 0.5 by [−4, 10] scl: 1

تبيِّن الشاشة أعلاه أن النقاط التي تقع عن يسار نقطة تقاطع المنحنيين تكون عندها f1 < f2 أي $2\sqrt{x} < \sqrt{x+2} + 1$، ولحل المتباينة الأصلية، يجب أن تجد النقاط التي تكون عندها f1 > f2، وهذه النقاط تقع عن يمين نقطة تقاطع المنحنيين.

الخطوة 2 استعمل ميزة نقاط التقاطع.

- يمكنك استعمال ميزة نقاط التقاطع بالضغط على مفتاح menu ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ومنها اختر نقاط التقاطع وقم بالضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، يظهر الزوج المرتب (2.4 ,3.1)

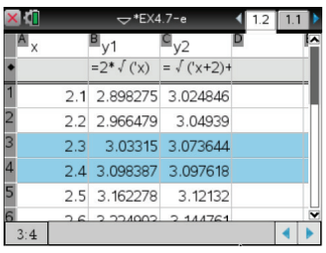


[−4, 10] scl: 0.5 by [−4, 10] scl: 1

أي أن الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنيين هو 2 تقريبًا؛ لذلك فإن الحل التقريبي للمتباينة هو $x > 2.4$ استعمل الرمز > في الحل؛ لأنه الرمز الموجود في المتباينة الأصلية.

الخطوة 3 تحقق من حلّك باستعمال الجداول البيانية.

- اضغط مفتاح on، واختر 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات.
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x، ثم أدخل قيمًا عشرية بين العددين الصحيحين 3 , 2
- سَمِّ رأس العمود B بالرمز y1، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y1 = 2\sqrt{x}$، ثم اضغط enter.
- سَمِّ رأس العمود C بالرمز y2، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y2 = \sqrt{x+2} + 1$ ثم اضغط enter فيظهر الشكل المجاور.



لاحظ أنه عندما تكون x أقل من أو تساوي 2.4، فإن y2 > y1.

وهذا يُثبت أن الحل هو $\{x | x > 2.4\}$.

تمارين:

استعمل طريقة التمثيل البياني لحلّ كلِّ معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\sqrt{x+4} = 3$

2) $\sqrt{x+5} = \sqrt{3x+4}$

3) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 4$

4) $\sqrt{x-3} \geq 2$

5) $\sqrt{x+3} > 2\sqrt{x}$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 4$

7) اكتب: وضِّح كيف يمكنك تطبيق الأسلوب المتَّبع في حلّ المثال الأول لحلّ متباينة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العمليات على الدوال. (الدرس 4-1)

العملية	التعريف
الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$
التركيب	$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

العلاقات والدوال العكسية ودوال الجذر التربيعي
(الدرسان 4-2, 4-3)

- اعكس إحداثيات الأزواج المرتبة لتجد العلاقة العكسية.
- تكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان كل من تركيبيهما يساوي الدالة المحايدة.
- الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي هي $f(x)=\sqrt{x}$ ومجالها هو $\{x \mid x \geq 0\}$ ومداها هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

الجذور النونية للأعداد الحقيقية (الدرس 4-4)

الجذور الحقيقية النونية للعدد a			
n	a > 0	a < 0	a = 0
عدد زوجي	له جذر وحيد موجب وله جذر وحيد سالب	ليس له جذور حقيقية	له جذر حقيقي وحيد وهو 0
عدد فردي	له جذر وحيد موجب وليس له جذور سالبة	ليس له جذور موجبة وله جذر وحيد سالب	

العبارات الجذرية (الدروس 4-5 إلى 4-7)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، وَ n, x, y أعداد صحيحة حيث $n>1, y>1, b\neq 0$ يُعد كل مما يأتي صحيحًا، وذلك عندما تكون جميع الجذور معرفة.

- خاصية الضرب: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
- خاصية القسمة: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- الأسس النسبية: $b^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{b^x}=\left(\sqrt[y]{b}\right)^x$.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

تركيب دالتين ص 189
العلاقة العكسية ص 195
دالة عكسية ص 195
دالة الجذر التربيعي ص 201
الدالة الجذرية ص 201
متباينة الجذر التربيعي ص 203
الجذر النوني ص 206
رمز الجذر ص 206
الدليل ص 206
ما تحت الجذر ص 206
الجذر الرئيس ص 206
إنطاق المقام ص 214
الجذور المتشابهة ص 215
المرافق ص 216
المعادلة الجذرية ص 225
الحل الدخيل ص 225
المتباينة الجذرية ص 227

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) عند _____ ، تستعمل قيم دالة منهما لحساب قيم الدالة الأخرى.

2) عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، فإن الجذر غير السالب يُسمّى _____.

3) للتخلص من الجذور في المقام، فإنك تستعمل عملية تُسمّى _____.

4) عند حل معادلات جذرية، تحصل أحيانًا على عدد لا يحقق المعادلة الأصلية. ويُسمّى مثل هذا العدد _____.

5) دالة الجذر التربيعي هي نوع من أنواع _____.

6) _____ هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي نحصل عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة الأصلية.

7) إذا ساوى كل من تركيبي دالتين الدالةَ المحايدةَ فإن كلتيهما تكون _____ للأخرى.

8) تعد $\sqrt{x-3}>5$ مثالًا على: _____

مراجعة الدروس

4-1 العمليات على الدوال ص 188-194

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ لكلٍّ مما يأتي:

9) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x - 5$

10) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 7$

11) $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 1$

12) $f(x) = 4x$, $g(x) = 5x - 1$

13) قياسات: تستعمل الصيغة $f = 3y$ لتحويل الياردات y إلى أقدام f، كذلك تستعمل الصيغة $f = \frac{n}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدام f. اكتب الصيغة التي تحول الياردات إلى بوصات.

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2 + 3, g(x) = 3x - 2$ فأوجد كلًّا من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ — عوّض عن $f(x)$ بالمقدار $x^2 + 3$

$= g(x^2 + 3)$

$= 3(x^2 + 3) - 2$

$= 3x^2 + 9 - 2$ — اضرب

$= 3x^2 + 7$ — بسّط

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ — عوّض عن $g(x)$ بالمقدار $3x - 2$

$= f(3x - 2)$

$= (3x - 2)^2 + 3$

$= 9x^2 - 12x + 4 + 3$ — اضرب

$= 9x^2 - 12x + 7$ — بسّط

4-2 العلاقات والدوال العكسية ص 195-199

أوجد معكوس كلِّ دالة مما يأتي، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد. وبيِّن ما إذا كان معكوس الدالة يمثِّل دالة أم لا، وإذا كان كذلك فاكتب قاعدة الدالة العكسية.

14) $f(x) = 5x - 6$

15) $f(x) = -3x - 5$

16) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

17) $f(x) = \frac{4x + 1}{5}$

18) $f(x) = x^2$

19) $f(x) = (2x + 1)^2$

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدّد هل كل دالة تمثل داالة عكسية للأخرى أم لا، ووضّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 2$

21) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$

22) ثقافة مالية: قام عبدالله بالنشاطات المالية الآتية خلال الشهر الماضي: أودع مبلغًا يعادل مثلي رصيده الأصلي، ثم أودع مبلغين قيمة كل منهما 450 ريالًا، ثم سحب مبلغ 350 ريالًا خمس مرات من رصيده. إذا كان رصيده الآن 1890 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة، وماذا كان رصيده في بداية الشهر؟

مثال 2

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = -2x + 7$.

ضع المتغير y بدلًا من رمز الدالة $f(x)$: $y = -2x + 7$، ثم قم بالتبديل بين المتغيرين x, y، وحل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = -2y + 7$ — بالتبديل بين المتغيرين

$2y = -x + 7$ — بالحل بالنسبة للمتغير y

$y = \frac{-x + 7}{2}$ — اقسم الطرفين على 2

$f^{-1}(x) = \frac{-x + 7}{2}$ — ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y؛ لأن معكوس الدالة $f(x)$ هو دالة أيضًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مراجعة الدروس

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي ص 201-205

مثّل بيانيًّا كلَّ دالة فيما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

23 $f(x) = \sqrt{3x}$

24 $f(x) = -\sqrt{6x}$

25 $f(x) = \sqrt{x - 7}$

26 $f(x) = \sqrt{x + 5} - 3$

27 $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x - 1} + 5$

28 $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x + 4} - 1$

29 **هندسة:** يُعبَّر عن مساحة الدائرة بالقانون $A = \pi r^2$. حيث r نصف قطرها. فما قيمة نصف قطر دائرة مساحتها $300\,cm^2$؟

مثّل بيانيًّا كلَّ متباينة فيما يأتي:

30 $y \geq \sqrt{x} + 3$

31 $y < 2\sqrt{x - 5}$

32 $y > -\sqrt{x - 1} + 2$

مثال 3

مثِّل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \sqrt{x + 1} - 2$، وحدّد مجالها ومداها.

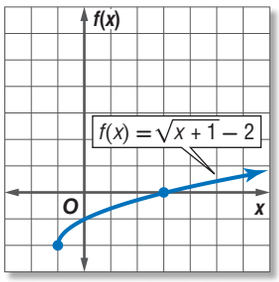
تحديد المجال:

$x + 1 \geq 0$ ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

$x \geq -1$ اطرح العدد 1 من الطرفين.

اعمل جدولًا لبعض قيم المتغير x، حيث $x \geq -1$، ومثّل الدالة بيانيًّا.

x	f(x)
−1	−2
0	−1
1	−0.59
2	−0.27
3	0
4	0.24
5	0.45



المجال هو $\{x | x \geq -1\}$، والمدى هو $\{f(x) | f(x) \geq -2\}$.

4-4 الجذر النوني ص 206-210

بسّط كلًّا مما يأتي:

33 $\pm\sqrt{121}$

34 $\sqrt[3]{-125}$

35 $\sqrt{(-6)^2}$

36 $\sqrt[6]{(x^2 + 2)^{18}}$

37 $\sqrt[3]{27(x + 3)^3}$

38 $\sqrt[4]{a^8 b^{12}}$

39 $\sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$

40 **فيزياء:** تستعمل الصيغة $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ لحساب سرعة جسم v، حيث v السرعة بالأمتار لكل ثانية، m كتلة الجسم بالجرام، K الطاقة الحركية بالجول. أوجد السرعة بالأمتار لكل ثانية لجسم كتلته 17 جرامًا وطاقته الحركية 850 جولًا.

مثال 4

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{64x^6}$

$\sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2}$ $64x^6 = (8x^3)^2$

$= 8|x^3|$ بسّط

استعمل رمز القيمة المطلقة لتجنب القيم السالبة للمتغير x.

مثال 5

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}}$

$\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}} = \sqrt[6]{(4x^2y^4)^6}$ $4096x^{12}y^{24} = (4x^2y^4)^6$

$= 4x^2y^4$ بسّط

4-5 العمليات على العبارات الجذرية ص 213-218

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

41) $\sqrt[3]{54}$

42) $\sqrt{144a^3b^5}$

43) $4\sqrt{6y} \cdot 3\sqrt{7x^2y}$

44) $6\sqrt{72} + 7\sqrt{98} - \sqrt{50}$

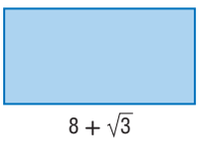
45) $(6\sqrt{5} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$

46) $\dfrac{\sqrt{6m^5}}{\sqrt{p^{11}}}$

47) $\dfrac{3}{5 + \sqrt{2}}$

48) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}$

49) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه ومساحته.



مثال 6

بسّط العبارة $2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$= (2 \cdot 3)\sqrt[3]{18a^2b \cdot 12ab^5}$ خاصية ضرب الجذور

$= 6\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}$ حلّل إلى العوامل

$= 6 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ أوجد الجذر التكعيبي

$= 36ab^2$ بسّط

مثال 7

بسّط العبارة $\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}}$

$\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}} = \dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^5}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \dfrac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^2)^2 \cdot y}}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \dfrac{x^2}{y^2\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ أنطق المقام

$= \dfrac{x^2\sqrt{y}}{y^3}$ $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

4-6 الأسس النسبية ص 219-224

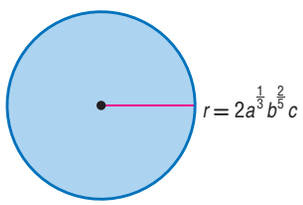
بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

50) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ **51)** $m^{-\frac{3}{4}}$ **52)** $\dfrac{d^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{3}{4}}}$

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

53) $\dfrac{1}{y^{\frac{1}{4}}}$ **54)** $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ **55)** $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

56) هندسة: ما مساحة الدائرة في الشكل أدناه؟



مثال 8

بسّط العبارة $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}$

$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{13}{15}}$ اجمع الأسس

مثال 9

بسّط العبارة $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}}$

$\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}$ اكتب العبارة على الصورة الأسية

$= \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ أنطق المقام

$= \dfrac{2ab^{\frac{2}{3}}}{b} = \dfrac{2a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ اكتب العبارة على الصورة الجذرية

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

57 $\sqrt{x-3}+5=15$

58 $-\sqrt{x-11}=3-\sqrt{x}$

59 $4+\sqrt{3x-1}=8$

60 $\sqrt{m+3}=\sqrt{2m+1}$

61 $\sqrt{2x+3}=3$

62 $(x+1)^{\frac{1}{4}}=-3$

63 $a^{\frac{1}{3}}-4=0$

64 $3(3x-1)^{\frac{1}{3}}-6=0$

65 **فيزياء:** تُعطى المسافة الأفقية d بالكيلومترات التي يمكن أن يراها شخص بالعلاقة $d=3.57\sqrt{L}$، حيث L تمثل ارتفاع النقطة التي ينظر منها الشخص عن الأرض ويقاس بالأمتار. فإذا كانت المسافة الأفقية التي يراها شخص هي 71.4 كيلومترًا، فكم مترًا ترتفع النقطة التي ينظر منها الشخص عن الأرض؟

حُلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

66 $2+\sqrt{3x-1}<5$

67 $\sqrt{3x+13}-5\geq 5$

68 $6-\sqrt{3x+5}\leq 3$

69 $\sqrt{-3x+4}-5\geq 3$

70 $5+\sqrt{2y-7}<5$

71 $3+\sqrt{2x-3}\geq 3$

72 $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6+x}>0$

مثال 10

حُلّ المعادلة الجذرية $\sqrt{2x+9}-2=5$

$\sqrt{2x+9}-2=5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{2x+9}=7$	أضف **2** للطرفين
$(\sqrt{2x+9})^2=7^2$	ربّع الطرفين
$2x+9=49$	أوجد مربع الطرفين
$2x=40$	اطرح **9** من الطرفين
$x=20$	اقسم الطرفين على **2**

تحقق: $\sqrt{2\times 20+9}-2\stackrel{?}{=}5$ ✓

مثال 11

حل المتباينة $\sqrt{2x-5}+2>5$.

$2x-5\geq 0$	ما تحت الجذر ليس سالبًا
$2x\geq 5$	أضف **5** للطرفين
$x\geq 2.5$	اقسم الطرفين على **2**

يجب أن يكون الحلّ أكبر من أو يساوي 2.5 لينتمي إلى المجال.

$\sqrt{2x-5}+2>5$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{2x-5}>3$	اطرح **2** من الطرفين
$(\sqrt{2x-5})^2>3^2$	ربّع الطرفين
$2x-5>9$	أوجد مربع الطرفين
$2x>14$	أضف **5** للطرفين
$x>7$	اقسم الطرفين على **2**

بما أن $x\geq 2.5$ تحوي $x>7$، فإن حل المتباينة هو $x>7$.

تحقق: $x=0,\ \sqrt{2\times 0-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✗ $\sqrt{-5}+2>5$

وبما أن $\sqrt{-5}$ ليس عددًا حقيقيًّا، فإن المتباينة لا تتحقق.

$x=8,\ \sqrt{2\times 8-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✓ $\sqrt{11}+2>5$

وبما أن $5.3>5$، فإن المتباينة تتحقق.

اختبار الفصل

في كلِّ زوج ممَّا يأتي، حدِّد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

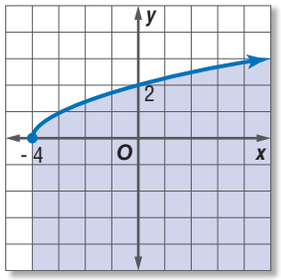
1) $f(x)=3x+8, g(x)=\frac{x-8}{3}$

2) $f(x)=\frac{1}{3}x+5, g(x)=3x-15$

3) $f(x)=x+7, g(x)=x-7$

4) $f(x)=\frac{x-2}{3}, g(x)=3x-2$

5) **اختيار من متعدد:** أيُّ المتباينات الآتية لها التمثيل البياني الظاهر في الشكل أدناه؟



A $y \geq \sqrt{x+4}$ C $y \geq \sqrt{x-4}$

B $y \leq \sqrt{x+4}$ D $y \leq \sqrt{x-4}$

إذا كان $f(x)=3x+2, g(x)=x^2-2x+1$ فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

6) $(f+g)(x)$ **7)** $(f \cdot g)(x)$

8) $(f-g)(x)$ **9)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

10) $\sqrt{a+12}=\sqrt{5a-4}$

11) $\sqrt{3x}=\sqrt{x-2}$

12) $4(\sqrt[4]{3x+1})-8=0$

13) $\sqrt[3]{5m+6}+15=21$

14) $1+\sqrt{x+11}=\sqrt{2x+15}$

15) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x}=3$

16) **اختيار من متعدد:** قيمة العبارة $125^{-\frac{1}{3}}$ هي:

A -5 B $-\frac{1}{5}$ C $\frac{1}{5}$ D 5

بسّط كلًّا مما يأتي:

17) $(2+\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})$ **18)** $(3-2\sqrt{2})(-7+\sqrt{2})$

19) $\frac{12}{2-\sqrt{3}}$ **20)** $\frac{m^{\frac{1}{2}}-1}{2m^{\frac{1}{2}}+1}$

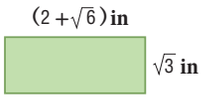
21) $4\sqrt{3}-8\sqrt{48}$ **22)** $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{6}}$

23) $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$ **24)** $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$

25) $w^{-\frac{4}{5}}$ **26)** $\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{6}}}$

27) $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$ **28)** $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}+2}$

29) **اختيار من متعدد:** ما مساحة المستطيل في الشكل أدناه؟



A $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ وحدة مربعة

B $4+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ وحدة مربعة

C $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ وحدة مربعة

D $2\sqrt{3}+3$ وحدة مربعة

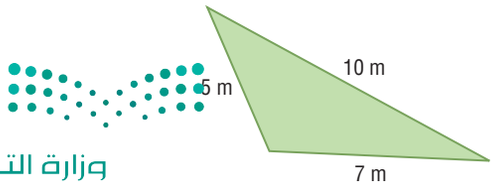
حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

30) $\sqrt{4x-3}<5$ **31)** $2+\sqrt{4x-4} \leq 6$

32) $\sqrt{2x+3}-4 \leq 5$ **33)** $\sqrt{b+12}-\sqrt{b}>2$

34) $\sqrt{y-7}+5 \geq 10$

35) **قانون هيرو (HERO):** يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c باستعمال قانون هيرو:
$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.
اكتب مساحة المثلث في الشكل أدناه على الصورة الجذرية في أبسط صورة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الحل عكسيًّا



تعطي بعض مسائل الرياضيات معلومات عن النتيجة النهائية، وتتطلب استنتاج بعض الأمور التي حدثت مسبقًا. ويمكنك في مثل هذه المسائل الحل باستعمال استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجية الحل عكسيًّا:

خطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المعلومات المعطاة؟
- ما المطلوب إيجاده؟
- هل توجد معطيات ترتبط بالنتيجة النهائية؟
- هل المطلوب هو إحدى القيم غير المعطاة، والتي لم تذكر في نص المسألة؟
- ما العمليات المستعملة في المسألة؟

خطوة 2

عبِّر عن المسألة بما يناسبها: معادلة أو متباينة أو تمثيل بيانيٌّ، ثم اعمل عكسيًّا لحلّ المسألة.

- مثّل تتابع الأحداث بمخطط حسب نص المسألة إذا تطلب الأمر ذلك.
- استعمل العملية العكسية لكلِّ عملية أثناء الحل عكسيًّا لتصل إلى الإجابة.

خطوة 3

تحقق من صحة الحل مبتدئًا بإجابتك التي حصلت عليها، وتأكد من أنك ستصل إلى النتيجة المعطاة في نص المسألة نفسها؟

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

اشترى عبدالرحمن سيارة مستعملة. فكان مجموع ما دفعه 39540 ريالًا. ويتضمن ذلك المبلغ رسوم نقل الملكية وهي 150 ريالاً، وعمولة مكتب الوساطة وهي 1% من ثمن السيارة. فما ثمن السيارة؟ بين خطوات الحلّ.

اقرأ المسألة بعناية. أنت تعلم المبلغ الذي دفعه عبد الرحمن بما فيه رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب .

والمطلوب هو إيجاد ثمن السيارة قبل إضافة رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب.

افترض أن x تمثل ثمن السيارة. اكتب معادلة، واستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا لحلها.

التعبير اللفظي: ثمن السيارة مضاف إليه رسوم نقل الملكية وعمولة مكتب الوساطة يساوي المبلغ الذي دفعه عبدالرحمن.

المتغير: x = ثمن السيارة.

المعادلة: $x + 0.01x + 150 = 39540$

ينتج عن استعمال استراتيجية الحل عكسيًّا معادلة بسيطة. استعمل العمليات العكسية لإيجاد قيمة x.

$$1.01x + 150 = 39540$$
$$1.01x = 39390$$
$$x = 39000$$

تحقق من صحة حلّك بالبدء بالإجابة التي حصلت عليها؛ لتتأكد من أنك ستحصل على القيمة نفسها المعطاة في نص المسألة.

$39000(1.01) = 39390$ أوجد عمولة مكتب الوساطة

$39390 + 150 = 39540$ اجمع رسوم نقل الملكية

$39540 = 39540$ القيمة نفسها المعطاة

لذا فإن ثمن السيارة هو 39000 ريال.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألتين الآتيتين جيدًا، وحدد المطلوب في كلٍّ منها، ثم استعمل معطياتها لحلِّها:

1) قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 800ft/s. إذا كان ارتفاع الجسم h بالأقدام بعد t ثانية فإنه يُعبَّر عنه بالمعادلة: $h = -16t^2 + 800t$.
فبعد كم ثانية يصل الجسم إلى ارتفاع 10000ft؟

A 10 ثوانٍ

B 25 ثانية

C 100 ثانية

D 625 ثانية

2) يقوم عليٌّ بعمل نموذج لسيارة مستعملًا مقياس رسم، فوجد أن ارتفاع نموذج السيارة يعادل $\frac{1}{32}$ من ارتفاع السيارة الحقيقي x. فأيُّ المعادلات الآتية تمثّل هذه العلاقة؟

A $y = x - \frac{1}{32}$ **C** $y = \frac{1}{32}x$

B $y = \frac{1}{32}x$ **D** $y = x + \frac{1}{32}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يقدم محل خصمًا نسبته 20% على جميع لوازم التخييم. ويملك بدر قسيمة حسم إضافية بقيمة 5 ريالات عند أيّ عملية شراء من المحل. إذا استعمل بدر القسيمة بعد الخصم لشراء خيمة، فأيُّ الدوال الآتية يمكن أن تستعمل لإيجاد سعر خيمة سعرها الأصلي d ريالًا؟

A $P(d) = 0.8 \times (d + 5)$

B $P(d) = (0.8 \times d) - 5$

C $P(d) = 0.2 \times (d - 5)$

D $P(d) = 0.8 \times (d - 5)$

2) أيُّ العبارات الآتية تكافئ: $3a(2a+1)-(2a-2)(a+3)$؟

A $2a^2 + 6a + 7$

B $4a^2 - a + 6$

C $4a^2 + 6a - 6$

D $4a^2 - 3a + 7$

3) اشترى سلمان سيارة مستعملة، أضيف إلى ثمنها 6.5% بدل صيانة دورية، ودفع 150 ريالًا رسوم نقل الملكية، أوجد ثمن السيارة إذا كان مجموع ما دفعه سلمان 68310 ريال.

A 64140

B 68000

C 64000

D 68160

4) ما أبسط صورة للعبارة: $\sqrt[3]{-27b^6c^{12}}$.

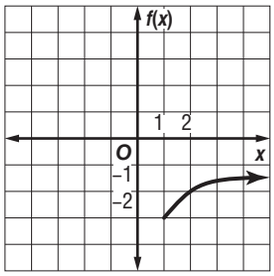
A $-3b^3c^6$

B $-3b^2c^4$

C $3b^2c^4$

D $3b^3c^6$

5) أيّ دوال الجذر التربيعي الآتية لها التمثيل البياني في الشكل المجاور؟



A $f(x) = \sqrt{x - 3} - 1$

B $f(x) = \sqrt{x + 1} - 3$

C $f(x) = \sqrt{x + 3} + 1$

D $f(x) = \sqrt{x - 1} - 3$

6) ما حَلُّ المعادلة: $\sqrt[3]{5x} = 10$ ؟

A 2

B 20

C 200

D 1000

7) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = x - 5$.

A $f^{-1}(x) = x + 5$

B $f^{-1}(x) = 5x$

C $f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$

D $f^{-1}(x) = 5 - x$

8) أيُّ المعادلات الآتية لها جذران نسبيان مختلفان؟

I. $3x^2 + x - 2 = 0$

II. $x^2 - 2x + 1 = 0$

III. $x^2 + 2x + 5 = 0$

A I فقط

B II فقط

C II، III فقط

D I، III فقط

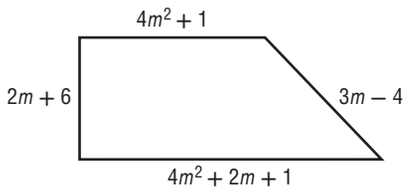
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

9) مثّل الدالة $f(x) = |x + 2|$ بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها.

10) قُذف جسم من منصة إلى أعلى. وتستعمل الصيغة الآتية $h = -16t^2 + 40t + 70$ لإيجاد ارتفاع الجسم h بالأقدام عن سطح الأرض بعد مرور t ثانية من لحظة القذف. فما أعلى ارتفاع يصل إليه الجسم؟

11) إذا كان محيط الشكل الرباعي أدناه 160 وحدة، فما قيمة m؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

12) عمر أب وابنه 56 عامًا فإذا كان عمر الأب يزيد على مثلي عمر الابن بـ 20 عامًا:

a) اكتب نظامًا من المعادلات الخطية يمثل المسألة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن استعمالها لحل النظام في a

c) أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، وحل المعادلة المصفوفية لإيجاد عمر كل من الأب وابنه.

13) إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين كل منهما دالة عكسية للأخرى،

a) صف التمثيل البياني لكلتا الدالتين $f(x)$, $g(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

b) ما قيمة $f[g(2)]$ ؟ وضح إجابتك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا أخطأت في السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	4-1	مهارة سابقة	4-2	4-3	4-3	4-7	4-2	مهارة سابقة	مهارة سابقة	4-7	مهارة سابقة	مهارة سابقة	4-2

الفصل 5

العلاقات والدوالّ النسبية
Rational Functions and Relations



فيما سبق:
درست حل المعادلات التربيعية: بالتحليل إلى العوامل، وبيانيًا.

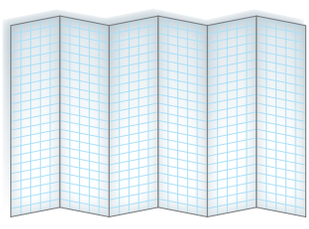
والآن:
- أتعرّف العبارات النسبية وأبسطها.
- أمثّل دوالّ نسبية بيانيًا.
- أحل مسائل التغيّر الطردي والتغيّر المشترك والتغيّر العكسي والتغيّر المركب.
- أحل معادلات ومتباينات نسبية.

لماذا؟
سفر: يمكن استعمال الدوالّ النسبية للتعبير عن المسافة، والزمن، والسرعة، عند السفر بالسيارة، أو بالطائرة، فإذا أردت الوصول إلى وجهة معينة في زمن معين، فيمكنك استعمال العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتحقق هدفك.

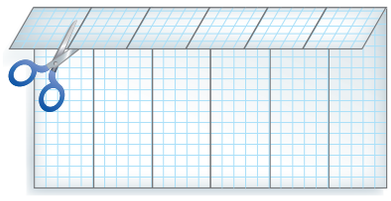
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوالّ النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوالّ النسبية، مبتدئًا بورقة رسم بياني.

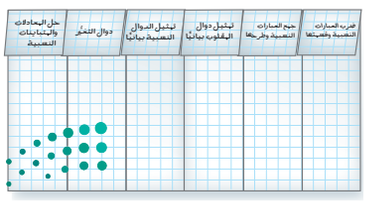
1. **اطو** الورقة عرضيًا ست طيات متساوية.



2. **اطو** الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، ثم قصّ 6 أشرطة مبتدئًا من الحافة حتى خط الطيّ العرضي.



3. **اكتب** عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الخامس

أجب عن الاختبار الآتي: انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة. (تستعمل مع الدرس 1-5)

1) $\frac{5}{14}=\frac{1}{3}x$

2) $\frac{1}{8}m=\frac{7}{3}$

3) $\frac{8}{5}=\frac{1}{4}k$

4) $\frac{10}{9}p=7$

5) **شاحنات:** استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ سعة خزان وقودها الممتلئ في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 80 لترًا من الوقود عند نهاية الرحلة، فما سعة خزان وقود الشاحنة؟

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (تستعمل مع الدرس 2-5)

6) $\frac{3}{4}-\frac{7}{8}$

7) $\frac{8}{9}-\frac{7}{6}+\frac{1}{3}$

8) $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}+\frac{1}{3}$

9) $\frac{10}{3}+\frac{5}{6}+3$

10) **دقيق:** تستعمل علياء $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $\frac{3}{4}$ كوب لعمل كعكة الفانيليا. كم كوبًا من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟

حُلّ كلَّ تناسب مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-5)

11) $\frac{9}{12}=\frac{p}{36}$

12) $\frac{9}{18}=\frac{6}{m}$

13) $\frac{2}{7}=\frac{5}{k}$

14) **تسوق:** تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشترى ملابس سعرها الأصلي 550 ريالًا، ودفع مبلغ 440 ريالًا بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر نفسه سعرها الأصلي 350 ريالًا وبنسبة التخفيض نفسها، فكم يدفع؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ المعادلة: $\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$، واكتب الحل في أبسط صورة.

$\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$	المعادلة الأصلية
$\frac{72}{11}=7r$	اضرب كل من الطرفين في العدد 8
$\frac{72}{77}=r$	اقسم كل من الطرفين على العدد 7

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 77 , 72 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$.

$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$	العبارة الأصلية
$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right)-\frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right)$	المضاعف المشترك الأصغر للمقامات 6, 4, 3 هو العدد 12
$=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}-\frac{10}{12}$	بسّط
$=\frac{3}{12}$	اجمع، ثم اطرح
$=\frac{3\div 3}{12\div 3}=\frac{1}{4}$	بسّط

مثال 3

حُلّ التناسب: $\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$.

$\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$	المعادلة الأصلية
$5(11)=8u$	بالضرب التبادلي
$55=8u$	بسّط
$\frac{55}{8}=u$	اقسم كل من الطرفين على 8

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 ,55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-1

ضرب العبارات النسبية وقسمتها
Multiplying and Dividing Rational Expressions

فيما سبق:
درست تحليل كثيرات الحدود. (مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرف العبارات النسبية.
- أبسّط عبارات نسبية.
- أبسّط كسورًا مركّبة.

المفردات:
العبارة النسبية
rational expression
الكسر المركّب
complex fraction

لماذا؟



يستطيع الغواصون الوصول إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالّة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d - 33}$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاؤه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، و d العمق بالأقدام.

تبسيط العبارات النسبية: تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d - 33}$ **"عبارة نسبية"**.

بما أن المتغيِّرات في الجبر تمثِّل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على العبارات النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط العبارات النسبية يتم قسمة كلٍّ من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر (GCF) لهما.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot \cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{2}{3}$$

1 فوق 4، 4 فوق 12، GCF = 4

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x - 3)(\cancel{x - 1})}{(x - 5)(\cancel{x - 1})} = \frac{x - 3}{x - 5}$$

1 فوق $x-1$، $x-1$ فوق x^2-6x+5، GCF = $x - 1$

قراءة الرياضيات

GCF
الرمز (GCF) يمثّل اختصارًا لـ:
Greatest Common Factor
القاسم (العامل) المشترك الأكبر

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

بسّط العبارة: $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)}$

$\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)} = \frac{5x(x + 3)(x + 1)}{(x - 6)(x + 3)(x - 3)}$ — حلّل كلًّا من البسط والمقام إلى عوامل

$= \frac{5x(x + 1)}{(x - 6)(x - 3)} \cdot \frac{\cancel{(x + 3)}}{\cancel{(x + 3)}}$ (1 فوق $x+3$، $x+3$ فوق 1) — اختصر العوامل المشتركة

$= \frac{5x(x + 1)}{(x - 6)(x - 3)}$ — بسّط

تحقق من فهمك

(1A) $\frac{4y(y - 3)(y + 4)}{y(y^2 - y - 6)}$

(1B) $\frac{2z(z + 5)(z^2 + 2z - 8)}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تكون العبارة النسبية غير معرَّفة عند قيم المتغيِّر التي تجعل مقامها صفرًا.

قراءة الرياضيات

قيم x التي تجعل العبارة غير معرَّفة

لإيجاد قيم x التي تكون العبارة عندها غير معرَّفة، استعمل العبارة المعطاة قبل تبسيطها.

مثال 2 على اختبار

ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرَّفة؟

A $-2, -4$ **B** $-2, 7$ **C** $0, -2, -4$ **D** $0, -4, 7$

اقرأ فقرة الاختبار:

تريد إيجاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا.

حل فقرة الاختبار:

إحدى القيم التي تجعل المقام $4x(x^2+6x+8)$ يساوي صفرًا هي $x=0$؛ لذا يمكن حذف البديلين A و B.

والآن حلّل المقام إلى عوامل.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$، إذن المقام يساوي $4x(x+2)(x+4)$.

وبما أن المقام يساوي صفرًا عندما $x=0$، أو $x=-2$ أو $x=-4$ فإن الإجابة الصحيحة هي C.

إرشادات للإختبار

بدائل السؤال

يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم الاختيار من بين البدائل المتبقية.

تحقق من فهمك

2) ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرَّفة؟

A $5, 0$ **B** $5, -2$ **C** $0, -2$ **D** $5, -6$

في بعض الأحيان، يمكنك إخراج العدد 1- كعامل مشترك من البسط أو المقام للمساعدة في تبسيط العبارة النسبية.

مثال 3 تبسيط عبارة نسبية بإخراج 1– كعامل مشترك

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

a) $\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$

$\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}=\frac{w(4w-3y)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$ حلّل إلى عوامل

$=\frac{w(-1)(\cancel{3y-4w}^{1})(w+y)}{(\cancel{3y-4w})(5w+y)}$ $4w-3y=-1(3y-4w)$

$=\frac{(-w)(w+y)}{5w+y}$ بسّط

b) $\frac{x^3-y^3}{y-x}$

$\frac{x^3-y^3}{y-x}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y-x}$ حلّل إلى عوامل

$=\frac{(-1)(\cancel{y-x}^{1})(x^2+xy+y^2)}{(\cancel{y-x})}$ $x-y=-1(y-x)$

$=-x^2-xy-y^2$ بسّط

تحقق من فهمك

3A) $\frac{(xz-4z)}{z^2(4-x)}$

3B) $\frac{8a^3-b^3}{b-2a}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

تستعمل طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين، فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

والجدول الآتي يلخصُ قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

مثال: $\frac{2}{9}\frac{}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

قسمة العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى، اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال: $\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{7}{2}$

مثال 4 ضرب عبارات نسبية وقسمتها

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

a) $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$ — حلّل إلى عوامل

$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{d}} \cdot d}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{d}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$ — اختصر العوامل المشتركة

$= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$ — بسّط

$= \frac{9c^2d}{4a}$ — بسّط

b) $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$ — اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \left(\frac{18 \times 35}{7 \times 12}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^3}{y}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{b}{b^2}\right)$ — جمّع العوامل

$= \left(\frac{\overset{1}{\cancel{6}} \times 3 \times \overset{1}{\cancel{7}} \times 5}{\underset{1}{\cancel{6}} \times 2 \times \underset{1}{\cancel{7}}}\right) \cdot x^{1-2} \cdot y^{3-1} \cdot a^{2-2} \cdot b^{1-2}$ — استعمل قوانين الأسس واختصر العوامل المشتركة

$= \frac{15}{2} \cdot x^{-1} \cdot y^2 \cdot a^0 \cdot b^{-1}$ — بسّط

$= \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^1} \cdot y^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b^1}$ — تعريف الأسس السالبة

$= \frac{15y^2}{2xb}$ — بسّط

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة

تأكد من اختصار العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

(4A $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

(4B $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$

(4C $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$

(4D $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

في بعض الأحيان عليك أن تحلّل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب عبارات نسبية أو قسمتها.

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات الحدود

عند تبسيط عبارات نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ويتم اختصارها كما في المثال 5a.

مثال 5 عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كلٍّ من بسطها ومقامها

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(a $\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6}$

حلّل إلى عوامل

$$\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6} = \frac{(x-8)(x+2)}{(x-8)(x-8)} \cdot \frac{x-8}{(x+3)(x+2)}$$

اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x-8)}}\overset{1}{\cancel{(x+2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-8)}}\underset{1}{\cancel{(x-8)}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{x-8}}}{(x+3)\underset{1}{\cancel{(x+2)}}}$$

بسّط

$$= \frac{1}{x+3}$$

(b $\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18}$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18} = \frac{x^2-16}{12y+36} \cdot \frac{y^2-3y-18}{x^2-12x+32}$$

حلّل إلى عوامل

$$= \frac{(x+4)(x-4)}{12(y+3)} \cdot \frac{(y-6)(y+3)}{(x-4)(x-8)}$$

اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{(x+4)\overset{1}{\cancel{(x-4)}}}{12\underset{1}{\cancel{(y+3)}}} \cdot \frac{(y-6)\overset{1}{\cancel{(y+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-4)}}(x-8)}$$

بسّط

$$= \frac{(x+4)(y-6)}{12(x-8)}$$

تحقق من فهمك

(5A $\frac{8x-20}{x^2+2x-35} \cdot \frac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$

(5B $\frac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21} \div \frac{x^2-x-12}{6x+42}$

تبسيط الكسور المركّبة: الكسر المركّب يحوي بسطه ومقامه أو أحدهما كسورًا، والعبارات الآتية كسور مركّبة:

$\frac{\frac{c}{6}}{5d}$ $\quad \frac{\frac{8}{x}}{x-2}$ $\quad \frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}}$ $\quad \frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3}$

ولتبسيط كسر مركّب، اكتبه أولًا على صورة قسمة عبارتين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

مثال 6 تبسيط الكسور المركبة

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين: $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \dfrac{a+b}{4} \div \dfrac{a^2+b^2}{4}$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه: $= \dfrac{a+b}{4} \cdot \dfrac{4}{a^2+b^2}$

اختصر العوامل المشتركة وبسّط: $= \dfrac{a+b}{\cancel{4}\,1} \cdot \dfrac{\overset{1}{\cancel{4}}}{a^2+b^2} = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$

اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين: $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \div \dfrac{4x}{y-x}$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه: $= \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{y-x}{4x}$

حلّل إلى عوامل: $= \dfrac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \dfrac{(-1)(x-y)}{4x}$

اختصر العوامل المشتركة: $= \dfrac{x \cdot \overset{1}{\cancel{x}}}{(x+y)\cancel{(x-y)}\,1} \cdot \dfrac{(-1)(\overset{1}{\cancel{x-y}})}{4\cancel{x}\,1}$

بسّط: $= \dfrac{-x}{4(x+y)}$

تحقق من فهمك

6A) $\dfrac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$

6B) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1) $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-64}$

2) $\dfrac{c+d}{3c^2-3d^2}$

مثال 2

3) اختيار من متعدد: حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرَّفة.

A $-7, 4$ B $4, 7$ C $-7, 4, 7$ D $-4, 7$

الأمثلة 3-6 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

4) $\dfrac{y^2+3y-40}{25-y^2}$

5) $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay}$

6) $\dfrac{x^3+27}{3x+9}$

7) $\dfrac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \dfrac{8z}{9xy^3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

8) $\frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b}$

9) $\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \frac{x-4}{x^2-2x-35}$

10) $\frac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}}$

11) $\frac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}}$

12) $\frac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \frac{4a+4b}{a^2-1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

13) $\frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$

14) $\frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$

15) $\frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

16) $\frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$

مثال 2 **17) اختيار من متعدد:** حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرَّفة.

A $-6, 3$ **B** $4, 6$ **C** $-6, 6$ **D** $-6, 3, 4, 6$

الأمثِّلة 3-6 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

18) $\frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$

19) $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

20) $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$

21) $\frac{3-3y}{y^3-1}$

22) $\frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

23) $\frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

24) $\frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

25) $\frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

26) $\frac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \frac{y^2-9y+18}{y^2-9}$

27) $\frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d}$

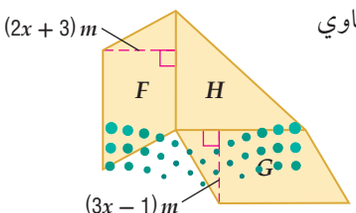
28) $\frac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}}$

29) $\frac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}}$

30) $\frac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}}$

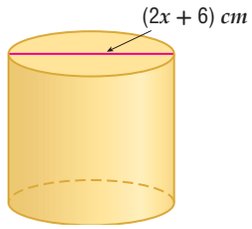
31) $\frac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}}$

32) هندسة: في الشكل المجاور، إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع F تساوي $(8x^2+10x-3)\text{m}^2$، وارتفاعه $(2x+3)\text{m}$، ومساحة متوازي الأضلاع G تساوي $(6x^2+13x-5)\text{m}^2$، وارتفاعه $(3x-1)\text{m}$، فأوجد مساحة المثلَّث القائم الزاوية H.

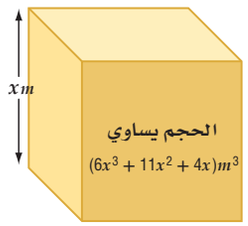


وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

33) هندسة: إذا كان حجم الأسطوانة في الشكل أدناه $(x^2 - 3x - 18)\pi \text{ cm}^3$، $(x + 3)$، فأوجد ارتفاعها.



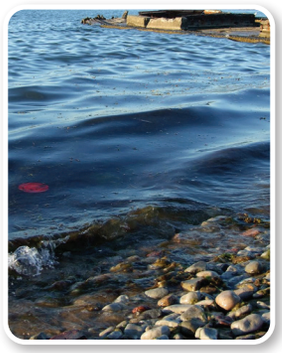
34) هندسة: يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3 + 11x^2 + 4x)\text{m}^3$ للتعبير عن حجم الصندوق في الشكل أدناه الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات، حيث x ارتفاع الصندوق.



a) أوجد بعدي الصندوق الآخرين.

b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x = 2$.

c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكلِّ قيم x ؟



الربط بالحياة

يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته، وأثره الضار على البيئة وصحة الإنسان.

35) تلوث: تمثِّل الدالّة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُمْك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط، حيث T سُمك البقعة التي تبعد x m عن مكان التسرب وتقاس بالمتر.

a) اكتب الدالّة في أبسط صورة.

b) ما سمك البقعة التي تبعد 100 m عن مكان التسرب؟

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

36) $\frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \cdot \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4}$

37) $\frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

38) $\frac{9 - x^2}{x^2 - 4x - 21} \cdot \left(\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 15x + 7}\right)^{-1}$

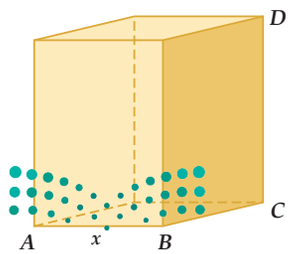
39) $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3}$

40) $\left(\frac{2xy^3}{3abc}\right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$

41) $\frac{\frac{2x^2 + 7x - 30}{-6x^2 + 13x + 5}}{\frac{4x^2 + 12x - 72}{3x^2 - 11x - 4}}$

42) $\frac{\frac{4x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 - 24x}}{\frac{12x^2 + 12x - 9}{-2x^2 + 5x + 12}}$

43) هندسة: مساحة قاعدة المنشور (متوازي المستطيلات) المجاور تساوي 20 cm^2 .



a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x.

b) إذا كان $DC = 3BC$، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c) أوجد حجم المنشور بدلالة x.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

44) $\dfrac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5} \cdot \dfrac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \div \dfrac{6x^2-18x-60}{x^3-4x}$

45) $\dfrac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36} \div \dfrac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \cdot \dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24}$

46) $\dfrac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18} \div \dfrac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \dfrac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12}$

47) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال العلاقة بين العبارة النسبية قبل تبسيطها وبعده.

a) جبريًّا: بسّط العبارة: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$.

b) جدوليًّا: إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$، فاستعمل العبارة التي حصلت عليها في الفرع (a) لكتابة الدالّة $g(x)$ المرتبطة بالدالّة $f(x)$، ثم استعمل الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلّتا الدالّتين، حيث $0 \le x \le 10$.

c) تحليليًّا: أوجد قيمة كلٍّ من $f(4)$، و $g(4)$، ثم وضِّح الفرق بين القيمتين.

d) لفظيًّا: ماذا تستنتج بالنسبة للعبارة الأصلية في الفرع (a) والدالّة $g(x)$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **تبرير:** قارن بين كلٍّ من $\dfrac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.

49) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من علي ومحمد بتبسيط العبارة $\dfrac{x+y}{x-y} \div \dfrac{4}{y-x}$. أيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

علي

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x}$$
$$= \frac{-4}{x+y}$$

محمد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4}$$
$$= -\frac{x+y}{4}$$

50) **تحدٍّ:** ما قيمة y التي تجعل الجملة $\dfrac{x-6}{x+3} \cdot \dfrac{y}{x-6} = x-2$ صحيحة دائمًا، عدا عند $x=6$ و $x=-3$؟

51) **تبرير:** هل الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسِّر إجابتك.
"العبارة النسبية التي تتضمن متغيرًا في المقام تكون معرَّفة لجميع الأعداد الحقيقية".

52) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة نسبية ناتج تبسيطها $\dfrac{x-1}{x+4}$.

53) **اكتب:** إذا علمت أن ناتج تبسيط العبارة النسبية $\dfrac{x^2+3x}{4x}$ هو $\dfrac{x+3}{4}$. فوضِّح لماذا لا تكون هذه العبارة معرَّفة لجميع قيم x؟

تدريب على اختبار

54) احتمال: إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4 ؟

A $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{2}{3}$

55) ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{5-c}{c^2-c-20}$ ؟

A $\frac{5-c}{c-4}$ **C** $\frac{5-c}{c+4}$

B $\frac{1}{c+4}$ **D** $-\frac{1}{c+4}$

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

56) $\sqrt{x-8}+5=7$ (مهارة سابقة)

57) $\sqrt[3]{n+8}-6=-3$ (مهارة سابقة)

58) بسط العبارة $\frac{h^{\frac{1}{2}}+1}{h^{\frac{1}{2}}-1}$ (مهارة سابقة)

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $(2a+3b)+(8a-5b)$

60) $(x^2-4x+3)-(4x^2+3x-5)$

61) $(5y+3y^2)+(-8y-6y^2)$

62) $2x(3y+9)$

63) $(x+6)(x+3)$

64) $(x+1)(x^2-2x+3)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

5-2

جمع العبارات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

فيما سبق:
درست جمع كثيرات حدود وطرحها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات حدود.
- أجمع عبارات نسبية وأطرحها.

قراءة الرياضيات
LCM
الرمز (LCM) يمثّل اختصارًا لـ:
Least Common Multiple
(المضاعف المشترك الأصغر)



لماذا؟

عندما نكون في الشارع وتقترب سيارة إطفاء، نسمع صفيرها وهي تقترب منا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حدٍّ ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا متباعدة عنا، نسمع صوت صفيرها بتردد منخفض؛ لأن طول موجتها يزداد استطالة. ويعرف ذلك بتأثير دوبلر (Doppler) . ويمكن تمثيل هذه الظاهرة بالعبارة النسبية $f_s\left(\frac{v}{v-v_s}\right)$ ، حيث f_s تردد صوت صفير سيارة الإطفاء، و v سرعة الصوت في الهواء، و v_s سرعة سيارة الإطفاء.

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود: تمامًا كما في الأعداد النسبية التي على الصورة الكسرية، فعند جمع عبارتين نسبيتين بمقامين مختلفين أو طرحهما، يجب أن تجد أولًا المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للمقامين.

ولإيجاد (LCM) لعددين أو لكثيرتي حدود أو أكثر، يجب أن تُحلل كلًّا منها إلى عواملها الأولية أولًا، ثم تضرب جميع العوامل التي لها الأس الأكبر.

الأعداد	كثيرات الحدود
$\frac{5}{6}+\frac{4}{9}$	$\frac{3}{x^2-3x+2}+\frac{5}{2x^2-2}$
LCM للعددين 6, 9	LCM لكثيرتي الحدود $x^2-3x+2,\ 2x^2-2$
$6=2\cdot3$	$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
$9=3\cdot3$	$2x^2-2=2\cdot(x-1)(x+1)$
$\text{LCM}=2\cdot3\cdot3=18$	$\text{LCM}=2(x-1)(x-2)(x+1)$

مثال 1 LCM لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

a) $6xy,\ 15x^2,\ 9xy^4$

$6xy=2\cdot3\cdot x\cdot y$	حلّل
$15x^2=3\cdot5\cdot x^2$	حلّل
$9xy^4=3\cdot3\cdot x\cdot y^4$	حلّل
$\text{LCM}=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot x^2\cdot y^4=90x^2y^4$	اضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر وبسّط

b) $y^4+8y^3+15y^2,\ y^2-3y-40$

$y^4+8y^3+15y^2=y^2(y+5)(y+3)$	حلّل
$y^2-3y-40=(y+5)(y-8)$	حلّل
$\text{LCM}=y^2(y+5)(y+3)(y-8)$	اضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

تحقق من فهمك

1A) $12a^2b,\ 15abc,\ 8b^3c^4$

1B) $4a^2-12a-16,\ a^3-9a^2+20a$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

جمع العبارات النسبية وطرحها: عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن نوحِّد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جمع العبارات النسبية وطرحها

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية أو طرحها، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع أو اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك للمقامات هو (LCM).

مثال:
$$\frac{2}{5}\pm\frac{1}{3}=\frac{2\cdot3}{5\cdot3}\pm\frac{5\cdot1}{5\cdot3}=\frac{2\cdot3\pm5\cdot1}{5\cdot3}$$

مثال 2 جمع عبارات نسبية مقاماتها وحيدات حد وطرحها

بسّط العبارة: $\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}$

$$\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}=\frac{3y}{2x^3}\cdot\frac{4y^2}{4y^2}+\frac{5z}{8xy^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}$$ وحّد المقامات باستعمال LCM وهو $8x^3y^2$

$$=\frac{12y^3}{8x^3y^2}+\frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$ اضرب الكسور

$$=\frac{12y^3+5x^2z}{8x^3y^2}$$ اجمع البسطين

تحقق من فهمك

(2A) $\frac{4}{5a^3b^2}+\frac{9c}{10ab}$

(2B) $\frac{3a^2}{16b^2}-\frac{8x}{5a^3b}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات النسبية

يمكن تبسيط العبارة النسبية الناتجة عن جمع أو طرح عبارتين نسبيتين في بعض الأحيان.

يستعمل LCM أيضًا لجمع أو طرح عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3 جمع عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود وطرحها

بسِّط العبارة: $\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

$$\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}=\frac{5}{6(x-3)}-\frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$$ حلّل المقامين

$$=\frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)}-\frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$$ وحّد المقامين

$$=\frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)}$$ اطرح البسطين

$$=\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$$ بسّط

تحقق من فهمك

(3A) $\frac{x-1}{x^2-x-6}-\frac{4}{5x+10}$

(3B) $\frac{x-8}{4x^2+21x+5}+\frac{6}{12x+3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

من طرائق تبسيط الكسور المركَّبة تبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط العبارة الناتجة.

مثال 4 تبسيط الكسور المركَّبة بتبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{y}{y}-\frac{x}{y}}$$

LCM لمقامات البسط هو x
LCM لمقامات المقام هو y

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$$

بسّط كلًّا من البسط والمقام

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y}$$

اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y}{y-x}$$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

بسّط

تحقق من فهمك

(4A) $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

(4B) $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$

إرشادات للدراسة

حدود غير معرَّفة

تذكّر أن هناك قيودًا على المتغيرات في المقام.

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركّبة هي إيجاد LCM لمقامات البسط والمقام، ثم اختصارها بضرب كلٍّ من بسط العبارة ومقامها في LCM .

مثال 5 تبسيط الكسور المركَّبة بإيجاد (LCM) للمقامات

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{xy}{xy}$$

LCM لمقامات البسط والمقام هو xy ، بضرب العبارة في $\frac{xy}{xy}$

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

خاصية التوزيع

لاحظ أنه تم حل المسألة نفسها في المثالين 5 , 4 بطريقتين مختلفتين، وكانت النتيجة واحدة؛ لذا يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك لحل المسائل المشابهة.

تحقق من فهمك

(5A) $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$

(5B) $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$

(5C) $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$

(5D) $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

تأكـد

مثال 1 أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

1) $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$

2) $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$

3) $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$

4) $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$

المثالان 3 , 2 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

5) $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$

6) $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$

7) $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$

8) $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$

9) $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x + 6}$

10) $\frac{8}{y - 3} + \frac{2y - 5}{y^2 - 12y + 27}$

11) $\frac{4}{3x + 6} - \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

12) $\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24}$

المثالان 5 , 4 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

13) $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$

14) $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$

15) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$

16) $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

17) $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$

18) $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$

19) $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$

20) $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$

المثالان 3 , 2 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

21) $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$

22) $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$

23) $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$

24) $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$

25) $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$

26) $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$

27) $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$

28) $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$

29) $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$

30) $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$

31) $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$

32) $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$

المثالان 5 , 4 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

33) $\frac{\frac{2}{x - 3} + \frac{3x}{x^2 - 9}}{\frac{3}{x + 3} - \frac{4x}{x^2 - 9}}$

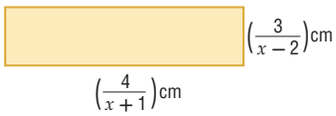
34) $\frac{\frac{4}{x + 5} + \frac{9}{x - 6}}{\frac{5}{x - 6} - \frac{8}{x + 5}}$

35) $\frac{\frac{5}{x + 6} - \frac{2x}{2x - 1}}{\frac{x}{2x - 1} + \frac{4}{x + 6}}$

36) $\frac{\frac{8}{x - 9} - \frac{x}{3x + 2}}{\frac{3}{3x + 2} + \frac{4x}{x - 9}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

37) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.

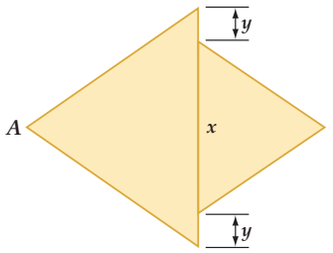


38) أحياء: يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2+36} + 6.5$، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

a) بسّط الصيغة السابقة.

b) أوجد درجة الحموضة في فم شخص بعد مُضِيِّ 30 min على تناوله الطعام.

39) هندسة: إذا كان كلٌّ من المثلَّثين في الشكل المجاور متطابق الضلعين، وكانت مساحة المثلَّث الأصغر $200\ \text{cm}^2$، ومساحة المثلَّث الأكبر $300\ \text{cm}^2$، فأوجد البُعد بين النقطة A والنقطة B بدلالة x , y في أبسط صورة.



40) إنتاج النفط: قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالّة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2+20}$، حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنويًّا بعد x سنة من بدء الإنتاج.

a) بسّط الدالّة $R(x)$.

b) ما معدّل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟



الربط بالحياة

يقع حقل الغوار في المملكة العربية السعودية، وتبلغ مساحته $3000\ \text{km}^2$، وتم اكتشافه عام 1948م. وتقدّر إنتاجيته بنحو 65% من إنتاج المملكة؛ أي حوالي 5 مليون برميل يوميًا، ويقدّر احتياطيّه من 70 إلى 170 مليار برميل.

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي:

41) $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$

42) $x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

43) $\frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2}$

44) $\frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y}$

45) $\frac{5}{6x^2+46x-16} + \frac{2}{6x^2+57x+72}$

46) $\frac{1}{8x^2-20x-12} + \frac{4}{6x^2+27x+12}$

47) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$

48) $\frac{x^2+x}{x^2-9x+8} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-8}$

49) $\frac{\frac{2}{a-1}+\frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}}$

50) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x+y)}$

51) هندسة: يُعطى طول مستطيل بالعبارة $\frac{x^2-9}{x-2}$، ويعطى طول مستطيل آخر بالعبارة $\frac{x+3}{x^2-4}$. أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة.

52) زوارق: قطع علي مسافة 20 mi راكبًا زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار 2 mi/h .

a) إذا كانت x تعبِّر عن السرعة الأولى بالأميال لكلِّ ساعة، فاكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445



الربط بالحياة

الكاميرا الرقمية آلة تلتقط الصور الفوتوغرافية وتخزنها إلكترونيًا بدلاً من الأفلام. وبإمكان بعضها تسجيل الصوت أو الفيديو مع الصور. وتمتاز بالسرعة، وسهولة الاستخدام.

53) تصوير: يحدِّد البُعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البُعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البُعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بُعد x mm من العدسة، فإنه يجب أن يكون الفيلم على بُعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$.

a) اكتب y كدالّة في المتغير x.

b) هل يمكن تصوير جسم على بُعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

54) أدوية: يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه بوحدة الجرام/ لتر (g/L) يُعطى بالدالّتين: $g(t)=\frac{3t}{2t^2+6t+4}$ ، $f(t)=\frac{2t}{3t^2+9t+6}$ حيث t الزمن بالساعات بعد تناول الدواء.

a) اجمع الدالّتين لتحصل على دالّة تمثِّل تركيز النوعين معًا في دم المريض.

b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟

مسائل مهارات التفكير العليا

55) تحدٍّ: بسّط العبارة $\frac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$.

56) تبرير: حدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، ووضِّح إجابتك:

$\frac{6}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$ لأيِّ عدد حقيقي x.

57) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث وحيدات حدٍّ، على أن يكون LCM لهنّ يساوي $180a^4b^6c$.

58) اكتب: اكتب طريقة منظمة لجمع عبارات نسبية مختلفة المقامات.

تدريب على اختبار

59) إذا كان $\frac{2a}{a}+\frac{1}{a}=4$، فما قيمة a؟

A) $-\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 2

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-5)

60) $\frac{-4ab}{21c}\cdot\frac{14c^2}{22a^2}$ **61)** $\frac{x^2-y^2}{6y}\div\frac{x+y}{36y^2}$ **62)** $\frac{n^2-n-12}{n+2}\div\frac{n-4}{n^2-4n-12}$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها (مهارة سابقة)

63) $y=-\sqrt{2x+1}$ **64)** $y=\sqrt{5x-3}$ **65)** $y=2\sqrt{3-4x}+3$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا: (مهارة سابقة)

66) $y=4(x+3)^2+1$ **67)** $y=-(x-5)^2-3$ **68)** $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

69) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-5$ **70)** $y=x^2+6x+2$ **71)** $y=x^2-8x+18$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-3

تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا
Graphing Reciprocal Functions

فيما سبق:
درست تمثيل دوالّ كثيرات الحدود بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحدّد خصائص دوالّ المقلوب.
- أمثّل تحويلات دوالّ المقلوب بيانيًا.

المفردات:
- خط التقارب asymptote
- خط التقارب الرأسي vertical asymptote
- خط التقارب الأفقي horizontal asymptote
- دالّة المقلوب reciprocal function
- القطع الزائد hyperbola

لماذا؟



خطّطَت مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ 5000 ريال للقيام بعمل خيري، فقرروا أن يتبرع كل منهم بريال واحد يوميًّا، فإذا كان عدد الطلاب n طالبًا، فإن عدد الأيام c اللازمة لجمع المبلغ يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **خط التقارب** لدالّة: هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالّة. ولدالّة المقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ **خط تقارب رأسي** عند القيمة المستثناة من مجالها، و**خط تقارب أفقي** يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالّة.

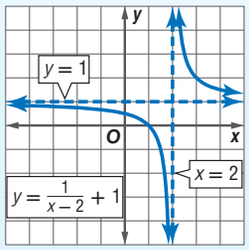
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خطوط التقارب للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$

التعبير اللفظي: للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$، $a \neq 0$ خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفرًا، أي أن خط التقارب الرأسي للدالّة هو $x = b$، ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

مثال:



وأما مجال الدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$ فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = b$، وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $y = c$، ولأنه لا يمكن رسم هذه الدالّة دون رفع القلم عن الورقة؛ لذا اختر قيمًا لـ x على جانبي خط التقارب الرأسي لترسم جزأي منحنى الدالّة.

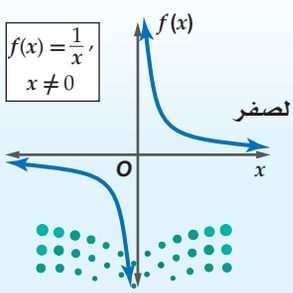
تمثّل الدالّة $c = \frac{5000}{n}$ دالّة مقلوب، و**دالّة المقلوب** التي سندرسها هي الدالّة المكتوبة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الدالّة الرئيسة (الأم) لدوالّ المقلوب

الدالّة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \frac{1}{x}$
شكل التمثيل البياني:	قطع زائد
المجال والمدى:	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
خطا التقارب:	$x = 0$ و $y = 0$
المقطعان:	لا يوجد
تكون الدالّة غير معرَّفة عندما:	$x = 0$



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021-1443

مجال دالّة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالّة عندها معرَّفة.

فمثلًا الدوالّ: $f(x)=\frac{-3}{x+2}$ ، $g(x)=\frac{4}{x-5}$ ، $h(x)=\frac{3}{x}$

غير معرَّفة عندما: $x=-2$ ، $x=5$ ، $x=0$

مثال 1 القيود على المجال (تحديد القيم التي تجعل الدالّة غير معرَّفة)

حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x)=\frac{3}{2x+5}$ غير معرَّفة.

أوجد قيمة x التي يساوي المقام عندها صفرًا.

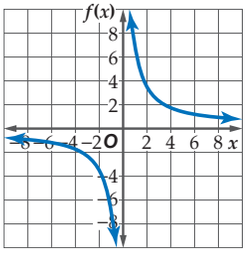
$$2x+5=0$$
$$x=-\frac{5}{2}$$

الدالّة غير معرَّفة عندما $x=-\frac{5}{2}$.

تحقق من فهمك

1A) $f(x)=\frac{2}{x-1}$ **1B)** $f(x)=\frac{7}{3x+2}$

قد لا تكون بعض قيم x في دالّة المقلوب منطقية، وذلك في مسائل من واقع الحياة. فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثِّل زمنًا، أو مسافة أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذلك لا حاجة للجزء الأيسر من التمثيل البياني والذي تكون فيه قيم x سالبة.



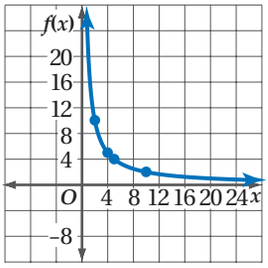
مثال 2 من واقع الحياة تمثيل دالّة المقلوب بيانيًّا

سفر: **مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{20}{x}$ بيانيًّا، حيث تمثِّل x عدد الأشخاص في منطاد هوائي، وتمثِّل $f(x)$ متوسط المساحة المخصصة لكلِّ شخص بالأقدام المربعة.**

بما أن عدد الأشخاص لا يكون صفرًا أو سالبًا، لذا استعمل الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للمتغير x .

عدد الأشخاص x	2	4	5	10
المساحة المخصصة للشخص $f(x)$	10	5	4	2

عيِّن النقاط (2, 10)، (4, 5)، (5, 4)، (10, 2) في المستوى الإحداثي وصل بينها بخط منحنٍ. وبما أن الدالّة غير معرَّفة عند $(x=0)$، فإن لها خط تقارب رأسي هو $x=0$؛ أي أن منحناها يقترب من المستقيم $x=0$ (المحور y) ولا يمسّه، وبالمثِّل للدالّة خط تقارب أفقي $y=0$ (المحور x)؛ أي أن منحناها يقترب من المستقيم $y=0$ ولا يمسه، لذا مُدّ المنحنى الذي رسمته في اتجاه كلٍّ من المحورين x, y الموجبين، ولكن دون أن يمس أيًّا منهما، كما هو مبيّن في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

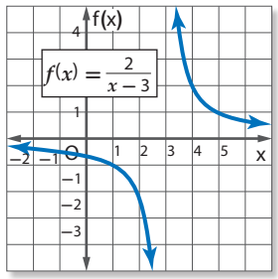
2) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $18\ \text{cm}^2$ ، والدالّة $l=\frac{18}{w}$ تبيّن العلاقة بين طولها وعرضها. مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 3 تحديد خصائص دوالّ المقلوب

حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

(a)



حدِّد قيمة x التي تكون الدالّة $f(x)$ عندها غير معرَّفة.

$$x - 3 = 0$$

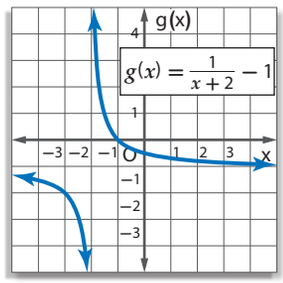
$$x = 3$$

$f(x)$ غير معرَّفة عند $x = 3$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = 3$ ، وبما أن $c = 0$ فإنه، يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 0$

(لاحظ أنه كلما زادت قيم x الأكبر من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر، وكلما قلَّت قيم x الأقل من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$) .

مجال الدالّة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

(b)



حدِّد قيمة x التي تكون الدالّة $g(x)$ عندها غير معرَّفة.

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$g(x)$ غير معرَّفة عند $x = -2$، وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = -2$ ، وبما أن $c = -1$ ، فإنه يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$

(لاحظ أنه كلما زادت قيم x الأكبر من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1، وكلما قلت قيم x الأقل من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1أيضًا، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = -1$).

مجال الدالّة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -1 .

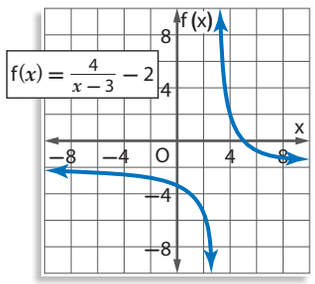
إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

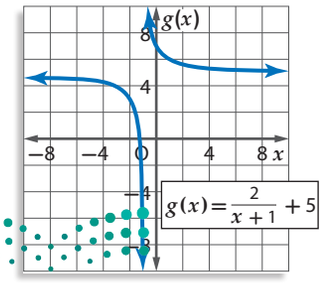
يبين خط التقارب الرأسي قيمة x التي تكون الدالّة عندها غير معرَّفة. أما خط التقارب الأفقي فيبيِّن سلوك طرفَي التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

(3A)



(3B)



يمكنك استعمال دوالّ المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.



الربط بالحياة

تأسست الخطوط الجوية العربية السعودية في عام 1946 م، وكانت أولى رحلاتها الدولية إلى مطار (اللد) الفلسطيني لنقل الحجاج. وفي عام 2013 م حققت الشركة أعلى معدل نقل للركاب (25.241.421 راكبًا) على (177.435) رحلة داخلية ودولية، وأحرزت المركز الثاني عالميًا (90.46%) في انضباط مواعيد الرحلات.

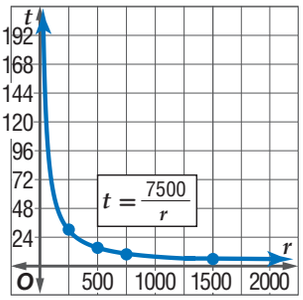
مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلات دوالّ المقلوب

طيران: تقطع طائرة ركاب مسافة 7500 ميل في إحدى الرحلات.

a) اكتب دالّة تبين الزمن t الذي تحتاج إليه الطائرة لتقطع هذه المسافة بدلالة السرعة r. ومثِّل هذه الدالّة بيانيًا.

حل المعادلة $rt = d$ بالنسبة للمتغير t.

$rt = d$	المعادلة الأصلية
$t = \frac{d}{r}$	اقسم كل من الطرفين على r
$t = \frac{7500}{r}$	$d = 7500$



مثِّل الدالّة $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًا، عين النقاط:
(250,30)، (500,15)، (750,10)، (1500,5)

b) وضِّح أيَّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة في هذه الحالة غير منطقية. وهناك شرط أو قيد إضافي على المجال؛ لأن للطائرة سرعة عظمى، وأخرى صُغرى تستطيع الطيران بها.

تحقق من فهمك

4) رحلات: نظَّم طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة أهلية رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 45 ريالًا ثمنًا للوجبات الغذائية، وتكفلت إدارة المدرسة بنفقات إضافية للرحلة وهي 2500 ريال. اكتب دالّة تمثِّل متوسط التكلفة الكلِّية للطالب الواحد ومثِّلها بيانيًا. ووضِّح أية قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى.

تأكد

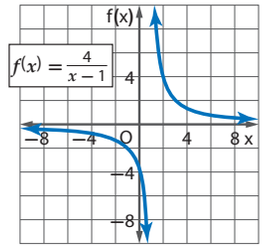
مثال 1 **1)** حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x) = \frac{5}{4x - 8}$ غير معرَّفة.

مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

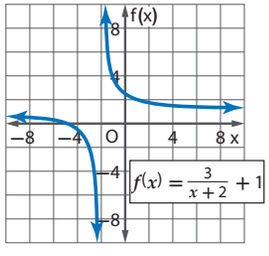
2) $f(x) = \frac{5}{x}$ **3)** $f(x) = \frac{2}{x + 3}$

مثال 3 حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

4)



5)



مثال 4 **6) هدية جماعية:** يرغب بعض الطلاب في إرسال هدية ثمنها 150 ريالًا إلى أحد أصدقائهم.

a) فإذا كانت c تمثِّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم، وf عدد الأصدقاء، فاكتب دالّة تمثِّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم بدلالة عدد الأصدقاء.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًا.

c) وضِّح أيَّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد قيمة x التي تجعل كلَّ دالّة فيما يأتي غير معرَّفة.

7) $f(x)=\frac{5}{2x}$ **8)** $f(x)=\frac{x}{x-7}$ **9)** $f(x)=\frac{4}{3x+9}$

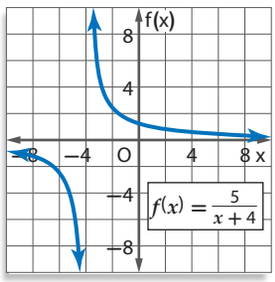
مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

10) $f(x)=\frac{3}{x}$ **11)** $f(x)=\frac{-4}{x+2}$ **12)** $f(x)=\frac{2}{x-6}$

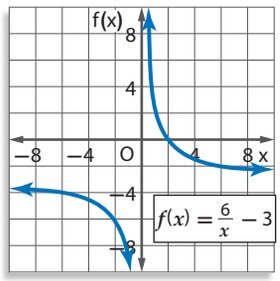
13) $f(x)=\frac{-2}{x-5}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{x-7}-8$ **15)** $f(x)=\frac{9}{x+3}+6$

مثال 3 حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

16)



17)



مثال 4 **18) كيمياء:** لدى محمد 200 جرام (g) من سائل مجهول. وتساعد معرَّفة كثافة السائل على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة السائل بقسمة كتلته على حجمه.

a) اكتب دالّة تمثِّل كثافة هذا السائل (d) بدلالة حجمه (v).

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

c) استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب والمجال والمدى لهذه الدالّة.

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

19) $f(x)=\frac{5}{3x}$ **20)** $f(x)=\frac{2}{4x+1}$ **21)** $f(x)=\frac{1}{2x+3}$

22) تمثيلات متعددة: افترض أن $g(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) جدوليًّا: أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالّتين.

b) **بيانيًّا:** استعمل القيم في الجدول لتمثيل كِلتا الدالّتين بيانيًّا.

c) **لفظيًّا:** قارن بين التمثيلين البيانيين، ثم حدِّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

d) تحليليًّا: اكتب تخمينًا حول الفرق بين التمثيل البياني للدوالّ التي على الصورة $f(x)=\frac{1}{x^n}$، عندما تكون n عددًا زوجيًّا، وعندما تكون n عددًا فرديًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

23) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالّة مقلوب يكون لتمثيلها البياني خط تقارب رأسي عند $x = -4$، وخط تقارب أفقي عند $y = 6$.

24) **تبرير:** قارن بين التمثيلين البيانيين لكلٍّ زوج من المعادلات الآتية موضِّحا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

a) $y = \frac{1}{x}, y - 7 = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x}, y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$ **c)** $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x+5}$

d) استعمل ملاحظاتك في الفروع a – c؛ لتمثيل الدالّة $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانيًّا دون استعمال جدول قِيم.

25) **أيُّها لا ينتمي؟** حدِّد الدالّة المختلفة عن الدوالّ الثلاث الأخرى، ووضِّح إجابتك.

$f(x) = \frac{3}{x+1}$ $g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ $h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$ $j(x) = \frac{20}{x-7}$

26) **تحدٍّ:** اكتب دالَّتَي مقلوب، يكون للتمثيل البياني لكلٍّ منهما خطا التقارب نفساهما، ثم مثِّل هاتين الدالّتين بيانيًّا.

27) **اكتب:** ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، ووضِّح كيف يمكن استعمال دوالّ المقلوب عند جمع التبرعات. وبيِّن لماذا يكون جزء من التمثيل البياني للدالّة فقط منطقيًّا بالنسبة لسياق الموقف.

تدريب على اختبار

28) ما مجال الدالّة $f(x) = \frac{8}{x+3}$؟

A مجموعة الأعداد الحقيقية.

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3.

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3−.

29) ما قيمة العبارة $(x+y)\ (x+y)$، إذا كانت $xy = -3, x^2 + y^2 = 10$؟

A 4

B 7

C 13

D 16

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-5)

30) $\frac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}}$ **31)** $\frac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$ **32)** $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ **للدالّتين** $f(x), g(x)$ **في كلٍّ ممَّا يأتي:** (مهارة سابقة)

33) $f(x) = x+9$, $g(x) = x-9$

34) $f(x) = 2x-3$, $g(x) = 4x+9$

35) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8-x$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (مهارة سابقة)

36) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

37) $f(x) = |x - 5|$

38) $f(x) = x^2 - 4$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$

2) $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$

3) $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$

4) $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$

5) $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$

6) $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$

7) اختيار من متعدد: إذا كانت $r \neq \pm 2$، فأيٌّ ممَّا يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$؟

A $\frac{r-2}{r+4}$ C $\frac{r+2}{r-4}$

B $\frac{r+4}{r-2}$ D $\frac{r+4}{r+2}$

8) اختيار من متعدد: ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرّفة؟

A $-3, -1$ C $-3, -1, 9$

B $-9, 1, 3$ D -1

9) أوجد LCM لكثيرتَي الحدود $3-3x$, x^2-x .

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$

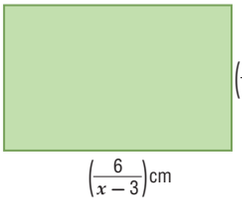
11) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n}$

12) $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$

13) $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$

14) $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$

15) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.



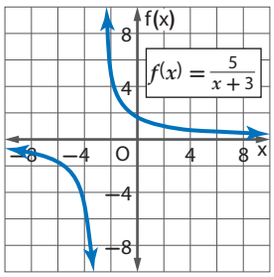
16) سفر: سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 km عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 km/h .

a) إذا كانت x تمثِّل السرعة الأولى، فاكتب عبارةً تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة.

17) حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى للدالّة الآتية:



مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

18) $f(x) = \frac{6}{x-1}$

19) $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$

20) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$

21) $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

22) شطائر: أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها بالتساوي في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كلُّ شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة.

a) إذا كانت x تمثِّل عدد الأصدقاء المشاركين في الرحلة، فاكتب دالّة تمثِّل هذا الموقف.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

فيما سبق:
درست تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا. الدرس (3-5)

والآن:
- أمثّل بيانيًّا دوالّ نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية.
- أمثّل بيانيًّا دوالّ نسبية لها نقاط انفصال.

المفردات:
الدالّة النسبية
rational function
نقطة الانفصال
point discontinuity

لماذا؟



اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره 1350 ريالًا، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة 1.5 ريال.

يمكنه استعمال الدالّة النسبية $C(p) = \frac{1.5p + 1350}{p}$ لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **الدالّة النسبية** هي دالّة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

لتمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصفار الدالّة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

مفهوم أساسي — **خطوط التقارب الرأسية والأفقية**

أضف إلى مطويتك

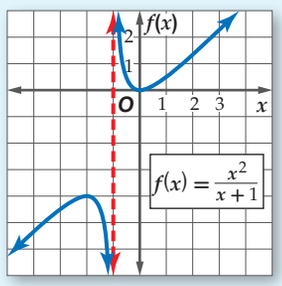
التعبير اللفظي: إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$, $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}.$$

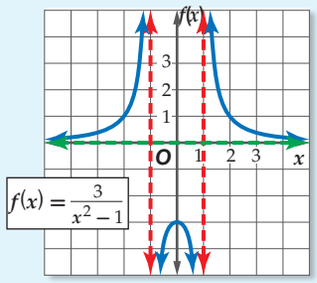
أمثلة:

لا يوجد خط تقارب أفقي



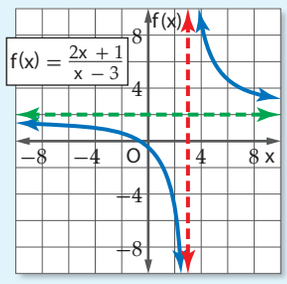
خط التقارب الرأسي:
$x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد



خطا التقارب الرأسي:
$x = -1, x = 1$

خط التقارب الأفقي:
$y = 0$



خط التقارب الرأسي:
$x = 3$

خط التقارب الأفقي:
$y = 2$

إرشادات للدراسة

مجال الدالّة النسبية
مجال الدالّة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء تلك الأعداد التي تجعل المقام صفرًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكنك استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا، كما يمكنك استعمالها لتوضيح عدد الأجزاء التي ينقسم إليها التمثيل البياني للدالّة، فإذا كان هناك خط تقارب رأسي واحد، فإن التمثيل ينقسم إلى فرعين، أما إذا كان هناك خطًّا تقارب فإنه ينقسم إلى ثلاثة أفرع.

مثال 1 التمثيل البياني لدالّة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

مثِّل الدالّة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أوجد مجال الدالّة.

$x - 1 = 0$ $\quad b(x) = 0$

$x = 1$ أضف 1 لكلا الطرفين

إذن مجال الدالّة هو جميع الأعداد باستثناء $x = 1$.

الخطوة 2: أوجد خطوط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

بما أن المقام يصبح صفرًا عند $x = 1$.

إذن يوجد خط تقارب رأسي للدالّة عند $x = 1$.

وبما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالّة.

الخطوة 3: أوجد أصفار الدالّة.

$x^2 = 0$ $\quad a(x) = 0$

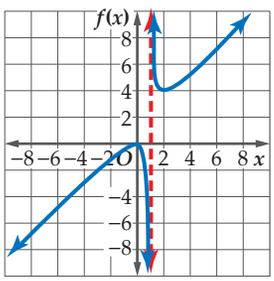
$x = 0$ خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

يوجد للدالّة صفر عندما $x = 0$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالّة يقطع المحور x عند النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 4: مثِّل بيانيًّا.

أنشئ جدول قيم للدالّة لتجد أزواجًا مرتبة تقع على التمثيل البياني، وصل بين تلك النقاط على المستوى الإحداثي.

x	$f(x)$
-3	-2.25
-2	-1.33
-1	-0.5
0	0
0.5	-0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5



إرشادات للدراسة

الحاسبة البيانية

يمكنك استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لإنشاء جدول قيم للدالّة عندما تكون القيم في الصورة العشرية.

تحقق من فهمك

1) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال التمثيل البياني للدوالّ النسبية



الربط بالحياة

تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

متوسط السرعة: يسير قارب خفر سواحل عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_1 mi/h. وخلال عودته إلى نقطة الانطلاق سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_2 mi/h. ويُعطى مقدار متوسط سرعة القارب خلال رحلة الذهاب والعودة بالصيغة $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

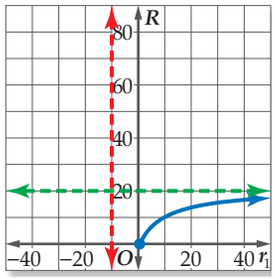
a) إذا كان r_1 هو المتغيِّر المستقل، و R هو المتغيِّر التابع، فمثِّل الصيغة بيانيًّا عندما $r_2 = 10$ mi/h.

بتعويض قيمة r_2 تصبح الدالّة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + (10)} = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$.

ويكون خط التقارب الرأسي هو $r_1 = -10$.

وَخط التقارب الأفقي هو $R = 20$.

مثِّل خطَّي التقارب والدالّة بيانيًّا.



b) ما مقطع المحور R للتمثيل البياني؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

c) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، مقدار السرعة غير سالب؛ لذا فإن قيم r_1 الأكبر من أو التي تساوي الصفر هي التي تكون واقعية منطقية، وقيم R المنطقية هي بين 0 و 20.

تحقق من فهمك

2) رواتب: تستعمل إحدى الشركات الدالّة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف خلال السنة x من عمله لديها، مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا. وحدِّد القيم المنطقية لمجال الدالّة ومداها في سياق المسألة، وعلى ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟

نقطة الانفصال: يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالّة النسبية، وتظهر هذه النقط على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة تكون غير معرّفة عند تلك النقاط ومُعرفةً حولها.

مفهوم أساسي — نقطة الانفصال

أضف إلى مطويتك

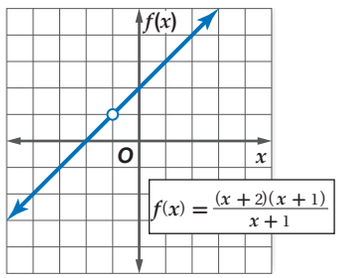
التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $b(x) \neq 0$، وكان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

مثال:

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1}$$
$$= x + 2, \quad x \neq -1$$

نقطة الانفصال هي:

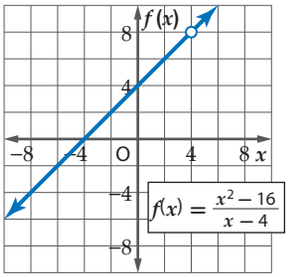
$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 3 التمثيل البياني لدالّة تتضمن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ بيانيًّا .



لاحظ أن مجال الدالّة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=x+4$$

لذا فإن التمثيل البياني للدالّة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ هو نفسه التمثيل البياني للدالّة $f(x)=x+4$، مع وجود فجوة في $x=4$.

التمثيل البياني للدالّة $f(x)=x+4$ عندما $x=4$.

تنبيه !

فجوات التمثيل البياني

تذكر أن وجود عامل مشترك بين البسّط والمقام يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالّة.

تحقق من فهمك

3A $f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x+5}$

3B $f(x)=\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-9}$

تأكد

مثال 1 مثِّل الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

1) $f(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$

2) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

مثال 2

3) كرة سلة : في بداية تدريب لفريق كرة سلة، أحرز سعيد 7 أهداف من 11 رمية حرة لعبها، ويرغب في تحسين النسبة المئوية للأهداف التي يحرزها والممثِّلة بالدالّة $P(x)=\frac{7+x}{11+x}$، حيث x عدد الرميات الحرة الأخرى التي سيلعبها.

a) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) أيُّ جزء من التمثيل البياني للدالّة منطقي في سياق المسألة؟

c) ماذا يمثِّل مقطع المحور الرأسي للتمثيل البياني؟

d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وما النسبة المئوية التي يمثِّلها؟ وهل يمكن الوصول إلى هذه النسبة؟

مثال 3 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

4) $f(x)=\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

5) $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

6) $f(x)=\frac{x^2}{6x+12}$

7) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-1}$

مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

8) $f(x)=\frac{x}{x+2}$

9) $f(x)=\frac{5}{(x-1)(x+4)}$

10) $f(x)=\frac{1}{(x+4)^2}$

11) $f(x)=\frac{2x}{(x+2)(x-5)}$

12) $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$

13) $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021-1442

14) كهرباء: دائرة كهربائية تحتوي على 3 مقاومات موصولة على التوالي، وتُعطى شدة التيار الكهربائي بالأمبير فيها بالمعادلة $C = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_1 , R_2 , R_3 المقاومات بالأوم.

a) إذا كان R_1 هو المتغيِّر المستقل، و C هو المتغيِّر التابع، فمثِّل المعادلة بيانيًّا عندما تكون $V = 120\text{ v}, R_2 = 25\ \Omega, R_3 = 75\ \Omega$.

b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع المحور R_1، ومقطع المحور C للتمثيل البياني.

c) أوجد قيمة C عندما تكون $R_1 = 140\ \Omega$.

d) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

مثال 3 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$ **16)** $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

17) $f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$ **18)** $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة ممَّا يأتي:

19) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$ **20)** $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$ **21)** $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$

22) اتصالات: اشترى أحمد هاتفًا محمولًا مزودًا بخدمة إنترنت، وكان ثمن الهاتف 1500 ريال، ومتوسط تكلفة مكالماته الشهرية 200 ريال بالإضافة إلى 100 ريال شهريًّا لخدمة الإنترنت. إذا علمت أن التكلفة الشهرية لأحمد تشمل: ثمن الهاتف، ومتوسط تكلفة المكالمات، وثمن خدمة الإنترنت.

a) اكتب دالّة نسبية تمثِّل متوسط التكلفة الشهرية لأحمد، بعد مرور x شهرًا من شراء الهاتف، ومثِّلها بيانيًّا.

b) اكتب معادلات خطوط تقارب التمثيل البياني للدالّة؟

c) لماذا يكون الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المهم في هذا الموقف؟

d) بعد كم شهر من شراء الهاتف يكون متوسط التكلفة الشهرية لأحمد 450 ريالًا؟

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

23) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$ **24)** $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$



الربط بالحياة

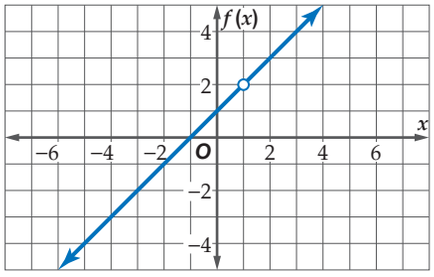
أشار مسح عالمي إلى أن مستخدمي الهواتف النقالة في المملكة العربية السعودية أكثر من أي دولة في العالم؛ بمعدل 180 هاتفًا نقالًا لكل 100 فرد.

المصدر: وزارة الاتصالات وتقنية المعلومات
http://www.mcit.gov.sa/Ar/Communication

مسائل مهارات التفكير العليا

25) مسألة مفتوحة: مثِّل بيانيًّا بشكل تقريبيٍّ دالّة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$.

26) تحدٍّ: اكتب دالّة نسبية لها التمثيل البياني المجاور.



27) تبرير: ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالّتين: $f(x) = x - 2, g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

28) برهان: إذا علمت أن الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة: $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x)\neq 0$، فأثبت أن $f(x)=\frac{x}{a-b}+c$ دالّة نسبية.

29) اكتب: وضِّح كيف يمكن استعمال تحليل البسِّط والمقام إلى عوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية أو نقطة الانفصال لدالّة نسبية.

تدريب على اختبار

30) يريد عليٌّ أن يختار كتابين معًا من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك؟

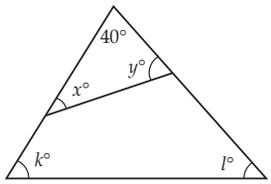
A 48

B 18

C 15

D 12

31) هندسة: في الشكل المجاور، ما قيمة $x+y+k+l$ ؟



A 140

B 280

C 320

D 360

مراجعة تراكمية

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (الدرس 3-5)

32) $f(x)=\frac{-5}{x+2}$

33) $f(x)=\frac{4}{x-1}-3$

34) $f(x)=\frac{1}{x+6}+1$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 2-5)

35) $\frac{m}{m^2-4}+\frac{2}{3m+6}$

36) $\frac{d-4}{d^2+2d-8}+\frac{d+2}{d^2-16}$

37) $\frac{y}{y+3}-\frac{6y}{y^2-9}$

38) $\frac{5}{x^2-3x-28}+\frac{7}{2x-14}$

39) سفر: يبين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره إلى مدينة مجاورة بعد مرور زمن معين. (مهارة سابقة)

الزمن (h)	المسافة (km)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعتين الأولى والثالثة من الانطلاق.

b) أوجد معدل تغير المسافة بعد مرور 5 ساعات من الانطلاق.

تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

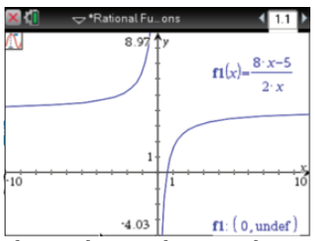
يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوالّ النسبية.

نشاط 1 التمثيل البياني لدالّة لها خطوط تقارب

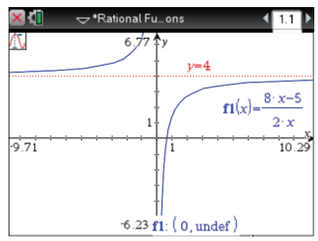
مثِّل الدالّة $y = \frac{8x - 5}{2x}$ بيانيًّا، وأوجد معادلات خطوط التقارب.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا:

اضغط مفتاح (on)، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl ÷)، ثم اكتب الدالّة واضغط (enter). ولتحديد خطوط التقارب اضغط (menu)، ومنها اختر 5:تتبع المسار، ومنها 1:تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، ستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عندما $x = 0$، وتظهر النقطة (0, undef) وخط التقارب الرأسي.



[−10, 10] scl:1 by [−4.3, 8.97] scl:1



[−9.71, 10.29] scl:1 by [−6.23, 6.77] scl:1

الخطوة 2: أوجد معادلات خطوط التقارب.

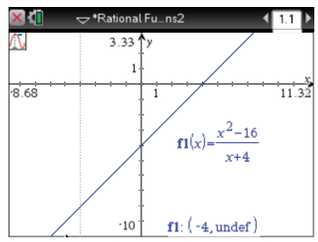
بالنظر إلى المعادلة، يمكننا معرَّفة أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = 0$، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًّا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن قيم y تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالّة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.

نشاط 2 التمثيل البياني لدالّة تتضمَّن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا:

اضغط مفتاح (on) ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl ÷)، ثم اكتب الدالّة واضغط (enter). ولتحديد نقاط الانفصال اضغط (menu) ومنها اختر 5:تتبع المسار ومنها 1:تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبَّع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عند $x = -4$، وتظهر فجوة عند نقطة الانفصال (−4, undef).



[−8.68, 11.32] scl:1 by [−10, 3.33] scl:1

الخطوة 2: أوجد نقاط الانفصال.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم بفجوة عندما $x = -4$ ؛ لأن المقام يساوي صفرًا عندما $x = -4$، مما يعني أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = -4$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلِّ دالّة مما يأتي بيانيًّا، ثم اكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت):

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

3) $f(x) = \frac{2}{x - 4}$

4) $f(x) = \frac{2x}{3x - 6}$

5) $f(x) = \frac{4x + 2}{x - 1}$

6) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-5

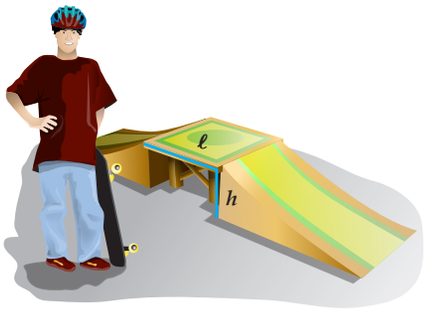
دوالّ التغيُّر
Variation Functions

فيما سبق:
درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أحل مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك.
- أحل مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب.

المفردات:
التغيُّر الطردي
direct variation
ثابت التغيُّر
constant of variation
التغيُّر المشترك
joint variation
التغيُّر العكسي
inverse variation
التغيُّر المركّب
combined variation

لماذا؟

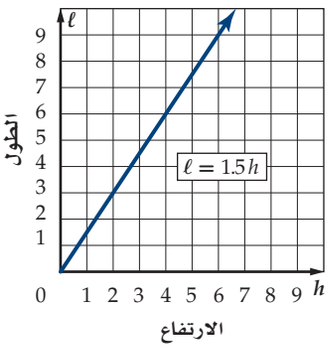


وجد عبدالله خلال بنائه منحدرًا للتزحلق، أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصّة ℓ مساويًا 1.5 مرة من ارتفاعها h .

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصّة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى نسبة الطول إلى الارتفاع ثابتة، وعندما تكون النسبة بين كميتين متغيرتين ثابتة، تسمى العلاقة بينهما (**تغيّرًا طرديًا**) كما درست سابقًا، وبهذا فإن طول المنصة يتغيَّر طرديًا مع ارتفاعها.

الطول (ℓ)	الارتفاع (h)	النسبة ($\frac{\ell}{h}$)
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5

التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك إن المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $\ell = 1.5h$ وهي مثال على التغيُّر الطردي، حيث يعبّر عن التغيُّر الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k في هذه المعادلة **ثابت التغيُّر**.



لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $\ell = 1.5h$ هو مستقيم يمرُّ بنقطة الأصل، لذا فالتغيُّر الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$ ، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيُّر الطردي هو ثابت التغيُّر.

وللتعبير عن التغيُّر الطردي، فإننا نقول إن y تتغيَّر طرديًا مع x. وبمعنى آخر كلما زادت x، فإن y تزداد بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير موجبًا، وينقص بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير سالبًا.

إرشادات للدراسة

ثابت التغيُّر
في التغير الطردي، المستقيم الذي له ثابت تغيُّر موجب ، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين ، بينما المستقيم الذي له ثابت تغيُّر سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

مفهوم أساسي — التغيُّر الطردي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيّر y طرديًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$ ويسمى العدد k ثابت التغيُّر.

مثال: إذا كانت $y = 3x$ ، فإن y تتغير طرديًا مع x . فكلما زادت x بمقدار 1، فإن y تزداد بمقدار 3، فعندما تكون قيمة $x = 1$ ، فإن $y = 3$، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًا مع x ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1 \quad , \quad y_2 = kx_2$$
$$\frac{y_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (يسمّى هذا التناسب تناسبًا طرديًا؛ أي أن y تتناسب طرديًا مع x).

ويمكنك استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم y .

مثال 1 التغيُّر الطردي

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	تناسب طردي
$\frac{15}{5} = \frac{y_2}{7}$	$y_1 = 15, x_1 = 5, x_2 = 7$
$15(7) = 5(y_2)$	بالضرب التبادلي
$105 = 5y_2$	بسّط
$21 = y_2$	اقسم كل من الطرفين على 5

تحقق من فهمك

1) إذا كانت r تتغيَّر طرديًّا مع t ، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$.

هناك نوع آخر من التغيُّر يُسمى **التغيُّر المشترك**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المشترك

يصنّف بعض الرياضيين التغيُّر المشترك بوصفه حالة خاصة من التغيُّر المركّب الذي ستدرسه لاحقًا.

مفهوم أساسي التغيُّر المشترك

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.

مثال: إذا كانت: $x = 6, z = -2, y = -60$ ، وكانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x وَ z، حيث $x = 4, z = -5$، فإن قيمة y عندما

إن: $y = -60 = 5(6)(-2) = kxz \Rightarrow k = 5$ ،

تكون: $y = 5 \times 4 \times (-5) = -100$.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وعلمتَ بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = kx_2z_2 \quad , \quad y_1 = kx_1z_1$$
$$\frac{y_2}{x_2z_2} = k \quad \frac{y_1}{x_1z_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع حاصل ضرب x ، z).

مثال 2 التغيُّر المشترك

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $y = 20$ عندما $x = 5$ و $z = 3$، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$.

استعمل تناسبًا يربط القيم بعضها ببعض.

$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$	تناسب مشترك
$\frac{20}{5(3)} = \frac{y_2}{9(2)}$	$y_1 = 20, x_1 = 5, z_1 = 3, x_2 = 9, z_2 = 2$
$20(9)(2) = 5(3)(y_2)$	بالضرب التبادلي
$360 = 15y_2$	بسّط
$24 = y_2$	اقسم كل من الطرفين على 15

تحقق من فهمك

2) إذا كانت r تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع v و t ، وكانت $r = 70$ عندما $v = 10$ و $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $v = 2$ ، و $t = 8$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب هناك نوع ثالث من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي**، فإذا تغيَّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا هوَ k .

تتغير كميتان موجبتان أو سالبتان معًا عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى. وتتغير كميتان إحداهما موجبة والأخرى سالبة عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بزيادة الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التغيُّر العكسي

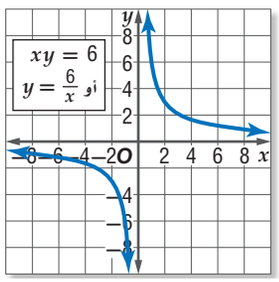
التعبير اللفظي: تتغيَّر y عكسيًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث

$x\,y = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

مثال: إذا كانت $xy = 12$ ، فإن y تتغير عكسيًّا مع x. فكلما زادت x نقصت y والعكس، فعندما $x = 2$ فإن $y = 6$، بينما عندما $x = 3$ فإن $y = 4$.

إذا كانت y تتغيَّر مع x كما في الجدول المجاور، فإنك تلاحظ أن قيم x تزداد بتناقص قيم y، وهما كميتان موجبتان؛ لذا فإن y تتغير تغيُّرًا عكسيًّا مع x بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$، ويكون التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.

x	6	3	2
y	1	2	3



وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر العكسي يشبه التمثيل البياني لدالّة المقلوب تمامًا.

يمكنك استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيّرًا عكسيًّا مُعطىً فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$$x_1 y_1 = k \text{ ، } x_2 y_2 = k$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

ومن ذلك نجد أنَّ $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًّا؛ أي أن y تتناسب عكسيًّا مع x).

مثال 3

التغيُّر العكسي

إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = 2$، فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$a_1 b_1 = a_2 b_2$	تناسب عكسي
$28(2) = 10(a_2)$	$a_1 = 28, b_1 = 2, b_2 = 10$
$56 = 10(a_2)$	بسّط
$5\frac{3}{5} = a_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 10

تحقق من فهمك

3) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = -12$.

يُستعمل التغيُّر العكسي في كثيرٍ من التطبيقات الحياتية.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة التغير العكسي وحله

موجات الصوت: يتغيَّر التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود f عكسيًّا مع طول السلك l. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية، فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in.

افترض أن $l_2 = 8$, $l_1 = 10, f_1 = 512$. وأوجد قيمة f_2.

$l_1 f_1 = l_2 f_2$	المعادلة الأصلية
$10 \cdot 512 = 8 \cdot f_2$	$f_1 = 512, l_1 = 10, l_2 = 8$
$\frac{5120}{8} = f_2$	اقسم كل من الطرفين على 8
$640 = f_2$	بسّط

إذن تردد السلك يساوي 640 دورة في الثانية.

تحقق من فهمك

4) فضاء: يتغيَّر الطول الظاهري لجسم عكسيًّا مع بُعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بُعد الأرض عن الشمس 93 مليون ميل تقريبًا، وبُعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة بطول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟

هناك نوع رابع من التغيُّر هو **التغيُّر المركّب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وy تتغيَّر عكسيًّا مع z ، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = \frac{kx_2}{z_2} \quad , \quad y_1 = \frac{kx_1}{z_1}$$

$$\frac{y_2 z_2}{x_2} = k \qquad \frac{y_1 z_1}{x_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمّى هذا التناسب تناسبًا مركّبا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

مثال 5 التغيُّر المركّب

إذا كانت f تتغيَّر طرديًّا مع g وعكسيًّا مع h ، وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$ ، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

استعمل تناسبًا يربط القيم.

$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$	تناسب مركب
$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$	$f_1 = 6, g_1 = 24, h_1 = 2, f_2 = 18, h_2 = -3$
$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$	اضرب تبادليًا
$-1296 = 12g_2$	بسّط
$-108 = g_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 12

إرشادات للدراسة

التغيُّر المركّب

في العلاقة $y = \frac{kx}{z}$ تظهر الكميات التي تتغيَّر طرديًّا مع y في البسط. أما التي تتغيَّر عكسيًّا فتظهر في المقام.

تحقق من فهمك

5) إذا كانت p تتغيَّر طرديًّا مع r وعكسيًّا مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ ، و $r = 2$. فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

الأمثلة 1—3

1) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$.

2) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$.

3) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$.

مثال 4

4) **خرائط:** تتناسب المسافات على الخرائط تناسبًا طرديًّا مع المسافات الفعلية على سطح الأرض. إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخرائط تعادل 15 mi على سطح الأرض. وكانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما.

مثال 5

5) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$.

تدرب وحل المسائل

مثال 1

إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، فأوجد قيمة x عندما $y = 8$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

6) إذا كانت $x = 6$، عندما $y = 32$.

7) إذا كانت $x = 11$، عندما $y = -3$.

8) **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 رطلًا ، ووزنه على سطح القمر 60 رطلًا ، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر.

مثال 2

إذا كانت a تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع b و c ، فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

9) إذا كانت $a = -108$، عندما $b = 2$ و $c = 9$.

10) إذا كانت $a = 24$، عندما $b = 8$ و $c = 12$.

مثال 3

إذا كانت f تتغيَّر عكسيًّا مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

11) إذا كانت $f = -12$، عندما $g = 19$.

12) إذا كانت $f = 0.6$، عندما $g = -21$.

مثال 4

13) **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام، فإنه يقطع مسافة تتغيَّر طرديًّا مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.

a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h ، فاكتب معادلة تغيُّر طردي تمثل هذا الموقف.

b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته، فأوجد عدد ساعات طيرانه.

مثال 5

14) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، وعكسيًّا مع z، وكانت $z = 20$ عندما $x = 6$ و $y = 14$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$.

حدِّد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو تغيّرًا عكسيًّا، أو غير ذلك:

15)

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

16)

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

17)

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

18) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$.

حدِّد إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو عكسيًّا، أو مشتركًا، أو مركّبا، ثم أوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كلٍّ منها :

19) $a = 27b$

20) $c = \frac{7}{d}$

21) $-10 = gh$

22) $m = 20cd$

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي والتغيُّر العكسي

يمكن تحديد نوع التغيُّر من خلال جدول قيم لـ x و y. فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر طردي. أما إذا كانت xy تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر عكسي.

23) كيمياء: يتغيَّر حجم غاز معين v طرديًّا مع درجة حرارته t . وعكسيًّا مع ضغطه p حيث $(v = \frac{kt}{p})$.

a) هل تمثل المعادلة تغيُّرًا طرديًّا، أم عكسيًّا أم مشتركًا أم مركّبًا؟

b) عينة من الغاز حجمها 8 لترات، ودرجة حرارتها $275°$ كلفن ، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 لترات وتسخينها إلى درجة حرارة $300°$ كلفن . كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

24) جاذبية: ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بالنيوتن بين أي جسمين تتغيَّر طرديًّا مع حاصل ضرب كتلتيهما بالكيلو جرام m_1 و m_2 ، وعكسيًّا مع مربع المسافة بينهما d بالمتر. وتبين المعادلة $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، وقيمته $6.67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر $3.84 \times 10^8\ \text{m}$ تقريبًا، وكتلة القمر $7.36 \times 10^{22}\ \text{kg}$. وكتلة الأرض $5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}$ ، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل منهما في الآخر؟

b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس $1.5 \times 10^{11}\ \text{m}$تقريبًا، وكتلة الشمس $1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}$ تقريبًا، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

25) اكتشف الخطأ: يحل كل من يوسف وتركي مسألة عن التغيُّر المركّب، تتغيَّر فيها z طرديًّا مع x وعكسيًّا مع y. أيهما توصل إلى التناسب الصحيح ؟ وضِّح إجابتك.

يوسف

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1y_1}{x_1}, k = \frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1} = \frac{z_2y_2}{x_2}$$

تركي

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1x_1}{y_1}, k = \frac{z_2x_2}{y_2}$$
$$\frac{z_1x_1}{y_1} = \frac{z_2x_2}{y_2}$$

26) تبرير: وضِّح لماذا يعد بعض المختصين في الرياضيات التغيّر المشترك تغيُّرًا مركّبا، ولكنهم لا يعدون التغيُّر المركّب مشتركًا.

27) مسألة مفتوحة: صف ثلاث كميات من واقع الحياة تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا فيما بينها.

28) اكتب: حدِّد أنواع التغيُّرات التي لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها. وضِّح إجابتك.

تدريب على اختبار

29) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b ، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b=15$ عندما $c=2$, $a=4$ فما قيمة b عندما $a=7$, $c=-8$ ؟

A $\frac{-1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$

B -105 **D** 105

30) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضَّحة بالجدول المجاور؟

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

A طردي **C** مشترك

B عكسي **D** مركّب

مراجعة تراكمية

حدِّد خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال (إن وجدت) في التمثيل البياني لكل دالّة نسبية مما يأتي: (الدرس 4-5)

31) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$

32) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 3x - 4}$

33) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-5)

34) $a, 2a, a+1$

35) $8, 24x, 12$

36) $x^4, 3x^2, 2xy$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-6

حل المعادلات والمتباينات النسبية

Solving Rational Equations and Inequalities

فيما سبق:

درست تبسيط عبارات نسبية. الدرس (1-5)

والآن:

- أحل معادلات نسبية.
- أحل متباينات نسبية.

المفردات:

المعادلة النسبية
rational equation

المتباينة النسبية
rational inequality

لماذا؟



يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية 200 ريال شهريًّا بالإضافة إلى 10 ريالات عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهريًّا، فإنه سيدفع مبلغًا مقداره $(200+10x)$ ريالًا في الشهر. ويمكن حساب التكلفة الفعلية لكل زيارة للعضو باستعمال العبارة : $\frac{200+10x}{x}$، حيث x عدد مرات زيارة النادي.

ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت التكلفة الفعلية للزيارة الواحدة 30 ريالًا، عليك أن تحل المعادلة $\frac{200+10x}{x} = 30$.

حل المعادلات والمتباينات النسبية : تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما تتخلص من المقامات، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM لها. ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات؛ لذا فإنه من الضروري التحقق من صحة الحل لاستثناء القيم التي تجعل أحد مقامات المعادلة صفرًا.

مراجعة المفردات

الحل الدخيل
هو الحل الذي لايحقق المعادلة الأصلية.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$.

LCM للمقامات هو $(x+3)(x+5)$.

$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$	المعادلة الأصلية
$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$	اضرب المعادلة في LCM للمقامات
$\frac{(x+3)(\cancel{x+5})(2x)}{\cancel{x+5}} - \frac{(\cancel{x+3})(\cancel{x+5})(x^2-x-10)}{\cancel{x^2+8x+15}} = \frac{(\cancel{x+3})(x+5)3}{\cancel{x+3}}$ 1 1 1 1 1 1	اختصر العوامل المشتركة
$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$	بسّط
$2x^2+6x-x^2+x+10 = 3x+15$	خاصية التوزيع
$x^2+7x+10 = 3x+15$	بسّط
$x^2+4x-5 = 0$	اطرح $3x+15$ من كلا الطرفين
$(x+5)(x-1) = 0$	حلّل إلى عوامل
$x+5=0$ أو $x-1=0$	خاصية الضرب الصفري
$x=-5$ أو $x=1$	

تحقق: اختبر $x = -5$:

المعادلة الأصلية	$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$
$x = -5$	$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2 - (-5) - 10}{(-5)^2 + 8(-5) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$
بسّط	✗ $\frac{-10}{0} - \frac{25 + 5 - 10}{25 - 40 + 15} \neq -\frac{3}{2}$

اختبر $x = 1$:

المعادلة الأصلية	$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$
$x = 1$	$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2 - 1 - 10}{1^2 + 8(1) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$
بسّط	$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$
وحّد المقامات	$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$
بسّط	✓ $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة، وجب استثناء هذا الحل. وبما أن $x = -5$ ينتج عن تعويضها في المعادلة صفر في المقام فإنها تُستثنى من الحلول. لذا يكون الحل هو $x = 1$.

تحقق من فهمك

(1A $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$

(1B $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

(1C $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$

(1D $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4}$

يمكنك استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة d والسرعة r والزمن t لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعًا لهذه المعادلة هو $d = rt$. وكذلك يمكنك استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $t = \frac{d}{r}$, $r = \frac{d}{t}$.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال المعادلات النسبية في مسائل الحركة

تجديف: **ركب سعيد قاربًا سرعته 6 mi/h في المياه الراكدة وسار به دون توقف مسافة 10 mi؛ نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمنًا قدره 3 h، أوجد سرعة التيار.**

افهم: معطيات المسألة هي: سرعة القارب في المياه الراكدة، وكذلك المسافة التي قطعها ذهابًا وإيابًا والزمن المستغرق في قطع المسافة كاملةً. والمطلوب إيجاد سرعة التيار (v).

خطط: المسافة التي قطعها سعيد هي 5 mi في اتجاه التيار، و 5 mi عكس اتجاه التيار.
والمعادلة التي تُستعمل للحل هي: $d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$ ، حيث r السرعة، d المسافة، t الزمن.

الزمن الكلي	الزمن مع اتجاه التيار	الزمن عكس اتجاه التيار
3h	$\frac{5}{6+v}$	$\frac{5}{6-v}$

إرشادات للدراسة

مسائل المسافة

عندما تتضمن مسائل المسافة الذهاب والعودة، فإن المسافة في الذهاب تساوي المسافة في العودة، ما لم يذكر خلاف ذلك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حل:

$$\frac{5}{6+v}+\frac{5}{6-v}=3$$ اكتب المعادلة

$$(6+v)(6-v)\frac{5}{6+v}+(6+v)(6-v)\frac{5}{6-v}=(6+v)(6-v)(3)$$ اضرب كل من الطرفين في LCM للمقامات $(6+v)(6-v)$

$$\cancel{(6+v)}^{1}(6-v)\frac{5}{\cancel{6+v}^{1}}+(6+v)\cancel{(6-v)}^{1}\frac{5}{\cancel{6-v}^{1}}=(6+v)(6-v)(3)$$ اختصر العوامل المشتركة

$$(6-v)(5)+(6+v)(5)=(36-v^2)(3)$$ بسّط

$$30-5v+30+5v=108-3v^2$$ خاصية التوزيع

$$60=108-3v^2$$ بسّط

$$0=-3v^2+48$$ اطرح 60 من كلا الطرفين

$$0=-3(v+4)(v-4)$$ حلّل إلى عوامل

$$0=(v+4)(v-4)$$ اقسم كل من الطرفين على -3

$v=4$ أو $v=-4$ (مرفوض؛ لأن السرعة لا يمكن أن تكون سالبة) خاصية الضرب الصفري

تحقق:

$\frac{5}{6+v}+\frac{5}{6-v}=3$ المعادلة الأصلية

$\frac{5}{6+4}+\frac{5}{6-4}\stackrel{?}{=}3$ $v=4$

$\frac{5}{10}+\frac{5}{2}\stackrel{?}{=}3$ بسّط

$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{6}{2}$ ✓ بسّط ووَحّد المقامات

لذا؛ فإن سرعة التيار هي 4 mi/h .

تحقق من فهمك

2) طيران: إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة دون توقف في 7h، وكانت سرعة الريح 20 mi/h ، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟



الربط بالحياة

تمثل المخلفات البلاستيكية خطورة عالية وكارثة بيئية وصحية على الإنسان والحياة البرية والبحرية؛ لما بها من مواد كيميائية لا تتحلل في التربة، وتشمل العلب البلاستيكية والأطعمة والمنظفات والمشروبات الغازية وغيرها.
وتستهلك الدول العربية منها 50 مليار علبة سنويًا.

يمكنك حل المسائل الحياتية التي تتعلق بالأعمال عادة باستعمال معادلات نسبية.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال المعادلات والمتباينات النسبية في مسائل العمل

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الأول الثانوي والثاني الثانوي في أحد الأحياء بحملة توعية بخطر النفايات البلاستيكية لسكان الحي. فإذا علمت أن هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة إذا قام به طلاب الصف الثاني الثانوي، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معًا، فكم ساعةً يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي للقيام بالعمل وحدهم؟

افهم: المعطيات هي: الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني الثانوي لإتمام العمل، والزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصفين معًا لإتمام العمل. والمطلوب إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الأول الثانوي لإتمام العمل.

خطط: يستطيع طلاب الصف الثاني الثانوي إتمام العمل في 24h. وعليه فإن معدل عملهم يساوي $\frac{1}{24}$ من العمل في الساعة الواحدة.

في حين يبلغ معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي $\frac{1}{j}$ من العمل في الساعة الواحدة، أما معدل عمل طلاب الصفين معًا فهو $\frac{1}{18}$ من العمل في الساعة الواحدة.

معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي	معدل عمل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل عمل طلاب الصفين معًا
$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$

إرشادات للدراسة

جداول

تكوين الجداول - كما في المثال 3 - يفيد في تنظيم وحل المسائل بشكل عام.

وزارة التعليم
Ministry of Education

حُل:

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{j}=\frac{1}{18}$$ اكتب المعادلة

$$72j\,\frac{1}{24}+72j\,\frac{1}{j}=72j\,\frac{1}{18}$$ اضرب كل من الطرفين في LCM للمقامات وهو $72j$

$$\overset{3}{\cancel{72}}j\,\frac{1}{\cancel{24}_{1}}+72\cancel{j}^{1}\,\frac{1}{\cancel{j}_{1}}=\overset{4}{\cancel{72}}j\,\frac{1}{\cancel{18}_{1}}$$ اختصر العوامل المشتركة

$$3j+72=4j$$ بسّط

$$72=j$$ اطرح $3j$ من كلا الطرفين

تحقق:

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{j}=\frac{1}{18}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{72}\overset{?}{=}\frac{1}{18}$$ $j=72$

$$\frac{3}{72}+\frac{1}{72}\overset{?}{=}\frac{4}{72}$$ LCM للمقامات هو 72

$$\frac{4}{72}=\frac{4}{72}\ \checkmark$$ بسّط

يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي إلى 72h لإتمام العمل وحدهم.

تحقق من فهمك

3) طلاء: يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملا معًا، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. فكم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟

حل المتباينات النسبية: **المتباينات النسبية**، هي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. ولحلها اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي — حل المتباينات النسبية

أضف مطويتك

الخطوة 1: حدِّد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفرًا.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة والتي تحصل عليها بوضع رمز المساواة بدلًا من رمز التباين في المتباينة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين؛ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال 4 — حل متباينة نسبية

حل المتباينة النسبية $\frac{x}{3}-\frac{1}{x-2}<\frac{x+1}{4}$.

الخطوة 1: القيمة المستثناة في هذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة:

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{x-2}=\frac{x+1}{4}$$ المعادلة المرتبطة

$$\overset{4}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x}{\cancel{3}_{1}}-12(\cancel{x-2}^{1})\frac{1}{\cancel{x-2}_{1}}=\overset{3}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x+1}{\cancel{4}_{1}}$$ اضرب في LCM للمقامات: $12(x-2)$

$$4x^2-8x-12=3x^2-3x-6$$ خاصية التوزيع

$$x^2-5x-6=0$$ اطرح $3x^2-3x-6$ من كلا الطرفين

$$(x-6)(x+1)=0$$ حلّل إلى عوامل

$$x=6 \text{ أو } x=-1$$ خاصية الضرب الصفري

إرشادات للدراسة

تقسيم خط الأعداد

من الضروري استعمال القيم المستثناة وحلول المعادلة المرتبطة جميعها عند تقسيم خط الأعداد إلى فترات.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الخطوة 3: ارسم خطًّا رأسيًّا عند القيمة المستثناة، وعند حلّي المعادلة وذلك لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.



الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد ما إذا كانت الأعداد في الفترة تحقق المتباينة.

اختبر $x = -3$

$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \stackrel{?}{<} \frac{-3+1}{4}$

$-1 + \frac{1}{5} \stackrel{?}{<} -\frac{2}{4}$

✓ $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$

اختبر $x = 0$

$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \stackrel{?}{<} \frac{0+1}{4}$

$0 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$

اختبر $x = 4$

$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \stackrel{?}{<} \frac{4+1}{4}$

$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{5}{4}$

✓ $\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$

اختبر $x = 8$

$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \stackrel{?}{<} \frac{8+1}{4}$

$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \stackrel{?}{<} \frac{27}{12}$

$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$

الجملة صحيحة عندما $x = -3, x = 4$ ؛ لذا فإن الحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تحقق من فهمك

(4A $\frac{5}{x} + \frac{6}{5x} > \frac{2}{3}$

(4B $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$

تأكد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

(1 $\frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$

(2 $\frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$

(3 $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$

(4 $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

مثال 2

(5 مسافة: قطع وليد مسافة 40 km ذهابًا وعودة مستعملًا دراجته التي سرعتها 11.5 km/h عندما تكون الريح ساكنة، فإذا سار في اتجاه الريح زمنًا قدره ساعة و 20 دقيقة، وساعتان ونصف الساعة عكس اتجاه الريح.

a) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في اتجاه الريح.

b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره عكس اتجاه الريح.

c) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الريح.

مثال 3

(6 تبليط: يعمل كلٌّ من أحمد وعلي في التبليط، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل وحده، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه. فكم يومًا يحتاجان إليه إذا عملا معًا في تبليط هذا الفناء؟

مثال 4 حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

(7 $3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$

(8 $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$

(9 $\frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

(10 $\frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2-13x+42}$

(11 $\frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2-9y-5}$

المثالان 2, 3

12) **بناء:** تحتاج مجموعة من العمال إلى 12 يومًا لبناء مرآب سيارات، في حين تحتاج مجموعة أخرى إلى 16 يومًا لإنجاز العمل نفسه، فكم تحتاج المجموعتان معًا لبناء المرآب نفسه؟

13) **طيران:** سارت طائرة مسافة معينة في عكس اتجاه الريح في 20 h ، واحتاجت إلى 16 h لقطع المسافة نفسها في رحلة العودة، ولكن في اتجاه الريح. إذا كانت سرعة الطائرة في أثناء الريح الساكنة 500 mi/h ، فما سرعة الريح خلال الرحلة؟

مثال 4

14) حُلّ المتباينة: $\frac{3}{5x}+\frac{1}{6x}>\frac{2}{3}$.

15) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x-3}$.

a) جبريًا: حُلّ هذه المعادلة، وهل يوجد حل دخيل؟

b) بيانيًا: مثّل: $y_2=\frac{x-1}{x-3}$ ، $y_1=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0<x<5$.

c) تحليليًا: ما قيمة (قيم) x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان؟ وهل يتقاطعان عند الحل الدخيل للمعادلة الأصلية؟

d) لفظيًا: استعمل المعلومات التي حصلت عليها في الفرع(c) ؛ لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد ما إذا كان أحد الحلول حلًّا دخيلًا.

16) حُلّ المعادلة: $\frac{2}{y+3}-\frac{3}{4-y}=\frac{2y-2}{y^2-y-12}$ ، وتحقق من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

17) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا على معادلة نسبية يمكن حلُّها بضرب طرفَي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$.

18) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة $\frac{1+\frac{9}{x}+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{x+4}{x-5}$

19) **تبرير:** وضِّح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية.

20) **اكتب:** عند استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالّة: $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$ ، فإن الحاسبة البيانية تعطي خطأ عند القيمتين $x=-2$ و $x=3$. وضِّح ماذا يعني ذلك؟

تدريب على اختبار

21) ما حل المعادلة: $\frac{11}{a+2}-\frac{10}{a+5}=\frac{36}{a^2+7a+10}$ ؟

A -1 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 1

22) ما قيمة x في المعادلة $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)=4$ ؟

A -7 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{1}{7}$ **D** 7

مراجعة تراكمية

23) حدِّد إذا كانت العلاقة المجاورة تمثل تغيّرًا طرديًّا، أم تغيرًا عكسيًّا، أم غير ذلك: (الدرس 5-5)

x	14	28	56	112
y	3	1.5	0.75	0.375

24) مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{x+4}{x^2+7x+12}$ بيانيًّا. (الدرس 4-5)

25) اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة: $2, 8, 14, 20, \ldots$ (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

5-6 حلُّ المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف

أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأحلَّ معادلات ومتباينات نسبية بيانيًا أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحلِّ معادلات نسبية باستعمال التمثيل البياني أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

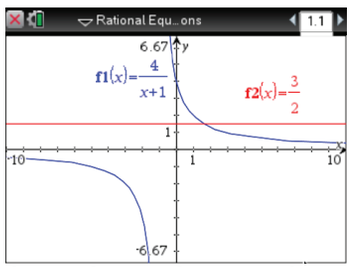
نشاط 1 معادلة نسبية

حُلَّ المعادلة $\frac{4}{x+1}=\frac{3}{2}$.

مثِّل طرفَي المعادلة النسبية بيانيًّا، ثم حدّد نقاط التقاطع.

الخطوة 1 مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا كدالّتين مستقلتين، بأن تدخل $\frac{4}{x+1}$ في f1 ، و $\frac{3}{2}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على مفتاح (on) ، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ، ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl) (÷) ، ثم اكتب $\frac{4}{x+1}$ واضغط (enter) ، ثم اضغط المفاتيح (÷) (ctrl) (tab) واكتب $\frac{3}{2}$ واضغط (enter)

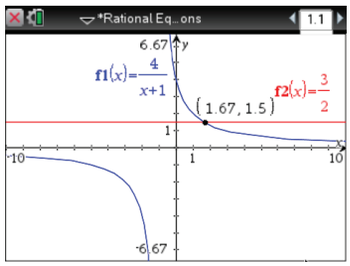


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

الخطوة 2 أوجد نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

تمكِّنك ميـزة نقاط التقاطع في قائمة تحليل الرسـم البياني من تقدير الزوج المرتَّب الذي يمثِّل نقطة التقاطع.

اضغط على (menu) ثم اختر منها 6:تحليل الرسم البياني ، ثم اختر 4:نقاط التقاطع ، وقم بالضغط على أيِّ نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، فتظهر نقطة التقاطع (1.67 , 1.5).

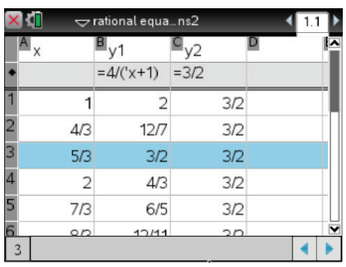


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

أي أن الحل هو $x=1.67\approx\frac{5}{3}$.

الخطوة 3 استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحَّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات. اعمل جدولًا يبيِّن قيم x، على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح (on) ، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات ، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 1 وبزيادة قدرها $\frac{1}{3}$ (لأن الحلّ الذي ستتحقَّق منه هو $x=\frac{5}{3}$)، واكتب $y_1=\frac{4}{x+1}$ في العمود الثاني، و $y_2=\frac{3}{2}$ في العمود الثالث، ثم اضغط (enter) واختر مرجع المتغير ، فتظهر الشاشة المجاورة.



يبيِّن الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكلِّ تمثيل بياني. فعندما $x=\frac{5}{3}$ ،

يكون للدالّتين القيمة نفسها، وهي $\frac{3}{2}$ ، وهذا يعني أن حلَّ المعادلة هو $\frac{5}{3}\approx 1.67$.

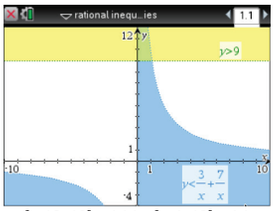
يمكنك استعمال الخطوات الآتية لحلِّ متباينات نسبية مستعملًا الحاسبة البيانية TI-nspire.

نشاط 2 متباينة نسبية

حل المتباينة $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}>9$.

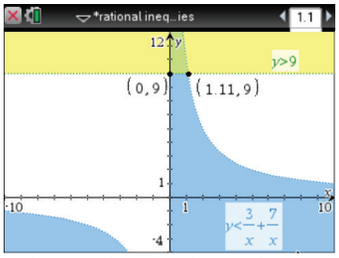
الخطوة 1 مثِّل المتباينتين

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من متباينتين؛ المتباينة الأولى هي $y<\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$، والثانية $y>9$، ومثِّلهما بالضغط على مفتاح (on)، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية ثم < (del)، واكتب $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$ ثم اضغط (enter)، فيظهر تظليل تحت التمثيل البياني. ولتمثيل المتباينة الثانية اضغط على المفاتيح > (del) (tab)، واكتب 9، ثم اضغط (enter)، ولإظهار الجزء المطلوب من التمثيل البياني على الشاشة قم بالضغط على مفتاح (menu)، ومنها اختر 4:تكبير/ تصغير النافذة ثم 1:إعدادات النافذة لتحديد التدريج المناسب لكلٍّ من x , y ، ولاحظ أن منطقة حلِّ المتباينتين قد ظُلِّلت باللون الأخضر.



[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

الخطوة 2 استعمل نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

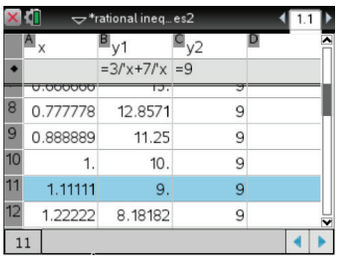


[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

لإيجاد نقطة (نقاط) تقاطع التمثيلين البيانيين اضغط (menu) ثم 8: الهندسة ومنها 1:النقاط والمستقيمات، واختر منها 3:نقطة(نقاط) التقاطع واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر، فتظهر نقطة التقاطع (1.11 , 9)، كرِّر ذلك مرّة أخرى، واضغط على محور y، والتمثيل البياني لِـ $y=9$؛ فتظهر نقطة التقاطع (0 , 9) لتتوصَّل إلى أن مجموعة الحلِّ هي $\{x \mid 0<x<1.11\}$.

الخطوة 3 استعمل تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات .
اعمل جدولًا يبيِّن قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ أو 0.111111 كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح (on)، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ومنها اختر 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 0 وبزيادة قدرها $\frac{1}{9}$(لأن الحلِّ الذي ستتحقق منه هو $x=1.11$).
واكتب $y_1=\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$ في العمود الثاني، و$y_2=9$ في العمود الثالث.



تنقَّل بالمؤشِّر خلال الجدول. ستلاحظ أن قيم x الأكبر من 0 والأقل من $\frac{10}{9}\approx 1.11$ ، يكون عندها $y_1>y_2$.
وهذا يؤكد أن مجموعة حلِّ المتباينة هي: $\{x \mid 0<x<1.11\}$

تمارين

حُلَّ كلَّ معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{2}{x}$
2) $\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x-2}$
3) $\frac{4}{x}=\frac{6}{x^2}$
4) $\frac{1}{1-x}=1-\frac{x}{x-1}$
5) $\frac{1}{x+4}=\frac{2}{x^2+3x-4}-\frac{1}{1-x}$
6) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}>5$
7) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}<0$
8) $1+\frac{5}{x-1}\le 0$
9) $2+\frac{1}{x-1}\ge 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العبارات النسبية والعمليات عليها (الدرسان 2-5 , 1-5)

- ضرب العبارات النسبية وقسمتها يشبه ضرب الكسور وقسمتها.
- لتبسيط كسر مركب بسّط البسط والمقام كل على حدة، ثم بسّط العبارة الناتجة.
- جمع العبارات النسبية وطرحها يشبه جمع الكسور وطرحها.

دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية (الدرسان 4-5 , 3-5)

- دالّة المقلوب هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية و $a(x) \neq 0$.
- الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.
- يوجد لبعض دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية مستقيمات يقترب منها التمثيل البياني للدوالّ، تسمى خطوط التقارب.
- أصفار الدالّة النسبية هي القيم التي تجعل $a(x) = 0$.

التغيُّر: الطردي، المشترك، العكسي، والمركب (الدرس 5-5)

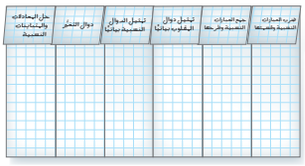
- التغيُّر الطردي: تتغيّر y طرديًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
- التغيُّر المشترك: تتغيّر y تغيرًا مشتركًا مع x و z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
- التغيُّر العكسي: تتغيّر y عكسيًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ ، أو $y=\frac{k}{x}$ حيث $x \neq 0 , y \neq 0$.
- التغيُّر المركب: ويحدث عندما تتغير كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

حل المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 6-5)

- لحل المعادلات النسبية تخلص من المقامات بضرب طرفي المعادلة في LCM لها.
- لحل المتباينات النسبية، حل المعادلات المرتبطة، واستعمل القيم التي تحصل عليها لتقسيم خط الأعداد إلى فترات، واختبر قيمة من كل فترة.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات:

العبارة النسبية ص 246
الكسر المركب ص 261
خط التقارب ص 261
خط التقارب الرأسي ص 261
خط التقارب الأفقي ص 261
دالّة المقلوب ص 261
القطع الزائد ص 261
الدالّة النسبية ص 268
نقطة الانفصال ص 270
التغيُّر الطردي ص 275
ثابت التغيُّر ص 275
التغيُّر المشترك ص 276
التغيُّر العكسي ص 277
التغيُّر المركب ص 278
المعادلة النسبية ص 281
المتباينة النسبية ص 284

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) _____ هو عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية.

2) إذا تغيَّرت كميتان _____ فإن حاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

3) يعبر عن _____ بمعادلة على الصورة $y = kx$.

4) تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر _____ .

5) التمثيل البياني للمعادلة $y=\frac{x}{x+2}$ له _____ عند $x = -2$.

6) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

7) تُسمى النسبة بين كثيرتَي حدود _____ .

8) تظهر _____ على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة غير معرّفة عندها.

9) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

مراجعة الدروس

5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها ص 246-254

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{-16xy}{27z} \cdot \frac{15z^3}{8x^2}$

11) $\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

12) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

13) $\frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

14) $\frac{\frac{x^2+3x-18}{x+4}}{\frac{x^2+7x+6}{x+4}}$

15) هندسة: مثلَّث مساحته $(3x^2+9x-54)\text{cm}^2$، وارتفاعه $(x+6)\text{cm}$. أوجد طول قاعدته، ثم اكتبه في أبسط صورة.

مثال 1

بسّط العبارة: $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2}$.

حلّل واختصر العوامل المشتركة: $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{3}\cdot 3\cdot \cancel{b}\cdot b\cdot b\cdot b}{\cancel{3}\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{a}\cdot a}$

بسّط: $= \frac{6b^3}{a}$

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12}$.

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه: $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12} = \frac{r^2+5r}{2r} \cdot \frac{6r-12}{r^2-25}$

حلّل واختصر العوامل المشتركة: $= \frac{\cancel{r}(r+5)}{2\cancel{r}} \cdot \frac{3\cancel{6}(r-2)}{(\cancel{r+5})(r-5)}$

بسّط: $= \frac{3(r-2)}{r-5}$

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها ص 255-260

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

16) $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

17) $\frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

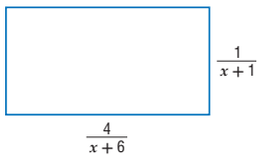
18) $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

19) $\frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

20) $\frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

21) $\frac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

22) هندسة: أوجد محيط المستطيل المرسوم أدناه ، ثم اكتبه في أبسط صورة.



مثال 3

بسّط العبارة: $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$.

حلّل المقام a^2-4: $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$

وحّد المقامين: $= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

اطرح البسطين: $= \frac{3a-2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

خاصية التوزيع: $= \frac{3a-2a-4}{(a-2)(a+2)}$

بسّط: $= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

5-3 تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا ص 261-266

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كلٍّ منها:

23) $f(x) = \frac{10}{x}$

24) $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

25) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

26) $f(x) = \frac{6}{x-9}$

27) $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$

28) $f(x) = -\frac{4}{x+4} - 8$

29) تشجير: يقوم طلاب الصف الثاني الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

a) اكتب دالّة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

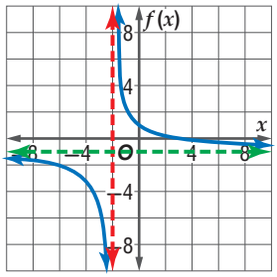
مثال 4

مثّل الدالّة $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

بما أن $a = 3$: إذن يتسع التمثيل البياني للدالّة الأم رأسيًّا.

ثم $h = -2$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار وحدتين. وَيوجد خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

وَ $k = -1$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى أسفل بمقدار وحدة. وَ يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$.



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

5-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا ص 268-273

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

30) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x}$

31) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$

32) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 24}$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

33) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$

34) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

35) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$

36) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 5x + 6}$

37) مبيعات: يبيع عليٌّ اشتراكات في إحدى الصحف إلى مؤسسات إحدى المدن. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أخرى وباع لكلٍّ منها اشتراكًا. فيمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد المؤسسات التي زارها باستعمال الدالّة $P(x) = \frac{10 + x}{15 + x}$.

a) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) ما القيم المنطقية لكلٍّ من المجال والمدى في سياق المسألة؟

مثال 5

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني للدالّة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

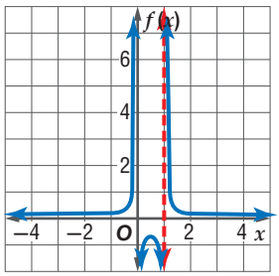
$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

الدالّة غير معرّفة عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$.

وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$، فإن $x = -3$ هي معادلة خط التقارب الرأسي وتوجد نقطة انفصال عند $x = 1$.

مثال 6

مثّل الدالّة: $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًّا.



الدالّة غير معرفة عند $x = 0$، وعند $x = 1$.

وبما أن الدالّة في أبسط صورة، فإن $x = 0$ ، و $x = 1$ خطَّا تقارب رأسيَّان للدالّة.

ارسم الخطين والدالّة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2024 1445

5-5 دوالّ التغيُّر ص 275-280

38) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b ، وكانت $a = 27$ عندما $b = 18$ فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

39) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -5$.

40) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$

41) إذا كانت y تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $x = 8$، و $z = 3$ عندما $y = 72$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$.

42) إذا كانت x تتغيّر تغيّرًا طرديًّا مع y وعكسيًّا مع r، وكانت $y = 6$، عندما $r = 4$ و $x = 12$، فأوجد قيمة y عندما $x = 8$ و $r = 10$.

43) **مهن:** يتغيّر أجر أحد العمال طرديًّا مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى 120 ريالًا مقابل 8 h، فكم ريالًا يتقاضى إذا عمل 5 h؟

مثال 7

إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

$x_1 y_1 = x_2 y_2$	تناسب عكسي
$24(-8) = x_2 \times 15$	$x_1 = 24 , y_1 = -8 , y_2 = 15$
$-192 = 15x_2$	بسّط
$-12\frac{4}{5} = x_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 15

عندما تكون $y = 15$ ، فإن قيمة x هي $-12\frac{4}{5}$.

5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية ص 281-286

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

44) $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$

45) $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$

46) $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$

47) $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$

48) $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$

49) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$

50) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$

51) **زراعة:** يستطيع سعيد وحده زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع عليٌّ زراعتها في 4 h . فكم ساعة يحتاجان إليها إذا زرعا الحديقة معًا؟

مثال 8

حُلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$ ، وتحقق من صحة حلّك.

LCM للمقامات هو $x(x+2)$.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$3(x) + 1(x+2) = 0$$
$$3x + x + 2 = 0$$
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

تحقق:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2 - 2 = 0 \quad ✓$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار الفصل

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$

2) $\frac{m^2-4}{3m^2} \cdot \frac{6m}{2-m}$

3) $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3}$

4) $\frac{\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}}{\frac{x^2-1}{x^2-x-20}}$

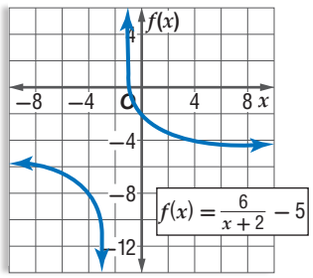
5) $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1}$

6) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$

7) $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$

8) $\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

9) حدِّد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالّة الممثلة بيانيًّا أدناه.



10) **اختيار من متعدد:** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالّة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$؟

A $x = -2$ **C** $x = 1$

B $x = -1$ **D** $x = 2$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

11) $f(x) = -\frac{8}{x} - 9$

12) $f(x) = \frac{2}{x+4}$

13) $f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$

14) $f(x) = \frac{5x}{x+1}$

15) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

16) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

17) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$.

18) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$.

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

19) $\frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$

20) $\frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$

21) $7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$

22) $r + \frac{6}{r} < 5$

23) $\frac{6}{7} - \frac{3}{2m-1} \geq \frac{11}{7}$

24) $\frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$

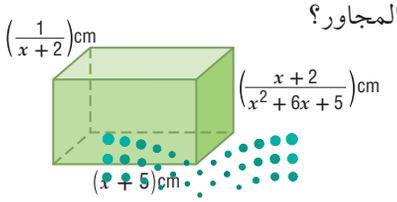
25) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$، فأوجد قيمة x عندما $y = -10$.

26) إذا كانت m تتغيّر طرديًّا مع n، وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$، فأوجد قيمة n عندما $m = 30$.

27) إذا كانت r تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع s و t. وكانت $s = 20$ عندما $r = 140$ و $t = -5$. فأوجد قيمة s عندما $r = 7$ و $t = 2.5$.

28) **دراجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية، فإن المسافة التي يقطعها تتناسب طرديًّا مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h، فكم ساعة يحتاج ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟

29) **هندسة:** ما حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور؟





التخمين والتحقق

من المهم جدًّا أن تأخذ الوقت المتبقي بعين الاعتبار في أثناء تقديم الاختبار المعياري. فإذا لاحظت أن الوقت سيدركك ولن تتمكن من إكمال الاختبار، أو أنك لا تعرف طريقة حل مسألة معينة في الاختيار، فإن استراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على اختيار الإجابة بسرعة.

استراتيجيات التخمين والتحقق

الخطوة 1

انظر بإمعان إلى الإجابات المحتملة، وقوّم معقولية كلٍّ منها، ثم احذف الإجابات غير المعقولة.

واسأل نفسك:

- هل هناك بدائل تبدو غير صحيحة بصورة واضحة؟
- هل هناك بدائل غير مناسبة؟
- هل هناك بدائل لا تحتوي على الوحدات المناسبة للمسألة؟

الخطوة 2

استعمل استراتيجية التخمين والتحقق للخيارات المتبقية.

- معادلات: إذا كانت المسألة تتعلق بحل معادلة معينة، فعوِّض قيم البدائل في المعادلة، ولاحظ صحة الإجابة من خطئها.
- **أنظمة المعادلات:** عوّض كل قيم المتغيرات المعطاة في البدائل بالنسبة لنظام من المعادلات، وتأكد من تحقيقها لجميع المعادلات.

الخطوة 3

اختر أحد البدائل، وتأكد ممَّا إذا كان يحقق جميع شروط المسألة، ثمّ حدد الإجابة الصحيحة.

- إذا لم يحقق البديل الذي اخترته شروط المسألة فانتقل إلى البديل المعقول التالي، ثم خمّن وتحقق.
- توقف عندما تجد الإجابة الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

ما حل المعادلة $\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{8}{x^2-9}$؟

A -1 **B** 1 **C** 5 **D** 7

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حل المعادلة النسبية هو عدد حقيقي. وبما أن البدائل الأربعة هي أعداد حقيقية، فإن كلًّا منها إجابة محتملة الاختيار، ويجب التحقق من كلٍّ منها. ابدأ بالبديل الأول، وتأكد مما إذا كان يحقق المعادلة النسبية أم لا، ثم انتقل إلى البديل التالي حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

خمن: -1	تحقق: $\frac{2}{(-1)-3}-\frac{4}{(-1)+3}=\frac{8}{(-1)^2-9}$ ✗ $-\frac{5}{2}\neq -1$
خمن: 1	تحقق: $\frac{2}{1-3}-\frac{4}{1+3}=\frac{8}{(1)^2-9}$ ✗ $-2\neq -1$
خمن: 5	تحقق: $\frac{2}{5-3}-\frac{4}{5+3}=\frac{8}{(5)^2-9}$ ✓ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

يكون الناتج جملة عددية صحيحة عندما $x = 5$ ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

1) ما حل المعادلة $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$ ؟

A $\frac{1}{10}$ **B** $\frac{1}{5}$

C $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{1}{2}$

2) أعمار: مجموع أعمار علي ومحمد ومحمود يساوي 40 سنة. إذا كان عُمر محمد يزيد على مثلَي عُمر محمود بسنة واحدة، وعُمر علي أكبر من عُمر محمد بثلاث سنوات، فما عُمر محمد؟

A 7 **B** 15

C 14 **D** 18

3) ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالّة $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{x+4}{3}$ ؟

A -5 **B** 4

C 3 أو 2 **D** 2 أو -5

4) مبيعات: تُباع النسخة الواحدة من إحدى المجلات بسعر 10 ريالات. وقد بيع من المجلة 400 نسخة بهذا السعر . فإذا زاد سعر النسخة الواحدة، فإن عدد النسخ المبيعة ينقص بمقدار 40 نسخة مقابل كل ريالين زيادة. فما سعر النسخة الواحدة الذي يحقق أكبر دخل؟

A 10 ريالات **B** 15 ريالًا

C 13 ريالًا **D** 20 ريالًا

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي :

1) فنادق: تتغيّر تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طرديًّا مع عدد أيام استئجارها كما هو موضَّح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	التكلفة (بالريال)
1	150
2	300
3	450
4	600

أيُّ المعادلات الآتية تمثل ذلك التغيُّر الطردي؟

A $y = x + 150$

B $y = 150x$

C $y = \frac{150}{x}$

D $y = 600x$

2) في أيِّ اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x}$، للحصول على التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

3) أيٌّ مما يأتي ليس خط تقارب للدالّة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$؟

A $y = 0$

B $x = -7$

C $x = 7$

D $y = 1$

4) ما أبسط صورة للكسر المركّب $\frac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$ ؟

A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

5) قيمة محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ تساوي:

A 77

B 45

C 13

D −77

6) ما حل المعادلة: $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$ ؟

A −13

B $\frac{7}{3}$

C 5

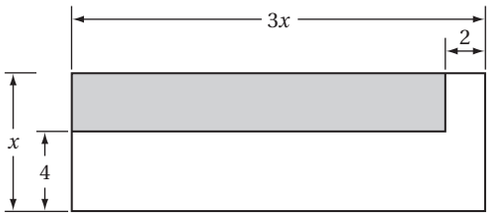
D 7

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه على صورة كثيرة حدود في أبسط صورة.



8) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y=12$ عندما $x=-3$، فأوجد قيمة y عندما $x=16$.

9) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y وعكسيًّا مع z، وكانت $z=26$ عندما $x=8$ و $y=13$، فأوجد قيمة z عندما $x=8$ و $y=-6$.

10) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y=4$ عندما $x=12$، فأوجد قيمة y عندما $x=5$.

11) يحتاج الحصان إلى 10 أرطال من العشب كلَّ يوم كي يكون في صحة جيدة.

a) اكتب صيغة تمثّل الكمية اللازمة من العشب لإطعام x حصانًا مدة d يومًا.

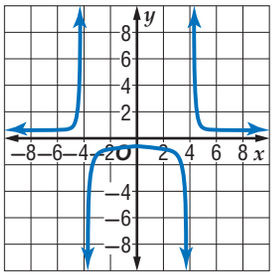
b) هل الصيغة التي وضعتها تُمثّل تغيّرًا طرديًّا أم مشتركًا أم عكسيًّا؟ فسّر إجابتك.

c) ما الكمية التي تحتاج إليها ثلاثة أحصنة خلال أسبوع؟

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضِّحا خطوات الحل :

12) استعمل التمثيل البياني للدالّة النسبية المجاور، وأوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالّة النسبية.



13) أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالّتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(x)=x^2$
$g(x)=x-5$

b) $f(x)=6-x^2$
$g(x)=2x^2+3x-5$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	5-5	5-3	5-3	5-1	مهارة سابقة	5-6	مهارة سابقة	5-5	5-5	5-5	5-5	5-4	مهارة سابقة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

الفصل 6

المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series



فيما سبق:

درست الأنماط الجبرية، والمتتابعات الحسابية بوصفها دوالّ خطية.

والآن:

- أستعمل المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- أجد مفكوك القوى باستعمال نظرية ذات الحدَّين.
- أبرهن جملًا رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

لماذا؟

بذور: تظهر المتتابعات بأشكال شتَّى، وطرائق مدهشة، كما في بعض البذور والأزهار والفواكه والخضراوات، فمثلًا تظهر متتابعة فيبوناشي الشهيرة في بذور تبّاع الشمس، بحيث يتكوّن الشكل الحلزوني المعروف بدوّامة فيبوناشي.

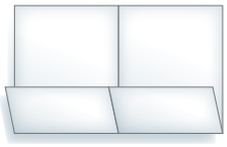
المطويات منظِّم أفكار

المتتابعات والمتسلسلات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المتتابعات والمتسلسلات، مبتدئًا بورقة واحدة A4.

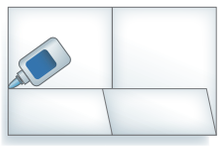
1. **اطوِ** الورقة من المنتصف كما في الشكل.



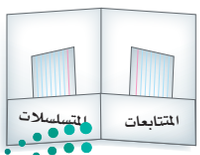
2. **أعد** الورقة إلى وضعها ثم اطوِ الجانب الأطول بمقدار 5 cm لعمل جيبٍ كما في الشكل.



3. **ألصق** الطرفين لعمل الجيب.



4. **ضع** عنوانًا لكل جانب كما في الشكل، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل السادس

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة"؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية: (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 3-6)

1) $-6 = 7x + 78$

2) $768 = 3x^4$

3) $23 - 5x = 8$

4) $2x^3 + 4 = -50$

5) **نباتات:** يريد أحمد أن يزرع 48 شتلة ورد في حديقته، بحيث يزرع في أحد جزأيها 12 شتلة، وفي الجزء الثاني يزرع كل أربع شتلات من الشتلات المتبقية في صف واحد. فما عدد الصفوف التي سيزرعها؟

مثّل كلًّا من الدوالّ الآتية بيانيًّا: (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 4-6)

6) $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

7) $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$

8) $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$

9) $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$

10) **حضانة:** تبلغ المصروفات الشهرية لإحدى دور الحضانة 14000 ريال، وتتقاضى الدار عن كل طفل 1000 ريال شهريًّا. والمعادلة $P(c) = 1000c - 14000$ تعبّر عن ربح الحضانة الشهري عندما تضمُّ c طفلًا. فما ربح الحضانة الشهري عندما يكون فيها 30 طفلًا؟

أوجد قيمة كلٍّ من العبارات الآتية عند قيم المتغيّرات المُعطَاة. (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 4-6)

11) $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9, b = -2, c = -8$

12) $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15, n = 5, t = -1$

13) $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2, y = \frac{1}{3}, z = 5$

14) $\frac{a(1 - bc)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3, b = -4, c = 1$

مراجعة سريعة

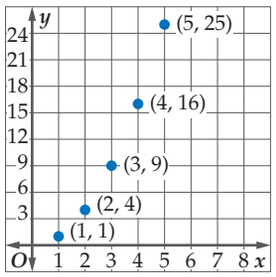
مثال 1

حُلّ المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$

$25 = 3x^3 + 400$	المعادلة الأصلية
$-375 = 3x^3$	اطرح **400** من الطرفين
$-125 = x^3$	اقسم الطرفين على **3**
$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$	خُذ الجذر التكعيبي للطرفين
$-5 = x$	بسّط

مثال 2

مثّل الدالّة: $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$ بيانيًّا. ثم حدِّد كلًّا من المجال والمدى.



مجال الدالّة هو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر المستقل (x). لذلك يكون مجال الدالّة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. أمّا مدى الدالّة فهو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر التابع (y) إذن مدى الدالّة هو المجموعة: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

مثال 3

إذا كانت $y = -3$ ، $x = -2$ ، فأوجد قيمة: $2 \cdot 3^{x+y}$

$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+(-3)}$	عوّض
$= 2 \cdot 3^{-5}$	بسّط
$= \frac{2}{3^5} = \frac{2}{243}$	تعريف القوّة السالبة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-1

المتتابعات بوصفها دوالّ
Sequences as Functions

فيما سبق:
درست الدوالّ الخطية والدوالّ الأسيّة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرّف المتتابعة الحسابية باعتبارها دالّة خطية.
- أتعرّف المتتابعة الهندسية باعتبارها دالّة أُسّية.

المفردات:
- **المتتابعة** sequence
- **الحدّ** term
- **المتتابعة المنتهية** finite sequence
- **المتتابعة غير المنتهية** infinite sequence
- **المتتابعة الحسابية** arithmetic sequence
- **أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك)** common difference
- **المتتابعة الهندسية** geometric sequence
- **أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة)** common ratio

لماذا؟



خلال أحد المهرجانات الكشفية، دخل المشاركون إلى الملعب في صفوف، بحيث كان عدد الأفراد في كلِّ صفٍّ كما يأتي: مشارك واحد في الصفِّ الأول، وثلاثة في الصفِّ الثاني، وخمسة في الصفِّ الثالث، وهكذا تستمر أعداد المشاركين على هذا النمط.

المتتابعات الحسابية: **المتتابعة** مجموعة من الأعداد مرتّبة في نمطٍ محدّدٍ أو ترتيب معين، ويُسمّى كلُّ عدد في المتتابعة **حدًّا**.

ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدّد من الحدود مثل: $2, 0, 2, 4, 6-$، أو **غير منتهية**، حيث تستمر إلى مالانهاية مثل ... $0, 1, 2, 3,$. ويُرمز للحدّ الأول في المتتابعة بالرمز a_1، وللحدّ الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

مفهوم أساسي — المتتابعات بوصفها دوالّ

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المتتابعة دالّة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

الرموز:

عناصر المجال:	1 2 3 ... n	ترتيب الحدّ
عناصر المدى:	a_1 a_2 a_3 ... a_n	حدود المتتابعة

أمثلة:

متتابعة منتهية	متتابعة غير منتهية
3, 6, 9, 12, 15	3, 6, 9, 12, 15, ...
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}	المجال: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها
المدى: {3, 6, 9, 12, 15}	المدى: مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3

يُحدّد كلُّ حدّ في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ الذي يسبقه مباشرة. وتُسمَّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتتابعة: 3, 6, 9, 12, 15 هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كلُّ حدٍّ على الحدّ الذي يسبقه بمقدار 3 .

$$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15$$

مثال 1 — تحديد المتتابعة الحسابية

بيِّن ما إذا كانت كلّ من المتتابعتين الآتيتين حسابية أم لا:

a) $5, -6, -17, -28, \ldots$

$$5 \xrightarrow{-11} -6 \xrightarrow{-11} -17 \xrightarrow{-11} -28$$

الفرق الثابت هو -11

المتتابعة حسابية

b) $-4, 12, 28, 42, \ldots$

$$-4 \xrightarrow{+16} 12 \xrightarrow{+16} 28 \xrightarrow{+14} 42$$

الفرق غير ثابت

المتتابعة ليست حسابية

تحقق من فهمك

1A) $7, 12, 16, 20, \ldots$

1B) $-6, 3, 12, 21, \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد حدودها.

مثال 2 تمثيل المتتابعة الحسابية بيانيًّا

في المتتابعة الحسابية: ... ,18, 14, 10

a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: لحساب أساس المتتابعة، اطرح أيَّ حدّ من حدود المتتابعة من الحدّ السابق له مباشرة. فأساس المتتابعة المعطاة هو $14 - 10 = -4$. ويُمثّل هذا العدد الفرق المشترك بين حدود المتتابعة.

الخطوة 2: لإيجاد الحدّ التالي، أضف -4 للحدّ الأخير المُعطَى.

وهكذا أضف -4 لكل حدّ من الحدود التالية.

$$10 \xrightarrow{+(-4)} 6 \xrightarrow{+(-4)} 2 \xrightarrow{+(-4)} -2 \xrightarrow{+(-4)} -6$$

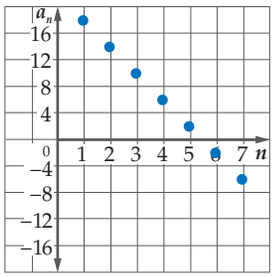
إذن الحدود الأربعة التالية للمتتابعة هي: $6, 2, -2, -6$

b) مثّل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانيًّا.

مجال المتتابعة هو المجموعة: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,....}

ومدى المتتابعة هو المجموعة: {18, 14, 10, 6, 2, −2, −6 ,....}

ولذلك تُمثَّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًّا بالشكل المجاور.



تحقق من فهمك

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... ,4, 11, 18
ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الحسابية

هو الفرق بين كلّ حدّين متتاليين (الحدّ – سابقه) ابتداءً من الحدّ الثاني .



لاحظ أن النقاط التي تُمثّل حدود المتتابعة الحسابية تقع على مستقيم واحد، ممّا يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالّة خطية مجالها أو متغيّرها المستقل هو رقم الحدّ n، ومداها أو متغيّرها التابع هو الحدّ a_n، والميل هو أساسها الذي هو الفرق الثابت.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد حدود المتتابعة الحسابية

المهرجانات الكشفية: بالعودة إلى بداية الدرس. أوجد عدد المشاركين الموجودين في الصف الرابع عشر.

افهم: بما أن الفرق الثابت بين كلِّ حدّ والحدّ السابق له هو 2، فإن أساس المتتابعة هو 2.

خطّط: اكتب قاعدة المتتابعة باستعمال صيغة الميل والنقطة.

افترض أن $(x_1, y_1) = (3, 5)$, $m = 2$. ثم حُلّ المعادلة عندما $x = 14$

حُلّ:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$m = 2$, $(x_1, y_1) = (3, 5)$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب
$y = 2x - 1$	اجمع 5 إلى كلٍّ من طرفَي المعادلة
$y = 2(14) - 1$	عوّض 14 مكان x
$y = 28 - 1 = 27$	بسّط

إذن عدد المشاركين في الصف الرابع عشر هو 27 مشاركًا.

تحقّق: يمكن إيجاد حدود المتتابعة بإضافة 2 لكل صفٍّ، بدءًا من الصفِّ الأول حتى نصل إلى الصفِّ الرابع عشر.

الربط بالحياة

في أغلب الاحتفالات العسكرية، يقوم المنظّمون بعمل ترتيبات خاصّة عند الافتتاح، ومنها على سبيل المثال دخول الفرق بطرق مختلفة.

تحقق من فهمك

3) نقود: ادّخر عامل في يوم ما 20 ريالًا من أجره اليومي، فإذا علمت أنه يدّخر في كل يوم 5 ريالات زيادة على اليوم السابق، فكم ريالًا يدَّخر في اليوم الثاني عشر؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

المتتابعة الهندسية: **المتتابعة الهندسية** نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أيِّ حدٍّ من حدودها بضرب الحدّ السابق له مباشرة في عدد ثابت يُسمّى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أيْ أنَّ كلَّ حدّ في المتتابعة هو 4 أمثال الحدّ السابق له مباشرة.

$\frac{1}{16}$ $\xrightarrow{\times 4}$ $\frac{1}{4}$ $\xrightarrow{\times 4}$ 1 $\xrightarrow{\times 4}$ 4 $\xrightarrow{\times 4}$ 16

تنبيه!

النسب

إذا وجدت نسبة أحد الحدود إلى الحدّ السابق له، فأوجد بقية النسب بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

هو النسبة بين كل حدّين متتاليين، الحدّ ÷ سابقه ابتداءً من الحدّ الثاني.

مثال 4 تحديد المتتابعة الهندسية

بيِّن ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

a) $-2, 6, -18, 54, \ldots$

أوجد النسبة بين كل حدّين متتاليين.

$\frac{54}{-18} = -3$, $\frac{-18}{6} = -3$, $\frac{6}{-2} = -3$

بما أن النسب متساوية، فإن المتتابعة هندسية.

b) $8, 16, 24, 32, \ldots$

$\frac{24}{16} = 1.5$, $\frac{16}{8} = 2$

بما أن النسبتين غير متساويتين؛ فإن المتتابعة ليست هندسية.

تحقق من فهمك

4A) $-8, 2, -0.5, 0.125, \ldots$ **4B)** $1, 3, 7, 15, \ldots$

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) لإيجاد حدود أخرى من حدود المتتابعة.

مثال 5 تمثيل المتتابعة الهندسية بيانيًّا

المتتابعة: $32, 8, 2, \ldots$ متتابعة هندسية.

a) أوجد الحدود الثلاثة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة أو النسبة المشتركة: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

الخطوة 2: لإيجاد الحدّ التالي، اضرب الحدّ السابق في العدد $\frac{1}{4}$

وهكذا بضرب كلِّ حدّ في العدد $\frac{1}{4}$ نحصل على الحدود الآتية.

2 $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{2}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{8}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{32}$

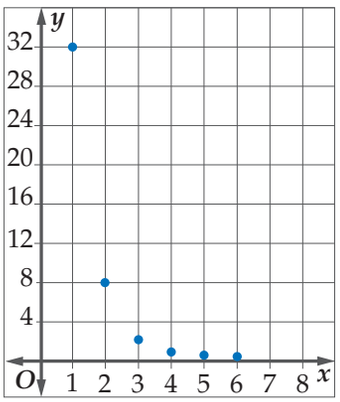
إذن الحدود الثلاثة التالية هي: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$

b) مثّل الحدود الستة الأولى في المتتابعة بيانيًّا.

مجال المتتابعة هو: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots.\}$

مدى المتتابعة هو: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots.\right\}$

ولذلك تُمثَّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًّا كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

5) أوجد الحدّين التاليين في المتتابعة الهندسية: $\ldots, 7, 21, 63$ ، ثم مثّل الحدود الخمسة الأولى بيانيًّا.

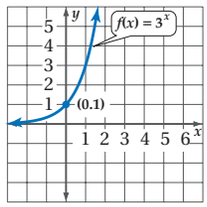
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تفحَّص الشكل في المثال 5. تلاحظ أن التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية أسّيٌّ وليس خطيًّا كما في المتتابعة الحسابية، وبالتالي فإنه يمكن تمثيل المتتابعة الهندسية بوصفها دالّة أسّية في الصورة $f(x) = r^x$، حيث r أساس المتتابعة الهندسية، و $r > 0$ و $r \neq 1$

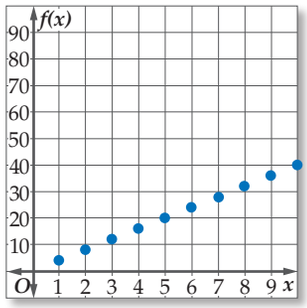
إرشادات للدراسة

الدالّة الأسّية

هي الدالّة التي تكون على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 0$, $b \neq 1$، وهي متصلة ومتباينة، ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ولها خطٌّ تقارب أفقي هو المحور x، ويمرُّ منحناها بالنقطة $(0, 1)$ دائمًا، فمثلًا $f(x) = 3^x$ دالّة أسّيّة تمثيلها البياني هو

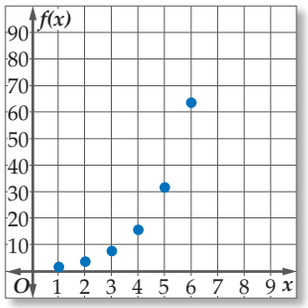


حسابية



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

هندسية



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

ويمكنك استعمال خصائص المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية في تصنيف المتتابعات.

مثال 6 تصنيف المتتابعات

حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

a) 16, 24, 36, 54, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$54 - 36 = 18$ $36 - 24 = 12$ ✗

أوجد النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين.

$\frac{54}{36} = \frac{3}{2}$ $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ ✓ $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

بما أن النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين ثابتة؛ فإن المتتابعة هندسية.

b) 1, 4, 9, 16, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$16 - 9 = 7$ $9 - 4 = 5$ ✗

أوجد النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين.

$\frac{16}{9} = 1.\overline{7}$ $\frac{9}{4} = 2.25$ ✗

بما أن الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين ليس عددًا ثابتًا، وكذلك النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين ليست ثابتة أيضًا؛ فإن المتتابعة ليست حسابية ولا هندسية.

c) 23, 17, 11, 5, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$5 - 11 = -6$ $11 - 17 = -6$ $17 - 23 = -6$ ✓

بما أن الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين ثابت؛ فإن المتتابعة حسابية.

تحقق من فهمك

6A) $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B)** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C)** $-4, 4, -5, -5, \ldots$

تأكد

مثال 1 بيِّن ما إذا كانت كلّ متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

1) $8, -2, -12, -22, \ldots$ **2)** $-19, -12, -5, 2, 9$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

3) $6, 18, 30, \ldots$ **4)** $15, 6, -3, \ldots$

مثال 3 **5)** **توفير:** يوفِّر سعيد 250 ريالًا شهريًّا، فإذا كان معه 1000 ريال في البداية، فأوجد ما يلي:

a) المبلغ الذي سيصبح معه بعد مرور 8 أشهُرٍ.

b) الوقت الذي يحتاج إليه ليصبح معه 7250 ريالًا، إذا استمر في التوفير بالطريقة ذاتها.

مثال 4 بيّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

6) $4, 12, 36, 108, \ldots$ **7)** $7, 14, 21, 28, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

8) $250, 50, 10, 2, \ldots$ **9)** $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

مثال 6 حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

10) $5, 1, 7, 3, 9, \ldots$ **11)** $200, -100, 50, -25, \ldots$ **12)** $12, 16, 20, 24, \ldots$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بيّن ما إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

13) $-9, -3, 0, 3, 9, \ldots$ **14)** $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

15) $-5, -11, -17, -23, \ldots$ **16)** $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$ **17)** $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots$

مثال 3 **18)** **تنظيم قاعات:** يوجد 28 مقعدًا في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات، وعدد المقاعد في كلِّ صفٍّ تالٍ يزيد بمقدار مقعدين عن الصف السابق. إذا كان في هذه القاعة 24 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا يوجد في الصف الأخير؟

19) **تمارين قوة:** يقوم عليٌّ ببعض التمارين الرياضية لاستعادة لياقته البدنية. ويُخطّط لاستعمال أحد الأجهزة الرياضية مدَّة 5 دقائق في اليوم الأول، ثم زيادة مدَّة الاستعمال بمعدَّل دقيقة وثلاثين ثانية يوميًّا.

a) ما مدَّة استعمال عليٍّ للجهاز في اليوم الثامن عشر؟

b) ما أول يوم سيستعمل فيه الجهاز مدَّة ساعة أو أكثر؟

c) هل يُعدّ استمرار عليٍّ في هذا النمط إلى مالا نهاية منطقيًّا؟ لماذا؟

مثال 4 بيِّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

20) $21, 14, 7, \ldots$ **21)** $-27, 18, -12, \ldots$ **22)** $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

23) $81, 108, 144, \ldots$ **24)** $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$ **25)** $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

مثال 6 حدد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

26) $3, 12, 27, 48, \ldots$ **27)** $1, -2, -5, -8, \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

28) $12, 36, 108, 324, \ldots$

29) $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$

30) $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$

31) $6, 9, 14, 21, \ldots$

32) قراءة: أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضمُّ 800 صفحة خلال العطلة الصيفية. فإذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام، فما عدد الصفحات التي عليها قراءتها يوميًّا، إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يوميًّا؟

33) نقص القيمة: تنقص قيمة سيَّارة ماجد بمعدل 15% سنويًّا. إذا كانت القيمة الحالية لسيارته 50000 ريال، فكم تكون قيمتها بعد 5 سنوات مقرّبًا الجواب إلى أقرب ريال؟

34) طيُّ الأوراق: عند طيِّ ورقة على نفسها، يتضاعف سُمكُها. فإذا كان سُمك ورقة 0.1 mm، وأمكن طيُّها 37 مرَّة، فكم يصبح سمكها؟



الربط بالحياة

تنقص قيمة السيارة عادة بمعدَّل 15% إلى 20% سنويًّا؛ وذلك اعتمادًا على نوع السيارة وعلى السائق.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) تحدٍّ: إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية يساوي 6، وحاصل ضربها يساوي -42، فما هذه الحدود؟

36) مسألة مفتوحة: أوجد ثلاث متتابعات تبدأ كلٌّ منها كما يأتي $3, 9, \ldots$. بحيث تكون إحداها حسابية، والثانية هندسية، والثالثة لا حسابية ولا هندسية.

37) تبرير: إذا كان أساس متتابعة هندسية يساوي r حيث $|r| < 1$، فماذا يحدث لحدود المتتابعة عندما تزداد قيمة n؟ ما الذي يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$؟

38) اكتب: صِفْ ما يحدث لحدود متتابعة هندسية عندما يصبح أساسها مثلَي قيمته، وما يحدث للحدود عندما يصبح الأساس نصف قيمته؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

39) إجابة قصيرة: صالة مستطيلة الشكل بُعدَاها 13 مترًا، و11 مترًا. أردنا وضع سجادة تغطِّيها كاملة، فأوجد سعر السجادة إذا كان سعر المتر المربع الواحد منها 60 ريالًا.

40) ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية التالية:

$8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$ ؟

A $\frac{11}{8}$ **B** $\frac{27}{16}$ **C** $\frac{9}{4}$ **D** $\frac{81}{32}$

مراجعة تراكمية

41) حُلّ المعادلة: $\frac{3}{x-3} + 9 = 10$ (الدرس 6-5)

أوجد معادلة المستقيم في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

42) المارّ بالنقطة $(4, 6)$، وميله 0.5 .

43) المارّ بالنقطتين $(3, 1), (8, -\frac{1}{2})$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الحسابية. (الدرس 1-6)

والآن:
- أجد حدود متتابعة حسابية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا حسابية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.

المفردات:
الأوساط الحسابية arithmetic means
المتسلسلة series
المتسلسلة الحسابية arithmetic series
المجموع الجزئي partial sum
رمز المجموع sigma notation

لماذا؟



في القرن الثامن عشر، طلب معلمٌ للرياضيات من طلابه في المرحلة الابتدائية أن يجدوا مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فقام أحد الطلاب واسمه كارل جاوس (Karl Gauss) بإعطاء الإجابة الصحيحة خلال ثوانٍ، مما أثار استغراب المعلم. وقد أصبح هذا الطالب "كارل جاوس" أحد أفضل علماء الرياضيات على مرِّ العصور.

لقد حلَّ جاوس هذا السؤال باستعمال المتسلسلات الحسابية.

المتتابعات الحسابية: لقد استعملت صيغة النقطة والميل في الدرس 1 – 6؛ لإيجاد قيمة حدّ معيّن في متتابعة حسابية. ويمكنك إيجاد معادلة تستطيع من خلالها إيجاد أيّ حدّ من حدود متتابعة حسابية باستعمال الأسلوب نفسه.

ففي المتتابعة الحسابية $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ التي أساسها d يكون:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ صيغة الميل والنقطة

$(a_n - a_1) = d(n - 1)$ $(x, y) = (n, a_n), (x_1, y_1) = (1, a_1), m = d$

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ اجمع a_1 للطرفين

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حدّ من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحدّ الأول والأساس.

مفهوم أساسي — **الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية**

أضف إلى مطويتك

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1، وأساسها d، حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستشتق هذه الصيغة في السؤال (58)

مثال 1 — **إيجاد حدّ معيَّن في متتابعة حسابية**

أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: 9 , 16 , 23 , 30 , ...

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة.

الفرق بين أيّ حدّين متتاليين: $16 - 9 = 7$

إذن $d = 7$

الخطوة 2: أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$ $a_1 = 9, d = 7, n = 12$

$= 9 + 77 = 86$ بسّط

تحقق من فهمك

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(1A) a_n علمًا بأن: $a_1 = -4, d = 6, n = 9$

(1B) a_{20} علمًا بأن: $a_1 = 15, d = -8$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغةٍ للحدّ النوني في هذه المتتابعة.

مثال 2 كتابة صيغة الحدّ النوني لمتتابعة حسابية

اكتب صيغة للحدّ النوني للمتتابعة الحسابية في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) $5, -13, -31, \ldots$

$d = -13 - 5 = -18$ والحدّ الأول 5

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_n = 5 + (n-1)(-18)$	$a_1 = 5$ و $d = -18$
$a_n = -18n + 23$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

b) $a_5 = 19,\ d = 6$

الخطوة 1: أوجد قيمة a_1

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$19 = a_1 + (5-1)(6)$	$a_5 = 19,\ n = 5,\ d = 6$
$-5 = a_1$	اضرب، ثم اطرح 24 من الطرفين

الخطوة 2: كتابة الصيغة.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة
$a_n = -5 + (n-1)(6)$	$a_1 = -5$ و $d = 6$
$a_n = 6n - 11$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

تحقق من فهمك

2A) $12, 3, -6, \ldots$

2B) $a_6 = 12,\ d = 8$

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحلّ

تحقّق من صحة الحلّ، باستعمال صيغة الحدّ النوني التي أوجدتها لحساب الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة.

تنبيه!

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقّق دائمًا من أن صيغة الحدّ النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدَّان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمّى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدّين **أوساطًا حسابية**، ويمكنك استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بينهما.

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي

هو معدَّل عددين أو أكثر. الوسط الحسابي بين العددين a, b يساوي $\frac{a+b}{2}$

الأوساط الحسابية

هي الحدود الواقعة بين أيّ حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $-8, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 22$

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحدّ الأول والحدّ الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة هو $6 = 4 + 2$، إذن $n = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$22 = -8 + (6-1)\,d$	$a_1 = -8,\ a_6 = 22,\ n = 6$
$30 = 5d$	أضِف 8 إلى الطرفين، ثم بسّط
$6 = d$	اقسم الطرفين على 5

الخطوة 3: استعمل d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.

$$-8 \xrightarrow{+6} \mathbf{-2} \xrightarrow{+6} \mathbf{4} \xrightarrow{+6} \mathbf{10} \xrightarrow{+6} \mathbf{16} \xrightarrow{+6} 22$$

إذن الأوساط الحسابية هي $-2, 4, 10, 16$

تحقق من فهمك

3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين $-18, 36$

المتسلسلات الحسابية: يمكنك الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة؛ لذا فالمتسلسلة **الحسابية** هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة **المجموع الجزئي**، ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي

المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1, a_n, n	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
بالصيغة البديلة	a_1, d, n	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لابد من إيجاد إحدى القيم n, a_n, a_1 ، قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحدّ النوني.

مثال 4 استعمال صيغ المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$

الخطوة 1: $a_1 = 12\ ,\ a_n = 180\ ,\ d = 19 - 12 = 7$

يجب إيجاد قيمة n أولًا كي نجد المجموع.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$180 = 12 + (n-1)(7)$	$a_n = 180, a_1 = 12, d = 7$
$168 = 7n - 7$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط
$25 = n$	حُلَّ المعادلة

الخطوة 2: استعمل إحدى الصيغتين لحساب S_n .

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	صيغة المجموع
$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$	$n = 25, a_1 = 12, d = 7$
$S_{25} = 12.5(192) = 2400$	بسّط

تحقق من فهمك

(4A) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

(4B) $n = 16, a_n = 240, d = 8$

يمكنك استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتتابعة الحسابية.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $S_n = 430,\ a_n = 79,\ a_1 = 7$

الخطوة 1: أوجد قيمة n .

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$430 = \frac{n}{2}(7 + 79)$	$S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79$
$430 = \frac{n}{2}(86)$	اجمع
$430 = n(43)$	بسّط
$10 = n$	اقسم طرفَي المعادلة على 43

إرشادات للدراسة

صيغتا المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ بالصيغة العامة؛ لأنه تم التوصل إليها اعتمادًا على تعريف المتتابعة الحسابية، وباستعمال حدودها بشكل عام، بينما سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ بالصيغة البديلة؛ لأنها تشتق من الصيغة العامة، ويمكن استعمالها بديلًا عن الصيغة العامة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الخطوة 2: أوجد قيمة d .

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية
$79 = 7 + (10-1)d$	$a_n = 79, a_1 = 7, n = 10$
$72 = 9d$	اطرح 7 من طرفي المعادلة
$8 = d$	اقسم طرفي المعادلة على 9

الخطوة 3: استعمل d لحساب كلٍّ من a_2 , a_3 .

$a_2 = 7 + 8 = 15$ ، $a_3 = 15 + 8 = 23$

إذن الحدود الثلاثة الأولى هي 7, 15 , 23

تحقق من فهمك

(5A) $S_n = 120, n = 8, a_n = 36$ **(5B)** $a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280$

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال **رمز المجموع**.

مفهوم أساسي — رمز المجموع

أضف إلى مطويتك

الرموز: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ — صيغة حدود المتسلسلة — أول قيمة لـ k — آخر قيمة لـ k

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \ldots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

يقرأ الرمز $\sum$ "سيجما"، وهو اسم لأحد الحروف اليونانية الكبيرة.

مثال 6 على اختبار

أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$

A 846 **B** 910 **C** 975 **D** 1008

المتسلسلة المعطاة حسابية؛ لأن كلَّ حدّ يزيد على الحدّ السابق له بمقدار 6،

ويوجد فيها 15 حدًّا $(n = 15)$؛ لأن $n = 18 - 4 + 1$

$a_1 = 6(4) - 1 = 23$ ، $a_n = 6(18) - 1 = 107$

أوجد المجموع

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$S_{15} = \frac{15}{2}(23 + 107)$	$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107$
$S_{15} = \frac{15}{2}(130) = 975$	بسّط

إذن رمز الإجابة الصحيحة هو **C** .

إرشادات للدراسة

عدد الحدود

المتسلسلة المكتوبة باستعمال رمز المجموع $\sum_{k=a}^{b} f(k)$ عدد حدودها يساوي $b - a + 1$

تحقق من فهمك

6) أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$

A 972 **B** 1053 **C** 1281 **D** 1701

تأكـد

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

1) a_n علماً بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$

2) a_{18} في المتتابعة: $12, 25, 38, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني لكلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

3) $13, 19, 25, \ldots$

4) $a_5 = -12, d = -4$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 42$

6) $-4, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية فيما يأتي:

7) أول 50 عددًا طبيعيًّا

8) $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$

9) $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$

10) $a_n = 145, d = 5, n = 21$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

11) $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$

12) $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$

مثال 6 **13)** **اختيار من متعدد:** أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$.

A 45

B 78

C 342

D 410

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

14) a_n علمًا بأن: $a_1 = -18, d = 12, n = 16$

15) a_n علمًا بأن: $a_1 = -12, n = 66, d = 4$

16) a_{15} في المتتابعة $-5, -12, -19, \ldots$

17) a_{24} في المتتابعة $8.25, 8.5, 8.75, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ متتابعة حسابية فيما يأتي:

18) $24, 35, 46, \ldots$

19) $a_5 = 1.5, d = 4.5$

20) $9, 2, -5, \ldots$

21) $a_6 = 22, d = 9$

22) $a_8 = -8, d = -2$

23) $-12, -17, -22, \ldots$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

24) $24, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -1$

25) $-6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 49$

26) $-28, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 7$

27) $84, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 39$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 4 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

28) أول 100 عدد زوجي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

29) أول 200 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

30) $-18 + (-15) + (-12) + \ldots + 66$

31) $-24 + (-18) + (-12) + \ldots + 72$

32) $a_1 = -16, d = 6, n = 24$

33) $n = 19, a_n = 154, d = 8$

34) **مسابقات ثقافية:** في إحدى المسابقات الثقافية تم تخصيص جوائز تصاعدية للإجابة الصحيحة عن أسئلة المسابقة، فخُصِّص للسؤال الأول 100 ريال، وتزيد قيمة الجائزة 50 ريالًا للسؤال التالي، وهكذا. إذا شارك سعد في المسابقة، وأجاب عن 11 سؤالًا بصورة صحيحة، فما مجموع مبلغ الجائزة الذي يستحقُّه؟

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

35) $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$

36) $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$

37) $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$

38) $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$

مثال 6 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

39) $\sum_{k=1}^{16}(4k-2)$

40) $\sum_{k=4}^{13}(4k+1)$

41) $\sum_{k=5}^{16}(2k+6)$

42) $\sum_{k=0}^{12}(-3k+2)$



43) **قرض حسن:** اقترض عليٌّ مبلغًا من المال من أحد أصدقائه، واتفقا على أن يقوم بتسديده مقسَّطًا كما يأتي: القسط الأول 50 ريالًا، وكل قسط تالٍ يزيد على القسط السابق بمقدار 25 ريالًا. فإذا علمت أن عدد الأقساط هو 12، فما قيمة القرض؟

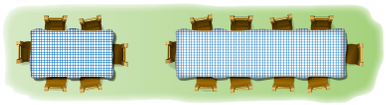
استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية؛ لكتابة معادلة تُمثّل الحدّ النوني لكل متتابعة حسابية:

44) الحدّ رقم 100 في المتتابعة يساوي 245، وأساس المتتابعة يساوي 13 .

45) الحدّ الحادي عشر في المتتابعة يساوي 78، وأساس المتتابعة يساوي -9 .

46) الحدّ الخامس والعشرون في المتتابعة يساوي 121، والحدّ الثمانون يساوي 506 .

47) **تنظيم:** تُصفّ الطاولات المستطيلة الشكل في قاعات الاحتفالات متجاورةً لتُشكّل طاولة كبيرة. ويُبيّنُ الشكل المجاور عدد الأشخاص الذين يمكن توزيعهم على التشكيلين الأول والثاني من الطاولات.



a) ارسم شكلًا يُبيّن عدد الأشخاص على الطاولات في كلٍّ من الحدود الثلاثة التالية (بإضافة طاولة كلَّ مرَّة).

b) اكتب معادلة تُمثّل الحدّ النوني في هذا النمط.

c) هل من الممكن ترتيب الطاولات بهذه الطريقة، بحيث يستطيع 100 شخص الجلوس؟ وضّح إجابتك.

الربط بالحياة

يجب على الإنسان أن يكتب عقدًا بينه وبين من يقرضه المال، عملًا بقوله تعالى في سورة البقرة: ﴿يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا تَدَايَنتُم بِدَيۡنٍ إِلَىٰٓ أَجَلٖ مُّسَمّٗى فَٱكۡتُبُوهُۚ ... ﴿٢٨٢﴾﴾

48) جاذبية: عندما يسقط جسم سقوطًا حرًّا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ومع إهمال مقاومة الهواء، فإنه يقطع مسافة 16 قدمًا في الثانية الأولى، و48 قدمًا إضافية في الثانية الثانية، و80 قدمًا إضافية في الثانية الثالثة، وهكذا. ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 ثوانٍ؟

49) دخل سنوي: إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة في السنة الأولى 92000 ريال، ويزيد سنويًّا بمقدار 16000 ريال، ففي أيّ سنة يصبح دخلها 380000 ريال؟

50) رياضة: خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يُخطّط فيصل للتدرّب على الجري لمسافة 3 أميال يوميًّا في الأسبوع الأول، ومن ثَمَّ يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف ميل أسبوعيًّا.

a) اكتب معادلة للحدّ النوني لهذه المتتابعة.

b) إذا استمر فيصل بالتدرّب على هذا النمط، ففي أيِّ أسبوع يصل إلى قطع مسافة 10 أميال يوميًّا؟

c) هل يُعدّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيًّا؟ وضّح إجابتك.



الربط بالحياة

رياضة الجري تفيد في إنقاص الوزن، وتقوية المفاصل والعضلات، وتحسين عمل القلب والأوعية الدموية، والتخلص من الإرهاق والتوتر، ورفع مستوى اللياقة البدنية والصحة العامة.

51) تمثيلات متعددة: معتبرًا $\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$ أجب عما يأتي:

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا للمجاميع الجزئية للمتسلسلة، حيث $1 \le k \le 10$.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا المجاميع الجزئية التي أوجدتها في الفرع **a**، وذلك بتمثيل النقاط (k, S_k) .

c) بيانيًّا: مثّل الدالّة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0 \le x \le 10$.

d) لفظيًّا: ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟

e) تحليليًّا: ماذا تستنتج حول العلاقة بين التمثيل البياني للدالّة التربيعية والتمثيل البياني لمجموع المتسلسلة الحسابية؟

f) جبريًّا: أوجد المتسلسلة الحسابية التي يكون فيها التمثيل البياني للمجاميع الجزئية (k, S_k) هو نفسه للدالّة $g(x) = x^2 + 8x$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

52) $\sum_{k=3}^{x}(6k-5) = 928$

53) $\sum_{k=5}^{x}(8k+2) = 1032$

مسائل مهارات التفكير العليا

54) تبرير: إذا كان a هو الحدّ الثالث في متتابعة حسابية، وb هو الحدّ الخامس، وc هو الحدّ الحادي عشر، فعبّر عن c بدلالة a, b .

55) تحدٍّ: يوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين a, b في متتابعة حسابية. إذا كان الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة 16، فأوجد الوسط الحسابي للعددين a, b.

56) مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة حسابية فيها 8 حدود، ومجموعها 324 .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

57) اكتب: بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعات الحسابية والمتسلسلات الحسابية.

58) صيغ: اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية.

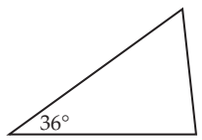
59) صيغ: اشتقّ قاعدة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية، بحيث لا تحتوي على a_1.

60) صيغ: اشتقّ الصيغة البديلة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية؛ باستعمال الصيغة العامة للمجموع.

61) تحدّ: بالعودة إلى فقرة "لماذا ؟" ما الطريقة التي استعملها كارل جاوس في إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100؟ (يمكنك البحث في الإنترنت).

تدريب على اختبار

62) تُشكّل قياسات زوايا المثلّث أدناه متتابعة حسابية. إذا كان قياس الزاوية الصغرى $36°$، فما قياس الزاوية الكبرى؟



A $75°$ **B** $84°$

C $90°$ **D** $97°$

63) العبارة $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ تكافئ:

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$ **B** $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$

C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$ **D** $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

مراجعة تراكمية

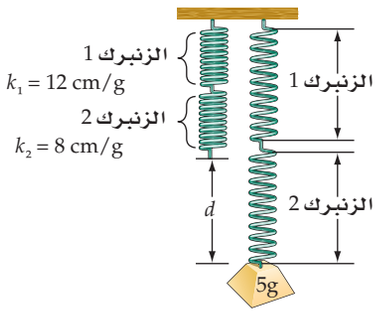
حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية أم لا. أجب "بنعم" أو "لا" : (الدرس 1-6)

64) $-6, 4, 14, 24, \ldots$

65) $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

66) $10, 8, 5, 1, \ldots$

67) فيزياء: ترتبط المسافة التي يستطيل فيها الزنبرك بالكتلة المعلّقة فيه. ويعبَّر عن هذه العلاقة بالقاعدة $d = km$ ، حيث d المسافة، وm الكتلة، وk ثابت الزنبرك. وعند وصل زنبركين لهما الثابتان k_1, k_2 على التوالي، فإن ثابت الزنبرك k الناتج، يُحسب باستعمال المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. (الدرس 5-6)



a) إذا وُصِل زنبركان على التوالي، وكان ثابت الزنبرك الأول $12\,cm/g$، وثابت الزنبرك الثاني $8\,cm/g$ ، فأوجد ثابت الزنبرك الناتج.

b) إذا عُلّقت كتلة مقدارها 5 جرامات (كما في الشكل) فما مقدار استطالة الزنبركين؟

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

68) $2 \cdot 3^6$

69) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

70) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الهندسية. (الدرس 1-6)

والآن:
- أجد حدود متتابعة هندسية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا هندسية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

المفردات:
الأوساط الهندسية
geometric means
المتسلسلة الهندسية
geometric series

لماذا؟



خلال بحثه في الإنترنت، وجد "أحمد" موضوعًا عن العلاج بالأعشاب، فقام بإرساله إلى خمسة من أصدقائه عن طريق البريد الإلكتروني، ومن ثم قام كلٌّ واحد منهم بإرسال الموضوع إلى خمسة أصدقاء آخرين، وهكذا قام كلٌّ من استلم البريد بإرساله إلى خمسة أصدقاء جُدُدٍ. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط، فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

المتتابعات الهندسية: كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحدِّ النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أيِّ حدٍّ من حدودها.

مفهوم أساسي — **الحد النوني في المتتابعة الهندسية**

أضف إلى مطويتك

تُستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1، وأساسها r، حيث n عدد طبيعي:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ستتشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (39)

مثال 1 من واقع الحياة — **إيجاد الحدّ النوني في متتابعة هندسية**

بريد إلكتروني: في المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، ما عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسَلة في المرحلة الثامنة؟

افهم: تريد إيجاد عدد الرسائل في المرحلة الثامنة، حيث أرسل أحمد خمس رسائل في المرحلة الأولى، وفي المرحلة الثانية أرسل كلُّ شخص من الخمسة الرسالة إلى خمسة أشخاص آخرين، وهكذا (مع مراعاة أن كلَّ شخص استلم رسالة واحدة).

خطط: يُشكّل عدد الرسائل المرسلة في كلِّ مرحلة متتابعة هندسية أساسها $r = 5$، لذا استعمل صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.

حُلّ:

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية — $a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_1 = 5, r = 5, n = 8$ — $a_8 = 5(5)^{8-1}$

$5^7 = 78125$ — $a_8 = 5(78125) = 390625$

وعليه فإن عدد الرسائل المرسلة في المرحلة الثامنة هو 390625 رسالة.

تحقّق: اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة، بالضرب في أساس المتتابعة.

$5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625$

تحقق من فهمك

1) أمطار: في أثناء هطول الأمطار ونزولها من أعلَى تلّةٍ إلى أحد الوديان، صنعت الأمطار مجرًى لها في الوادي طوله 40 in ، إذا كان هذا المجرى يتسع كلّ يومٍ ثلاثة أمثال اليوم السابق له، فكم سيبلغ اتساع المجرى في اليوم الخامس في حالة استمرار هطول الأمطار بهذا المنوال؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية، فإنه يمكنك إيجاد صيغة الحدّ النوني لها.

مثال 2 كتابة صيغة الحد النوني لمتتابعة الهندسية

اكتب صيغة الحدّ النوني لكل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

(a $0.5, 2, 8, 32, \ldots$

الحدّ الأول 0.5، والأساس r يُستخرج كما يأتي: $r = \frac{8}{2} = 4$

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_1 = 0.5, r = 4 \quad a_n = 0.5(4)^{n-1}$

(b $a_4 = 5, r = 6$

الخطوة 1: إيجاد a_1

الحد النوني في المتتابعة الهندسية $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = 5, r = 6, n = 4 \quad 5 = a_1(6^{4-1})$

أوجد قيمة 6^3 ثم اقسم عليها $\quad \frac{5}{216} = a_1$

الخطوة 2: كتابة الصيغة

الحد النوني في المتتابعة الهندسية $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_1 = \frac{5}{216}, r = 6 \quad a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$

تحقق من فهمك

(2A $-0.25, 2, -16, 128, \ldots$

(2B $a_3 = 16, r = 4$

وكما في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الواقعة بين حدَّين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2, 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحدِّ الأول والحدِّ الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $2 + 3 = 5$ ، ولذلك يكون $n = 5$.

الخطوة 2: أوجد قيمة r

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = 1250, a_1 = 2, n = 5 \quad 1250 = 2r^{5-1}$

اقسم الطرفين على 2، ثم أوجد الجذر الرابع $\quad \pm 5 = r$

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$2 \xrightarrow{\times 5} 10 \xrightarrow{\times 5} 50 \xrightarrow{\times 5} 250 \xrightarrow{\times 5} 1250$ أو $2 \xrightarrow{\times -5} -10 \xrightarrow{\times -5} 50 \xrightarrow{\times -5} -250 \xrightarrow{\times -5} 1250$

إذن الأوساط الهندسية هي : $-10, 50, -250$ أو $10, 50, 250$

تحقق من فهمك

(3 أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين 0.5 , 512

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

يمكن بسهولة استنتاج قاعدة تساعد على إيجاد أساس المتتابعة الهندسية (r) إذا عُلم حدَّان من حدودها a_n , a_m

$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$

المتسلسلات الهندسية: يمكنك الحصول على **المتسلسلة الهندسية** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة الهندسية. ويُرمز لمجموع أول n حدًّا في المتسلسلة بالرمز S_n. ويمكنك إيجاده باستعمال أيٍّ من الصيغتين الآتيتين:

مفهوم أساسي — المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n, r	$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

مثال 4 من واقع الحياة — إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

بريد إلكتروني: **بالعودة إلى المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، إذا استمر النمط، فما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المُرسَلة حتى نهاية المرحلة الثامنة؟**

أُرسلت خمس رسائل إلكترونية في المرحلة الأولى، ولدينا 8 مراحل من الرسائل.

إذن $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{5(1-5^8)}{1-5}$ $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_8 = 488280$ بسّط

إذن مجموع الرسائل المرسَلة حتى 8 مراحل هو : 488280 .

تحقق من فهمك

4) بكتيريا: ينمو أحد أنواع البكتيريا في وسط غذائي، بحيث ينقسم إلى جزأين ثم إلى أربعة، ثم إلى ثمانية وهكذا. إذا بدأ مجتمع هذا النوع من البكتيريا بعدد 10، فما مجموع البكتيريا فيه بعد 8 انقسامات؟

وكما في المتسلسلات الحسابية، فإنه يمكنك استعمال رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الهندسية.

تنبيه!

رمز المجموع

لاحظ في المثال 5 أنه طُلب إيجاد المجموع من الحدّ الثالث إلى الحدّ العاشر.

مثال 5 — المجموع باستعمال رمز المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$

لاحظ أن المتسلسلة المُعطاة هندسية؛ لأن صيغة حدودها $4(2)^{k-1}$ مُعطاة بدالّة أُسيّة، إذن $r = 2$ ،

والآن أوجد قيمة كلٍّ من n ، a_1 ، ولإيجاد الحدّ الأول عوِّض العدد 3 مكان k، ويستخرج كما يأتي:

$a_1 = 4 \cdot 2^{3-1} = 16$ ، وأساس المتسلسلة الهندسية هو r ، حيث $r = 2$.

وعدد الحدود هو : $10 - 3 + 1 = 8$ إذن $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{16(1-2^8)}{1-2}$ $a_1 = 16, r = 2, n = 8$

$= 4080$ استعمل الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك

5A) $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

5B) $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكنك استعمال صيغة مجموع حدود المتسلسلة الهندسية لإيجاد قيمة حدٍّ معيَّن من حدود المتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحدّ الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = 13116,\ n = 7,\ r = 3$

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$	صيغة المجموع
$13116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$	$S_n = 13116,\ r = 3,\ n = 7$
$13116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$	استعمل خاصية التوزيع
$13116 = \frac{-2186a_1}{-2}$	اطرح
$13116 = 1093a_1$	بسِّط
$12 = a_1$	اقسم الطرفين على 1093

تحقق من فهمك

6) أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = -26240,\ n = 8,\ r = -3$

تأكد

مثال 1

1) فيروسات: اخترق فيروس حاسوبًا، فأتلف أحد ملفاته، فإذا كانت الملفات التي يُتلفها الفيروس تتضاعف كلَّ دقيقة، فما مجموع الملفات التي سيُتلفها الفيروس بعد 15 دقيقة، إذا لم تتمّ السيطرة عليه؟

مثال 2

اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

2) $2, 4, 8, \ldots$ **3)** $-4, 16, -64, \ldots$ **4)** $a_2 = 4,\ r = 3$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $0.25, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 64$ **6)** $0.20, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 125$

مثال 4

7) تدريب: قامت شركة تعمل في مجال التطوير بإرسال 4 من خبرائها إلى بعض الدوائر التعليمية؛ لتدريب العاملين في هذه الدوائر على كيفية استخدام وتوظيف التكنولوجيا في تدريس المناهج، فقام كلٌّ خبيرٍ منهم بتدريب 3 من مشرفي هذه الإدارات، وبدورهم قام كلُّ مشرفٍ منهم بتدريب 30 آخرين وهكذا ...
إذا استمر هذا النمط، فما مجموع المتدرِّبين الذين سيتم تدريبهم حتى المرحلة السادسة؟

مثال 5

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

8) $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$ **9)** $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

مثال 6

أوجد a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6$ **11)** $S_n = 1020, a_n = 4, r = \frac{1}{2}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

مثال 1

12) طقس: نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأول 3 cm ، فإذا كانت الزيادة في كلّ يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كلٍّ من الأيام الأربعة التالية، فكم سنتمترًا ارتفع منسوب المياه في البركة في اليوم الخامس؟

أوجد a_n في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

13) $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

14) $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

مثال 2

اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

15) $-3, 6, -12, \ldots$

16) $-1, 1, -1, \ldots$

17) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

18) $a_3 = 28, r = 2$

19) $a_4 = -8, r = 0.5$

20) $a_6 = 0.5, r = 6$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

21) $810, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 10$

22) $\frac{7}{2}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \frac{56}{81}$

23) أوجد وسطين هندسيين بين العددين -2 , 16



مثال 4

24) بندول: يقطع بندول مسافة 30 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول في 30 اهتزازة.

الربط بالحياة

يستعمل البندول البسيط في الساعات البندولية، ويهتزُّ اهتزازات منتظمة تقريبًا.

والاهتزازة الواحدة تعني حركة البندول جيئة وذهابًا حول موضع اتزانه.

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

25) $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

26) $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

27) $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

مثال 5

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

28) $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

29) $\sum_{k=1}^{8} (-3)(-2)^{k-1}$

30) $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 6

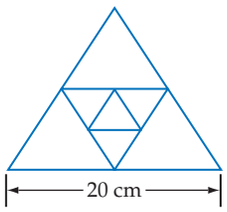
أوجد قيمة a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

31) $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

32) $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

33) علوم: ارتفع منطاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من إطلاقه مسافة 100 ft. وكان ارتفاعه بعد كلّ دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% على ارتفاعه في الدقيقة السابقة. أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 دقائق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



34) هندسة: في الشكل المجاور، طول ضلع المثلَّث الخارجي المتطابق الأضلاع يساوي ضعف طول ضلع المثلَّث الداخلي الذي تنصِّف رؤوسه أضلاع المثلَّث الخارجي. إذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فما مجموع أطوال محيطات المثلَّثات الثمانية الأولى في النمط؟

35) معالجة المياه: يقوم نظام معيَّن لفلترة وتنقية المياه بإزالة 70% من الشوائب في أثناء مرور عيّنة مياه خلاله. فإذا مرّت عيّنة مياه تحتوي 900 mg من الشوائب في النظام أربع مرات، فما كمية الشوائب المتبقّية في العيّنة؟

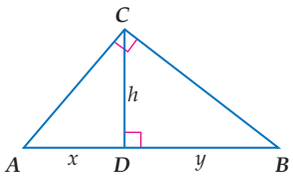
مسائل مهارات التفكير العليا

36) برهان: اشتقّ الصيغة البديلة للمجموع الجزئي في متسلسلة هندسية.

37) برهان: اشتقّ صيغة للمجموع الجزئي **لا** تتضمّن a_1

38) تبرير: وضّح التغيير الذي يجب أن تجريه على $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$، للحصول على المتسلسلة نفسها إذا غيّرت $k = 1$ إلى $k = 0$. ووضّح إجابتك.

39) صيغ: اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.



40) تحدٍّ: استعمل حقيقة أن h هي الوسط الهندسي بين x, y في الشكل المجاور في إيجاد قيمة h^4 بدلالة x, y

41) مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة هندسية فيها 6 حدود، ومجموعها 252 .

42) اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت المتسلسلة هندسية، أم حسابية، أم أنها لا حسابية و لا هندسية، أم كليهما.

تدريب على اختبار

43) إذا كان الحدّ الأول في متسلسلة هندسية 5، وأساسها 2، ومجموعها 1275، فما عدد حدودها؟

A 5 **C** 7

B 6 **D** 8

44) إجابة قصيرة: عند أحمد مبلغ من المال، يصرف نصفه في الشهر الأول، ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا. إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر هو 2000 ريال، فما المبلغ الأصلي؟

مراجعة تراكمية

45) نقود: اشترى عبدالعزيز جهاز تلفاز ودفع 400 ريال مقدمًا، على أن يدفع الباقي على أقساط شهرية مدة سنة ونصف. فإذا كانت قيمة القسط الواحد 200 ريال، فما المبلغ الذي سيدفعه ثمنًا للجهاز؟ (الدرس 6-2)

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضّح إجابتك: (الدرس 6-1)

46) $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \ldots$

47) $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \ldots$

48) $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \ldots$

49) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z، فأوجد قيمة y عندما $z = -5, x = 9$، علمًا بأن $y = -90$ عندما $z = 15$ ، $x = -6$. (الدرس 5-5)

50) أوجد قيمة المقدار $\frac{a-c}{a+c}$ إذا علمت أن $a = -2, c = -12$. (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

اختبار منتصف الفصل

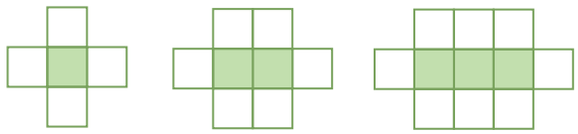
الدروس 6-1 إلى 6-3

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1) $5, -3, -12, -22, -33 \ldots$

2) $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5} \ldots$

3) هندسة: الأشكال أدناه تُمثّل نمطًا من المربعات المظللة والمربعات غير المظلّلة.



الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

a) اكتب معادلة تُمثّل عدد المربعات غير المظللة (الحدّ النوني) في هذا النمط.

b) هل يمكن الحصول على 84 مربعًا (غير مظلّل) بالضبط في هذا النمط؟

أوجد الحدّ التاسع في كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

4) $a_1 = 10, d = -5$

5) $a_1 = -8, d = 4$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

6) $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$

7) $a_1 = -12, d = 8, n = 22$

8) ما مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ ؟

9) اختيار من متعدد: ما مجموع أول 50 عددًا فرديًّا في الأعداد الطبيعية؟

A 625

B 2500

C 2499

D 2401

أوجد الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$

11) $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$

12) اختيار من متعدد: ما الأوساط الهندسية في المتتابعة أدناه؟

$0.5, __?__, __?__, __?__, 2048$

A 512.375, 1024.25, 1536.125

B $-683, 1365.5, -2048$ أو $683, 1365.5, 2048$

C $-2, 8, -32$ أو $2, 8, 32$

D $-4, 32, -256$ أو $4, 32, 256$

13) دخل: يعمل فريد في شركة بناء مدة 4 أشهر في السنة. إذا كان راتبه في البداية 5200 ريال في الشهر، وتزيد الشركة راتبه بمعدل 5% شهريًّا. فما المبلغ الذي سيحصل عليه في هذه الأشهر الأربعة؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

14) $\sum_{k=1}^{8} 3 \cdot 2^{k-1}$

15) $\sum_{k=1}^{9} 4 \cdot (-1)^{k-1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

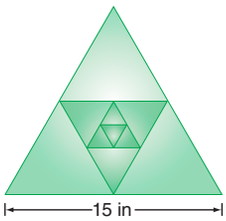
6-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية
Infinite Geometric Series

فيما سبق:
درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية. (الدرس 3-6)

والآن:
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (لانهائية).
- أكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

المفردات:
المتسلسلة الهندسية اللانهائية
infinite geometric series
المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية
partial sum
المتسلسلة المتقاربة
convergent series
المتسلسلة المتباعدة
divergent series
مالانهاية
infinity

لماذا؟



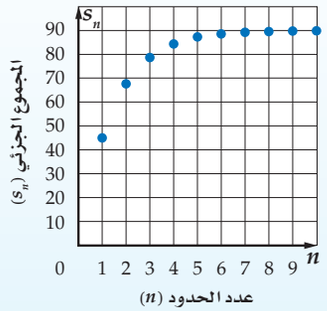
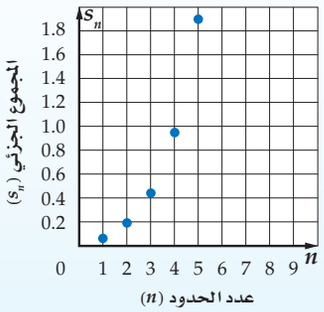
أنشأ رسامٌ لوحةً فنيةً هندسيةً مستعملًا المثلَّثات المتطابقة الأضلاع فقط كما في الشكل المجاور، إذا كان طول ضلع المثلَّث الخارجي 15 in، والمثلَّث الذي يليه من الداخل ينتج عن توصيل منتصفات أضلاع المثلَّث الخارجي، إذا استمر في عملية رسم المثلَّثات الداخلية بهذا النمط، فكم سيكون مجموع محيطات كلِّ المثلَّثات المكوّنة للشكل؟ يمكن الإجابة عن مثل هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

المتسلسلة الهندسية اللانهائية: المتسلسلة الهندسية التي لها عدد لا نهائي من الحدود تُسمى **المتسلسلة الهندسية اللانهائية**، و**المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية** (S_n) هو مجموع عدد محدد (n) من حدودها، وليس مجموع كل حدودها، والمتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متقاربة** عندما تقترب مجاميعها الجزئية (S_n) من عدد ثابت كلما زادت قيمة n، وعندما لا تقترب هذه المجاميع من عدد ثابت مع زيادة قيمة n، فإن المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متباعدة**.

أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًّا من متسلسلة هندسية لا نهائية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع محيطات المثلَّثات المكوّنة للشكل تُعطَى بالمتسلسلة اللانهائية $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$، وكلما زاد عدد حدودها، فإن مجموعها يقترب من 90 in (وهو المجموع الفعلي لها عندما يزداد عدد حدودها إلى **مالا نهاية**). والشكل أدناه يظهر التمثيل البياني للمجموع S_n، حيث $1 \le n \le 10$

مفهوم أساسي
المتسلسلات الهندسية المتقاربة والمتباعدة

أضف إلى مطويتك

المتسلسلات الهندسية المتقاربة	المتسلسلات الهندسية المتباعدة
التعبير اللفظي: إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert < 1$؛ فإن المجموع الجزئي يقترب من عدد ثابت.	**التعبير اللفظي:** إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert \ge 1$؛ فإن المجموع الجزئي لا يقترب من عدد ثابت.
مثال: $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$	**مثال:** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$
	

مثال 1
المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة

حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

a) $54 + 36 + 24 + \ldots$

أوجد قيمة r

$r = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$، وبما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

إرشادات للدراسة

المجاميع الجزئية
يمكن توضيح التمثيل البياني للمجاميع الجزئية للمتسلسلة الواردة في فقرة "لماذا؟" بإنشاء الجدول التالي:

عدد الحدود n	المجموع الجزئي S_n
1	$s_1 = 45$
2	$s_2 = 45 + 22.5 = 67.5$
3	$s_3 = 45 + 22.5 + 11.25 = 78.75$
⋮	⋮

b) $8 + 12 + 18 + \ldots$

$r = \frac{12}{8} = 1.5$ ، وبما أن $1.5 > 1$، فإن المتسلسلة متباعدة.

تحقق من فهمك

1A) $2 + 3 + 4.5 + \ldots$ **1B)** $100 + 50 + 25 + \ldots$

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

تذكّر أن $|r| < 1$ تعني أن $-1 < r < 1$

أما $|r| \geq 1$ فتعني أن $r \geq 1$ أو $r \leq -1$

إذا كانت $|r| < 1$ ، فإن قيمة r^n تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، ولذلك فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية اللانهائية تقترب من: $\frac{a_1(1-0)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$

مفهوم أساسي **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة**

أضف إلى مطويتك

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة يُرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$

ويُعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$

ستتشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (36)

وعندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متباعدة، ($|r| \geq 1$)، فإنه لا يوجد مجموع لحدود المتسلسلة؛ لأن قيمة r^n تزداد بلا حدود مع زيادة n .

والجدول المجاور يوضّح المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية المتباعدة $4 + 16 + 64 + \ldots$ ، حيث إنه كلما زادت قيمة n، فإن S_n تزداد بسرعة كبيرة جدًّا.

n	S_n
5	1364
10	1398100
15	1431655764

مثال 2 مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

a) $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \ldots$

الخطوة 1: أوجد قيمة r للتأكد من وجود المجموع من عدمه.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ اقسم الحدّ على الحدّ السابق له مباشرة

بما أن $\frac{3}{5} < 1$ ، فإن للمتسلسلة مجموعًا.

الخطوة 2: استعمل المعادلة لإيجاد المجموع.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{5}}$ $a_1 = \frac{2}{3}, r = \frac{3}{5}$

$= \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$ بسّط

b) $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

$r = \frac{9}{6} = 1.5$؛ وبما أن $1.5 > 1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع.

إرشادات للدراسة

التقارب والتباعد

تتقارب المتسلسلة الهندسية اللانهائية عندما تكون القيمة المطلقة لأيّ حدٍّ فيها أقلّ من القيمة المطلقة للحدّ السابق له. وتكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية متباعدة دائمًا.

تحقق من فهمك

2A) $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$ **2B)** $16 + 20 + 25 + \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكنك استعمال رمز المجموع لكتابة المتسلسلات الهندسية اللانهائية، وهي التي تستمر حدودها إلى ما لانهاية؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{1-r}$

$a_1 = 18, r = \frac{4}{5}$ ، ثم بسّط $= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$

بسّط $= \frac{18}{\frac{1}{5}} = 90$

تحقق من فهمك

3) أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

إرشادات للدراسة

رمز المجموع للمتسلسلة الهندسية اللانهائية

$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545\ldots = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$. ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{63}$ في صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1: باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + \ldots = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \ldots$

صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{1-r}$

$a_1 = \frac{63}{100}, r = \frac{1}{100}$ $= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$

بسّط $= \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$

الطريقة 2: باستعمال الخواص الجبرية

افترض $x = 0.\overline{63}$ $x = 0.\overline{63}$

اكتب في صورة كسر عشري دوري $x = 0.636363\ldots$

اضرب كلا الطرفين في 100 $100x = 63.636363\ldots$

اطرح x من $100x$ و $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$ $99x = 63$

اقسم الطرفين على 99 $x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$

تحقق من فهمك

4) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي.

إرشادات للدراسة

الكسور الدورية

الكسر العشري الدوري هو عدد نسبي، ويمكن كتابته في صورة كسر اعتيادي.

إرشادات لحل المسألة

اختيار الأسلوب الأفضل للحساب

في كثير من الأحيان يمكن حلُّ المسألة بأكثر من طريقة، ولذلك استعمل الطريقة التي تفضلها.

تأكـد

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

1) $16 - 8 + 4 - \ldots$ **2)** $1 + 1 + 1 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

3) $440 + 220 + 110 + \ldots$ **4)** $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$

مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إن وجدت:

5) $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$ **6)** $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسرين العشريين الدوريين الآتيين في صورة كسر اعتيادي:

7) $0.\overline{35}$ **8)** $0.\overline{642}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة، وأيّها متباعدة:

9) $21 + 63 + 189 + \ldots$ **10)** $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \ldots$

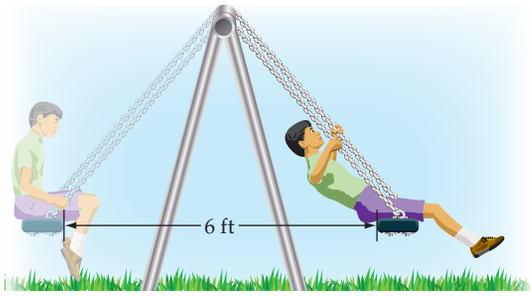
11) $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$ **12)** $0.008 + 0.08 + 0.8 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية إن وجد:

13) $18 + 21.6 + 25.92 + \ldots$ **14)** $-3 - 4.2 - 5.88 - \ldots$

15) $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \ldots$ **16)** $32 + 40 + 50 + \ldots$

17) أراجيح: انطلق سعيد من نقطة البداية الموضَّحة في الشكل المجاور، تاركًا نفسه بعد ذلك من دون دفع منه، فبدأت مسافة التأرجح تتناقص بمقدار 10% في كل تأرجح، أوجد المسافة الكلية التي يكون سعيد قد قطعها عندما تتوقّف الأرجوحة تمامًا.



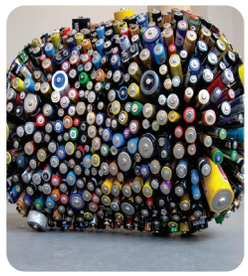
مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي إن وجدت:

18) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$ **19)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$ **20)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسور العشرية الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

21) $0.3\overline{21}$ **22)** $4.\overline{96}$ **23)** $0.12\overline{14}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الربط بالحياة

استُعملت البطاريات في العالم منذ أكثر من 100 عام، وهي مطلوبة الآن أكثر من أي وقت مضى، ولذلك فإن أكثر من 3 بلايين بطارية تتلف في كلّ عام. ويمكن استعمال بطارية واحدة من البطاريات القابلة للشحن بدلًا من 100 بطارية عادية.

24) بطاريات قابلة للشحن: أعلنت إحدى شركات صناعة البطاريات القابلة للشحن، عن بطارية تشحن بفاعلية نسبتها 99.9% من الفاعلية السابقة بعد كل مرة يتم فيها شحن البطارية. إذا كانت شحنتها في البداية تكفي للعمل 8 ساعات، فما أكبر عدد من الساعات يمكن أن تُستعمل فيه البطارية؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية إن وجد:

25) $\frac{15}{4}+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\ldots$ **26)** $-\frac{16}{9}+\frac{4}{3}-1+\ldots$ **27)** $\frac{21}{16}+\frac{7}{4}+\frac{7}{3}+\ldots$

28) تمثيلات متعددة ستحتاج في هذه المسألة إلى بطاقة مربعة الشكل طول ضلعها لا يقل عن 8 بوصات.

a) حسيًّا: افترض أن مساحة البطاقة تُمثّل وحدة مربعة. قُصّ البطاقة نصفين، خذ أحدهما واعتبره الحدّ الأول، ثم قُصَّ النصف الآخر نصفين واعتبر أحدهما الحدّ الثاني. استمر في هذه العملية، واكتب المتسلسلة اللانهائية، التي تعبِّر عن الأجزاء لديك.

b) عدديًّا: إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى مالانهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها في الفرع **a**؟

c) ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصلية؟

29) فيزياء: في تجربة فيزيائية دُحرجت كرة من الفولاذ على مسار أفقي، وتركت لتتدحرج تلقائيًّا، فإذا قطعت الكرة في الدقيقة الأولى 120 ft ، ثم بدأت تقطع في كلّ دقيقة 40% فقط من المسافة التي قطعتها في الدقيقة السابقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة حتى تقف؟

30) بندول: يقطع بندول مسافة 12 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول حتى يتوقّف عن الحركة.

31) كرات: أُسقطت كرة مطاطية من ارتفاع 30 ft، فكانت ترتدّ في كلّ مرة مسافة تعادل 95% من المسافة السابقة. إذا استمرت الكرة في الحركة على هذا المنوال، فأوجد المسافة التي تقطعها حتى تقف.

إرشادات للدراسة

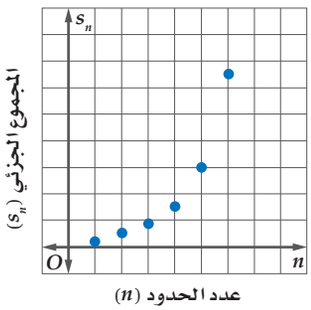
أساس المتسلسلة

في السؤال 32 تنقص المسافة التي يقطعها الجسم المعلّق بالزنبرك 20%، أي أن المسافة التي يقطعها الجسم تمثّل 80% من المسافة السابقة لها قبل أن يغيّر اتجاه حركته.

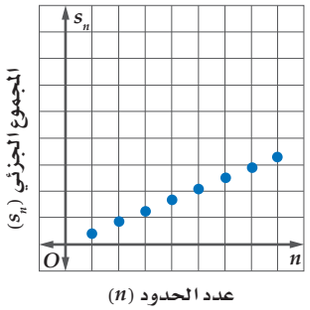
32) متحف العلوم: يُتيح أحد المعارض في متحف للعلوم الفرصة للزوار لتجربة حركة الأجسام على زنبرك. فإذا قام أحدّ الزوار بسحب جسم معلّق بزنبرك إلى أسفل، ثم تركه ليقطع مسافة 1.2 ft إلى أعلى قبل أن يُغيّر اتجاه حركته، وفي كلّ مرة يغيّر الجسم اتجاه حركته تنقص المسافة التي يقطعها بمقدار 20% بالمقارنة مع المسافة في الاتجاه الآخر السابق، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم.

اربط بين كلِّ شكل والوصف المناسب له:

33)



34)



a) متسلسلة هندسية متقاربة.

b) متسلسلة هندسية متباعدة.

c) متسلسلة حسابية متقاربة.

d) متسلسلة حسابية متباعدة.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) اكتشف الخطأ: طُلِب إلى كلٍّ من عليٍّ وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة $\ldots - 1 + 1 - 1$ فكانت إجابتاهما كما يأتي. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

علي	أحمد
المجموع صفر؛ لأن مجموع كلّ زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.	لا يمكن إيجاد المجموع؛ لأن $\lvert r \rvert \geq 1$، والمتسلسلة متباعدة.

36) صيغ: اشتقّ معادلة مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية.

37) تحدٍّ: ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة $\ldots + 81b^3 + 27b^2 + 9b + 3$ ؟

38) تبرير: متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع، ومتى لا يكون؟ وضّح تبريرك.

39) مسألة مفتوحة: اكتب المتسلسلة $\ldots - 12 + 6 - 3$ باستعمال رمز المجموع وبطريقتين مختلفتين.

40) اكتب: وضّح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية متباعدة دائمًا.

تدريب على اختبار

41) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدُّها الأول 27، وأساسها $\frac{2}{3}$ هو :

A 81

B 65

C 34

D 18

42) هندسة: ضُرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر. ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟

A $\frac{1}{9}$ حجم الكبيرة

B $\frac{1}{\pi^3}$ حجم الكبيرة

C $\frac{1}{27}$ حجم الكبيرة

D $\frac{1}{3}$ حجم الكبيرة

مراجعة تراكمية

43) مسابقات: تُقيم إحدى محطات التلفاز مسابقة ثقافية، وبعد نهاية كلّ جولة من المسابقة، يتم إقصاء نصف عدد المشاركين. فإذا كان عدد المشاركين في الجولة الأولى 512 شخصًا، فاكتب معادلة لإيجاد عدد المشاركين المتبقّي في المسابقة بعد مرور n جولة. (الدرس 6-3)

44) حياكة: مشْغَلٌ فيه 9 عاملات، تنتج كلٌّ منهن فستانًا واحداً يوميًّا. أوجد الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة التي تبيِّن مجموع الفساتين التي ينتجها المشغل بعد كلِّ يوم. (الدرس 6-2)

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

45) $(y + 4)(y + 3)$

46) $(9p - 1)(3p - 2)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

6-4 نهاية المتتابعة
Sequence Limit

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأستكشف نهاية متتابعة.

لعلك لاحظت في بعض المتتابعات الهندسية أنه كلما زاد ترتيب الحدّ في المتتابعة اقتربت قيمته من العدد صفر، وبطريقة أخرى كلما زادت قيمة n فإن قيمة a_n تقترب من الصفر. ويُسمّى "الصفر" في هذه الحالة نهايةَ المتتابعة.

توجد أنواع مختلفة من المتتابعات اللانهائية التي يوجد لها نهاية، ولكن إذا لم تقترب حدود المتتابعة من عدد وحيد، فإننا نقول: إن المتتابعة ليس لها نهاية، أو إن نهاية المتتابعة غير موجودة.

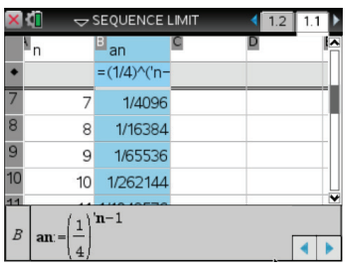
نشاط

أوجد نهاية المتتابعة الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

الخطوة 1: أدخل المتتابعة.

صيغة الحد النوني في هذه المتتابعة هي: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

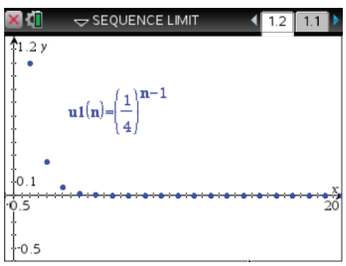
- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on) .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ، ومنها اختر 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز n ثم اضغط (enter) ، واكتب في أعلى العمود B الرمز a_n ثم اضغط (enter) .
- أدخل قيم n في العمود n بالترتيب، وفي العمود الثاني اكتب صيغة الحدِّ النوني $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ثم اضغط (enter) واختر مرجع المتغير فتظهر الشاشة المجاورة.



لاحظ أنه كلما زادت قيمة n ، فإن قيم الحدود تقترب من العدد 0 ، وإذا نزلت إلى أسفل ستلاحظ أنه عندما $n \geq 7$ ، فإن قيمة كلِّ حدٍّ تكون قريبة من 0 ، مما يشير إلى أن نهاية المتتابعة هي 0 .

الخطوة 2: مثِّل المتتابعة.

- اضغط المفتاح (on) واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط (enter) فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على (menu) واختر منها 3: إدخال/تحرير الرسم البياني ومنها اختر 1: متتابعة ومنها 6: متتابعة ، فتظهر شاشة أدخل فيها صيغة الحدّ النوني والحدّ الأول للمتتابعة واضغط (enter) .
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط (menu) ومنها 4: تكبير/تصغير النافذة واختر منها 6: تكبير/تصغير الربع الأول .



ستلاحظ أن التمثيل البياني أيضًا يوضّح أن قيم الحدود تقترب من 0. وفي الواقع عندما $n \geq 3$ ، فإن النقاط تظهر كأنها على المحور الأفقي، ممّا يعني أن نهاية المتتابعة هي 0 .

تمارين:

أوجد نهاية كلٍّ من المتتابعات الآتية:

1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

3) $a_n = 5^n$

4) $a_n = \frac{1}{n^2}$

5) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$

6) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$

6-5 نظرية ذات الحدَّين
The Binomial Theorem

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست التوافيق واستعمالاتها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل مثلَّث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$.
- أستعمل نظرية ذات الحدَّين في إيجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$.

المفردات:
مثلَّث باسكال
Pascal's triangle
نظرية ذات الحدَّين
Binomial Theorem

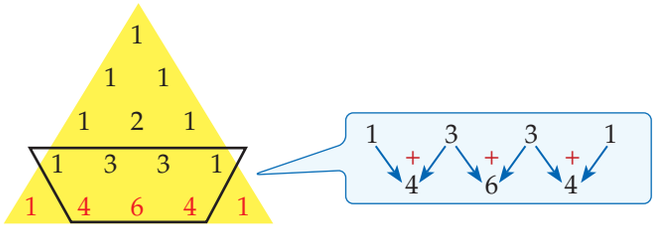
لماذا؟



يريد مدير معمل للتحاليل الطبية أن يستأجر 6 متخصِّصين من منطقتين مختلفتين بشكل عشوائي. فإذا كان عدد المتخصصين في المنطقتين متساويًا، فما احتمال أن يختار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية؟

مثلَّث باسكال: يُنسبُ مثلَّث باسكال إلى العالم الفرنسي بليز باسكال (1662–1623)، على الرغم من قيام العديد من العلماء بدراسته قبله في بلاد المسلمين والهند وبلاد فارس والصين وإيطاليا، ويتكون المثلَّث من صفوف يكون بداية كل صف فيه ونهايته العدد 1، وكل عدد من الأعداد الأخرى في الصف، يكون ناتج جمع العددين اللذين فوقه على اليمين واليسار مباشرة، ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a+b)^n$.

$(a+b)^0$
$(a+b)^1$
$(a+b)^2$
$(a+b)^3$
$(a+b)^4$



فيكون مفكوك $(a+b)^4$ هو

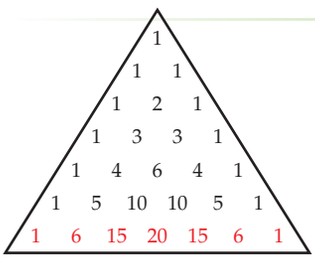
الأُسس تبدأ من 3 وتتناقص إلى صفر

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

الأُسس تبدأ من صفر وتتزايد إلى 4

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

لاحظ أن عدد الحدود في مفكوك $(a+b)^4$ هو 5 حدود، ومجموع الأسس في كل حدٍّ هو 4



مثال 1 من واقع الحياة — **استعمال مثلَّث باسكال**

بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، أوجد احتمال اختيار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية، وذلك بإيجاد مفكوك $(a+b)^6$.

استعمل النمط أعلاه في كتابة مثلَّث باسكال لـ $(a+b)^6$.

$$(a+b)^6 = 1a^6b^0 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + 1a^0b^6$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

عند جمع قيم معاملات كثيرة الحدود، نجد أنه يوجد 64 توفيقًا من متخصِّصي المنطقتين يمكن استئجارهم، وبما أن العدد 15 في المقدار $15a^4b^2$ يُمثّل عدد التوافيق التي فيها 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنان من المنطقة الثانية، لذلك فإن احتمال استئجار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية يساوي $\frac{15}{64}$ أو 23% تقريبًا، وذلك بحسب تعريف الاحتمال النظري لحادثة، حيث إن عدد الطرائق الممكنة للحادثة هو 15، وعدد الطرائق جميعها 64.

تحقق من فهمك

2) بالعودة إلى فقرة **"لماذا"**، إذا أراد مدير معمل التحاليل الطبية أن يستأجر 8 متخصِّصين، فما احتمالات أن يختار 6 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانية؟



تاريخ الرياضيات

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي
عالم رياضي مسلم، وهو أول من أوجد المثلَّث المشهور الذي يُسمى الآن مثلَّث باسكال.

مراجعة المفردات
التوافيق يسمى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية بالتوافيق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

نظرية ذات الحدَّين: يمكن استعمال **نظرية ذات الحدَّين**؛ لإيجاد مفكوك ذات الحدَّين بدلًا من استعمال مثلَّث باسكال.

مفهوم أساسي — نظرية ذات الحدين

أضف إلى مطويتك

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن :

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k}\, b^k$$

عند استعمال النظرية عوِّض عن n بقيمة الأُسِّ. ولاحظ كيف ستتبع الحدود النمطَ نفسَه في مثلَّث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات، وإذا كانت الإشارة بين الحدّين سالبة $(a-b)^n$، فاكتبها بالشكل $(a+(-b))^n$ قبل إيجاد المفكوك.

مثال 2 — استعمال نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى: استعمال التوافيق .

استبدل 7 مكان n في نظرية ذات الحدَّين .

$$(a+b)^7 = a^7 + {}_7C_1\, a^6 b + {}_7C_2\, a^5 b^2 + {}_7C_3\, a^4 b^3 + {}_7C_4\, a^3 b^4 + {}_7C_5\, a^2 b^5 + {}_7C_6\, a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + \frac{7!}{6!}a^6 b + \frac{7!}{2!5!}a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!}a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!}a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!}a^2 b^5 + \frac{7!}{6!}a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

الطريقة الثانية: استعمال مثلَّث باسكال

استعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد القوى، وبدلًا من إيجاد المعاملات باستعمال التوافيق، استعمل الصف السابع من مثلَّث باسكال.

6		1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

تحقق من فهمك

2) أوجد مفكوك $(x+y)^{10}$.

عندما يكون معاملا الحدَّين في ذات الحدَّين يختلف عن العدد 1، فإن المعاملات لن تكون متماثلة. وفي مثل هذه الحالة استعمل نظرية ذات الحدَّين.

مثال 3 — استعمال نظرية ذات الحدَّين عندما يختلف المعاملان عن 1

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

$$(5a-4b)^4 = (5a)^4 + {}_4C_1\,(5a)^3(-4b) + {}_4C_2\,(5a)^2(-4b)^2 + {}_4C_3\,(5a)(-4b)^3 + {}_4C_4\,(-4b)^4$$

$$= 625a^4 + \frac{4!}{3!}(125a^3)(-4b) + \frac{4!}{2!2!}(25a^2)(16b^2) + \frac{4!}{3!}(5a)(-64b^3) + 256b^4$$

$$= 625a^4 - 2000a^3 b + 2400a^2 b^2 - 1280a b^3 + 256b^4$$

تحقق من فهمك

3) أوجد مفكوك $(3x-2y)^5$.

قراءة الرياضيات

كُتب عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذ ر عنصرًا كل مرَّة سابقًا بالرمز ${}_nق_r$ ، وسيُرمز له في هذا الكتاب بالرمز ${}_nC_r$.

إرشادات للدراسة

توافيق

- $0! = 1$
- ${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- ${}_nC_0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{1}{1} = 1$
- ${}_nC_n = 1$
- ${}_nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{1} = 1$

إرشادات للدراسة

الحاسبة العلمية

يمكن حساب قيمة ${}_nC_r$ باستعمال الحاسبة العلمية. اضغط على العدد n ثم ÷ ثم SHIFT ثم العدد r ثم = مثال

$6C_3$: 6 SHIFT

÷ 3 = 20

إرشادات للدراسة

إشارات حدود مفكوك $(a+b)^n$

عند إيجاد مفكوك $(a+b)^n$، تكون إشارة كلّ حدٍّ في المفكوك تعتمد على إشارة كلٍّ من b ، a. فتكون إشارة الحدود كلها موجبة إذا كانت إشارة a وإشارة b موجبتين، وتكون إشارة الحدود الزوجية سالبة إذا كانت إشارة b فقط سالبة.

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك، ويمكنك عندها استعمال الحد العام في صيغة المجموع لنظرية ذات الحدَّين بحيث تجد الحدَّ الذي ترتيبه $k+1$ أو t_{k+1} في مفكوك $(a+b)^n$ باستعمال الصيغة $t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$

مثال 4 إيجاد قيمة حدّ معيّن

أوجد قيمة الحدّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$.

استعمل صيغة الحدِّ العام لإيجاد الحدِّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$

$t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$

حيث $n = 11$، وبما أن الحدَّ المطلوب هو الحدُّ الخامس

أي $t_{k+1} = t_5$ ؛ لذا $k = 4$

إذن $t_5 = t_{4+1} = {}_{11}C_4\, y^{11-4}\, z^4$

$= 330\, y^7\, z^4$

عند الحد الخامس تكون $k = 4$

${}_{11}C_4 = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة الحدِّ السادس في مفكوك $(c+d)^{10}$.

ملخص المفاهيم مفكوك ذات الحدّين

أضف إلى مطويتك

في مفكوك ذات الحدَّين $(a+b)^n$:

- عدد الحدود $n+1$.
- أسُّ a في الحدِّ الأول هو n، وكذلك أسُّ b في الحدِّ الأخير هو n .
- يقلُّ أسُّ a بمقدار واحد، ويزيد أسُّ b بمقدار واحد في أيِّ حدّين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حدٍّ يساوي n دائمًا.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

تأكـد

الأمثلة 1–3 أوجد مفكوك كلٍّ مما يأتي:

1) $(g+h)^7$ **2)** $(x+3)^5$ **3)** $(y-4z)^4$

4) ولادة: إذا كان احتمال ولادة ذكر يساوي احتمال ولادة أنثى عند المرأة، فاستعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد احتمال أن يكون عدد الإناث 5 في ست ولادات. (لا تحسب التوائم).

مثال 4 أوجد قيمة الحدِّ المطلوب في مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

5) الحدّ السادس في مفكوك $(2c-3d)^8$

6) الحدّ الأخير في مفكوك $(5x+y)^5$

7) الحدّ الأول في مفكوك $(3a+8b)^5$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

8) $(c-d)^7$ **9)** $(2a+4b)^4$ **10)** $(3a-4b)^5$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

11) لجان: إذا أردنا تكوين لجنة من 10 طلاب من طلاب الصفَّين الأول الثانوي والثاني الثانوي في مدرسة، فما احتمال أن يكون في اللجنة 7 طلاب من الصف الأول الثانوي، علمًا بأن عدد طلَّاب الصفَّين متساوٍ، وأن الاختيار يتم عشوائيًّا.

مثال 4 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممَّا يأتي:

12) الحدّ الرابع في مفكوك $(y - 3x)^6$.

13) الحدّ السادس في مفكوك $(4x + 5y)^6$.

14) الحدّ الخامس في مفكوك $(x - 4)^9$.

15) الحدّ الرابع في مفكوك $(c + 6)^8$.

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

16) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^4$

17) $\left(2b + \frac{1}{4}\right)^5$

18) كرة سلَّة: إذا كان احتمال النجاح في رمي كرة السلَّة لأحد اللاعبين يساوي احتمال الفشل عند رميها من مسافة محدَّدة، فأوجد احتمال أن ينجح هذا اللاعب في إصابة الهدف في 11 مرَّة من بين 12 محاولة.

19) كرة قدم: إذا كان احتمال أن يسجِّل خالد هدفًا من ضربة جزاء هو 70% ، فأوجد احتمال أن يسجِّل 9 أهداف من 10 ضربات.

إرشادات لحل المسألة

نظرية ذات الحدَّين والاحتمال

يمكنك استعمال نظرية ذات الحدَّين في حساب نتائج التجارب المستقلة المتكرِّرة. فإذا كان p يمثل احتمال النجاح، و $(q = 1 - p)$ يمثِّل احتمال الفشل، فإن احتمال أن تكون x محاولة ناجحة من بين n محاولة تُعطى بالصيغة التالية $p(x) = {}_nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

مسائل مهارات التفكير العليا

20) تحدٍّ: أوجد قيمة الحدّ السادس في مفكوك $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{12}$، ووضّح إجابتك .

21) تبرير: وضّح كيف تتشابه الحدود في مفكوك كلٍّ من $(x - y)^n$, $(x + y)^n$ ، وكيف تختلف.

22) مسألة مفتوحة: اكتب قوة لذات حدَّين، الحدّ الثاني في مفكوكها يساوي $6x^4y$.

23) اكتب: وضّح كيف يمكنك كتابة حدود مثلَّث باسكال.

تدريب على اختبار

24) احتمال: يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية، و5 أقلام رصاص صفراء مبرية، و5 أقلام صفراء غير مبرية. إذا تمَّ سحب قلم من الصندوق بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون القلم أصفر، علمًا بأنه من الأقلام المبرية؟

A $\frac{5}{12}$ **B** $\frac{7}{15}$ **C** $\frac{5}{10}$ **D** $\frac{1}{5}$

25) أيُّ العلاقات التالية تُمثّل دالّة خطِّية؟

A $y = \frac{x+3}{x+2}$ **B** $y = (3x + 2)^2$ **C** $y = \frac{x+3}{2}$ **D** $y = |3x| + 2$

مراجعة تراكمية

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين: (الدرس 6-2)

26) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

27) $a_6 = -7,\ a_7 = -1$

28) أوجد مجموع المتسلسلة $-6 + 3 - \frac{3}{2} + \ldots$. (الدرس 6-4)

29) بيّن ما إذا كانت الجملة $\frac{(n+1)(n+1)}{2} = 2$ صحيحة عندما $n = 1$ ، أم لا، وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة)

6-5 التوافيق ومثلّث باسكال
Combinations and Pascal's Triangle

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل التوافيق ومثلّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب.

تذكّر أن اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهمّ يُسمّى توفيقًا. فعلى سبيل المثال، اختيار قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع هو توافيق 6 عناصر مأخوذة مثنى مثنى في كل مرّة. ويمكن كتابة عدد التوافيق في هذه الحالة في الصورة: ${}_6C_2$ أو $C(6, 2)$.

نشاط

مسابقة ثقافية تتكون من 5 مراحل، للفائز في كل مرحلة جائزة (يختارها من بين جوائز المسابقة الخمس). فإذا اشترك مهند في المسابقة، فإن عدد الجوائز التي يمكن الحصول عليها هو 5 أو 4 أو 3 أو 2 أو 1 أو 0 جوائز. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الجوائز.

الخطوة 1: إذا لم يفُز المتسابق في أيِّ مرحلة من مراحل المسابقة؛ فإنه يحصل على 0 جائزة، وهذا يُمثّل 5 عناصر مأخوذة 0 في كل مرَّة.

وتعلم مسبقًا أن ${}_nC_0 = 1$ ؛ لذا فإن ${}_5C_0 = 1$.

وهذا يعني أنه توجد طريقة واحدة فقط للحصول على 0 من الجوائز.

أما إذا فاز المتسابق في مرحلة واحدة، فإن أيًّا من الجوائز الخمس يمكنه اختيارها. وإذا فاز في مرحلتين فيمكنه اختيار أيِّ جائزتين. وإذا فاز في ثلاث مراحل فيمكنه اختيار أيِّ 3 جوائز وهكذا. بكم طريقة يمكن له اختيار جائزة واحدة، وجائزتين، و3 جوائز، و4 جوائز، و5 جوائز؟

يمكن تحديد عدد الطرق باستعمال مثلّث باسكال.

الخطوة 2: تفحّص مثلّث باسكال.

اكتب قائمة الصفوف لمثلّث باسكال من 0 إلى 5

الصف 0					1					
الصف 1				1		1				
الصف 2			1		2		1			
الصف 3		1		3		3		1		
الصف 4	1		4		6		4		1	
الصف 5	1	5		10		10		5		1

يمكن الحصول على عدد طرق اختيار الجوائز من الصفّ الخامس. فالعدد الأول في الصفّ الخامس يُمثّل عدد طرق الحصول على 0 جائزة، والعدد الثاني يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزة واحدة، والعدد الثالث يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزتين وهكذا.

حلِّل النتائج:

1) اكتب تخمينًا حول كيفية استعمال الأعداد في أحد صفوف مثلّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار n من بين n من العناصر. $0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$ من العناصر

2) على افتراض أن قواعد المسابقة تغيّرت، بحيث أصبح عدد المراحل 6 وعدد الجوائز 6. فأوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ جوائز.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ
Proof by Principle of Mathematical Induction

فيما سبق:
درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية. (الدرس 2-6)

والآن:
- أبرهن الجمل الرياضية باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.
- أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضادٍّ.

المفردات:
مبدأ الاستقراء الرياضيّ
mathematical induction
فرضية الاستقراء
induction hypothesis

لماذا؟



إذا صُفَّت قطع الدومينو متقاربة كما في الصورة المجاورة، فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى. وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

مبدأ الاستقراء الرياضيّ: **مبدأ الاستقراء الرياضيّ** هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

مفهوم أساسيٌّ — مبدأ الاستقراء الرياضيّ

أضف الى مطويتك

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n، اتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يُسمّى **فرضية الاستقراء** .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1 — برهان المجموع

برهن أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^3 = 1$

والطرف الأيمن هو $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ ؛ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

أيْ برهن أن الجملة $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ صحيحة.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$	فرضية الاستقراء
$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$	اجمع $(k+1)^3$ لكلا الطرفين
$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$	اجمع
$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$	حلِّل
$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$	بسِّط
$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$	حلِّل

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها عندما $n = k + 1$، وبهذا فإن العلاقة صحيحة عند جميع الأعداد الطبيعية n

تحقق من فهمك

1) برهن أن : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

وكما في برهان المجموع فإن مبدأ الاستقراء الرياضيّ يمكنك استعماله لبرهنة قابلية القسمة أيضًا.

مثال 2 برهان قابلية القسمة

برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن $8^n - 1 = 8^1 - 1 = 7$. وبما أن 7 يقبل القسمة على 7 ، فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $8^k - 1$ يقبل القسمة على 7 ، حيث k عدد طبيعي، وهذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r بحيث إن $8^k - 1 = 7r$

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$

أي برهن أن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 ؛

$8^k - 1 = 7r$	فرضية الاستقراء
$8^k = 7r + 1$	أضف 1 لكلا الطرفين
$8(8^k) = 8(7r + 1)$	اضرب كلا الطرفين في 8
$8^{k+1} = 56r + 8$	بسّط
$8^{k+1} - 1 = 56r + 7$	اطرح 1 من كلا الطرفين
$8^{k+1} - 1 = 7(8r + 1)$	حلّل

وبما أن r عدد طبيعي، فإن $8r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7(8r + 1)$ يقبل القسمة على 7 ؛
إذن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 .
وهذا يبرهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

تحقق من فهمك

2) برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n.

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة

يقال عن عدد ما: إنه يقبل القسمة على 4 إذا أمكن كتابة ذلك العدد في الصورة $4r$، حيث r عدد طبيعي، ويُستعمل هذا التعبير في برهان قابلية القسمة.

مراجعة المفردات

مثال مضادٌّ

أحد معاني كلمة مضادّ هو مناقض، لذلك فإن المثال المضادّ هو مثال يناقض الفرضية.

الأمثلة المضادَّة يمكنك إثبات خطأ جملة رياضية من خلال مبدأ الاستقراء الرياضيّ، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضادٍّ تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

مثال 3 استعمال المثال المضادّ لإثبات خطأ جملة رياضية

أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: " $2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 ، حيث n أي عدد طبيعي".

اختبر قيمًا مختلفة للعدد n

n	$2^n + 2n^2$	هل تقبل القسمة على العدد 4 ؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	لا

إذن فالقيمة $n = 3$ تُعدُّ مثالًا مضادًّا للجملة.

تحقق من فهمك

3) أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: " $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$ ، حيث n أي عدد طبيعي".

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ **2)** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) نظرية الأعداد: يُسمّى العدد عددًا مثلَّثيًّا، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلَّث كما في الشكل أدناه.



a) إذا علمت أن العدد المثلَّثي الأول هو 1، فأوجد الأعداد المثلَّثية الخمسة التالية.

b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلَّثي الذي ترتيبه n .

c) برهن أنّ مجموع أول n من الأعداد المثلَّثية يساوي: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

4) $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9 **5)** $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

6) $3^n + 1$ يقبل القسمة على 4 **7)** $2^n + 3^n$ يقبل القسمة على 4

تدرب وحل المسائل

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

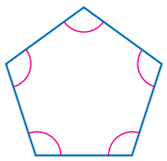
8) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

9) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

10) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

11) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

12) هندسة: مستعملًا مبدأ الاستقراء الرياضيّ والهندسة؛ برهن صحة قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلَّع محدَّب $[(n-2).180]$، حيث n عدد الأضلاع. لكل $n \geq 3$.



مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

13) $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8.

14) $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11.

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

15) $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (2n + 2)^2$

16) $n^2 + n + 23$ عدد أولي.



الربط بالحياة

تظهر حدود متتابعة فيبوناشي كثيرًا، كما في بذور قرص تباع الشمس، إذ يمكن رسم 13 أو 21 أو 55 شكلًا حلزونيًا اعتمادًا على درجة ميل الشكل، وجميعها من عناصر متتابعة فيبوناشي.

17) متتابعة فيبوناشي: تبدأ متتابعة فيبوناشي بالحدود ... , 8 , 5 , 3 , 2 , 1 , 1 ، ويكون الحدّ التالي فيها مساويًا لمجموع الحدّين السابقين له مباشرة (وذلك بعد الحدّ الثاني). فإذا كان f_n يمثّل عدد فيبوناشي ذا الرقم n، فبرهن أن:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي لجميع الأعداد الطبيعية، أو أعطِ مثالًا مضادًّا يُثبت خطأها:

18) $5 + 7^n$ يقبل القسمة على 6

19) $1 - 18^n$ يقبل القسمة على 17

20) $7 + 21n + n^2$ عدد أولي.

21) $3 + 3n + n^2$ عدد أولي.

22) $500 + 100 + 20 + \ldots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

مسائل مهارات التفكير العليا

23) تحدٍّ: اكتب قاعدة تُمثّل المجموع $2n + \ldots + 6 + 4 + 2$، ثم برهنها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أم خطأً. وضّح إجابتك.

24) إذا لم تستطع إيجاد مثال مضادٍّ في جملة رياضية فإنها تكون صحيحة.

25) إذا كانت جملة ما صحيحة عند $n = k$ ، وعند $n = k + 1$، فإنها تكون صحيحة عند $n = 1$

26) تحدٍّ: برهن أن : $5^2 + 2\,(11^n)$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد طبيعي n .

27) مسألة مفتوحة: اكتب قاعدة لإيجاد مجموع متسلسلة ما، ثم برهن على صحتها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

28) اكتب: وضّح مبدأ الاستقراء الرياضيّ بمثال من واقع الحياة (غير قطع الدومينو).

تدريب على اختبار

29) أيُّ الأعداد الآتية يُعدّ مثالًا مضادًّا لإثبات خطأ الجملة:

$n^2 + n - 11$ عدد أولي؟

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

30) مبدأ العدّ: يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكوّنة من 7 رموز، بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكوّنة من أحرف اسمه، والرموز الأربعة التالية مكوَّنة من أرقام العدد 1986 ، والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟

A 72

B 144

C 288

D 576

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 5-6)

31) الحدّ الرابع في مفكوك $(x + 2y)^6$

32) الحدّ الخامس في مفكوك $(a + b)^6$

33) الحدّ الرابع في مفكوك $(x - y)^9$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين :

34) $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 1000$ (الدرس 2-6)

35) $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} - \frac{1}{135} + \ldots$ (الدرس 4-6)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 6-2 ، 6-1)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 + (n-1)d$، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متتابعة حسابية: S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \text{ , } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ .}$$

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 6-4 , 6-3)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1 وأساسها r يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متسلسلة هندسية S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ , } S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \text{، حيث } r \neq 1$$

- مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُعطى بالصيغة:

$$S = \frac{a_1}{1-r} \text{ ، حيث } |r| < 1 \text{ .}$$

نظرية ذات الحدَّين (الدرس 6-5)

- نظرية ذات الحدَّين:

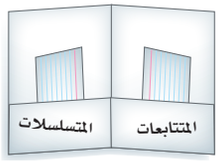
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} k! \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

مبدأ الاستقراء الرياضيّ (الدرس 6-6)

- مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو طريقة أو أسلوب لبرهنة الجمل المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

المطويات منظم افكار

تأكَّد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



المفردات

المتتابعة ص 300
الحدّ ص 300
المتتابعة المنتهية ص 300
المتتابعة غير المنتهية ص 300
المتتابعة الحسابية ص 300
أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) ص 300
المتتابعة الهندسية ص 302
أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) ص 302
الأوساط الحسابية ص 307
المتسلسلة ص 308
المتسلسلة الحسابية ص 308
المجموع الجزئي ص 308
رمز المجموع ص 309
الأوساط الهندسية ص 315
المتسلسلة الهندسية ص 316
المتسلسلة الهندسية اللانهائية ص321
المجموع الجزئي لمتسلسلة لانهائية ص 321
المتسلسلة المتقاربة ص 321
المتسلسلة المتباعدة ص 321
ما لا نهاية ص 321
مثلّث باسكال ص 328
نظرية ذات الحدّين ص 329
مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 333
فرضية الاستقراء ص 333

اختبار المفردات

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعدِّل المصطلح الذي تحته خطٌّ لتصبح العبارة صحيحة:

1) تُسمّى المتسلسلة اللانهائية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

2) مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

3) الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

4) الحدّ هو سلسلة من الأعداد مرتّبة بطريقة معينة.

5) يُسمّى مجموع أول n حدًّا من متسلسلة، المجموع الجزئي.

6) المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حدٍّ فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ السابق.

7) تُسمّى المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

8) 17 , 11 هما وسطان هندسيان بين العددين 23 , 5 في المتتابعة 5, 11, 17, 23 .

9) باستعمال نظرية ذات الحدّين فإن: $(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

مراجعة الدروس

6-1 المتتابعات بوصفها دوالّ ص 305 - 300

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

10) $a_1 = 9, d = 3, a_{14} = ?$

11) $a_1 = -3, d = 6, a_{22} = ?$

حدِّد نوع المتتابعة، ثم أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعتين الآتيتين ومثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

12) $10, 7, 4, \ldots$

13) $800, 200, 50, \ldots$

مثال 1

أوجد الحدّ الحادي عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها:

$a_1 = -15, d = 6$

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_{11} = -15 + (11-1)6$	$n = 11, a_1 = -15, d = 6$
$a_{11} = 45$	بسّط

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية ص 313 - 306

أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

14) $-12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

15) $15, \underline{?}, \underline{?}, 29$

16) $12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -8$

17) $72, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 24$

18) توفير: يوفِّر باسل 160 ريالًا كل شهرين. إذا استمر في التوفير بهذا المعدل مدَّة سنتين، فما المبلغ الذي سيوفِّره في نهاية السنتين؟

أوجد S_n كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

19) $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$

20) $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$

21) $9 + 14 + 19 + \cdots + 74$

22) $16 + 7 + (-2) + \cdots + (-65)$

23) مسرح: لكي يؤدِّي أيمن دوره بإتقان في مسرحية تاريخية، بدأ بالتدرب على النصِّ مرَّتين في اليوم الأول، وأربع مرَّات في اليوم الثاني، وست مرَّات في اليوم الثالث وهكذا. ما عدد المرَّات التي سيتدرَّبها في اليوم العشرين؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

24) $\sum_{k=5}^{21} (3k-2)$

25) $\sum_{k=0}^{10} (6k-1)$

26) $\sum_{k=4}^{12} (-2k+5)$

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابيين بين العددين 3, 39 .

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_4 = 3 + (4-1)d$	$n = 4, a_1 = 3$
$39 = 3 + 3d$	$a_4 = 39$
$12 = d$	بسّط

الوسطان الحسابيان هما: $3 + 12 = 15, 15 + 12 = 27$

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها:

$a_1 = 18, a_n = 56, n = 8$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$	$n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$
$= 296$	بسّط

مثال 4

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية: $\sum_{k=3}^{15} (5k+1)$

استعمل الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

في المتسلسلة 13 حدًّا، وحدُّها الأول $a_1 = 5(3) + 1 = 16$

$a_{13} = 5(15) + 1 = 76$

$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$

$= 598$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية ص 314 - 319

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

27 $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$

28 $a_1 = 11, r = 3, a_3 = ?$

29 $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, a_5 = ?$

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

30 $6, \underline{?}, \underline{?}, 162$

31 $8, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 648$

32 $-4, \underline{?}, \underline{?}, 108$

33 **تخفيضات:** أعلن أحد المتاجر عن تخفيضات كبرى، فبلغت مبيعاته 2048000 ريال في اليوم الأول، ومع نفاد بعض السلع فإن مبيعاته صارت تقلُّ إلى النصف يوميًّا. إذا استمر انخفاض المبيعات بهذا المعدّل، فكم ريالًا ستكون مبيعات المتجر في اليوم الثاني عشر من التخفيضات؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين:

34 $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

مثال 5

أوجد الحدّ السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها $a_1 = 9, r = 4$.

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$n = 6, a_1 = 9, r = 4$: $a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$

$a_6 = 9216$

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1, 27

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$n = 4, a_1 = 1$: $a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$

$a_4 = 27$: $27 = r^3$

بسّط: $3 = r$

الوسطان الهندسيان هما: $1(3) = 3$، $3(3) = 9$.

مثال 7

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$n = 6, a_1 = 2, r = 4$: $S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$

بسّط: $= \frac{-8190}{-3} = 2730$

6-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية ص 321 - 326

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية اللانهائية فيما يأتي إن وجد:

36 $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$

37 $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \ldots$

38 $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

39 **ألعاب:** أُسقطت كرة من سطح بناية ارتفاعها $60\ ft$، فارتدَّت مسافة $\frac{2}{3}$ الارتفاع السابق. إذا استمرَّ ارتداد الكرة بهذه الطريقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف؟

مثال 8

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي فيها $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

صيغة المجموع: $S = \frac{a_1}{1 - r}$

$a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$: $= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$

بسّط: $= \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22.5$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

6-5 نظرية ذات الحدَّين ص 331 - 328

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

40 $(a+b)^3$

41 $(y-3)^7$

42 $(3-2z)^5$

43 $(4a-3b)^4$

44 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^5$

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي:

45 الحدّ الثالث في مفكوك $(a+2b)^8$

46 الحدّ السادس في مفكوك $(3x+4y)^7$

47 الحدّ الثاني في مفكوك $(4x-5)^{10}$

مثال 9

أوجد مفكوك $(x-3y)^4$.

$$(x-3y)^4 = x^4 + {}_4C_1x^3(-3y) + {}_4C_2x^2(-3y)^2 + {}_4C_3x(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4$$
$$= x^4 + -12x^3y + 54x^2y^2 + -108xy^3 + 81y^4$$

مثال 10

أوجد قيمة الحدّ الرابع في مفكوك $(x+y)^8$.

استعمل نظرية ذات الحدّين لكتابة المفكوك

$$(x+y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!} x^{8-k}y^k$$

بالنسبة للحدّ الرابع فإن $k=3$، لذلك يكون الحدّ الرابع هو

$$\frac{8!}{3!(8-3)!} x^{8-3}y^3 = 56x^5y^3$$

6-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 336 - 333

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي للأعداد الطبيعية جميعها:

48 $2+6+12+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 .

أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجمل الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي:

50 $8^n + 3$ يقبل القسمة على 11 .

51 $6^{n+1} - 2$ يقبل القسمة على 17 .

52 $n^2 + 2^n + 4$ عدد أولي .

53 $n + 19$ عدد أولي.

مثال 11

برهن أن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n

الخطوة 1 عندما $n=1$ ، فإن: $9^n + 3 = 9^1 + 3 = 12$.
وبما أن 12 يقبل القسمة على 4 فالجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2 افترض أن $9^k + 3$ يقبل القسمة على 4 حيث k عدد صحيح موجب؛ إذن $9^k + 3 = 4r$ حيث r عدد كلي.

الخطوة 3 برهن صحَّة الجملة عند $n = k+1$ ، أي برهن أنَّ $(9^{k+1} + 3)$ يقبل القسمة على 4

$9^k + 3 = 4r$	فرضية الاستقراء
$9^k = 4r - 3$	اطرح 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1} = 36r - 27$	اضرب كلا الطرفين في 9
$9^{k+1} + 3 = 36r - 27 + 3$	أضف 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1} + 3 = 36r - 24$	بسّط
$9^{k+1} + 3 = 4(9r - 6)$	حلّل

وبما أن r عدد كلي فإن $9r - 6$ عدد كلي، وهذا يعني أن: $9^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. إذن الجملة صحيحة عند $n = k+1$

إذن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح موجب n.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار الفصل

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين إن وجد:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$

3) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية
$81, 72, 63, \ldots$.

4) أوجد الحدّ الخامس والعشرين في المتتابعة الحسابية التي فيها
$a_1 = 9, d = 5$

5) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ الثامن في المتتابعة الحسابية
$18, 20.2, 22.4, 24.6, \ldots$ ؟

A) 26.8 C) 31.2
B) 29 D) 33.4

6) أوجد أربعة أوساط حسابية بين $-9, 11$.

7) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها
$a_1 = 11, n = 14, a_n = 22$

8) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية أدناه؟
$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32} \ldots$

A) $\frac{13}{32}$ C) $\frac{5}{128}$
B) $\frac{5}{32}$ D) $\frac{5}{8}$

9) أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين $6, 1536$

10) أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية التي فيها
$a_1 = 15, r = \frac{2}{3}, n = 5$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

11) $\sum_{k=2}^{12} (3k - 1)$

12) $45 + 37 + 29 + \cdots + -11$

13) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{65}$ في صورة كسر اعتيادي.

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

14) $a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 5$

15) $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + n$

16) أوجد مفكوك $(2a - 3b)^4$

17) أوجد معامل الحدّ الخامس في مفكوك $(m + 3n)^6$

18) أوجد الحدّ الرابع في مفكوك $(c + d)^9$.

برهن صحة كلٍّ من الجملتين الآتيتين، لكل عدد طبيعي n

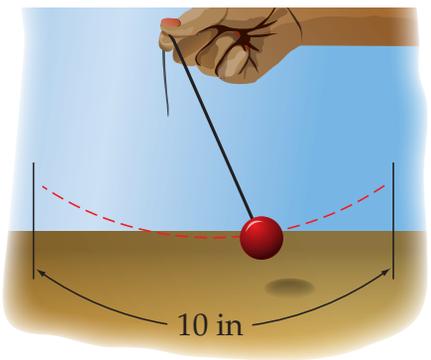
19) $1 + 6 + 36 + \cdots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$

20) $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 .

21) أوجد مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ الجملة الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي: $2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4

22) **مدرسة:** إذا كان عدد طلاب الصف الأول الثانوي يساوي عدد طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة ثانوية، وأراد معلم العلوم اختيار 8 طلاب عشوائيًّا من الصفين لتمثيل المدرسة في مسابقة للعلوم، فما احتمال أن يكون 5 من الطلاب الثمانية من الصف الأول الثانوي؟

23) **بندول:** يقوم سعد بتحريك بندول، بحيث تتناقص المسافة التي يقطعها البندول في كل اهتزازة بنسبة 15%. إذا كانت أول مسافة قطعها البندول 10 in، فأوجد المسافة الكلية التي يكون البندول قد قطعها عندما يتوقّف عن الحركة.



البحث عن نمط



تعتبر استراتيجية البحث عن نمط من أكثر استراتيجيات حلِّ المسألة استعمالًا. وتعدّ القدرة على تمييز النمط، ونمذجته جبريًّا، وتوسيع النمط أدوات مهمّة جدًّا في حلِّ المسألة.

استراتيجيات البحث عن نمط

خطوة 1

تعرُّف النمط.

- قارن بين الأعداد، والأشكال، والتمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك: ما العلاقة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك: هل توجد عمليات مشتركة تتوصَّلُ من خلالها من حدٍّ إلى الحدّ الذي يليه في النمط؟

خطوة 2

عمّم النمط.

- باستعمال الكلمات اكتب قاعدة تصف طريقة الحصول على الحدود المختلفة في النمط.
- حدّد متغيرات، ثم اكتب عبارة جبرية لنمذجة النمط، إن كان ذلك مناسبًا.

خطوة 3

أوجد الحدود المفقودة، وتوسّع في النمط، وحُلّ المسألة.

- استعمل النمط أو القاعدة التي حصلت عليها في إيجاد الحدود المفقودة، أو في توسيع النمط لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك لتتأكّد من أن إجابتك منطقية.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلّها:

انظر إلى متتابعة الأشكال المربَّعة المعطاة. ما عدد المربعات التي تحتاج إليها لتكوين الشكل التاسع من المتتابعة؟



شكل 1 شكل 2 شكل 3

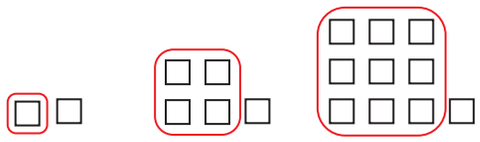
A 55 C 74

B 65 D 82

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الخطوة 1: تعرَّف النمط.

- اقرأ المسألة بعناية. معك 3 أشكال من متتابعة، وتريد إيجاد عدد المربعات التي تحتاج إليها لعمل الشكل التاسع.
- ابحث عن نمط في الأشكال المكوّنة من مربعات. عُدّ المربعات في كل شكل، ولاحظ أن عدد المربعات في كل شكلٍ هو



$1 + 1$ $4 + 1$ $9 + 1$

$1^2 + 1$ $2^2 + 1$ $3^2 + 1$

الخطوة 2: عمّم النمط.

- أي أن عدد مربعات الشكل التالي هو $4^2 + 1$ أو 17
- اكتب العبارة الجبرية التي تُمثّل نموذجًا لهذا النمط.

التعبير اللفظي	عدد المربعات في الشكل يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.
متغير	افترض أن n يُمثّل رقم الشكل.
المعادلة	$a_n = n^2 + 1$

الخطوة 3: وسِّع النمط.

- استعمل العبارة التي حصلت عليها لتوسيع النمط، ثم أوجد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذن الشكل التاسع سيكون فيه 82 مربعًا. الإجابة الصحيحة هي D.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة. استعمل نمطًا لحلّ المسألة.

1) الأعداد أدناه متتابعة مشهورة في الرياضيات كما تعلم وهي: "متتابعة فيبوناشي". ما الحدّ التالي في هذه المتتابعة؟

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

A 36 **B** 34 **C** 31 **D** 29

2) ما العدد المفقود في الجدول أدناه؟

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

A 17 **B** 20 **C** 18 **D** 21

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) أوجد قيمة الحدّ التالي في المتتابعة الحسابية:

7, 13, 19, 25, 31, …

A 36

B 37

C 38

D 39

2) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15}(8k-1)$

A 119

B 826

C 945

D 1072

3) صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية الممثَّلة في الجدول المجاور هي:

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

4) تدَّعي شركة صانعة لأحد أنواع مصافي الهواء، أن المصفاة تستطيع إزالة 90% من الشوائب في الهواء الداخل إلى المصفاة. إذا تم إدخال الكمية نفسها من الهواء إلى المصفاة 3 مرَّات متتابعة، فما نسبة الشوائب التي سوف تُزال؟

A 0.1%

B 0.01%

C 99.99%

D 99.9%

5) أيُّ المتسلسلات الهندسية الآتية متباعدة؟

A $\sum_{k=1}^{\infty}4\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

B $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

D $\sum_{k=1}^{\infty}(-2)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

6) إذا علمت أن $x-5$ عامل من عوامل كثيرة الحدود x^3-7x^2+7x+k ، فما قيمة k ؟

A 1

B 7

C 15

D 35

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين أدناه؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8) أوجد مفكوك $(c+d)^6$ باستعمال نظرية ذات الحدَّين.

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

9) $\frac{12a}{5b} \cdot \frac{25a^2b^3}{8c}$

10) $\frac{x^2-x-20}{2x+8} \cdot \frac{3x}{x-5}$

11) إذا كان $f(x)=2x+4, g(x)=x^2+5$، فما قيمة $f[g(6)]$؟

12) يتكرّر نمط المربعات أدناه إلى ما لانهاية من خلال إضافة مربعات جديدة. ما عدد المربعات في الخطوة رقم 10؟



الخطوة 1 الخطوة 2 الخطوة 3

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضِّحا خطوات الحل :

13) برهن صحّة الجملة الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.
"$7^n - 1$ يقبل القسمة على 6".

14) يقطع خالد مسافة معيّنة على دراجة هوائية في 2.5 ساعة. وإذا زاد من سرعته فإنه يقطع المسافة نفسها في ساعتين.

a) هل يُمثّل هذا الوضع تناسبًا طرديًّا أم تناسبًا عكسيًّا؟ وضّح إجابتك.

b) إذا كانت سرعته عندما قَطَعَ المسافة في 2.5 ساعة. 12 km/h، فكم يجب أن تكون سرعته ليقطع المسافة ذاتها في ساعتين؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع حل السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس ...	6-2	6-2	6-3	6-3	6-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	6-5	5-1	5-1	مهارة سابقة	6-2	6-6	5-5

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

المسافة بين نقطتين	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثانية	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$
مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$	$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$
الضرب بثابت	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثالثة (قاعدة الأقطار)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

كثيرات الحدود

مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$
مربع المجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مكعب المجموع	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
مربع الفرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
مكعب الفرق	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
حاصل ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

الإحصاء والاحتمال

$$n! = n\,(n-1)\,.\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1$$

$$0! = 1$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$P(B/A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

المتتابعات والمتسلسلات

الحد النوني في المتتابعة الحسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
الحد النوني في المتتابعة الهندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع حدود المتتابعة الحسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ or $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$
مجموع حدود المتتابعة الهندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ or $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

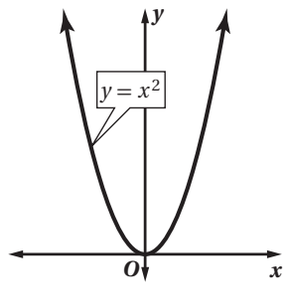
الصيغ

حساب المثلثات

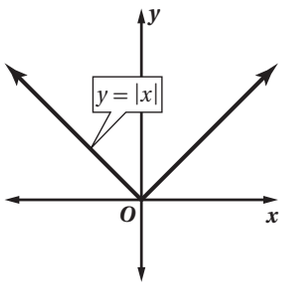
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
الدوال المثلثية	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
متطابقات مثلثية	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

الدوال الرئيسة (الأم)

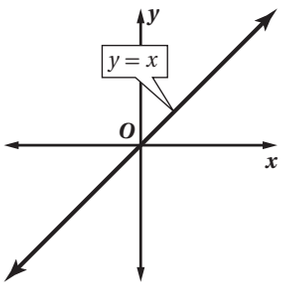
الدوال التربيعية



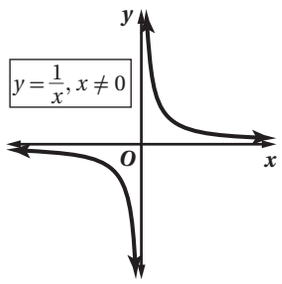
دوال القيمة المطلقة



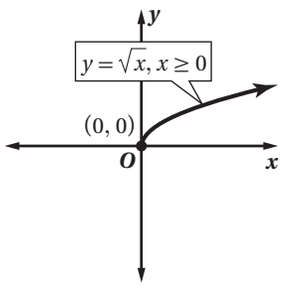
الدوال الخطية



دوال المقلوب



دوال الجذر التربيعي



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$	$\underline{A}^{-1}$
النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{A}$	$-\underline{A}$
مصفوفة الوحدة	$\underline{\mathrm{I}}$
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
المتوسط	$\overline{x}$
الانحراف المعياري	s
الحادثة المتممة	A'
احتمال الحادثة A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\cot(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\csc(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec(x)$
معكوس دالة الجيب	$\sin^{-1} x$
معكوس دالة جيب التمام	$\cos^{-1} x$
معكوس دالة الظل	$\tan^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
أصغر من	$<$
أصغر من أو يساوي	$\leq$
أكبر من	$>$
أكبر من أو يساوي	$\geq$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	i
تركيب الدالتين f و g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\underline{A}_{m \times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	aij
محددة المصفوفة $\underline{A}$	$\lvert \underline{A} \rvert$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

القسم الثالث

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

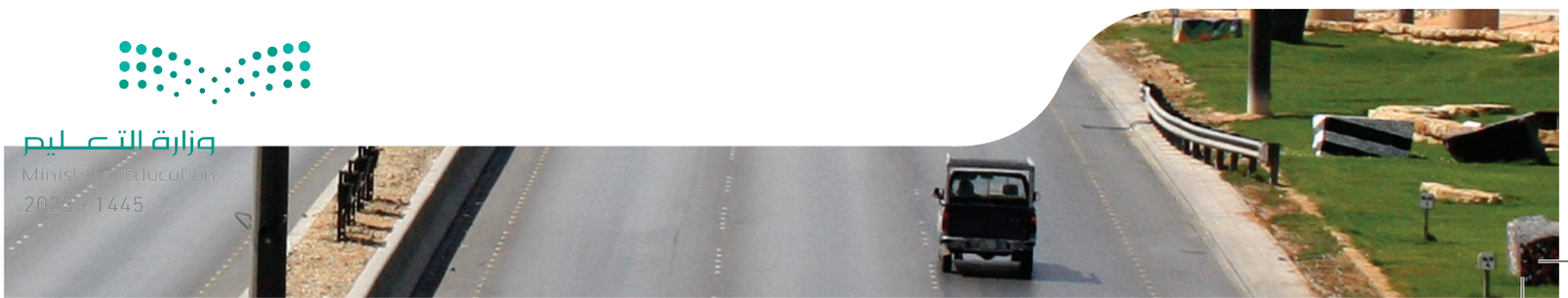


الفهرس

الفصل 7

الاحتمالات

التهيئة للفصل السابع 355
7-1 تمثيل فضاء العيِّنة 356
7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق 362
7-3 الاحتمال الهندسي 369
اختبار منتصف الفصل 375
7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة 376
7-5 احتمالات الحوادث المتنافية 383
دليل الدراسة والمراجعة 390
اختبار الفصل 393
الإعداد للاختبارات المعيارية 394
اختبار تراكمي 396



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الفهرس

الفصل 8

حساب المثلَّثات

التهيئة للفصل الثامن 399

استكشاف 8-1 معمل الجداول الإلكترونية: استقصاء المثلَّثات القائمة الخاصة 400

8-1 الدّوال المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية 401

8-2 الزوايا وقياساتها 410

8-3 الدّوال المثلَّثية للزوايا 416

8-4 قانون الجيوب 422

توسع 8-4 معمل الهندسة: مساحة متوازي الأضلاع 429

اختبار منتصف الفصل 430

8-5 قانون جيوب التمام 431

8-6 الدّوال الدّائرية 437

8-7 تمثيل الدّوال المثلَّثية بيانيًّا 444

8-8 الدّوال المثلَّثية العكسية 451

دليل الدراسة والمراجعة 457

اختبار الفصل 462

الإعداد للاختبارات المعيارية 463

اختبار تراكمي 465

الصيغ والرموز 467



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ستركز في دراستك لهذا الكتاب على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- **الاحتمالات وتطبيقاتها.**
- **حساب المثلثات وتطبيقاتها.**

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الجبرية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.



كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد

  اقرأ فقرة **والآن** .

- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية، واقرأ تعريف كل منها.

- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.

- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات** .

- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك

  على حل هذه التمارين وما شابهها.

- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.

- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.

- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.

- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.

- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائمًا لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم

  الرياضية فتجتنبها.

- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته

  من أفكار في **المطويات** .

- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلّها.

- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفصل 7

الاحتمالات
Probabilities



فيما سبق:

درست النواتج والحوادث، والتباديل والتوافيق، واحتمالات الحوادث البسيطة والمركبة في التجارب العشوائية.

والآن:

- أمثّل فضاء العيّنة.
- أستعمل التباديل والتوافيق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الحوادث المركبة.

لماذا؟

ألعاب: يمكن استعمال الاحتمال للتنبؤ بإمكانية وقوع النواتج المختلفة لبعض الألعاب التي نمارسها.

المطويات منظم أفكار

الاحتمالات: اعمل هذه المطويّة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الاحتمالات؛ مستعملًا ورقة A3.

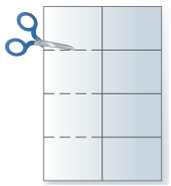
1. **اطوِ** الورقة طوليًّا.



2. **اطوِ** الورقة نصفين مرتين.



3. **قصّ** كل خط طي أفقيًّا في العمود الأيسر حتى خط المنتصف.



4. **اكتب** العناوين كما في الشكل.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل السابع

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

بسّط كلًّا مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-7)

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$ 2) $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$ 3) $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$

4) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$ 5) $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$ 6) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

7) **كرة قدم:** لدى فريق كرة قدم 54 لترًا (L) من الماء البارد في قوارير سعة كلٍّ منها 500 مللترًا (ml). كم قارورة لديهم؟

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي: (تستعمل مع الدروس 1-7 إلى 3-7)

8) أن يكون العدد الظاهر أكبر من 1.

9) أن يكون العدد الظاهر فرديًّا.

10) أن يكون العدد الظاهر أقل من 2.

11) أن يكون العدد الظاهر (1 أو 6).

12) **احتمالات:** ألقي مجسم ذو 4 وجوه متطابقة، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 4. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عددًا أوليًّا؟

يبيّن الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 1-4. (تستعمل مع الدرس 1-7)

النتيجة	الإشارات	التكرار
1	|||	3
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |	6
4	||||	4

13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟

14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟

15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}$.

$\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\cdot1}{9\cdot2}$ اضرب البسط في البسط والمقام في المقام

$=\frac{6}{18}$

$=\frac{1}{3}$ بسّط

مثال 2

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

$$P(\text{أقل من }5)=\frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

احتمال ظهور عدد أقل من 5 هو $\frac{2}{3}$، ويساوي 67% تقريبًا.

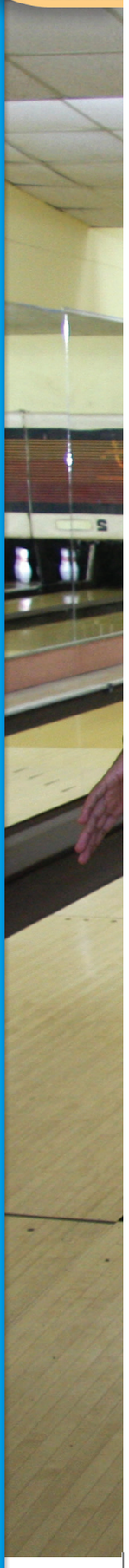
مثال 3

في تجربة رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ظهرت النواتج المبينة في الجدول. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5.

النتيجة	الإشارات	التكرار
1	||||	4
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |||	8
4	||||	4
5	||	2
6	𝍸	5

$$P(5)=\frac{\text{عدد مرات ظهور }5}{\text{عدد جميع النواتج}}=\frac{2}{30}$$

الاحتمال التجريبي للحصول على 5 هو $\frac{2}{30}$ ويساوي 6.7% تقريبًا



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-1

تمثيل فضاء العيِّنة
Representing Sample Spaces

فيما سبق:
درستُ حساب الاحتمال التجريبي. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل القوائم، والجداول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة.
- أستعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات:

فضاء العيِّنة
sample space

الرسم الشجري
tree diagram

تجربة ذات مرحلتين
two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle



لماذا؟

في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة؛ ليحدد أيُّ الفريقين سيختار المكان في الملعب أولًا. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

تمثيل فضاء العيِّنة: لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والحوادث.

التعريف	مثال
التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقًا جميع نواتجه الممكنة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة .
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

فضاء العيِّنة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **الرسم الشجري**.

مثال 1 تمثيل فضاء العيِّنة

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اقرن كل ناتجٍ ممكنٍ من الرمية الأولى بكل النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

L , L　　T , L

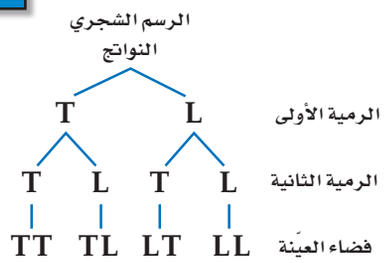
L , T　　T , T

الجدول

دوّن النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T

الرسم الشجري



تحقق من فهمك

1) أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

إرشادات للدراسة

المكعب المرقّم
هو مكعب تحمل أوجهه الأرقام من 1 إلى 6.



التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**؛ لأنها تمَّت على مرحلتين. والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من واقع الحياة — الرسم الشجري للتجارب المتعددة المراحل



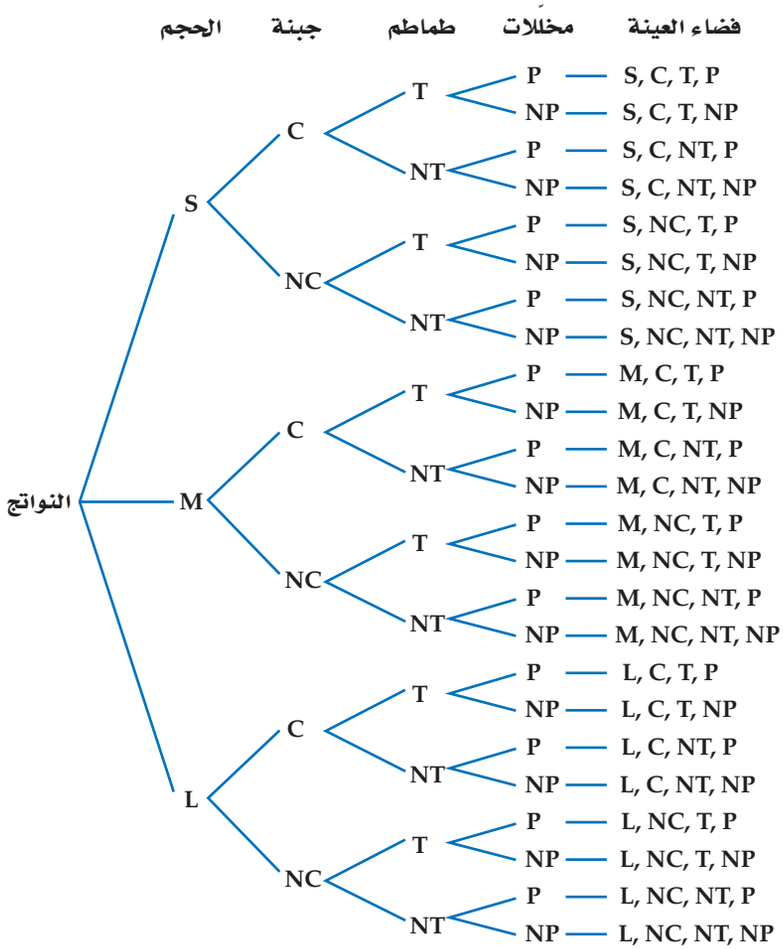
شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر لحم كما هو مبين في قائمة الشطائر المجاورة.

مثِّل فضاء العيِّنة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

تتكون التجربة من أربع مراحل هي:

- اختيار حجم شطيرة اللحم (S: صغير، M: وسط، L: كبير).
- اختيار الجبنة (مع جبنة C، بدون جبنة NC).
- اختيار الطماطم (مع طماطم T، بدون طماطم NT).
- اختيار المخلّلات (مع مخلّلات P، بدون مخلّلات NP).

أنشئ الرسم الشجري للمراحل الأربع.



تحقق من فهمك

2) هواتف: يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي(S) أو أسود(B) أو أحمر(R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و/ أو غطاء للجهاز(W). مثّل فضاء العيِّنة لهذا الموقف بالرسم الشجري.

تنبيه!

اختصار مراحل

في السؤال الثالث من الصورة المرافقة للمثال 2 ، يختصر الحرفان: و/ أو مرحلتين للاختيار هما:

- مع طماطم أو بدون طماطم.
- مع مخللات أو بدون مخللات. ويقابل هذا أربعة اختيارات ممكنة هي: مع الطماطم فقط، أو مع المخللات فقط، أو مع الطماطم والمخللات أو بدون طماطم ولا مخللات.

قراءة الرياضيات

رموز الرسم الشجري

اختَرْ رموزًا واضحة لا غموض فيها للنواتج في الرسم الشجري. ففي المثال 2، تدل C على اختيار الجبنة، وNC تدل على عدم اختيار الجبنة، أمّا NT وNP فتدلان أيضًا على أنها دون طماطم ودون مخلّلات بالترتيب.

مبدأ العد الأساسي: قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العيِّنة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عمليًّا أو ضروريًّا. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مبدأ العدّ الأساسي

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العيِّنة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k. افرض أن:

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

$\vdots$

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الضرب

يُسمى مبدأ العدّ الأساسي أحيانًا قاعدة الضرب للعدّ.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال مبدأ العدّ الأساسي

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوبٍ من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. فما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوبًا مناسبًا؟

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الأكمام	3
القبّة	3
الفتحة الأمامية	2
الأزرار	2

استعمل مبدأ العد الأساسي.

الأزرار	الفتحة الأمامية	القبّة	الأكمام	اللون	القماش	
2	× 2	× 3	× 3	× 6	× 5	= 1080

إذن لدى سعد 1080 خيارًا ليختار ثوبًا مناسبًا.



الربط بالحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات عديدة، أهمها البعدان: المناخي والجمالي.

تحقق من فهمك

أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

3A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور.

3B) رمي مكعب مرقّم أربع مرات.

3C) أحذية: اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 ، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء.

نموذج الإجابة

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (T) (F)
8. (T) (F)
9. (T) (F)
10. (T) (F)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال 1 **للسؤالين 1 ، 2 مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة ممَّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.**

1) عندما يسدّد اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا (G) أو لا يسجل (O). افرض أن اللاعب سدّد ركلة جزاء مرتين.

2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها: (عصير مجاني J) أو (دفتر ملحوظات مجاني N).

مثال 2



3) **ملابس:** تريد سمر حضور حفلة، وعليها أن تختار ما ترتديه في الحفلة من القائمة المجاورة. مثّل فضاء العيِّنة في هذا الموقف بالرسم الشجري.

مثال 3

4) **مطاعم:** عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكلَّ صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كلِّ صنف ونوع، فما عدد النواتج الممكنة؟

قائمة المأكولات	عدد البدائل
المقبلات	8
الحساء	4
السلطة	6
الطبق الرئيس	12
الحلوى	9

تدرب وحل المسائل

مثال 1 **للأسئلة 5–7 مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة ممَّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:**

5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.

6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تدريبيٍّ لمدة شهر أو شهرين، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلَّثات؛ أحدهما يشتمل على مثلَّث منفرج الزاوية (O) أو مثلَّث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلَّث متطابق الضلعين (E) أو مثلَّث مختلف الأضلاع (N).

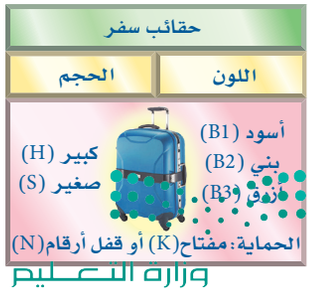


8) **رسم:** ينفّذ بعض الطلاب مشروعين للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

مثال 2 **للسؤالين 9 ، 10 مثّل فضاء العيِّنة مستعملًا الرسم الشجري في كلٍّ ممَّا يأتي:**

9) **سيارات:** يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة (S) أو عائلية (F) أو نقل (T)، بمقاعد مغطاة بالجلد (L) أو القماش (V)، مع إضافات: شاشة ملاحة (N) و/ أو سقف متحرك (R).

10) **حقائب:** يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنيًّا أو أزرق، وقد يكون لها مفتاح و/ أو قفل أرقام.



وزارة التعليم
Ministry of Education

مثال 3

11) نشاطات: تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلاب. حيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الرياضي وَ 4 طلاب للنشاط العلمي وَ 5 طلاب للتوعية الإسلامية وَ طالبان للإذاعة المدرسية، على ألا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟

12) فن: أعطى معلم طلابه خيارين لرسم شكلين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثّل فضاء العيِّنة باستعمال الجدول والرسم الشجري.

13) إفطار: الإعلان المجاور، يوضِّح قائمة وجبة الإفطار في أحد المطاعم، حيث يقدم البيض مع الخضراوات أو اللحم أو الجبن، ويقدم معها الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز النخالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع الخبز، إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟



14) دراجات: اشترى عصام قفلًا رقميًّا لدراجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9 .

a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟

b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضِّح إجابتك.

15) تمثيلات متعددة: تتم هذه التجربة على مرحلتين متعاقبتين؛ أولًا دوّر المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم مكعب نقاط، وإذا أشار إلى اللون الأخضر فألقِ مكعبًا مرقّما، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدوّر المؤشر 2 .



a) هندسيًّا: استعمل الرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة للتجربة.

b) منطقيًّا: ارسم شكل ڤن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة.

c) تحليليًّا: ما عدد النواتج الممكنة؟

d) لفظيًّا: هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضِّح إجابتك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مسائل مهارات التفكير العليا

إرشادات للدراسة

عدم إرجاع العناصر

إذا اخترت عنصرًا من مجموعة عناصر دون إرجاعه إلى المجموعة، فإن عدد عناصر المجموعة يتغير وكذلك عدد النواتج الممكنة.

16) تحدٍّ: يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برِّر إجابتك.

17) مسألة مفتوحة: قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلًا. صِفْ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرِّر إجابتك.

18) تبرير: تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n . اكتب صيغة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p، ووضِّح إجابتك.

19) اكتب: وضِّح متى يكون استعمال الرسم الشجري ضروريًّا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العدّ الأساسي.

20) اكتب: وضِّح لماذا لا يمكن استعمال الجدول لتمثيل فضاء العينة لتجربة متعددة المراحل.

تدريب على اختبار

21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟

A 4 **C** 8

B 6 **D** 9

22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟

A 12 **C** 60

B 35 **D** عدد لانهائي

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحد التالي في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

23) $3, 12, 48, 192, \ldots$ (مهارة سابقة)

24) $-10, -6, -2, 2, \ldots$ (مهارة سابقة)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين (مهارة سابقة)

25) $1 + \frac{3}{x-1} = \frac{10}{7}$

26) $1 - \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{3}$

أوجد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

27) $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$

28) $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$

29) $\frac{4^4 \cdot 3}{2 \cdot 4}$

7-2

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست استعمال مبدأ العد الأساسي. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- أستعمل التوافيق في حساب الاحتمال.

المفردات:
المضروب
factorial
التباديل
permutations
التباديل الدائرية
circular permutation
التوافيق
combinations

لماذا؟



وقف يوسف وعليٌّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًّا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي يوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء.

يمكن كتابة العبارة $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4 .

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$،

مثال 1 — الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة: نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلٌّ منهم قميصًا مرقّمًا من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1: أوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة. وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$.

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحادثة، وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية، إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 ويساوي $18! = (2-20)!$

الخطوة 3: احسب الاحتمال

$$P(\text{نواف 1 و ماجد 2}) = \frac{18!}{20!}$$ ← عدد نواتج الحادثة / ← عدد النواتج الممكنة

$$= \frac{\cancel{18!}}{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}$$ جد مفكوك $20!$ واقسم على العوامل المشتركة

$$= \frac{1}{380}$$ بسّط

تحقق من فهمك

1) تصوير: ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟

إرشادات للدراسة

العشوائية
عندما يتم اختيار النواتج عشوائيًا تتساوى فرص وقوعها، ويمكن حساب احتمالاتها باستعمال التباديل والتوافيق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



ارجع إلى فقرة " لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائيًّا ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ أو 360 .

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرّة ويرمز إليها بالرمز ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

التباديل

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nPr$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

مثال 2

الاحتمال والتباديل

مجلس الإدارة: يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًّا؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدًّا. عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي ${}_{10}P_3$

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحادثة يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيبًا واحدًا فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار فيصل رئيسًا ومحمد نائبًا ومهند أمينًا للسر يساوي $\frac{1}{720}$.

إرشادات للدراسة

الاحتمال والتباديل: يمكنك حل المثال 2 بالطريقة نفسها التي استعملت في المثال 1

تحقق من فهمك

2) بطاقات جامعية: تستعمل الأرقام 9–1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟



تتكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المختلفة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

التباديل مع التكرار

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ...، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \cdots \cdot r_k!}$$



الربط بالحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة ﴿فَأَسْقَيْنَٰكُمُوهُ﴾ من الآية 22 من سورة الحجر.

مثال 3

الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفًا مبعثرة، ويطلب إليه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوِّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟



الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

استعمل الآلة الحاسبة

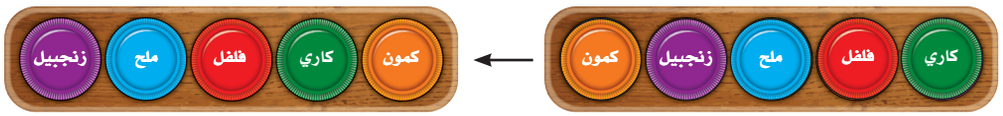
الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائيًّا يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$.

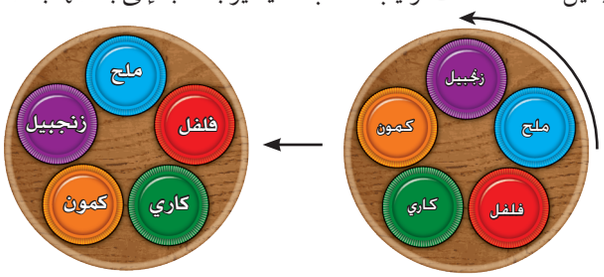
تحقق من فهمك

3) أعداد: تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًّا باستعمال الأرقام 1, 5, 2, 1, 5, 3، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي 5! .



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى التراتيب الممكنة **تباديل دائرية** ، فإذا وضعتْ عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.



لذا فإن؛ تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما تكون العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5-1)!$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدَّد مسبقًا في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستُعامل خطيًّا وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

إرشادات للدراسة

التباديل الدائرية

عدد التباديل الدائرية لـ n من العناصر يساوي عدد التباديل الخطية لها مقسومًا على عددها.

مثال 4

الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.



a) زينة: **إذا رُتبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟**

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه فإن احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.

b) طعام: **جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضّدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟**

بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجعية ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6.

لذا؛ فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

إرشادات للدراسة

النقطة المرجعية

قبل بدء إيجاد الاحتمال المطلوب، حدّد إذا كان ترتيب العناصر يتم وفق نقطة مرجعية ثابتة أم لا.

تحقق من فهمك



4A) بطاقات: إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

4B) كرة قدم: تجمَّع فريق كرة قدم مكوَّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضِّح تبريرك.

الاحتمال باستعمال التوافيق **التوافيق:** هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظَّفَيْنِ من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظَّفَيْنِ غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظَّفَيْنِ.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التوافيق

بالرموز: **يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$، حيث** $${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: **عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:**

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2024 - 1445

مثال 5 الاحتمال والتوافيق

كرة طائرة: يريد مدرِّب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًّا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة، أي ${}_{10}C_6$.

$$ {}_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 210 $$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي تتكون منها الحادثة، وفي هذه الحالة يساوي ${}_6C_6 = 1$، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًّا.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{{}_6C_6}{{}_{10}C_6} = \frac{1}{210}$.

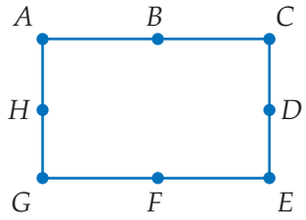
إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًّا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

تحقق من فهمك

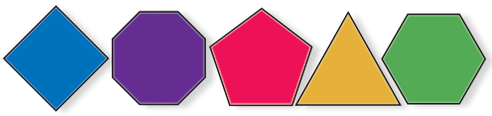
5) هندسة: إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًّا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟



تأكـد

مثال 1

1) هندسة: إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلَّث هو الأول والمربع هو الثاني؟



مثال 2

2) معرض علمي: تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًّا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

مثال 3

3) أعداد: يتكون عدد من الأرقام 5 , 6 , 6 , 3 , 3 , 3 , 1 , 3 . ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133 ؟

مثال 4

4) كيمياء: في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رتُّبت عشوائيًّا على منضدة دائرية.



a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟

b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟

مثال 5

5) مسابقات: اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزيز وخالد وفوزي؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 1

6) **محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟



7) **حفلات:** وَزِّعت بطاقات مرقّمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزياد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزياد البطاقة رقم 23 ؟

مثال 2

8) **مجموعات:** تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟

مثال 3

9) **أحرف ممغنطة:** اشترى عدنان أحرفًا ممغنطةً يمكن ترتيبها على باب ثلاجته، بحيث تشكل كلمات معينة. إذا اختار تبديلًا من الأحرف المبينة في الشكل المجاور عشوائيًّا، فما احتمال أن تشكّل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟



10) **رموز بريدية:** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 97275 إذا تم تكوينه عشوائيًّا من الأرقام 7,9,5,7,2؟

مثال 4

11) **مجموعات:** يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟

12) **مدينة ألعاب:** ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟

13) **ألعاب:** رُتبت 8 كرات مرقّمة بالأرقام 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 عشوائيًّا في صف:

a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار على الترتيب؟

b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أدناه؟



c) إذا أُعيد ترتيب الكرات عشوائيًّا بحيث شكلت دائرة. فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟

14) **كرات:** إذا وضعت 7 كرات في صف؛ ثلاث منها أرقامها 8 ، وثلاث أرقامها 9، وكرة واحدة رقمها 6. فما احتمال أن تكون الكرات ذات الرقم 8 عن يسار الكرة 6 ، والكرات ذات الرقم 9 عن يمينها؟

مثال 5

15) **مستقيمات:** ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أيٌّ ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

16) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم أنها غير صحيحة أبدًا ؟ برّر إجابتك.

$${}_nP_r = {}_nC_r$$

17) **تحدٍّ:** يدّعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: ${}_nC_r = {}_nP_r \cdot r!$.
بيّن صحّة هذه العلاقة جبريًّا، ثم وضِّح لماذا يختلف ${}_nC_r$ و ${}_nP_r$ بعاملٍ مقداره $r!$.

18) **مسألة مفتوحة:** صف وضعًا يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{{}_7C_3}$.

19) **برهان:** برهن أن ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.

20) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق .

تدريب على اختبار

21) **احتمال:** يقف رجلان وولدان في صفٍّ واحدٍ. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفَي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟

A $\frac{1}{24}$ **C** $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{1}{2}$

22) **إجابة قصيرة:** إذا اخترت تبديلًا للأحرف المبينة أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

ف	ء	س	ف	ي	س	ا

23) **احتمال:** ألقي مكعب مرقّم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا ألقي المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟

A 1

B $\frac{9}{10}$

C $\frac{1}{6}$

D $\frac{1}{10}$

مراجعة تراكمية

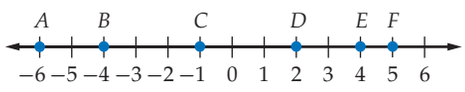
24) **تسوّق:** لدى محل تجاري أنواع من المعاطف النسائية بالمقاسات 4 أو 6 أو 8 أو 10 وذات ألوان متعددة منها الأسود، الأخضر، الأزرق، الأحمر. كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس 1-7)

مثّل فضاء العيّنة في كلِّ تجربةٍ ممّا يأتي بالرسم الشجري :

25) إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة الواحدة تلو الأخرى. (الدرس 1-7)

26) سحب كرتين معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، و4 كرات بيضاء، و 3 كرات سوداء. (الدرس 1-7)

أوجد قياس كلِّ مما يأتي مستعملًا خط الأعداد: (مهارة سابقة)



27) DF

28) AE

29) EF

30) BD

31) AC

32) CF

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-3

الاحتمال الهندسي
Geometric Probability

فيما سبق:
درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد الاحتمالات باستعمال الأطوال.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحات.

المفردات:
الاحتمال الهندسي
geometric probability

لماذا؟



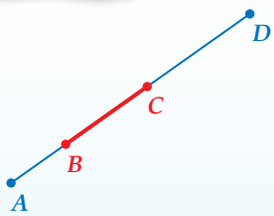
في القرص ذي المؤشر الدَّوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

الاحتمال الهندسي: احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة **احتمالًا هندسيًّا**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الاحتمال والأطوال



التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًّا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًّا على $\overline{AD}$، فإن:

$$P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

إرشادات للدراسة

الاحتمال والأطوال

$P(E \in \overline{BC})$ تعني احتمال أن تقع النقطة E على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$.

مثال 1 استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{JM}$ كما في الشكل أدناه، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.



$$P(X \in \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$$ احتمال الأطوال

$$= \frac{7}{14}$$ $KL = 7$, $JM = 3 + 7 + 4 = 14$

$$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$ بسّط

تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{JM}$ في الشكل السابق، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

(1A) $P(X \in \overline{LM})$ **(1B)** $P(X \in \overline{KM})$

يمكنك استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عددًا غير منتهٍ من النواتج.



الربط بالحياة

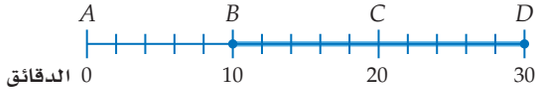
الحافلة وسيلة نقل للركاب، تُصَمّم بأحجام مختلفة. وتسير معظم الحافلات بالديزل أو البنزين، ومنها ما يسير بالكهرباء، وبعضها ذات مفاصل مترابطة؛ أي لها قسمان متصلان بغطاء مرن. وتسعى شركات الحافلات إلى تخفيض أجرتها؛ ليصبح النقل العام أكثر شعبية لدى المسافرين.

مثال 2 من واقع الحياة

نمذجة احتمالات من واقع الحياة

مواصلات: تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 دقيقة، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 دقيقة أو أقل من وصول الراكب. وتمثل حادثة الانتظار 10 دقائق أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:



أوجد احتمال هذه الحادثة.

احتمال الطول

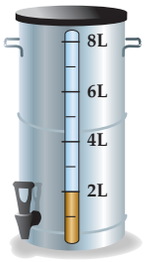
$$P(\text{انتظار 10 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD}$$

$BD = 20, AD = 30$

$$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

لذا فاحتمال انتظار 10 دقائق أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$ ، أو 67% تقريبًا.

تحقق من فهمك



2) شاي: يحضِّر مطعم الشاي في وعاء سعته 8L ، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L، يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.

A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L ؟

B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أيِّ وقت بين 2L و 3L؟

الاحتمال والمساحة: تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

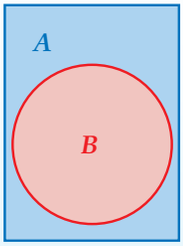
مفهوم أساسي

الاحتمال والمساحة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًّا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$



مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًّا في المستطيل A ، فإن:

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدفٍ ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة .
- أن احتمال وقوع الهدف في أيِّ مكانٍ من المنطقة متساوٍ .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الربط بالحياة

الهبوط بالمظلات يتطلب جرأة لممارسته؛ حيث يقفز المظلي من ارتفاع 10.000 متر فأكثر. وينقسم إلى: القفز بالمظلة وهو آمن وسهل؛ لأنه تلقائي ولا يستلزم تحكم القافز. والقفز الحرّ وهو للمحترفين، حيث يتحكم القافز بالمظلة في موضع هبوطه.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال المساحة لإيجاد الاحتمال الهندسي



الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟

نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، ونصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي 1 + 1 + 1، أو 3 m.

$$P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) = \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$$ احتمال المساحة

$$= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2} \quad A = \pi r^2$$

$$= \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9}$$ بسّط

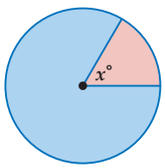
احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$، ويساوي 11% تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) الهبوط بالمظلات: أوجد كلًّا مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

A) P(أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء)

B) P(أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء)

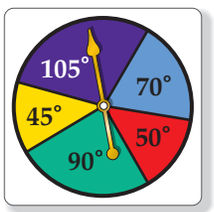


يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.

إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية ($x°$) إلى 360°. (ستبرهن هذا في السؤال 21)، وعليه فإنه إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع يساوي $\frac{x}{360}$

مثال 4

استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي



استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

a) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

قياس زاوية القطاع الأصفر 45°

$$P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر}) = \frac{45}{360} \approx 12.5\,\%$$

b) P(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)

قياس زاوية القطاع البنفسجي 105°

$$P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي}) = \frac{105}{360} \approx 29\,\%$$

c) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق)

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق 50° + 70° = 120°

$$P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق}) = \frac{360 - 120}{360} = \frac{240}{360} \approx 67\,\%$$

تحقق من فهمك

4A) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)

4B) P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

إرشادات للدراسة

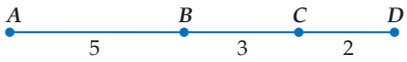
استعمال التقدير

في المثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$، أو 33% من القرص؛ لذا فالجواب 29% يكون معقولًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكـد

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AD}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:



1) (أن تقع X على $\overline{BD}$) P

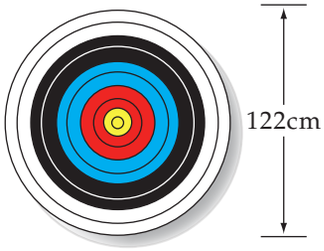
2) (أن تقع X على $\overline{BC}$) P

مثال 2

3) مواصلات: ينقل أحد فنادق مكة المكرمة المعتمرين من الفندق إلى الحرم، حيث تصل حافلة ركاب إلى الفندق أو تغادره كل 20 دقيقة. إذا وصل شخص إلى موقف الحافلات في الفندق، فما احتمال أن ينتظر 5 دقائق أو أقل لركوب إحدى الحافلات؟

المثالان 3, 4

4) لعبة السهام: يُسدد هدّاف سهمه نحو قرص قطره 122 cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الهدّاف نقطة داخل الدائرة الصغرى.



5) ملاحة: ضَلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة، فوجّه بوصلته عشوائيًّا كما في الشكل أدناه. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).



تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{FK}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:

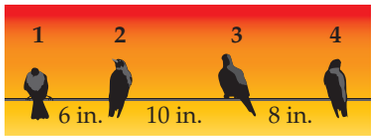


6) $P(X \in \overline{FH})$

7) $P(X \in \overline{GJ})$

8) $P(X \in \overline{HK})$

9) طيور: تقف أربعة طيور عند نقاطٍ على سلكٍ كما في الشكل المجاور. فإذا هبط طائر خامس عشوائيًّا على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟

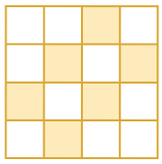


مثال 2

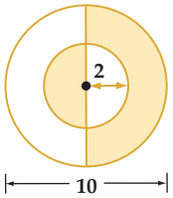
10) تلفاز: يُتابع عمّار برنامجًا تلفزيونيًّا مدته 30 دقيقة. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرّة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته برنامجه المفضّل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟

مثال 3 اختيرت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة.

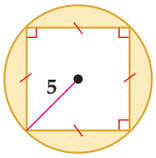
11)



12)

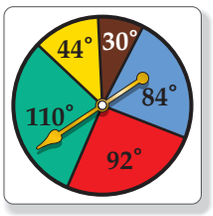


13)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 4 استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كلٍّ مما يأتي
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):



14) (استقرار المؤشر على اللون الأصفر)P

15) (استقرار المؤشر على اللون الأزرق)P

16) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)P

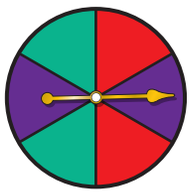
17) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر)P

صِفْ حادثة يكون احتمالها $\frac{1}{3}$ لكلٍّ من النماذج الآتية:

18)

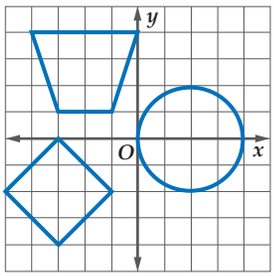


19)





20) **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا على الشبكة المجاورة، فأوجد كلًّا مما يأتي:



a) (النقطة داخل الدائرة)P

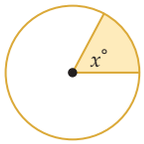
b) (النقطة داخل شبه المنحرف)P

c) (النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)P

الربط بالحياة

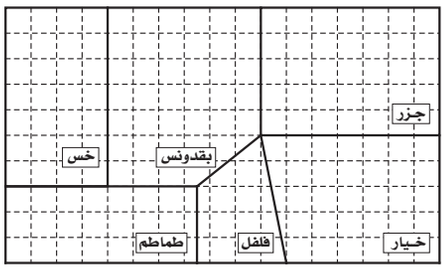
تشجّع المملكة العربية السعودية الزراعة وتوليها اهتمامًا ودعمًا، حيث تتركز الزراعة على الاكتفاء الذاتي، وتصدير القمح والتمور ومنتجات الألبان والبيض والفواكه والخضراوات والزهور إلى الأسواق في جميع أنحاء العالم.

21) **جبر:** اختيرت نقطة عشوائيًّا في الدائرة المجاورة. أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$. (إرشاد: مساحة القطاع الدائري = مساحة الدائرة × $\frac{x}{360}$)



22) **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة (x, y) عشوائيًّا في منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟

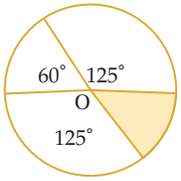
23) **زراعة:** مزرعة مقسمة إلى حقول كما في الشكل المجاور،



a) ما المساحة الإجمالية لحقول الخيار والجزر؟

b) إذا وقف مزارع في مكان من المزرعة عشوائيًّا لجني المحصول، فما احتمال أن يكون قد وقف في حقل من حقول البقدونس.

مسائل مهارات التفكير العليا



24) **اكتشف الخطأ:** حسب كلٌّ من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الدائرة O في المنطقة المظلّلة، أيُّهما حلُّه صحيح؟ وضِّح تبريرك.

عمر

$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$

$= \frac{50}{360}$

$\approx 13.9\%$

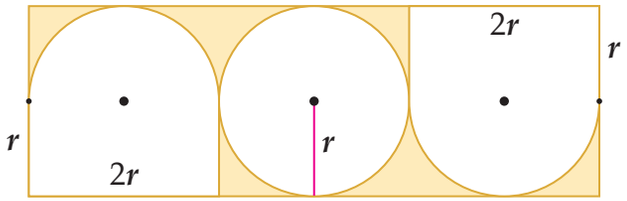
سالم

$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$

$= \frac{60}{360}$

$\approx 16.7\%$

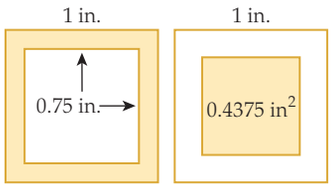
25) تحدٍّ: أوجد احتمال أن تقع نقطة يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الشكل المجاور في المنطقة المظللة مقربًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.



26) تبرير: محيط مثلّث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلّث أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحته $48\ cm^2$ بالضبط؟ وضّح تبريرك.

27) مسألة مفتوحة: مثّل حادثة احتمالها 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.

28) اكتب: إذا اخترت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من المربعين الآتيين، فوضّح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة في أيٍّ منهما.



تدريب على اختبار

29) احتمال: رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واخترت نقطة عشوائيًّا داخل المربع. ما احتمال أن تقع أيضًا داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{3}$

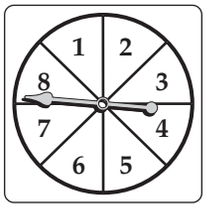
B $\frac{\pi}{9}$ D $\frac{9}{\pi}$

30) احتمال: يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاوين و 3 كرات سوداء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون حمراء؟

A $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{6}$ D $\frac{7}{18}$

31) إجابة قصيرة: قُسّم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:



a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد 3؟

b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فرديًّا؟

مراجعة تراكمية

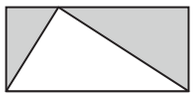
32) حفلة: يجلس خمسة أصدقاء حول منضدة دائرية الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ (الدرس 2-7)

مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري: (الدرس 1-7)

33) في كلٍّ من السنتين القادمتين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي (C) أو النشاط العلمي (S).

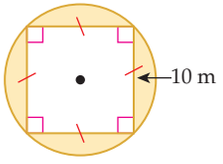
34) يمكن أن تشتري أمينة زوج أحذية له كعب مرتفع (H) أو كعب منخفض (L)، وبلون أسود (K) أو بني (B).

35) هندسة: في الشكل المجاور، ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المستطيل؟ (مهارة سابقة)

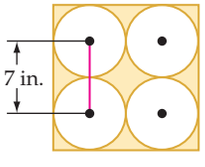


أوجد مساحة المنطقة المظلّلة في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

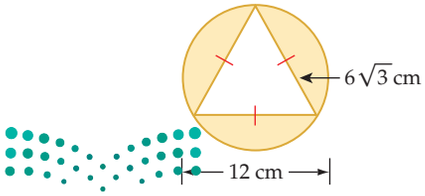
36)



37)



38)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفصل 7

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 7-1 إلى 7-3

1) طعام: يتكون غداء صالح من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي:

شطائر	حساء	الحلوى	مشروبات
دجاج	دجاج	كعك	شاي
لحم	خضراوات	كنافة	قهوة
لبنة	عدس		عصير برتقال
جبنة			عصير تفاح
			حليب

a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن لصالح أن يتناولها إذا اختار صنفًا من كل عمود؟

b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعان من الحلوى، فكم يصبح عدد الوجبات المختلفة؟

2) أعداد: كم عددًا مختلفًا مكونًا من (5) أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 9 ,..., 4, 3, 2 ، دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

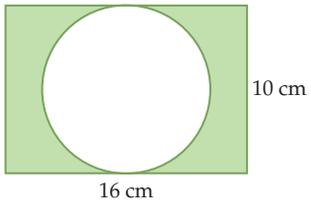
3) ملابس: في محل تجاري قمصان ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أصفر (Y)، أخضر (G)، زهري (P)، برتقالي (O)، وكل منها بنوعي أكمام: طويل (L) وقصير (S). مثّل فضاء العيِّنة لخيارات القمصان لدى مريم، إذا أرادت شراء قميص من المحل باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

4) كتابة: يحتوي كيس على بطاقات كُتب على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر ، ف ، س ، ة ، و ، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذهِ الحروف عشوائيًّا لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟

5) نقود: لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع القطع جميعها في جيوبه؟

6) نقود: إذا ألقيتْ قطعة نقد عشر مرات متتالية، فما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟

7) هندسة: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المستطيل في الشكل أدناه، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



8) سيرك: مُدَّ حبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْعِ الحبل عند أيِّ نقطة من نقاطه متساوية.

a) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل في أول 50 m منه.

b) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من أيٍّ من العمودين.

اختيرت نقطة A عشوائيًّا على $\overline{BE}$ في الشكل أدناه. أوجد كلًّا ممّا يأتي:



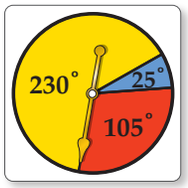
9) (أن تقع A على $\overline{CD}$) P

10) (أن تقع A على $\overline{BD}$) P

11) (أن تقع A على $\overline{CE}$) P

12) (أن تقع A على $\overline{DE}$) P

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة، فإنه يُعاد تدويره مرة أخرى):

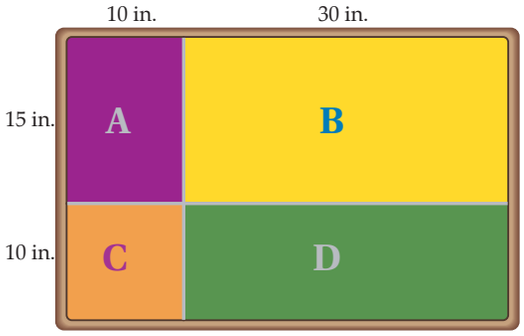


13) (استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء) P

14) (استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء) P

15) (استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء) P

16) لعبة السهام: الهدف من لعبة رمي السهام أن يصيب السهم المنطقة المربعة الشكل C في اللوحة المستطيلة الشكل المبينة أدناه، إذا سدد لاعب سهمًا ووقع في نقطة ما على اللوحة، فما احتمال أن يكون قد وقع في:



a) المنطقة A؟

b) المنطقة B؟

c) المنطقة C؟

d) المنطقة D؟

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-4

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
Probabilities of Independent and Dependent Events

فيما سبق:
درست حساب الاحتمالات البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- أجد احتمال حادثة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.

المفردات:
الحادثة المركبة
compound event
الحوادث المستقلة
independent events
الحوادث غير المستقلة
dependent events
الاحتمال المشروط
conditional probability
شجرة الاحتمال
probability tree
الحادثة المشروطة
conditional event

لماذا؟



يسحب معلم الكيمياء عشوائيًّا بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفِّه البالغ عددهم 18 طالبًا، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولًا يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث B.

افترض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

مثال 1 تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأيِّ حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية؛ ولذا تكون الحادثتان مستقلتين.

b) في فقرة "لماذا ؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًّا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. وهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العيِّنة قد نقص واحدًا؛ لذا فإن الحادثتين غير مستقلتين.

c) سحب كرة واحدة عشوائيًّا من كلٍّ من صندوقين مختلفين.

احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني؛ لذا تكون الحادثتان مستقلتين.

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة
هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلًا عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، فإنّ الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلًا هي حادثة بسيطة.

تحقق من فهمك

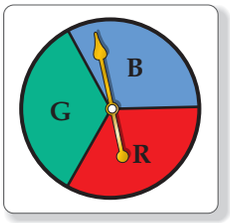
حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إذا أُلقيت قطعة نقد وأُدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو: {(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.



باستعمال فضاء العيِّنة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين كما يأتي:

$$P(\mathbf{L}) = \frac{1}{2} \qquad P(\mathbf{G}) = \frac{1}{3} \qquad P(\mathbf{L} \cap \mathbf{G}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضِّح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

(∩) يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين (وقوع الحادثتين معًا)، ويشير إلى ضرب الاحتمالات. وتقرأ العبارة $P(A \cap B)$: احتمال وقوع A ووقوع B معًا.

مفهوم أساسي

احتمال حادثتين مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالَي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A وB مستقلتين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

يمكن تعميم هذا القانون على أيِّ عدد من الحوادث المستقلة

مثال 2 من واقع الحياة

احتمالات الحوادث المستقلة



وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في سيارة تركي، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في سيارة سعود.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصة التي سحبها أولًا. افترض أن B يمثّل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثّل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \cap B)$.

السحب 1 — السحب 2

$$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B)$$

احتمال الحادثتين المستقلتين

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

$P(B) = \frac{3}{8}$

لذا فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقّم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولًا، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط

يجب ألّا يفسر الرمز $P(B|A)$ في $|$ على أنه رمز القسمة.

مثال 3

احتمالات الحوادث غير المستقلّة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كلٌّ من الصديقين قصاصة صفراء؟

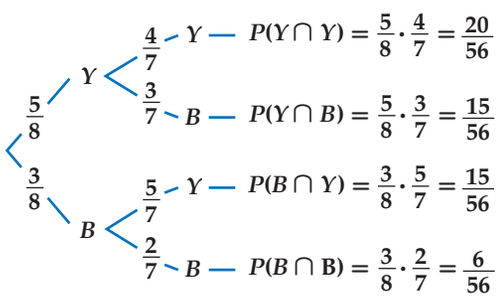
هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يُرجع القصاصة التي سحبها من الكيس.

احتمال الحادثتين غير المستقلتين $P(Y \cap Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$

بعد سحب قصاصة صفراء، يبقى 7 قصاصات، أربع منها صفراء $= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

لذا فاحتمال أن يسحب الصديقان قصاصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$، أو 36% تقريبًا.

تحقق: تحقق من صحّة هذه النتيجة باستعمال الرسم الشجري. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب احتمالَي المرحلة الأولى في فروع الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج كما في الشكل أدناه.



يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1$ ✓

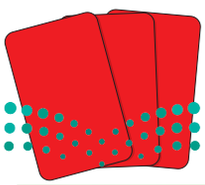
إرشادات للدراسة

قيم الاحتمال

- لأيّ حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1

تحقق من فهمك

3) بطاقات: يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقّمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الاحتمال المشروط: علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلًا إذا رُمي مكعب مرقّم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5؟



هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العيِّنة من {1, 2, 3, 4, 5, 6} إلى {1, 3, 5}، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$P(5 \mid \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$.

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 8 عشوائيًّا حيث:

- **تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.**
- **تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.**

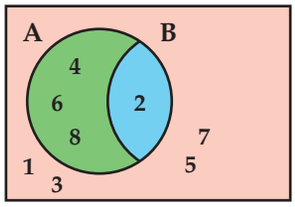
إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلى من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عددًا زوجيًّا؛ لذا فإنك في حاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجيًّا. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار



افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي. وأن B حادثة سحب العدد 2

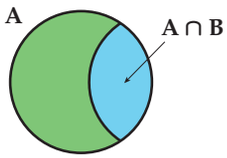
ارسم شكل ڤن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العيِّنة، وواحد منها هو 2 ؛

لذا فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي B .

تحقق من فهمك

4) عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$



بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيِّنة، فإنه يمكن تبسيط شكل ڤن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة في A و B وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لِـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث: $P(A) \neq 0$.

سيبرهن هذا القانون في السؤال 16

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط

$P(5 \mid A)$ تقرأ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A.

إرشادات للاختبار

أشكال ڤن

استعمل أشكال ڤن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حادثتين غير مستقلتين.

إرشادات للدراسة

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة كل العناصر المشتركة التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وإلى المجموعة الثانية في الوقت نفسه ويرمز لها بالرمز ∩ .

تأكد

مثال 1 **حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1, 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضِّح إجابتك:**

1) وصل فريق كرة القدم في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة.

2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد ، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.

مثال 2 **3)** **بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكلٍّ منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أُعِيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟

مثال 3 **4)** **أوراق نقدية:** في جيب عبد السلام 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، ما احتمال أن يسحب عبد السلام عشوائيًّا ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية.

مثال 4 **5)** **أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 10 عشوائيًّا، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (6–9) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:**

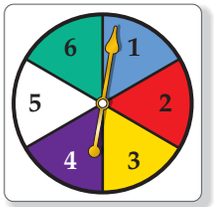
6) رمي مكعب مرقّم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسَّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقّم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي.

7) اختيار طالبين حصلا على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحدًا تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالبًا، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة.

8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائيًّا دون إرجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.

9) ظهور العدد 5 على الوجهين العُلويين لمكعبين مرقّمين متمايزين أُلقِيا مرة واحدة.

10) **ألعاب:** إذا أُدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة. فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟



11) **شعارات:** معتمدًا على الجدول المجاور، إذا اختير شعاران عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 4

12) سُحبت كرة حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 كرات حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟

13) مستطيل محيطه 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن يكون الشكل مربَّعًا؟

14) رُقمت قطاعات متطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا عُلم أنه استقر عند عدد فردي؟

15) **تقنيات:** يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟

16) **برهان:** استعمل قانون احتمال حادثتين غير مستقلتين $P(A \cap B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$

17) **تنس أرضي:** إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب التنس 40% ، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%، فأجب عما يأتي:

a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبيّن احتمالات النواتج.

b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجًا؟



الربط بالحياة

تُعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأ مزدوجًا على اللاعب إذا لم ينجح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يطأ خط الرمي أو يتجاوزه في محاولتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **اكتشف الخطأ:** أراد كلٌّ من مهند وجابر إيجاد احتمال A شرط وقوع B، حيث $P(A) = 0.3, P(B) = 0.3$، والحادثتان A و B مستقلتان. أيُّهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

مهند	جابر
بما أن A و B حادثتان مستقلتان، فإن: $P(A\|B) = P(A)$	بما أننا لا نعرف $P(A \cap B)$، فإننا لا نستطيع إيجاد $P(A\|B)$

19) **تحدٍّ:** يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 5%. فما قيمة n؟ وضِّح إجابتك.

20) **تبرير:** إذا كان A و B حادثتين مستقلتين، فهل العبارة $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ برّر إجابتك.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين مستقلتين وحادثتين غير مستقلتين، وبرّر إجابتك.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

تدريب على اختبار

23) احتمال: يمكن أن يلعب بلال عشوائيًّا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟

A $\frac{1}{18}$ **C** $\frac{1}{9}$

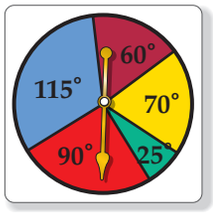
B $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{1}{2}$

24) احتمال: يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ عمّار حبتَي حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشرٍ.

مراجعة تراكمية

25) ما احتمال ظهور العدد 2 على الوجه العلوي لمكعب مرقّم أُلْقي مرتين؟ (الدرس 4-7)

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خطٍّ بين لونين): الدرس (3-7)



26) (استقرار المؤشر عند اللون الأحمر)P

27) (استقرار المؤشر عند اللون الأزرق)P

28) (استقرار المؤشر عند اللون الأخضر)P

29) (استقرار المؤشر عند اللون الأصفر)P

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي: (الدرس 1-7)

30) تختار فاطمة واحدًا من بين 5 مذاقات مختلفة من الآيس كريم و3 أنواع مختلفة من الحلوى.

31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدها.

32) رمي ثلاثة مكعبات مرقّمة في آنٍ واحد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-5

احتمالات الحوادث المتنافية
Probabilities of Mutually Exclusive Events

فيما سبق:
درست إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. الدرس (4-7)

والآن:
- أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
- أجد احتمال متممة حادثة.

المفردات:
الحادثتان المتنافيتان
mutually exclusive events
الحادثة المتممة
complement event

لماذا؟



يمكن لأيٍّ طالب في الصفوف (الأول والثاني والثالث الثانوي) الترشُّح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالبًا يبدأ اسمه بحرف م.

الحوادث المتنافية: لقد اختبرت في الدرس 3-4 احتمالات تتضمن تقاطع حادثتين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثتين أو أكثر.

$P(A \cup B)$ ← يدل على اتحاد مجموعتين

$P(A \cap B)$ ← يدل على تقاطع مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى، يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثتين. فإذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيتان**؛ أيْ أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

إرشادات للدراسة

الاتحاد
اتحاد مجموعتين هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو إلى المجموعة الثانية ويرمز لها بالرمز ∪ .

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في فقرة "لماذا؟".

a) **المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.**
هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

b) **المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.**
هاتان الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

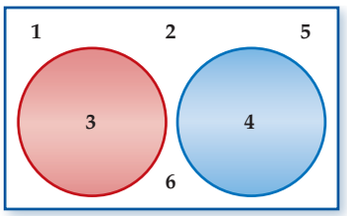
تحقق من فهمك

حدِّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

1A) اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائيًّا، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 .

1B) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العيِّنة لهما.



فمثلًا لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقّم، سترى من أشكال ڤن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن:

$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالَي الحادثتين البسيطتين.

$$P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(4) = \frac{1}{6} \text{ و } P(3) = \frac{1}{6}$$

يوضِّح هذا المثال القانون الأول من قانونيَ الجمع في الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

(∪)

يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات. $P(A \cup B)$ يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال الحادثتين المتنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كلٍّ منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أيِّ عدد من الحوادث المتنافية.

مثال 2 من واقع الحياة

الحوادث المتنافية

كتب: **اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب تاريخيًا أو علميًا؟**

مكتبة موسى	
أنواع الكتب	العدد
تاريخية	10
علمية	12
أدبية	13

هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب تاريخيًا أو علميًا في آن واحد.

افترض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب تاريخي.
وافترض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب علمي.
مجموع الكتب هو $10 + 12 + 13 = 35$.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) \qquad \text{احتمال الحادثتين المتنافيتين}$$

$$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35} \qquad P(A1) = \frac{10}{35} \text{ و } P(A2) = \frac{12}{35}$$

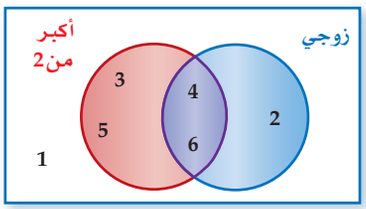
$$= \frac{22}{35} \qquad \text{اجمع}$$

لذا فإن احتمال اختيار كتاب تاريخي أو علمي هو $\frac{22}{35}$ ، ويساوي 63% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2A) إذا رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كلٍّ من وجهَي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

2B) ألعاب: إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائيًّا من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و 25 قلمًا و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟



عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال ڤن وجود 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5,6 . لذا فإن:

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من2}) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6} \qquad P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6 ، 4 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرّة أخرى لكونهما عددين زوجيين؛ لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من 2}) - P(\text{عدد زوجي وأكبر من 2})$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين غير متنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع B و A معًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



الربط بالحياة

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقدم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرق تعبير، تهذّب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

مثال 3 من واقع الحياة

الأحداث غير المتنافية

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًّا للمشاركة في معرض للوحات الفنيّة، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًّا؟

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

$$P(\text{لوحة زيتية أو منظر طبيعي}) = P(\text{لوحة زيتية}) + P(\text{منظر طبيعي}) - P(\text{لوحة زيتية و منظر طبيعي})$$

$$= \frac{5+3+2+0}{30} + \frac{1+3+2}{30} - \frac{3}{30} \quad \text{عوّض}$$

$$= \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30} \quad \text{بسّط}$$

لذا فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًّا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) فن: في المثال أعلاه، ما احتمال أن تكون اللوحة التي اختارها إبراهيم مائية أو شكلًا هندسيًّا؟

احتمال الحادثة المتممة: عناصر **الحادثة المتممة** A تتكون من جميع نواتج فضاء العيّنة غير الموجودة في الحادثة A. فمثلًا تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: 1, 2, 3, 5, 6. لذا فإن $P(\text{عدم الحصول على العدد } 4) = \frac{5}{6}$.

لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

قراءة الرياضيات

الحادثة المتممة

يرمز إلى الحادثة المتممة للحادثة A بالرمز (A').

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال الحادثة المتممة

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأيّ حادثة A، $P(A') = 1 - P(A)$

مثال 4

الحادثة المتممة

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائيًّا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افترض أن A تمثّل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A.

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{احتمال المتممة}$$
$$= 1 - \frac{20}{300} \quad \text{عوّض}$$
$$= \frac{280}{300} \quad \text{اطرح و بسّط}$$
$$= \frac{14}{15}$$

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$، أو 93% تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) أمطار: إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

قوانين الاحتمال

نوع الحوادث	الوصف	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A , B حادثتين مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B : $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحادثتان المتنافيتان	حادثتان لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحادثتان غير المتنافيتين	حادثتان توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثة المتممة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأيّ حادثة A: $P(A') = 1 - P(A)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 5 من واقع الحياة

تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقَيْن واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم: تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحدًا أو أكثر. لذا أنت في حاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعمل حزام الأمان.

أي إيجاد (الأول لا يستعمل الحزام ∪ الثاني لا يستعمل الحزام) P



خطط: الحادثة الموصوفة أعلاه هي الحادثة المتممة لحادثة أن السائقين المختارين يستعملان حزام الأمان.

افرض أن الحادثة A تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.

وافرض أن الحادثة B تمثّل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تمّ اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P[(A \cap B)']$ وهي تكافئ $P(A' \cup B')$

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن احتمال الحادثة الأولى يؤثر في احتمال الحادثة الثانية.

حُلّ:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$	احتمال الحادثتين غير المستقلتين
$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$	$P(A) = \frac{81}{100}$
$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$	اضرب
$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B)$	احتمال الحادثة المتممة
$= 1 - \frac{36}{55}$	عوّض
$= \frac{19}{55}$	اطرح

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريبًا.

تحقق: استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولية إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي %(81 − 100)، أو 19%

واحتمال اختيار سائقين من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19%. وبما أن 19% < 35% ، فإن الإجابة معقولة.

تحقق من فهمك

5) هواتف نقالة: أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقّال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقّال أثناء القيادة؟

الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ

الشهر	عدد حالات الوفاة
المحرم	26
صفر	18
ربيع الأول	16
ربيع الآخر	26
جمادى الأولى	22
جمادى الآخرة	23
رجب	21
شعبان	15
رمضان	26
شوال	25
ذو القعدة	23
ذو الحجة	25
المجموع	266

الربط بالحياة

يؤدي عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة بسبب الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

إرشادات للدراسة

تقاطع الحوادث واتحادها

من المثال 5 لاحظ أن

$P(A' \cup B') = P[(A \cap B)']$

وبالمثل

$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$

تأكد

مثال 1 **حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وبرّر إجابتك:**

1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة.

2) اختيار سيارة أو حصان.

مثال 2

3) **الموظف المثالي:** حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائيًّا واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب ، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتابًا، أو ساعة؟

مثال 3

4) **نشاطات مدرسية:** بناءً على الجدول المجاور، اختير طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضي	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

مثال 4

5) **لعبة السهام:** إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$، فما احتمال أن تخطئ إصابة الهدف؟

مثال 5

6) **تخرج:** عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1،3 **حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كلٍّ من الأسئلة 9-7)، ثم أوجد الاحتمال، وقرّب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًّا:**

7) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين.

8) اختيار عدد عشوائيًّا من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3 .

9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة.

10) **رياضة:** يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 16–14. ما احتمال أن يمارس مشارك السباحة أو أن يكون عمره 14؟

النادي الرياضي			
العمر	كرة القدم	الكرة الطائرة	السباحة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

11) **هدايا:** أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصًا، و 6 اختاروا هاتفًا نقالًا، و4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائيًّا فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟

مثال 4 **أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:**

12) عدم ظهور العدد 3 على أيٍّ من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

13) عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.

14) سحب خليل عشوائيًّا كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألَّا يسحب الكرة الحمراء؟

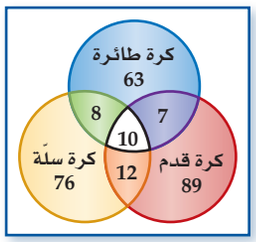
مثال 5

15) **أجور:** من بين فئة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و25 سنة، وجد أن نسبة الذين يقبضون أجورهم أسبوعيًّا تساوي 71%. فإذا اختير اثنان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجرته أسبوعيًّا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، واختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة عددها 100 شخص , فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟

17) **مسح:** أجرت مدرسة مسحًا على طلابها البالغ عددهم 265 طالباً لمعرفة أيِّ الأنشطة الرياضية يرغبون المشاركة فيها، ومُثّلت النتائج بأشكال ڤن كما في الشكل المجاور . إذا اختير طالب عشوائيًّا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي:



a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة.

b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم ولايرغبون المشاركة في كرة السلة.

c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **تحدَّ:** إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقّمة متمايزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟

تبرير: **حدد إذا كانت الحادثتان في كلٍّ مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:**

19) اختيار مثلّث متطابق الأضلاع ومثلّث متطابق الزاويا.

20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين متنافيتين وحادثتين غير متنافيتين.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حادثتين متنافيتين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات؟

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A 0.075 **B** 0.35 **C** 0.5 **D** 0.65

24) **احتمال:** رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** $\frac{5}{6}$ **D** 1

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ثمّ أوجد الاحتمال: (الدرس 4-7)

25) ظهور العدد 2 في الرمية الأولى لمكعبٍ مرقّمٍ، ثم ظهور العدد 3 عند رمي المكعب للمرة الثانية.

26) سحب مصباحين تالفين واحدًا تلو الآخر من صندوق فيه 12 مصباحًا، 3 منها تالفة.

27) أوجد عدد النواتج الممكنة عند رمي مكعب مرقّم وثلاث قطع نقد. (الدرس 1-7)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العيّنة (الدرس 1-7)

- فضاء العيّنة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العيّنة باستعمال القائمة المنظمة أو الجدول أو الرسم الشجري.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 2-7)

- الترتيب مهم في التباديل.

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-7)

- إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًّا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي: $\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$
- إذا احتوت المنطقة A المنطقة B واختيرت نقطة E عشوائيًّا من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

احتمالات الحوادث المركبة (الدرسان 4-7 و 5-7)

- إذا كانت الحادثة A' متممة للحادثة A فإن:
$P(A') = 1 - P(A)$
- إذا كانت الحادثة A لا تؤثر في احتمال وقوع الحادثة B ، فإن: الحادثتين مستقلتان ويكون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- إذا لم يكن وقوع الحادثتين A و B ممكنًا في الوقت نفسه فإنهما متنافيتان ويكون $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا لم تكن A و B متنافيتين، فإن:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية قد دوّنت في مطويتك.



المفردات

فضاء العيّنة ص 356
الرسم الشجري ص 356
تجربة ذات مرحلتين ص 357
تجربة متعددة المراحل ص 357
مبدأ العد الأساسي ص 358
المضروب ص 362
التباديل ص 363
التباديل الدائرية ص 365
التوافيق ص 365
الاحتمال الهندسي ص 369
الحادثة المركبة ص 376
الحوادث المستقلة ص 376
الحوادث غير المستقلة ص 376
الاحتمال المشروط ص 378
شجرة الاحتمال ص 378
الحادثة المشروطة ص 379
الحوادث المتنافية ص 383
الحادثة المتممة ص 386

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة.

2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

3) تحديد تراتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية.

4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا مثال على الحوادث غير المستقلة.

5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة.

6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ، مثال على المضروب.

7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العيّنة .

8) الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو:
$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مراجعة الدروس

7-1 تمثيل فضاء العيّنة ص 361 - 356

10) فشار: يبيع محل تجاري أكياس فشار ذات حجم صغير (S) أوحجم وسط (M) أوحجم كبير (L)، ودون زبدة (NB) أو مع زبدة (B) أو مع زبدة إضافية (EB). مثّل فضاء العيِّنة لأنواع الفشار باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

11) أحذية: يبيع محل تجاري أحذية من بين المقاسات: 36، 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44، وبلونين: بني أو أسود. فكم زوجًا مختلفًا يمكن اختياره؟

مثال 1

أُلقيت ثلاث قطع نقد متمايزة مرة واحدة. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة.

أقرن كل ناتج ممكن من القطعة الأولى بالنواتج من القطعتين الثانية والثالثة.

LLL, LLT, LTL, LTT, TLL, TLT, TTL, TTT

7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق ص 368 - 362

12) مطعم: ذهب ثلاثة طلاب من الصف الأول الثانوي وثلاثة طلاب من الصف الثالث المتوسط إلى مطعم وجلسوا حول منضدة مستديرة. فإذا اشترط حسين من الصف الأول الثانوي ألا يجلس بجانب أيّ طالب من الصف الثالث المتوسط، واشترط إبراهيم من الصف الثالث المتوسط ألا يجلس بجانب أي طالب من الأول الثانوي. فما عدد التراتيب الممكنة؟

13) ترغب مجموعة من 10 طالبات في تشكيل لجنة من 3 منهن، بحيث يتم اختيارهن عشوائيًّا من المجموعة. فما احتمال اختيار نوال ودانة وفاطمة لهذه اللجنة؟

14) مسابقات: بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من 32 طالبًا لتشكيل فريق لمسابقة أكاديمية؟

مثال 2

بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

$(n-1)!$ — قانون التباديل الدائرية

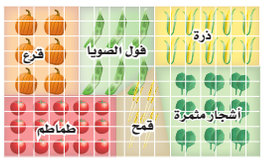
$(4-1)!$ — $n=4$

$= 3! = 6$ — بسّط

لذا فهناك 6 طرائق لجلوس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة.

7-3 الاحتمال الهندسي ص 374 - 369

15) زراعة: الشكل المجاور يمثل مخططًا لمزرعة. إذا كان كل مربع صغير يمثل وحدة مساحة مربعة واحدة، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:



a) ما المساحة التقريبية لحقلَي فول الصويا والذرة معًا؟

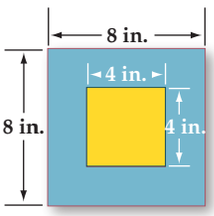
b) إذا اختير أحد المربعات عشوائيًّا، فأوجد احتمال أنه يُستعمل لزراعة الذرة.

16) يجلس الطلاب هاني وعمر وراشد وعبد الكريم (على الترتيب) على حافة بركة، بحيث يجلس هاني على بُعد 2ft من عمر، ويجلس عمر على بُعد 4ft من راشد، ويجلس راشد على بعد 3ft من عبد الكريم. إذا وقعت ريشة طائر بينهم، فأوجد احتمال أن تكون قد وقعت بين هاني وعمر.

مثال 3

لعبة رمي الكرة:

a) إذا ألقى حاتم كرة على المنطقة المبينة في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع في المنطقة الصفراء؟



مساحة المنطقة الصفراء $4 \cdot 4 = 16$

P(أن تقع الكرة في المنطقة الصفراء) $= \frac{16}{64} = 25\%$

b) ما احتمال ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الزرقاء $(8 \cdot 8) - 16 = 64 - 16 = 48$

P(ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء) $= \frac{48}{64} = 75\%$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة ص 382 - 376

17) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. إذا سحبت كرتان على التوالي دون ارجاع، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء؟

18) **مسح:** أظهرت نتائج دراسة مسحية أن 72% من الناس يحبون المطالعة، فإذا اختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 شخص، فما احتمال أن يكون الشخصان من الذين يحبون المطالعة؟

مثال 4

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين بيضاوين و 6 كرات زرقاء. فإذا سحبت كرتان على التوالي ودون إرجاع، فما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

بما أن الكرة المسحوبة لا تُعاد إلى الكيس، فإن الحادثتين غير مستقلتين، ويتم حساب الاحتمال على النحو الآتي:

$$P(\text{حمراء وزرقاء}) = P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{زرقاء} \mid \text{حمراء})$$

$$= \frac{3}{11} \cdot \frac{6}{10}$$

$$= \frac{9}{55} \approx 16.36\%$$

7-5 احتمالات الحوادث المتنافية ص 389 - 383

19) رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين عليهما 7 أو 11؟

20) يحتوي صندوق على 40 بطاقة مرقّمة من 1 إلى 40، سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًّا.

a) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًّا أو أقل من 5؟

b) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟

مثال 5

عند إلقاء مكعبين مرقَّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5، أو أن يكون العددان على الوجهين الظاهرين متساويين؟

هذان الحدثان متنافيان؛ لأن مجموع عددين متساويين لا يمكن أن يكون 5 .

$$P(\text{المجموع 5 أو متساويان}) = P(\text{المجموع 5}) + P(\text{متساويان})$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$$

$$= \frac{5}{18} \approx 27.8\%$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار الفصل

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AE}$ في الشكل أدناه. فأوجد كلًّا مما يأتي:



1) $P(X$ تقع على $\overline{AC})$ **2)** $P(X$ تقع على $\overline{CD})$

3) سباحة: يتكون فريق سباحة من 9 طلاب. ما عدد الطرائق الممكنة لترتيبهم في 9 مسارات متجاورة في بركة السباحة؟

4) سفر: يحتاج مندوب مبيعات إلى زيارة أربع مدن. ما عدد خطط الرحلات المختلفة التي يمكن أن يعدّها لزيارة كل مدينة مرة واحدة؟

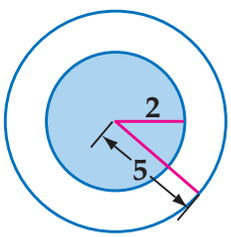
مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري:

5) يحتوي صندوق على كرة واحدة من كل لون من الألوان الآتية: الأحمر (R)، والأخضر (G)، والأزرق (B). سُحبت منه كرتان واحدة تلو الأخرى دون إرجاع.

6) مطعم: أراد خليفة أن يأكل شطيرة، وعندما ذهب إلى المطعم وجد عنده نوعين من الشطائر هما: بالجبن (C)، وباللحم (M)، فقرر شراء شطيرتين.

7) كتابة: بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف الكلمة "متململ"؟

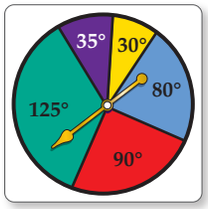
8) تصويب: يسدد صياد بندقيته نحو الهدف كما في الشكل المجاور. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظللة؟



9) أعداد: ما احتمال أن يكون عدد مكون من الأرقام السبعة الآتية 6, 2, 2, 2, 7, 7, 7 هو **6222777**؟

10) مسابقات: اشتركت خمس عشرة طالبة في مسابقة ذات ثلاث جوائز. ما احتمال أن تربح المتسابقات جنان وسارة وكوثر الجوائز الثلاث؟

11) حدد إذا كانت الحادثتان الآتيتان مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال: سحب بطاقتين حمراوين الواحدة تلو الأخرى من صندوق يحوي 5 بطاقات صفراء و5 حمراء و 5 برتقالية مع الإرجاع.



استعمل تجربة القرص ذي المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ من الاحتمالات الآتية، (إذا استقر المؤشر على خطٍّ تُعاد التجربة).

12) (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P

13) (استقرار المؤشر على اللون الأحمر) P

14) (استقرار المؤشر على لون غير الأصفر) P

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك :

15) يمتلك رجل سيارة وشاحنة.

16) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين مجموعهما 7، وظهور العدد 6 على أحد وجهي المكعبين.

17) سحب بطاقة حمراء وزرقاء من مجموعة بطاقات مكونة من 13 بطاقة حمراء، و 13 زرقاء، و 13 صفراء، و 13 خضراء.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023-1445

تنظيم البيانات



تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات لتحليلها؛ لكي تحل فقرات أسئلة في اختبار. استعمل هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات وحل المسائل.

استراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

إذا أعطيت مسألة تحتوي على بيانات، فاعتمد واحدة ممَّا يأتي:

- عمل قائمة بالبيانات.
- استعمال جدول لتنظيم البيانات.
- عرض البيانات مثل: التمثيل بالأعمدة، أشكال فن، القطاعات الدائرية، التمثيل بالخطوط أو الصندوق وطرفيه لتنظيمها.

الخطوة 2

نظِّم البيانات.

- كوّن جدولًا، أو قائمة، أو تمثيلًا بيانيًّا، أو أشكال فن.
- اكتب القيم المجهولة التي يمكن إيجادها بحسابات بسيطة إذا كان ذلك ممكنًا.

الخطوة 3

حلّل البيانات لتتمكن من حل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحدد المطلوب.
- استعمل الخصائص الهندسية والجبرية الضرورية للتعامل مع البيانات المنظمة، وحُلّ المسألة.
- إذا كان الزمن كافيًا فراجع الحل وتحقق من إجابتك.

مثال

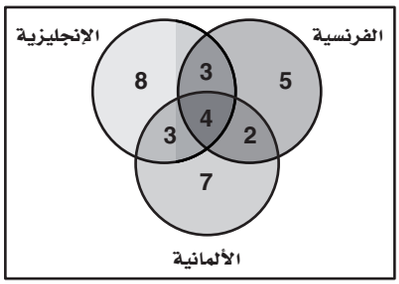
اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

يوجد في مركز للغات 18 طالبًا يتعلمون اللغة الإنجليزية، و14 يتعلمون اللغة الفرنسية، و16 يتعلمون اللغة الألمانية، ويوجد 8 طلاب يتعلمون الإنجليزية فقط، و7 يتعلمون الألمانية فقط، و3 يتعلمون الإنجليزية والفرنسية فقط، وطالبان يتعلمان الفرنسية والألمانية فقط، و4 طلاب يتعلمون اللغات الثلاث معًا. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أنه يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية؟

A $\frac{9}{16}$ **B** $\frac{2}{5}$ **C** $\frac{5}{18}$ **D** $\frac{7}{12}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اقرأ المسألة بتمعُّن تجد أنه من الصعب تحليلها من خلال النص، ولكن عند استعمالك أشكال ڤن تستطيع تنظيم البيانات، وعندئذٍ تتمكن من حلّها.



الخطوة 1: ارسم ثلاث دوائر تمثل كلٌّ منها لغة.

الخطوة 2: ضع معطيات المسألة على الشكل.

الخطوة 3: املأ القيم المفقودة في بعض الأمكنة. فمثلًا تعلم أن 18 طالبًا يتعلمون الإنجليزية، و14 طالبًا يتعلمون الفرنسية.
$14 - 3 - 4 - 2 = 5$ (يتعلمون الفرنسية فقط).
$18 - 8 - 3 - 4 = 3$ (يتعلمون الإنجليزية والألمانية فقط).

الخطوة 4: حل المسألة، المطلوب إيجاد احتمال اختيار طالب عشوائيًّا يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلّم الفرنسية. يمكنك بحسب أشكال ڤن ملاحظة أن مجموع الطلاب يساوي 32 طالبًا، منهم:
$18 = 7 + 3 + 8$ يتعلمون الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلمون الفرنسية. الاحتمال يساوي $\frac{18}{32}$ أو $\frac{9}{16}$ ؛ لذا فإن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة وحدّد المطلوب، ثم نظِّم البيانات لحل المسألة.

1) لدى رباب أربعة أحرف بلاستيكية: ا، ف، ح، ت. إذا اختارت تبديلًا عشوائيًّا لهذه الأحرف، فما احتمال أن تكون الكلمة هي كلمة "فاتح"؟

A $\frac{3}{50}$ **C** $\frac{1}{12}$

B $\frac{1}{24}$ **D** $\frac{1}{4}$

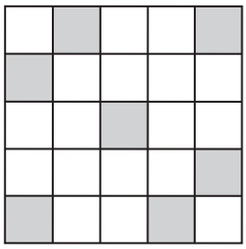
2) يبيّن الجدول الآتي عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية ، وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من الصف الثاني الثانوي أو يلعب كرة الطائرة؟

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

A $\frac{4}{21}$ **C** $\frac{5}{17}$

B $\frac{2}{25}$ **D** $\frac{13}{25}$

3) اختيرت نقطة واحدة عشوائيًّا في الشكل المجاور. أوجد احتمال أن تقع هذه النقطة في المنطقة المظلّلة.



A 0.22 **C** 0.28

B 0.25 **D** 0.32

4) تضم جماعات الأنشطة في إحدى المدارس الثانوية 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و8 طلاب من الصف الثاني الثانوي، و9 من الصف الثالث الثانوي، حيث يمارس كل طالب فيها نشاطًا معينًا في أثناء العام الدراسي على النحو الآتي:

يمارس 4 طلاب من الأول الثانوي النشاط العلمي، و6 النشاط الثقافي، ويمارس طالبان من الصف الثاني الثانوي النشاط العلمي و5 النشاط الرياضي. ويمارس طالبان من الصف الثالث الثانوي النشاط الثقافي، علمًا بأن كل نشاط يضم 9 طلاب. إذا اختير طالب واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من طلاب الصف الثاني الثانوي أو يمارس النشاط العلمي؟

A $\frac{1}{5}$ **C** $\frac{5}{9}$

B $\frac{4}{18}$ **D** $\frac{2}{3}$

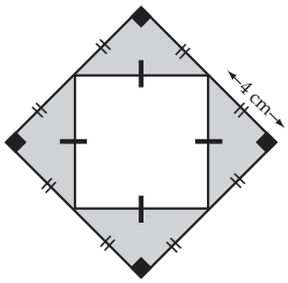
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) اختيرت نقطة عشوائيًّا في الشكل المجاور، فما احتمال وقوعها في المنطقة المظللة ؟



A 0.0625

B 0.125

C 0.25

D 0.5

2) كم عددًا مكونًا من 3 أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 2,6,1 دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

A 3

B 6

C 12

D 27

3) إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين في فضاء العيّنة لتجربة عشوائية ما ، وكان $P(\mathrm{A})=\frac{1}{3}$ ، $P(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$، فما قيمة $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$؟

A 0

B $\frac{2}{5}$

C $\frac{5}{6}$

D $\frac{1}{6}$

4) قيمة محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ يساوي:

A -11

B 11

C -1

D 1

5) يكتب المقدار: $\frac{x-1}{4x^2-14x+6}-\frac{5}{6x-18}$ في أبسط صورة على النحو:

A $\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$

B $\frac{2-7x}{6(x-3)(2x-1)}$

C $\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

D $-\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

6) إذا كانت A حادثة في فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان $P(\mathrm{A}) = 0.8$ ، فما احتمال عدم وقوع الحادثة A؟

A 0.8

B 0.2

C 0.16

D -0.2

7) سحبت عينتان عشوائيًّا واحدة تلو الأخرى دون إرجاع من صندوق يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة، فإذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A ، و3 عينات من فصيلة الدم B ، و6 عينات من فصيلة الدم AB ، و5 عينات من فصيلة الدم O ، فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB؟

A $\frac{1}{51}$

B $\frac{1}{9}$

C $\frac{5}{51}$

D $\frac{1}{3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إجابة قصيرة

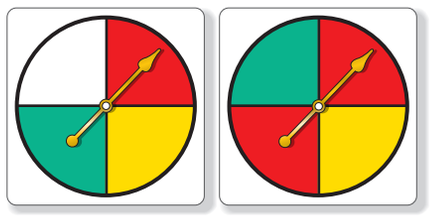
أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي:

8) التقت الصديقتان هدى ودلال بعد عدة سنوات من تخرجهما في الجامعة ودار بينهما الحوار الآتي:

هدى: مرحبًا يا دلال، بلغني أنك تزوجت، فهل رزقك الله أطفالًا؟
دلال: نعم، رزقني الله طفلين.
هدى: وهل رزقك الله بناتٍ؟
دلال: نعم.
اعتمادًا على هذا الحوار، ما احتمال أن يكون لدلال بنتان؟

9) إذا كانت $d(x) = x^3 + x + 2$ ، فما قيمة $d(4a^2)$ ؟

10) إذا دار المؤشران في الشكل أدناه، فما احتمال أن يتوقف كلاهما على اللون الأحمر؟ علمًا بأن القرصين مقسمان إلى أقسام متساوية، وإذا توقف أيٌّ من المؤشرين على الخط الفاصل بين الأقسام فإنه يعاد تدويرهما.



11) حدِّد كلًّا من مجال الدالّة $f(x) = [x] - 5$ ومداها.

إجابة طويلة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحا خطوات الحل:

12) تحتوي حقيبة على 3 بطاقات حمراء و 5 بطاقات خضراء وبطاقتين صفراوين و 4 بطاقات بنّية و 6 بطاقات بنفسجية. سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا وسُجِّلَ اللون، ثم أُعيدت إلى الحقيبة وسحبت بطاقة أخرى.

a) هل الحادثتان مستقلتان أم غير مستقلتين؟ وضّح إجابتك.

b) ما احتمال أن تكون البطاقتان بنفسجيتين؟

c) ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى خضراء والثانية بنّية؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟												
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس ...	7-3	7-1	7-5	مهارة سابقة	مهارة سابقة	7-5	7-4	7-4	مهارة سابقة	7-4	مهارة سابقة	7-4

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023-1445

الفصل 8

حساب المثلَّثات
Trigonometry



فيما سبق:

درست تحليل الدوالّ وتمثيلها بيانيًّا.

والآن:

- أجد قيم دوالّ مثلَّثية.
- أحلُّ مسائل باستعمال النسب المثلَّثية للمثلَّث القائم الزاوية.
- أستعمل قانون الجيوب وقانون جيوب التمام في حلّ المثلَّث.
- أمثّل دوالّ مثلَّثية بيانيًّا.

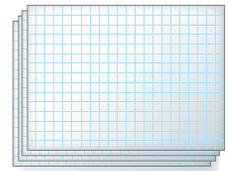
لماذا؟

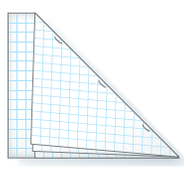
القياس غير المباشر: للدوالّ المثلَّثية تطبيقات عملية في القياس غير المباشر، فمثلًا يمكن استعمال النسب المثلَّثية لمعرفة ارتفاعات الجبال أو الأشجار الشاهقة أو ناطحات السحاب أو إيجاد البُعد بين جبلين أو عرض نهر.

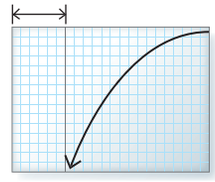
المطويات منظم أفكار

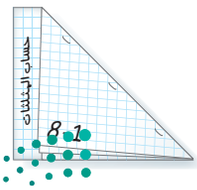
حساب المثلَّثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول حساب المثلَّثات، مبتدئًا بأربع أوراق من أوراق الرسم البياني.

1. **جمِّع** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض.
2. **اطوِ** الطرف العلوي للأوراق بحيث ينطبق على الحافة السفلية مكوّنًا مثلثًا ومستطيلًا، كما في الشكل.
3. **ثبِّت** الأوراق على طول خطِّ الطيِّ لتشكِّل كتيبًا.
4. **عنوِن** المستطيل بحساب المثلثات، ورقِّم الصفحات بأرقام الدروس.









وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الثامن

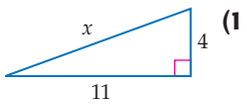
أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

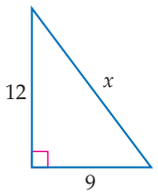
أوجد قيمة x مقرَّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

(تستعمل مع الدروس 3-8 إلى 1-8)

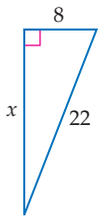
1)



2)



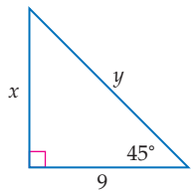
3)



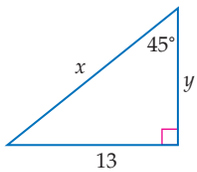
4) حدائق: لدى راشد حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 6m و 4m . يريد أن يرصف ممرًّا على قطر الحديقة. فكم سيكون طول الممر مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

أوجد القياسين المجهولين في كلٍّ مما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة): (تستعمل مع الدرس 1-8)

5)



6)

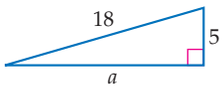


7) سلالم: يستند سُلَّم إلى جدار بحيث يصنع معه زاوية 45° . إذا كان طول السُّلَّم 12 ft، فأوجد ارتفاع قمَّته عن الأرض.

مراجعة سريعة

مثال 1

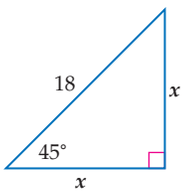
أوجد القياس المجهول في المثلَّث القائم الزاوية أدناه.



$c^2 = a^2 + b^2$	نظرية فيثاغورس
$18^2 = a^2 + 5^2$	عوِّض عن c بـ 18 و b بـ 5
$324 = a^2 + 25$	بسِّط
$299 = a^2$	اطرح 25 من كلا الطرفين
$17.3 \approx a$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

مثال 2

أوجد القياسين المجهولين فيما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



$x^2 + x^2 = 18^2$	نظرية فيثاغورس
$2x^2 = 18^2$	اجمع الحدود المتشابهة
$2x^2 = 324$	بسِّط
$x^2 = 162$	اقسم كلًّا من الطرفين على 2
$x = \sqrt{162}$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين
$x = 9\sqrt{2}$	بسِّط

8-1 استقصاء المثلَّثات القائمة الخاصة
Investigating Special Right Triangles

معمل الجداول الإلكترونية

رابط الدرس الرقمي

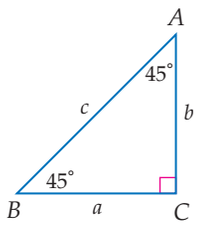
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أضلاع المثلَّثات القائمة الزاوية الخاصة.

يمكنك استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلَّثات القائمة الزاوية الخاصة.

نشاط **المثلَّث الذي قياسات زواياه $90° - 45° - 45°$**

ضلعا المثلَّث $90° - 45° - 45°$ في الشكل المجاور a, b متساويان.
ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا المثلَّث؟



الخطوة 1: أدخل الصيغ المشار إليها في برنامج الجداول الإلكترونية، حيث $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

=SQRT(A2^2+B2^2) =B2/A2 =B2/C2 =A2/C2

45-45-90 triangles

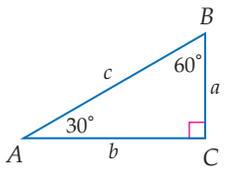
	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

الخطوة 2: تحقَّق من النتائج؛ بما أن جميع المثلَّثات التي قياسات زوايا كلٍّ منها $90° - 45° - 45°$ متشابهة، فإن النسب بين أضلاعها تكون ثابتة، وتكون نسبة الضلع b إلى الضلع a مساوية للعدد 1 . ونسبة كلٍّ من الضلعين a, b إلى الضلع c مساوية للعدد 0.71 تقريبًا.

حلِّ النموذج:

استعمل برنامج الجداول الإلكترونية المبيَّن أدناه للمثلَّث الذي قياسات زواياه $90° - 60° - 30°$.



30-60-90 triangles

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

1) انسخ ثم أكمل الورقة الإلكترونية أعلاه.

2) صِفِ العلاقة بين أطوال أضلاع المثلَّث $90° - 60° - 30°$ المُعطاة في الشكل أعلاه.

3) ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا النوع من المثلَّثات؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

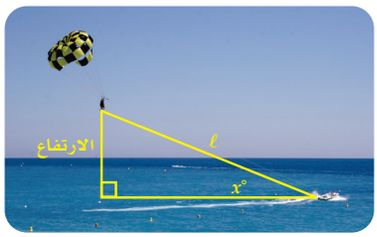
8-1 الدوالّ المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية
Trigonometric Functions in Right Triangles

فيما سبق:
درست استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع مثلَّثات قائمة الزاوية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا حادّة.
- أستعمل الدوالّ المثلَّثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلَّثات قائمة الزاوية.

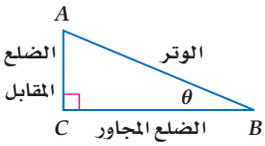
المفردات:
حساب المثلَّثات
trigonometry
النسبة المثلَّثية
trigonometric ratio
الدالّة المثلَّثية
trigonometric function
الجيب
sine
جيب التمام
cosine
الظلُّ
tangent
قاطع التمام
cosecant
القاطع
secant
ظلُّ التمام
cotangent
دوالّ المقلوب
reciprocal functions
معكوس الجيب
inverse sine
معكوس جيب التمام
inverse cosine
معكوس الظلّ
inverse tangent
زاوية الارتفاع
angle of elevation
زاوية الانخفاض
angle of depression

لماذا؟



يعتمد ارتفاع الشخص في التزلُّج الهوائي على طول حبل السحب ℓ والزاوية $x°$ التي يصنعها الحبل مع الخطِّ الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلِّج.

الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة يُعرّف **حساب المثلَّثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلَّث وأضلاعه. وتقارن **النسبة المثلَّثية** بين طولَي ضلعين في المثلَّث القائم الزاوية، أمّا **الدالّة المثلَّثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلَّثية.



يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويُقرأ ثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادّة في المثلَّث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوالّ المثلَّثية الستِّ.

مفهوم أساسي
جميع الدوالّ المثلَّثية في مثلَّث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثِّل قياس زاوية حادّة في مثلَّث قائم الزاوية، فإنّ الدوالّ المثلَّثية الستَّ تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

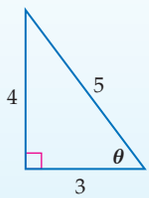
الرموز:

$$\sin\theta\ (\theta\ \text{جيب}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \csc\theta\ (\theta\ \text{قاطع تمام}) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\cos\theta\ (\theta\ \text{جيب تمام}) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \sec\theta\ (\theta\ \text{قاطع}) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta\ (\theta\ \text{ظل}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \cot\theta\ (\theta\ \text{ظل تمام}) = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

أمثلة:



$$\sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

مثال 1
إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية

إذا كانت θ تمثِّل قياس زاوية حادّة في المثلَّث القائم الزاوية في C، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ عندما يكون:

طول الضلع المقابل للزاوية θ: $BC = 8$، طول الضلع المجاور للزاوية θ: $AC = 15$، طول الوتر: $AB = 17$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} \qquad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \qquad \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{8} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{15} \qquad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{8}$$

تحقق من فهمك

1) أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية B الواردة أعلاه.

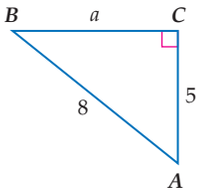
لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظلّ على الترتيب. وتُستعمل في تعريف **دوالّ المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مجال أيِّ دالّة مثلّثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادّة θ في المثلّث القائم الزاوية؛ لذا فإن قيم الدوالّ المثلّثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادّة وليس على أطوال أضلاع المثلّث القائم الزاوية؛ أي أنّ قيم الدوالّ المثلّثية للزاوية الحادّة ستبقى كما هي مهما اختلفت أطوال أضلاع المثلّث.

مثال 2 إيجاد النسب المثلّثية

$\angle B$ زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$، فأوجد قيمة $\tan B$.



الخطوة 1: ارسم مثلّثًا قائم الزاوية وسمِّ إحدى زواياه الحادّة B.

بما أن $\sin B = \frac{5}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$. فحدِّد على الرسم طول الضلع المقابل بـ 5، والوتر بـ 8.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد a.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + 5^2 = 8^2$	$b = 5,\ c = 8$
$a^2 + 25 = 64$	بسّط
$a^2 = 39$	اطرح 25 من كلا الطرفين
$a = \pm\sqrt{39}$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$a = \sqrt{39}$	الطول لا يمكن أن يكون سالبًا

الخطوة 3: أوجد قيمة $\tan B$.

$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	دالّة الظلّ
$= \frac{5}{\sqrt{39}}$	عوّض عن المقابل بـ 5 والمجاور بـ $\sqrt{39}$
$= \frac{5\sqrt{39}}{39}$	أنطق المقام

تحقق من فهمك

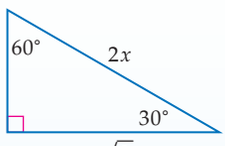
2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فأوجد قيمة $\sin B$.

تتكرَّر الزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ كثيرًا في حساب المثلّثات.

مفهوم أساسي بعض قيم الدوالّ المثلّثية للزوايا الخاصة

أضف إلى مطويتك

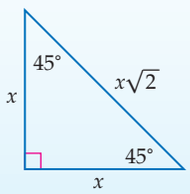
نستنتج من المثلّث الذي قياسات زواياه $90°-60°-30°$ أن:



$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}x}{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}2 \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$

نستنتج من المثلّث الذي قياسات زواياه $90°-45°-45°$ أن:



$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = 1$$

قراءة الرياضيات

تسمية المثلّثات

تُستعمل الأحرف الكبيرة خلال هذا الفصل للدلالة على رؤوس المثلّث وقياسات زوايا الرؤوس. ويُستعمل الحرف الصغير المقابل للحرف الكبير للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية، وتتضح دلالة الحرف من السياق.



تاريخ الرياضيات

اكتشف علماء العرب المسلمون العديد من العلاقات في حساب المثلّثات، واستعملوها في حلّ المعادلات، وإيجاد ارتفاع الشمس، وعمل الجداول الرياضية، ويرجع إليهم الفضل في جعله علمًا مستقلًّا عن علم الفلك.

ومن أبرز هؤلاء العلماء :

البيروني (أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني(362-439 هـ)).

الطوسي (نصر الدين الطوسي(597-672 هـ)).

الكاشي (غياث الدين بن مسعود الكاشي (تُوفي سنة 839 هـ)).

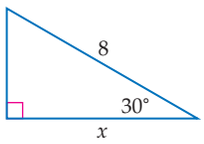
البتاني (ابن عبد الله بن محمد بن سليمان الحراني (235-316 هـ)).

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

استعمال الدوالّ المثلّثية: يمكنك استعمال الدوالّ المثلّثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلّث قائم الزاوية.

مثال 3 إيجاد طول ضلع مجهول

استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



طول الوتر يساوي 8. والطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية $30°$.
استعمل دالّة جيب التمام لإيجاد قيمة x.

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ — دالّة جيب التمام

$\cos 30° = \frac{x}{8}$ — عوّض عن θ بـ $30°$، المجاور بـ x، الوتر بـ 8

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$ — $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

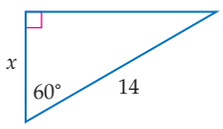
$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$ — اضرب كلًّا من الطرفين في 8

$6.9 \approx x$ — استعمل الآلة الحاسبة

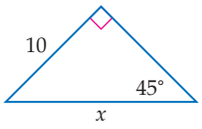
تحقق من فهمك

استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(3A)



(3B)



إرشادات للدراسة

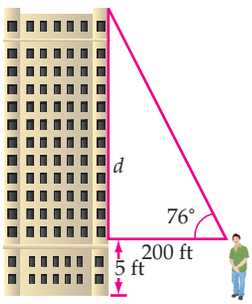
اختيار دالّة

إذا كان طول الوتر مجهولًا فإنه يجب استعمال دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام لإيجاد القيمة المجهولة.

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في المثلّثات التي لا تتضمّن زواياها أيًّا من الزوايا: $30°, 45°, 60°$.

مثال 4 إيجاد طول ضلع مجهول

بناية: **لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة 200 ft مبتعدًا عن قاعدة البناية. واستعمل أداة (مقياس زاوية الميل) لقياس الزاوية المحصورة بين خطِّ نظره المارِّ بقمّة البناية والخطِّ الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع 5 ft، فما ارتفاع البناية؟**



الزاوية المقيسة كما يوضّح الشكل هي $76°$. طول الضلع المجاور لها 200 ft، الضلع المجهول طوله هو الضلع المقابل لها. استعمل دالّة الظل لإيجاد d.

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ — دالّة الظلّ

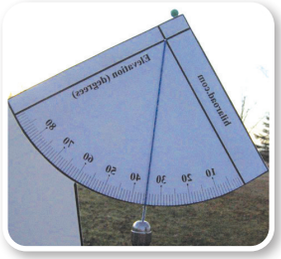
$\tan 76° = \frac{d}{200}$ — عوّض عن θ بـ $76°$، والمقابل بـ d، والمجاور بـ 200

$200 \tan 76° = d$ — اضرب الطرفين في 200

$802 \approx d$ — استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

بما أن مقياس زاوية الميل كان على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، فإن ارتفاع البناية يساوي 807 ft تقريبًا.



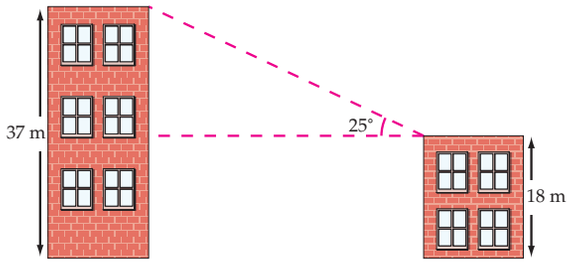


الربط بالحياة

مقاييس زاوية الميل تُستعمل لقياس زاوية ميل المجال المغناطيسي الأرضي ودرجة ميل واهتزاز المركبات والقوارب والطائرات. كما تُستعمل في رصد البراكين وحفر الآبار.

تحقق من فهمك

4) بنايات: في الشكل المجاور بنايتان، ارتفاع إحداهما 18 m، وارتفاع الأخرى 37 m، ولقياس المسافة الأفقية بينهما، وَضَعَ سعد أداة (مقياس زاوية الميل) على قمَّة البناية الصغرى، فوجد أن قياس الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي بين البنايتين والخط المارِّ من الأداة إلى قمة البناية الكبرى هو 25°. فما المسافة الأفقية بين البنايتين؟



عند حلِّ معادلات مثل $3x = -27$، تستعمل العملية العكسية للضرب. كما يمكنك استعمال معكوس الجيب أو جيب التمام أو الظل في إيجاد قياسات الزوايا.

مفهوم أساسي — معكوس النسب المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

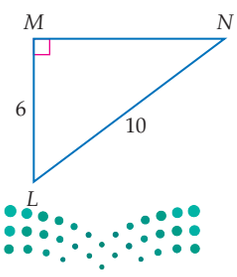
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيبها يساوي x، فإن: معكوس جيب x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\sin A = x$، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: معكوس جيب تمام x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\cos A = x$، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وظلّها يساوي x، فإن: معكوس ظل x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\tan A = x$، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

إذا علمت الجيب، أوجيب التمام أوالظل لزاوية حادّة، فإنه يمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد قياس هذه الزاوية والذي هو معكوس النسبة المثلَّثية المعلومة.

مثال 5 إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كلِّ زاوية مما يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

a) $\angle N$



بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية N وطول الوتر. استعمل دالّة الجيب.

$\sin N = \frac{6}{10}$ — $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$ — معكوس الجيب

$36.9° \approx m\angle N$ — استعمل الآلة الحاسبة

قراءة الرياضيات

معكوس النسب المثلَّثية

تُقرأ العبارة $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x، وتعني: الزاوية التي جيبها x، يشبه هذا الرمز رمز الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$. كن حذرًا ولا تخلط هذا الرمز مع رمز الأُسّ السالب؛ $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$.

إرشادات للدراسة

استعمال الآلة الحاسبة

لإيجاد $\sin^{-1} \frac{6}{10}$ باستعمال الآلة الحاسبة، اضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليسار إلى اليمين

6 SHIFT sin (10 ÷) =

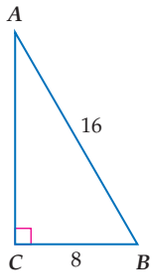
ستحصل على الإجابة 36.9°، ولإيجاد $\cos^{-1} \frac{8}{16}$ اضغط على المفاتيح

8 SHIFT cos (16 ÷) =

وستحصل على الإجابة 60°

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

b) $\angle B$

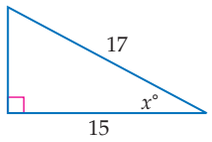


استعمل دالّة جيب التمام.

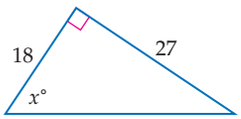
$\cos B = \frac{8}{16}$	$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
$\cos^{-1}\frac{8}{16} = m\angle B$	معكوس جيب التمام
$60° = m\angle B$	استعمل الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك أوجد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(5A)



(5B)

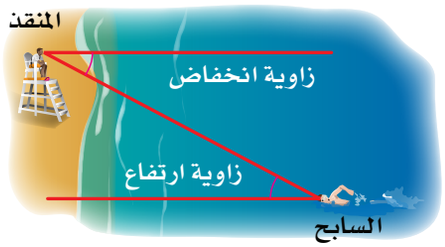


إرشادات للدراسة

زوايا الارتفاع والانخفاض

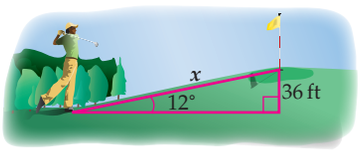
زاويتا الارتفاع والانخفاض للحالة الواحدة متطابقتان؛ لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لخطين متوازيين .

في الشكل المجاور، تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر السابح إلى المنقذ والخطِّ الأفقي له **زاوية الارتفاع**. كما تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر المنقذ إلى السابح والخطِّ الأفقي له **زاويةَ الانخفاضِ**.



مثال 6 استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض

a) لعبة الجولف: يقف لاعب جولف أسفل تَلّ، وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التلِّ 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التلِّ عن الحفرة هي 12°، فأوجد المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة.

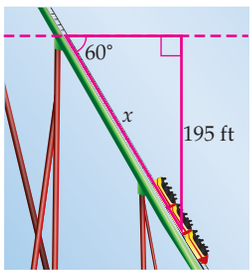


اكتب معادلة باستعمال دالّة مثلّثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 12°) إلى المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة (الوتر).

$\sin 12° = \frac{36}{x}$	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
$x \sin 12° = 36$	اضرب كلًّا من الطرفين في x
$x = \frac{36}{\sin 12°}$	اقسم كلًّا من الطرفين على $\sin 12°$
$x \approx 173.2$	استعمل الآلة الحاسبة

لذا فإن المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة تساوي: 173.2 ft تقريبًا.

b) العربة الدوارة: قياس زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوَّارة في إحدى مدن الألعاب هي 60°. وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. أوجد طول هذا الجزء من المسار.



اكتب معادلة باستعمال دالّة مثلّثية تتضمّن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 60°) إلى طول الجزء من المسار (الوتر).

$\sin 60° = \frac{195}{x}$	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
$x \sin 60° = 195$	اضرب كلًّا من الطرفين في x
$x = \frac{195}{\sin 60°}$	اقسم كلًّا من الطرفين على $\sin 60°$
$x \approx 225.2$	استعمل الآلة الحاسبة

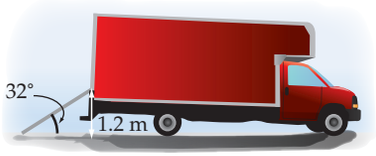
لذا فإن طول هذا الجزء من المسار يساوي 225.2 ft تقريبًا.



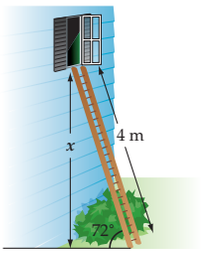
الربط بالحياة

أكثر العربات الدوَّارة انحدارًا في العالم لها زاوية انحدار (انخفاض) تقارب 90° .

تحقق من فهمك



6A) تفريغ حمولة: استُعمِل سطحٌ مائل لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها 32°. إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض 1.2 m، فأوجد طول السطح المائل.

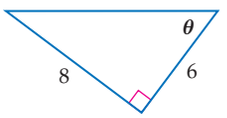


6B) سلالم: سُلَّمٌ طوله 4m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها 72°. ما ارتفاع قمَّة السلَّم عن الأرض؟

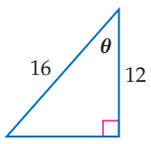
تأكد

مثال 1 أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ الموضَّحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1)



2)



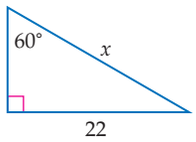
مثال 2 معتبرًا $\angle A$ زاوية حادّة في مثلَّث قائم الزاوية، أجب عما يأتي:

3) إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$؟

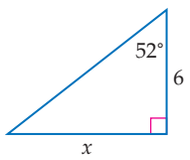
4) إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$، فما قيمة $\cos A$؟

مثال 3 استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

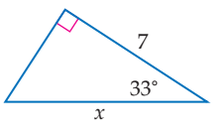
5)



6)

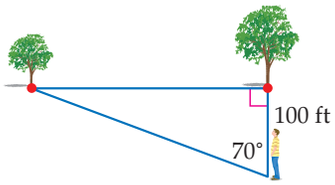


7)



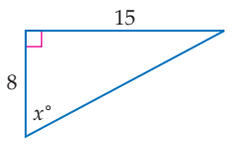
مثال 4

8) أشجار: يقف عبدالله ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرَّك مبتعدًا عن مكانه مسافة 100 ft، في مسار عموديّ على الخطِّ الواصل بين الشجرتين، ومشكّلًا معهما زاوية قياسها 70° ، فما البُعد بين الشجرتين؟

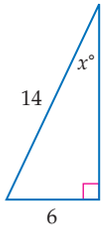


مثال 5 أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

9)



10)



11)



مثال 6

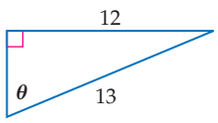
12) سلالم: إذا علمت أن زاوية ارتفاع السلالم المُوصَى بها لمكافحة الحرائق هي 75°، فإلى أيِّ ارتفاع على بناية يمكن أن يصل سُلَّم طوله 6.5 m، إذا تمَّ الاعتماد على زاوية الارتفاع الموصى بها، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

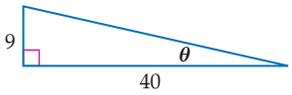
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ الموضَّحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

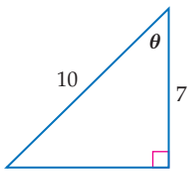
13)



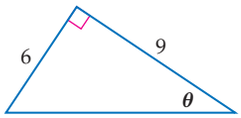
14)



15)



16)



مثال 2 إذا علمت أن $\angle B$, $\angle A$ زاويتان حادّتان في مثلّث قائم الزاوية، فأجب عما يأتي:

17) إذا كان $\tan A = \frac{8}{15}$، فما قيمة $\cos A$؟

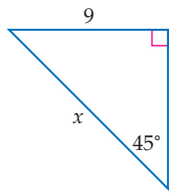
18) إذا كان $\cos A = \frac{3}{10}$، فما قيمة $\tan A$؟

19) إذا كان $\tan B = 3$، فما قيمة $\sin B$؟

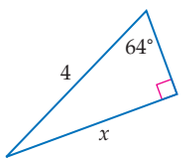
20) إذا كان $\sin B = \frac{4}{9}$ ، فما قيمة $\tan B$؟

المثالان 3, 4 في كلٍّ ممَّا يأتي، استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

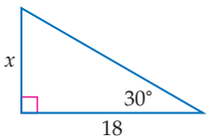
21)



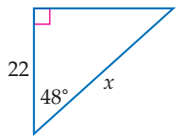
22)



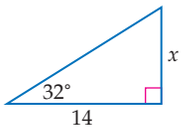
23)



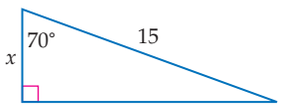
24)



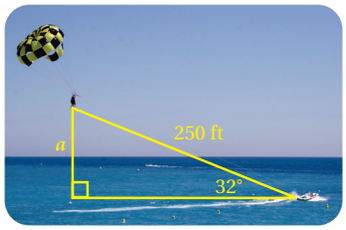
25)



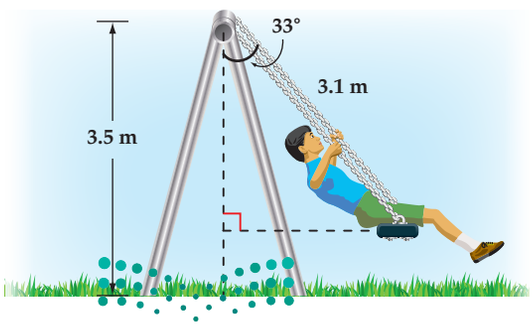
26)



27) تزلُّج هوائي: ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، واستعن بالمثلّث إلى اليسار في إيجاد قيمة a التي تُمثّل ارتفاع المتزلِّج، إذا كان طول حبل السحب 250 ft، وقياس الزاوية المحصورة بين الحبل والخطِّ الأفقي يساوي 32°، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

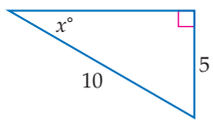


28) أرجوحة: يلعب طفل على أرجوحة في متنزَّه، فإذا كان ارتفاع أعلى الأرجوحة من الأرض 3.5 m، والزاوية التي يصنعها حبل الأرجوحة مع الخطِّ العمودي على الأرض في لحظة ما، كما هو مُبيّن في الشكل المجاور، فأوجد ارتفاع مقعد الأرجوحة عن الأرض في تلك اللحظة.

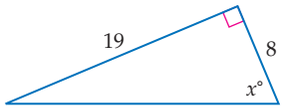


مثال 5 في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

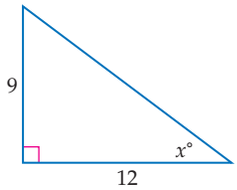
(29)



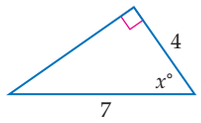
(30)



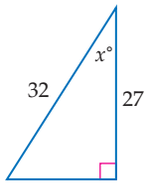
(31)



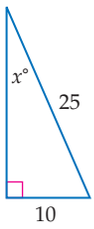
(32)



(33)



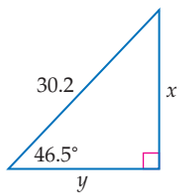
(34)



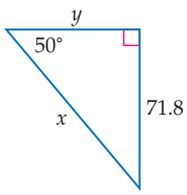
مثال 6 **(35)** **تسلّق:** تسلّق أحد الأشخاص تلًّا بزاوية ارتفاع قياسها 20°، أوجد ارتفاع الشخص عندما يكون قد قطع مسافة أفقية مقدارها 18 m .

في كلٍّ ممَّا يأتي، استعمل دوالّ مثلَّثية، لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

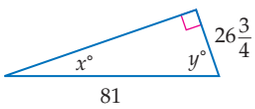
(36)



(37)



(38)



حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

(39) $\cos A = \frac{3}{19}$

(40) $\sin N = \frac{9}{11}$

(41) $\tan X = 15$

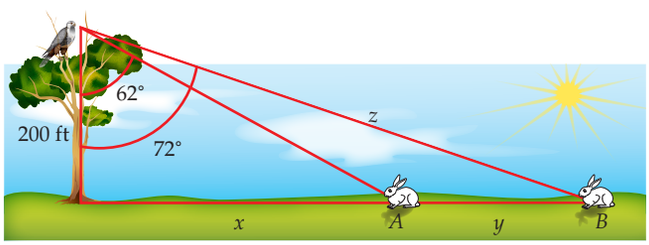
(42) $\sin T = 0.35$

(43) $\tan G = 0.125$

(44) $\cos Z = 0.98$

(45) **أعشاش:** تنظر فاطمة نحو عُشِّ طائر على شجرة بزاوية ارتفاع قياسها 74.5°، فإذا كان مستوى نظرها يرتفع 5 ft عن سطح الأرض، وكانت تقف على بُعد 12 ft من قاعدة الشجرة، فما ارتفاع عُشّ الطائر عن سطح الأرض، مقرِّبًا إلى أقرب قدم؟

(46) **صقور:** رأى صقر من ارتفاع 200 ft أرنبين A, B. كما هو موضَّح في الشكل.



a) ما المسافة التقريبية z بين الصقر والأرنب B؟

b) ما البُعد بين الأرنبين؟



الربط بالحياة

يستطيع الصقر رؤية أجسام طولها 10 cm من 1.5 km، كما أنه يستطيع رؤية الأشياء بوضوح عندما ينقضُّ بسرعة 100 ميل/ الساعة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

في $\triangle ABC$ ، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المُعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

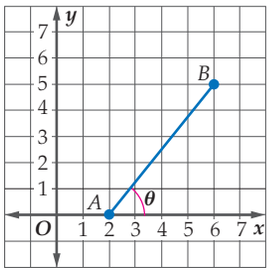
47) $m\angle A = 36°, a = 12$

48) $m\angle B = 31°, b = 19$

49) $a = 8, c = 17$

50) $\tan A = \frac{4}{5}, a = 6$

مسائل مهارات التفكير العليا



51) تحدَّ: قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(2, 0), B(6, 5)$ كما هو موضَّح في الشكل المجاور، ما قياس الزاوية الحادّة θ المحصورة بين القطعة المستقيمة والمحور x ؟ وضِّح كيف وجدت القياس.

52) تبرير: بيِّن ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرِّر إجابتك: قيمة دالّة الجيب لأيِّ زاوية حادّة، لن تكون سالبة أبدًا.

53) إجابة مفتوحة: في المثلَّث القائم الزاوية ABC، إذا علمت أن: $\sin A = \sin C$ ، فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلَّث؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

54) إذا كان ثمن شطيرة x ريالًا، وثمن علبة عصير y ريالًا، وثمن شطيرتين مع علبة عصير 4.50 ريالات، وثمن ثلاث شطائر مع علبتي عصير 7.25 ريالات، فأيُّ المصفوفات الآتية يمكن ضربها في المصفوفة $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y ؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

55) نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5 . إذا كانت مساحة المستطيل 240 cm 2، فكم سنتمترًا طول قطر المستطيل؟

A 26

B 28

C 30

D 32

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

56) $\frac{15a^2b^2}{21ac} \cdot \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$

57) $\frac{14c^2f^5}{qa^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$

58) $\frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10} \div \frac{12a^2-12}{a^2-4}$

أوجد مجموع حدود كلِّ متسلسلة مما يأتي:

59) $8 + 8 + 13 + \ldots + 58$ (مهارة سابقة)

60) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$ (مهارة سابقة)

8-2

الزوايا وقياساتها
Angles and Angle Measure

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات. الدرس (1-8)

والآن:
- أرسم زوايا في الوضع القياسي، وأجد قياساتها.
- أحوّل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

المفردات:
الوضع القياسي standard position
ضلع الابتداء initial side
ضلع الانتهاء terminal side
الراديان radian
الزاوية المركزية central angle
طول القوس arc length

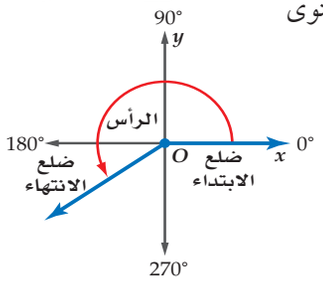
لماذا؟



المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت نهارًا من خلال الظلِّ الذي تسقطه على قرص مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظلّ على القرص °15 كلَّ ساعة.

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل، وأحد ضلعيها منطبقًا على الجزء الموجب من المحور x.

- يُسمّى الضلع المنطبِق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.

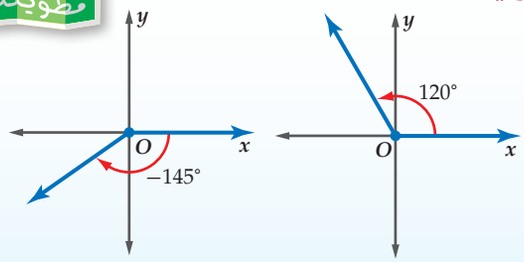


مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قياسات الزوايا

يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.



مثال 1

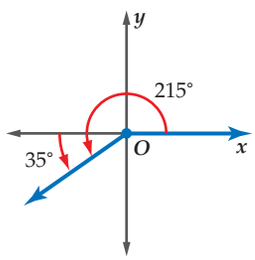
رسم زاوية في الوضع القياسي

ارسم كلًّا من الزاويتين المُعطى قياساهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

a) $215°$

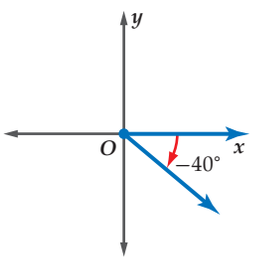
$215° = 180° + 35°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $35°$ بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء السالب من المحور x.



b) $-40°$

قياس الزاوية سالب. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $40°$ بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء الموجب من المحور x.



تحقق من فهمك

1A) $80°$

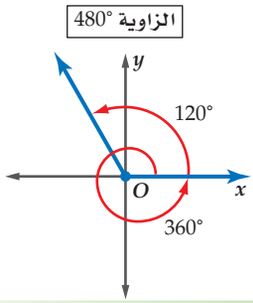
1B) $-105°$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة.

فعلى سبيل المثال:

دورة كاملة مقدارها $360°$ إضافة إلى دورة بمقدار $120°$ تشكّلان زاوية قياسها $360° + 120° = 480°$



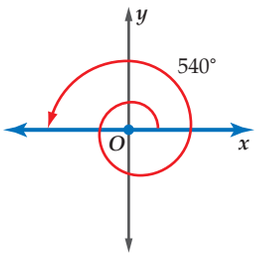


الربط بالحياة

التزلُّج المائي رياضة يضع فيها المتزلّج زلّاجة من الزجاج الليفي، أو من أنواع مختلفة من الخشب في قدميه، ويتم سحبه فوق الماء بواسطة زورق ذي محرّك سريع.

مثال 2 من واقع الحياة — رسم زاوية في الوضع القياسي

التزلُّج المائي: يتضمّن التزلُّج المائي أن يقوم المتزلِّج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء في أثناء تنفيذه هذه الرياضة. إذا تضمّنت إحدى المناورات الدوران بمقدار $540°$ في الهواء، فارسم زاوية قياسها $540°$ في الوضع القياسي.



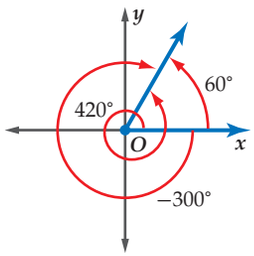
$540° = 360° + 180°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $180°$ بدءًا من الجزء الموجب من المحور x.

تحقق من فهمك

2) عجلات: أوقف سعيد درَّاجته، فتحرَّكت عجلتاها بزاوية قياسها $600°$، ارسم زاوية قياسها $600°$ في الوضع القياسي.

عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: $-300°$, $420°$, $60°$ كما هو موضَّح في الشكل المجاور.



يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات $360°$.

- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$

مثال 3 — إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

a) $130°$

زاوية بقياس موجب: $130° + 360° = 490°$ — أضف $360°$

زاوية بقياس سالب: $130° - 360° = -230°$ — اطرح $360°$

b) $-200°$

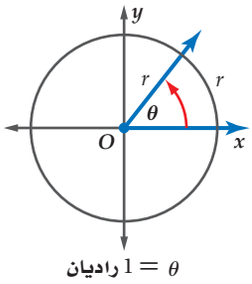
زاوية بقياس موجب: $-200° + 360° = 160°$ — أضف $360°$

زاوية بقياس سالب: $-200° - 360° = -560°$ — اطرح $360°$

تحقق من فهمك

3A) $15°$ **3B)** $-45°$

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس: يمكن أن تقاس الزوايا أيضًا بوحدات تستند إلى طول قوس من دائرة. فقياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدّد على الدائرة قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة هو 1 راديان (rad)



$\theta = 1$ راديان

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $2\pi \text{ rad} = 360°$ ، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$\pi \text{ rad} = 180° \text{ أي أن } 2\pi \text{ rad} = 360°$$

مفهوم أساسي
التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ rad}}$

مثال 4
التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

a) $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$
$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) $\frac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}}$$
$$= \frac{900°}{2} = 450°$$

تحقق من فهمك

4A) $120°$

4B) $-\frac{3\pi}{8}$

ملخّص المفهوم
القياس بالدرجات وبالراديان

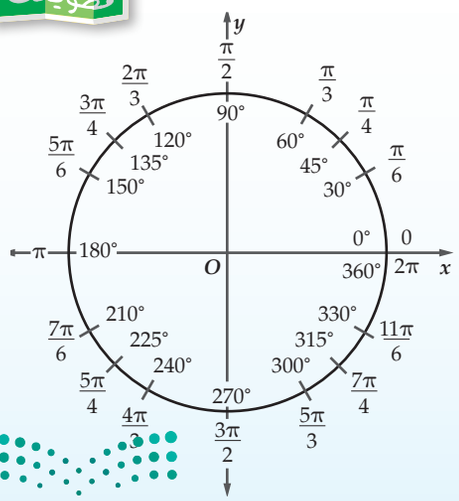
أضف إلى مطويتك

يُظهِر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصّة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصّة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$45° = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $30° = \frac{\pi}{6}$

$90° = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $60° = \frac{\pi}{3}$



إرشادات للدراسة
القياس بالراديان

كما في القياس بالدرجات، فإن القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.

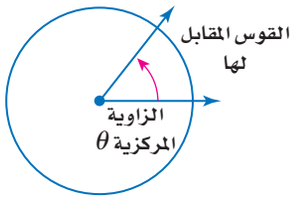
- قياس زاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان الدوران عكس حركة عقارب الساعة.
- قياس زاوية بالراديان يكون سالبًا إذا كان الدوران مع حركة عقارب الساعة.

قراءة الرياضيات
القياس بالراديان

كلمة راديان أو rad تُحذف عادة عندما يتمُّ التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. ومن هنا فعندما لا نضع وحدة لقياس مُعطى لزاوية تكون الوحدة هي الراديان.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.



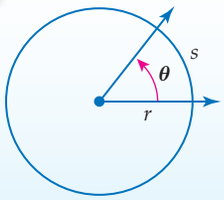
مفهوم أساسي

طول القوس

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$



سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال (48)

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد طول القوس

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in، ما المسافة بالقدم التي يقطعها الإطار بعد أن تدور إطارات الشاحنة ثلاثة أرباع دورة؟

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ — قياس الزاوية هو $\frac{3}{4}$ الدورة الكاملة

الخطوة 2: استعمل طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$ — صيغة طول القوس

$= 33 \cdot \frac{3\pi}{2}$ — عوّض عن r بـ 33 و θ بـ $\frac{3\pi}{2}$

≈ 155.5 in — استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

≈ 13.0 ft — اقسم على 12 للتحويل إلى وحدة القدم

إذن إطار الشاحنة قطع مسافة 13 ft تقريبًا بعد دوران إطاراتها ثلاثة أرباع دورة.

تحقق من فهمك

5) **مطاعم:** يقع في أعلى برج الخرج مطعم دوَّار، نصف قطره 90 ft، حيث يدور الجناح المخصَّص لتقديم الطعام والقريب من النوافذ الخارجية دورة كاملة كل 90 دقيقة. إذا ذهب شخص للمطعم لتناول العشاء وجلس على طاولة بجانب النافذة عند الساعة 6:42 مساءً وانتهى عند الساعة 8:00 مساءً، فما المسافة التي دارها؟

تنبيه

طول القوس

تذكَّر أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجات عندما تحسب طول القوس. وتذكَّر أيضًا أن الدورة الكاملة تساوي 2π راديان.

تأكد

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

1) $140°$ 2) $-60°$ 3) $390°$

مثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

4) $25°$ 5) $175°$ 6) $-100°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممَّا يأتي:

7) $\frac{\pi}{4}$ 8) $225°$ 9) $-40°$

مثال 5 10) **تنس طاولة:** تحرَّك لاعب تنس طاولة في مسار على شكل قوسٍ من دائرة. إذا كان طول نصف قطر دائرته هو 1.2 m، وزاوية دوران اللاعب تساوي $100°$، فما طول هذا القوس، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 1445

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

11) $75°$ **12)** $160°$ **13)** $-90°$

14) $-120°$ **15)** $295°$ **16)** $510°$

17) جمباز: يتأرجح لاعب جمباز على جهاز له عارضتان، ليدور بزاوية قياسها $240°$. ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

مثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

18) $50°$ **19)** $95°$ **20)** $205°$

21) $350°$ **22)** $-80°$ **23)** $-195°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان ، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممَّا يأتي:

24) $330°$ **25)** $\frac{5\pi}{6}$ **26)** $-\frac{\pi}{3}$

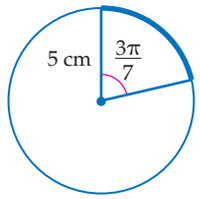
27) $-50°$ **28)** $190°$ **29)** $-\frac{7\pi}{3}$

مثال 5 **30) رياضة:** درَّاجة ذات عجلة واحدة نصف قطرها 0.8 ft، ما المسافة التي تقطعها العجلة إذا دارت $\frac{1}{4}$ دورة؟

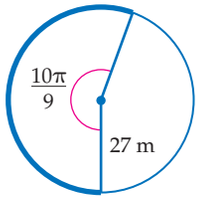


أوجد طول القوس المحدد في كلٍّ من الدائرتين الآتيتين، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

31)



32)



33) ساعات: كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق في ساعة ليدور بزاوية قياسها 2.5π راديان؟

34) المزولة: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية هذا الدرس، نجد أن الظلّ يدور على القرص $15°$ كلَّ ساعة.

a) بعد كم ساعة يدور الظلُّ بزاوية قياسها $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟

b) ما قياس الزاوية بالراديان التي يدورها الظلّ بعد مرور 5 ساعات؟

c) مزولة طول نصف قطرها 8 in ، ما طول القوس الذي يصنعه دوران الظلِّ على حافة القرص بعد مرور 14 ساعة، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



الربط بالحياة

استُعمِلت المزولة قديمًا في المسجد الأقصى لمعرفة أوقات الصلاة.

في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

35) $620°$ **36)** $-400°$ **37)** $-\frac{3\pi}{4}$ **38)** $\frac{19\pi}{6}$

39) تمثيلات متعدِّدة: لديك النقطتان $C(6, 0)$, $D(6, 8)$.

a) هندسيًّا: ارسم المثلَّث $\triangle ECD$ حيث E هي نقطة الأصل.

b) جبريًّا: أوجد ظلَّ $\angle CED$.

c) جبريًّا: أوجد ميل $\overline{ED}$.

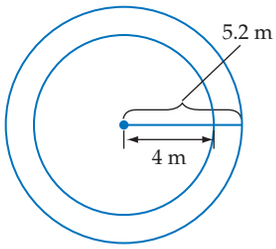
d) لفظيًّا: ما العلاقة التي تستطيع استنتاجها بين الميل وظلِّ الزاوية؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

40) $\frac{21\pi}{8}$ **41)** $124°$ **42)** $-200°$ **43)** 5

44) أحصنة دوّارة: في مدينة ألعاب، تدور لعبة الأحصنة في دائرتين، الأولى داخلية طول نصف قطرها 4 m، والثانية خارجية طول نصف قطرها 5.2 m. إذا كانت الأحصنة تدور 5 دورات في الدقيقة، فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

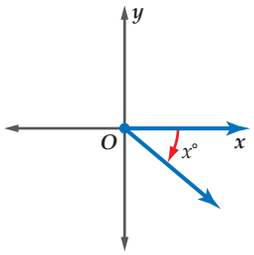


a) أوجد قياس الزاوية θ بالراديان التي يدورها حصان في ثانية واحدة.

b) كم يزيد طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الخارجية على طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الداخلية، وذلك بعد مرور ثانية واحدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

45) اكتشف الخطأ: كتب كلٌّ من عليٍّ وأحمد عبارة تُمثّل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور. من منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.



عليٌّ	أحمد
$(x-360)°$	$(360-x)°$

46) تحدٍّ: مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع الجزء الموجب من المحور x عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة هذا المستقيم.

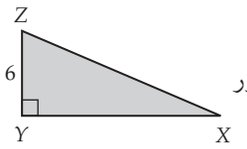
47) مسألة مفتوحة: ارسم زاوية حادّة في الوضع القياسي وسمِّها. وأوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، بحيث تكونان مشتركتين في ضلع الانتهاء مع هذه الزاوية.

48) برهان: برهن صيغة طول القوس المقابل للزاوية المركزية.

تدريب على اختبار

49) إذا كان $(x+6)(x+8)-(x-7)(x-5)=0$ ، فأوجد قيمة x .

50) هندسة: إذا كانت مساحة المثلّث المجاور 60 وحدة مربّعة، فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟

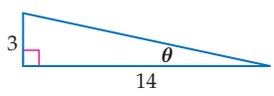


A $2\sqrt{34}$ **B** $4\sqrt{109}$ **C** $2\sqrt{109}$ **D** $4\sqrt{34}$

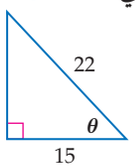
مراجعة تراكمية

أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 1-8)

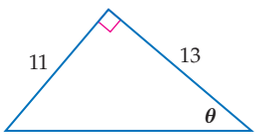
51)



52)



53)



حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

54) $a+1=\frac{6}{a}$ **55)** $\frac{9}{t-3}=\frac{t-4}{t-3}+1$ **56)** $\frac{5}{x+1}-\frac{1}{3}=\frac{x+2}{x+1}$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر في المثلّثات القائمة الزاوية التي طول كلٍّ من ساقيها كما يأتي: (مهارة سابقة)

57) $a=12, b=15$ **58)** $a=8, b=17$ **59)** $a=14, b=11$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-3 الدوالّ المثلَّثية للزوايا
Trigonometric Functions of Angles

فيما سبق:
درست إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة. الدرس (1-8)

والآن:
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيّ زاوية.
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية.

المفردات:
الزاوية الربعية
quadrantal angle
الزاوية المرجعية
reference angle

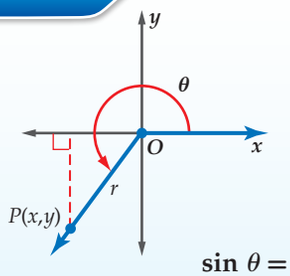
لماذا؟



تنتشر العجلة الدوّارة في كُبْريات مدن الألعاب. ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من 90°.

الدوالّ المثلَّثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا قياساتها تزيد على 90° أو تقلُّ عن 0°.

مفهوم أساسي
الدوالّ المثلَّثية للزوايا — أضف إلى



لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثّل البُعد بين نقطة الأصل والنقطة P.

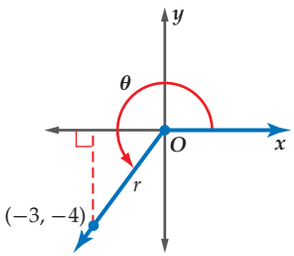
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوالّ المثلَّثية الستُّ للزاوية θ معرَّفة كما يأتي:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

مثال 1
إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية بمعلومية نقطة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-3, -4)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.



الخطوة 1: ارسم الزاوية وأوجد قيمة r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

الخطوة 2: استعمل $x = -3, y = -4, r = 5$ لكتابة الدوالّ المثلَّثية الستِّ.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-6, 2)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن الزاوية θ تُسمّى **زاوية ربعية**.

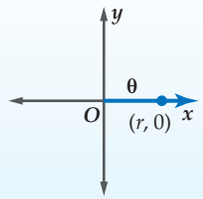
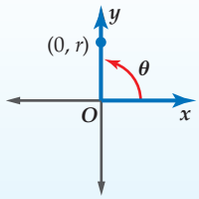
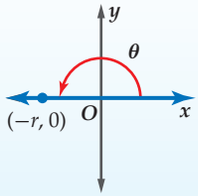
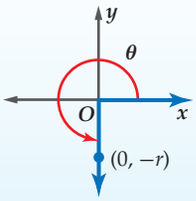
إرشادات للدراسة

الزوايا الربعية

قياس أيّ زاوية ربعية هو من مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

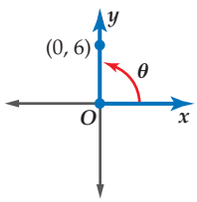
مفهوم أساسي الزوايا الربعية

أضف إلى مطويتك

$\theta = 0°$ أو $\theta = 0\ rad$	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi$ rad	$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad
			

مثال 2 الزوايا الربعية

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(0, 6)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ.



تقع النقطة $(0, 6)$ على الجزء الموجب من المحور y، لذلك فإن قياس الزاوية الربعية θ يساوي $90°$. استعمل $x = 0, y = 6, r = 6$ لكتابة الدوالّ المثلّثية.

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = 0$ $\quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{0}$ (غير معرَّفة)

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{6}{0}$ (غير معرَّفة) $\quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = 0$

تحقق من فهمك

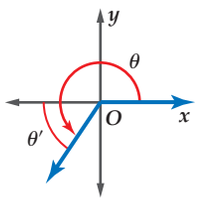
2) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-2, 0)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ.

قراءة الرياضيات

الرمز θ'

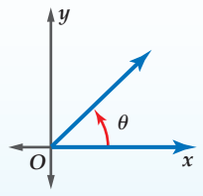
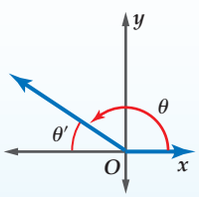
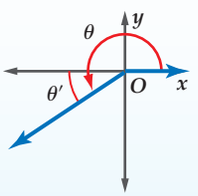
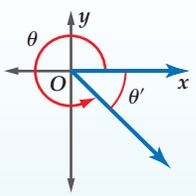
θ' يُقرأ: ثيتا شرطة.

الدوالّ المثلّثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ هي الزاوية الحادَّة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يبيِّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.



مفهوم أساسي الزوايا المرجعية

أضف إلى مطويتك

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

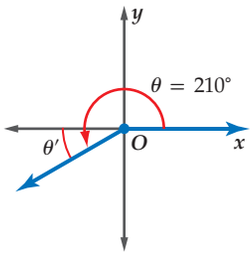
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 1445

لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$، استعمل زاوية بقياس موجب محصور بين $0°, 360°$ ومشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ.

مثال 3 إيجاد الزوايا المرجعية

ارسم كلًّا من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

a) $210°$



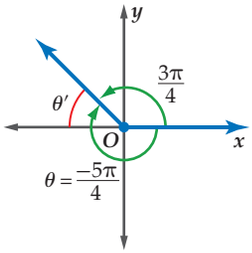
ضلع الانتهاء للزاوية $210°$ يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$

$= 210° - 180° = 30°$

b) $-\frac{5\pi}{4}$

الزاوية المشتركة مع الزاوية $-\frac{5\pi}{4}$ في ضلع الانتهاء هي: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثاني.

$\theta' = \pi - \theta = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

تحقق من فهمك

3A) $-110°$

3B) $\frac{9\pi}{3}$

لإيجاد قيم الدوالّ المثلّثية لأيِّ زاوية θ، يمكنك استعمال الزوايا المرجعية وتُحدّد إشارة كلِّ دالّة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

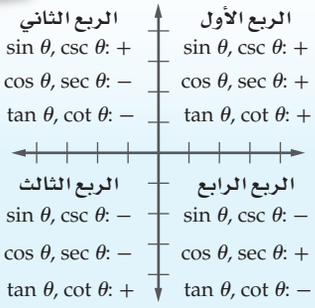
مفهوم أساسي إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالّة المثلّثية للزاوية θ'.

الخطوة 3: حدِّد إشارة قيمة الدالّة المثلّثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ.



يمكنك استعمال قيم الدوالّ المثلّثية للزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ التي تعلّمتها في الدرس 1-4.

قيم الدوالّ المثلّثية للزوايا الخاصّة

الجيب	جيب التمام	الظلّ	قاطع التمام	القاطع	ظلّ التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

إرشادات للدراسة

رسم الزوايا في الوضع القياسي

يمكنك الرجوع إلى الشكل الموجود في ملخّص المفهوم في الدرس 2-4؛ لمساعدتك على رسم الزوايا في الوضع القياسي.

إرشادات للدراسة

الدورة الكاملة

$[0°, 360°]$

لإيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ ، وقياسها موجب محصور بين $0°, 360°$:

- إذا كانت θ أكبر من $360°$، فاطرح منها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.
- إذا كانت θ أصغر من $0°$، فأضف إليها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.

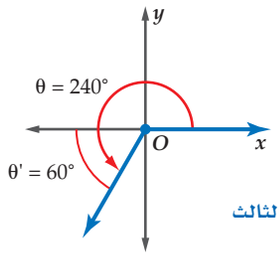
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 4 استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالّة مثلّثية

أوجد القيمة الدقيقة للدالّة المثلّثية في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\cos 240°$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $240°$ في الربع الثالث.



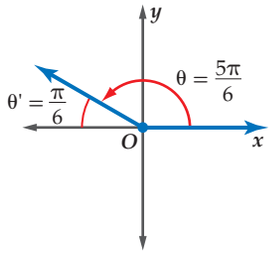
أوجد قياس الزاوية المرجعية: $\theta' = \theta - 180°$

$\theta = 240°$: $= 240° - 180° = 60°$

دالّة جيب التمام سالبة في الربع الثالث: $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

b) $\csc \frac{5\pi}{6}$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني.



أوجد قياس الزاوية المرجعية: $\theta' = \pi - \theta$

$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{5\pi}{6}$

دالّة قاطع التمام موجبة في الربع الثاني: $\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}$ rad $= 30°$: $= \csc 30°$

$\csc 30° = \frac{1}{\sin 30°}$: $= 2$

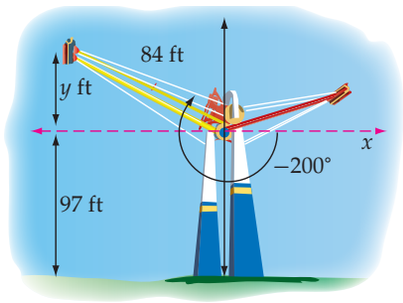
تحقق من فهمك

4A) $\cos 135°$

4B) $\tan \frac{5\pi}{6}$

مثال 5 من واقع الحياة استعمال الدوالّ المثلّثية

أراجيح: إذا كان طول كلِّ ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور 84 ft، وارتفاع محور الدوران 97 ft، فأوجد الارتفاع الكليَّ لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضَّح في الشكل.



قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية $-200°$:

$-200° + 360° = 160°$

قياس الزاوية المرجعية: $180° - 160° = 20°$

دالّة الجيب: $\sin \theta = \frac{y}{r}$

$\theta = 20°, r = 84$: $\sin 20° = \frac{y}{84}$

اضرب كل من الطرفين في 84: $84 \sin 20° = y$

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة y: $28.7 \approx y$

بما أن y تساوي 28.7 ft تقريبًا، فإن الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون هو $97 + 28.7$ ويساوي 125.7 ft تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) أراجيح: أوجد الارتفاع الكليّ لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذه الذراع 72 ft، وارتفاع محور الدوران 88 ft، وقياس زاوية الدوران $-195°$



الربط بالحياة

في بعض أنواع الأراجيح الدوّارة يشعر الراكب بانعدام الوزن في لحظة ما، حيث تصل سرعة الأرجوحة إلى 60 ميلًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

تأكـد

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ :

1) $(1, 2)$ **2)** $(-8, -15)$ **3)** $(0, -4)$

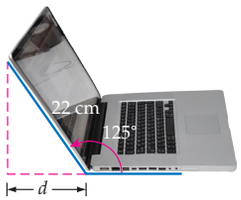
مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

4) $300°$ **5)** $115°$ **6)** $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

7) $\sin\frac{3\pi}{4}$ **8)** $\tan\frac{5\pi}{3}$ **9)** $\sec 120°$ **10)** $\sin 300°$

مثال 5 **11)** **تقنية:** فتح سعيد حاسوبه المحمول الذي طول شاشته 22 cm، فشكّل زاوية قياسها $125°$ كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.



a) أعد رسم الشكل السابق في المستوى الإحداثيِّ بحيث تكون الزاوية $125°$ مرسومة في الوضع القياسي.

b) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية $125°$ ، ثم اكتب دالّة مثلّثية يمكن استعمالها في إيجاد d.

c) استعمل هذه الدالّة، لإيجاد قيمة d، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ.

12) $(5, 12)$ **13)** $(-6, 8)$ **14)** $(3, 0)$

15) $(0, -7)$ **16)** $(4, -2)$ **17)** $(-9, -3)$

مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها.

18) $195°$ **19)** $285°$ **20)** $-250°$

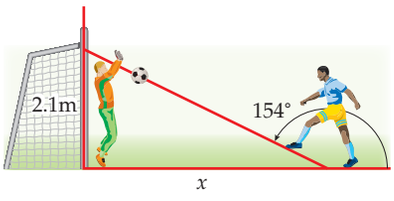
21) $\frac{7\pi}{4}$ **22)** $-\frac{\pi}{4}$ **23)** $400°$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

24) $\sin 210°$ **25)** $\tan 315°$ **26)** $\cos 150°$ **27)** $\csc 225°$

28) $\sin\frac{4\pi}{3}$ **29)** $\cos\frac{5\pi}{3}$ **30)** $\cot\frac{5\pi}{4}$ **31)** $\sec\frac{11\pi}{6}$

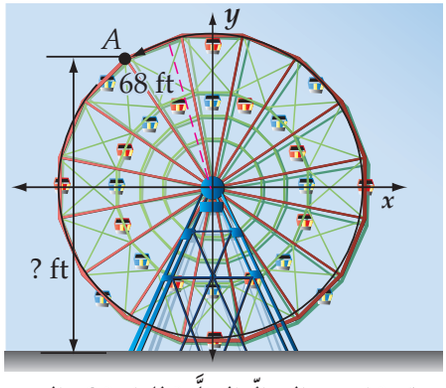
مثال 5 **32)** **كرة قدم:** يركل لاعبٌ الكرةَ نحو الهدف من مسافة x m عن حارس المرمى كما هو مبيَّن في الشكل المجاور، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع 2.1 m من سطح الأرض.



a) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية $154°$. ثم اكتب دالّة مثلّثية يمكن استعمالها في إيجاد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة.

b) ما المسافة التقريبية بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



33) عجلات دوّارة: في إحدى مدن الألعاب عجلة دوّارة طول نصف قطرها 68 ft، وترتفع عن سطح الأرض 15 ft. بعد جلوس الشخص في العربة السفلية دارت العجلة بزاوية قياسها 202.5° عكس حركة عقارب الساعة قبل أن تتوقف. فكم يكون ارتفاع هذه العربة عن سطح الأرض عندما تتوقف العجلة عن الدوران؟

افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وقد أُعطي فيما يأتي قيمة إحدى الدوالّ المثلّثية للزاوية θ والربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها. أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الخمس الأخرى للزاوية θ.

34) $\sin\theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

35) $\tan\theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

36) $\cos\theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

37) $\cot\theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

38) $\cot 270°$

39) $\csc 180°$

40) $\sin 570°$

41) $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

42) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

43) $\cot\frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا

44) تحدٍّ: الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، حيث $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta = -1$. هل من الممكن أن يكون قياس الزاوية θ مساويًا لِـ 225° ؟ وضِّح إجابتك.

45) تبرير: حدِّد ما إذا كانت المعادلة: $3\sin 60° = \sin 180°$ صحيحة أم غير صحيحة. وضِّح إجابتك.

46) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على زاوية θ بقياس سالب بحيث: $\cos\theta < 0$, $\sin\theta > 0$.

47) اكتب: وضِّح خطوات إيجاد قيمة دالّة مثلّثية لزاوية قياسها أكبر من 90°. مضمِّنًا ذلك وصفًا للزاوية المرجعية في هذه الخطوات.

تدريب على اختبار

48) إذا كان مجموع عددين 21، والفرق بينهما 3، فما ناتج ضربهما؟

49) ما المقدار الذي يكافئ المقدار: $(-6 + i)^2$ ؟

A $-12i$ **B** $36 - 12i$ **C** $36 - i$ **D** $35 - 12i$

مراجعة تراكمية

حوّل قياس كلِّ زاوية مكتوبة بالراديان فيما يأتي إلى الدرجات: (الدرس 2-8)

50) $\frac{4}{3}\pi$

51) $\frac{11}{6}\pi$

52) $-\frac{17}{4}\pi$

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية علمًا بأن جميع الزوايا حادّة: (الدرس 1-8)

53) $\cos A = \frac{13}{17}$

54) $\sin 30° = \frac{b}{6}$

55) $\tan C = \frac{9}{4}$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

56) $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$

57) $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$

58) $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2024 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

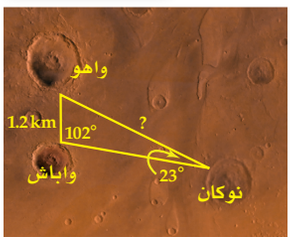
8-4 قانون الجيوب
Law of Sines

فيما سبق:
درست إيجاد أطوال أضلاع مثلّثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها. الدرس (8-1)

والآن:
- أجد مساحة مثلّث باستعمال طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أستعمل قانون الجيوب في حلّ المثلّثات.

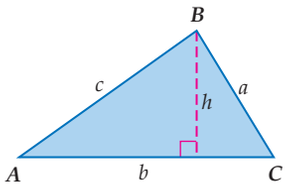
المفردات:
قانون الجيوب
Law of Sines
حل المثلّث
solving a triangle

لماذا؟



يوجد على سطح كوكب المريخ عشرات الآلاف من الفوَّهات أو الحفر، وقد أطلق عليها العلماء تسميات عديدة لعلماء مشهورين وأسماء مدن ومؤلِّفي قصص علمية خيالية. والشكل المجاور يبيِّن ثلاثًا من هذه الفوَّهات. يمكنك استعمال حساب المثلَّثات في إيجاد المسافة بين الفوهتين واهو ونوكان.

إيجاد مساحة المثلَّث: في المثلَّث المجاور



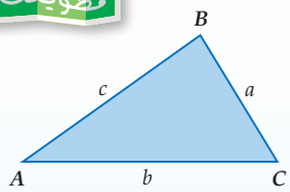
$\sin A = \frac{h}{c}$ أي أنَّ $h = c \sin A$.

المساحة $= \frac{1}{2} bh$	صيغة مساحة المثلَّث
المساحة $= \frac{1}{2} b(c \sin A)$	عوِّض عن h بـ $c \sin A$
المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A$	بسِّط

يمكنك استعمال هذه الصيغة أو صيغتين أخريين لإيجاد مساحة مثلَّث، إذا كان معلومًا لديك طولا أيِّ ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مفهوم أساسي — مساحة المثلَّث

أضف إلى مطويتك

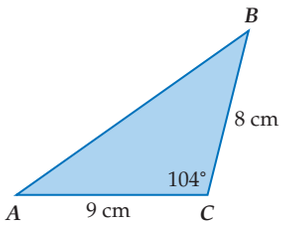


التعبير اللفظي: مساحة المثلَّث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولَي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

الرموز: $k = \frac{1}{2} bc \sin A$ $\quad k = \frac{1}{2} ac \sin B$ $\quad k = \frac{1}{2} ab \sin C$

مثال 1 إيجاد مساحة مثلَّث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.



$\triangle ABC$ فيه: $a = 8, b = 9, C = 104°$.

$k = \frac{1}{2} ab \sin C$	صيغة مساحة المثلَّث
$= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$	عوِّض
≈ 34.9	بسِّط

إذن المساحة تساوي $34.9\,cm^2$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

1) أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31°, b = 18\,m, c = 22\,m$ مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلَّث في اشتقاق **قانون الجيوب**، الذي يبيِّن العلاقات بين أطوال أضلاع مثلَّث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

اكتب صيغ مساحة المثلَّث الثلاث المتساوية	$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$
اضرب كلَّ عبارة في 2	$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$
اقسم كلَّ عبارة على abc	$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$
بسِّط	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

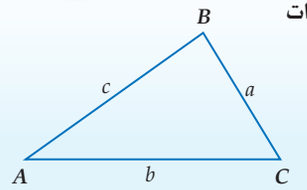
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون الجيوب

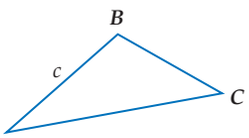
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

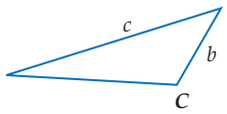


حَلُّ المثلَّث يعني استعمال القياسات المُعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلَّث وقياس زواياه.

ويمكنك استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّث في الحالات الآتية:



- معرَّفة قياسي زاويتين في المثلَّث وطول أي ضلع فيه
(زاوية – زاوية – ضلع (حالة AAS) ، أو زاوية – ضلع – زاوية (حالة ASA))

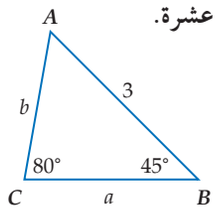


- معرَّفة طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما
(ضلع – ضلع – زاوية (حالة SSA))

مثال 2

حَلُّ مثلَّث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

حُلّ $\triangle ABC$، الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle A = 180° - (80° + 45°) = 55°$$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد كلٍّ من الطولين: a, b.

اكتب معادلة لإيجاد قيمة كلٍّ منهما.

قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$
عوِّض	$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$
حُلَّ بالنسبة لكلِّ متغيِّر	$a = \frac{3 \sin 55°}{\sin 80°}$
استعمل الآلة الحاسبة	$a \approx 2.5$

قانون الجيوب	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
عوِّض	$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$
حُلَّ بالنسبة لكلِّ متغيِّر	$b = \frac{3 \sin 45°}{\sin 80°}$
استعمل الآلة الحاسبة	$b \approx 2.2$

إذن، $A = 55°, a \approx 2.5, b \approx 2.2$.

تحقق من فهمك

2) حُلّ $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 42°, Q = 65°, n = 5$، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.

إرشادات للدراسة

علاقات بديلة

يمكن كتابة قانون الجيوب كما يأتي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبذلك يمكنك استعمال العلاقتين الآتيتين لحلِّ المثلَّث في المثال 2

$$\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

$$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

إذا عُلِمَ لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع، فإنه يوجد مثلَّث وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولَي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلَّثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلَّث حلّ، أو له حلٌّ واحد، أو له حلان.

إرشادات للدراسة

الحالة المبهمة

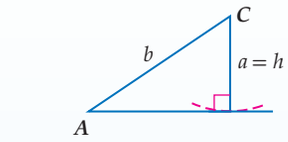
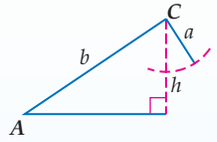
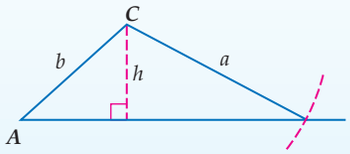
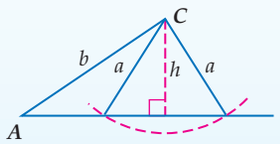
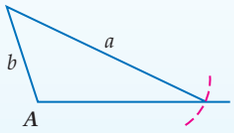
الحالة التي يكون للمثلَّث فيها حلان تُسمّى الحالة المبهمة.

مفهوم أساسي

المثلَّثات الممكنة في حالة (SSA)

أضف إلى مطويتك

افترض مثلَّثا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

$\angle A$ حادّة		$\angle A$ قائمة أو منفرجة	
			
$a = h$ حلٌّ واحد	$a < h$ لا يوجد حلٌّ	$a \le b$ لا يوجد حلٌّ	
			
$a \ge b$ حلٌّ واحد	$h < a < b$ حلّان	$a > b$ حلٌّ واحد	

إرشادات للدراسة

الزاوية A حادّة

في الجهة اليمنى من الأشكال المجاورة.

الارتفاع h يقارن مع a لأن h هو أقصر بعد من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادّة.

$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin A = \frac{h}{b}$

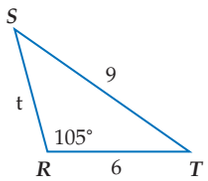
بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$، فيمكنك استعمال الصيغة $h = b \sin A$ لإيجاد قيمة h في المثلَّثات الحادّة الزوايا.

مثال 3

حَلُّ مثلَّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدِّد إن كان لكلِّ مثلَّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105°, r = 9, s = 6$.



بما أن $\angle R$ منفرجة، و $6 < 9$، نستنتج أن للمثلَّث حلًّا واحدًا.

الخطوة 1: ابدأ برسم المثلَّث، ثم استعمل قانون الجيوب لإيجاد $m\angle S$.

$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105°}{9}$ — قانون الجيوب

$\sin S = \frac{6 \sin 105°}{9}$ — حُلَّ بالنسبة لِـ $\sin S$

$\sin S \approx 0.6440$ — استعمل الآلة الحاسبة

$S \approx 40°$ — أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.6440$، والزاوية S حادّة

الخطوة 2: أوجد $m\angle T$.

$m\angle T \approx 180° - (105° + 40°) \approx 35°$

الخطوة 3: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قيمة t.

$\frac{\sin 35°}{t} \approx \frac{\sin 105°}{9}$ — قانون الجيوب

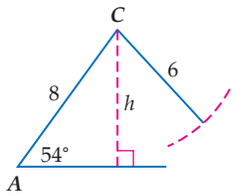
$t \approx \frac{9 \sin 35°}{\sin 105°}$ — حُلَّ بالنسبة لِـ t

$t \approx 5.3$ — استعمل الآلة الحاسبة

إذن: $S \approx 40°, T \approx 35°, t \approx 5.3$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54°, a = 6, b = 8$.



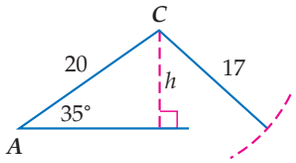
بما أن $\angle A$ حادّة، و$6 < 8$، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a.

$h = b \sin A = 8 \sin 54°$ — $b = 8, A = 54°$

≈ 6.5 — استعمل الآلة الحاسبة

بما أن $6 < 6.5$ أو $a < h$ فلا يوجد للمثلّث حلّ.

c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 35°, a = 17, b = 20$.



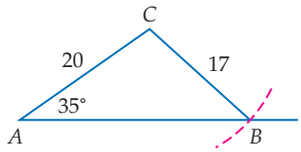
بما أن $\angle A$ حادّة، و $17 < 20$، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a.

$h = b \sin A = 20 \sin 35°$ — $b = 20, A = 35°$

≈ 11.5 — استعمل الآلة الحاسبة

بما أن $11.5 < 17 < 20$ أو $h < a < b$. فإن للمثلّث حلّين، وبالتالي هناك مثلّثان يطلب حلّهما.

الحالة 1: $\angle B$ حادّة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

$\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الجيوب

$\sin B = \frac{20 \sin 35°}{17}$ — حُلّ بالنسبة لِـ $\sin B$

$\sin B \approx 0.6748$ — استعمل الآلة الحاسبة

$B \approx 42°$ — أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.6748$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (35° + 42°) \approx 103°$

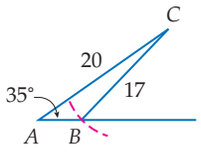
الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$\frac{\sin 103°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الجيوب

$c \approx \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$ — حُلّ بالنسبة لِـ c

$c \approx 28.9$ — استعمل الآلة الحاسبة

الحالة 2: $\angle B$ منفرجة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

قيمة دالّة الجيب موجبة في الربع الثاني، لذا أوجد زاوية منفرجة B بحيث $\sin B \approx 0.6748$.

$m\angle B \approx 180° - 42° \approx 138°$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (35° + 138°) \approx 7°$

الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$\frac{\sin 7°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الجيوب

$c \approx \frac{17 \sin 7°}{\sin 35°}$ — حُلّ بالنسبة لِـ c

$c \approx 3.6$ — استعمل الآلة الحاسبة

لذا فإن أحد الحلّين هو: $B \approx 42°, C \approx 103°, c \approx 28.9$، والحلّ الثاني هو: $B \approx 138°, C \approx 7°, c \approx 3.6$.

إرشادات للدراسة

حلّان

في الفرع C، بما أن $h < a < b$ فإن للمثلّث حلّين أحدهما عندما تكون الزاوية B حادّة، والآخر عندما تكون الزاوية B منفرجة (مكمّلة للزاوية الحادّة في الحلّ الأول).

إرشادات للدراسة

الزاوية المرجعية

في الحالة الثانية استعملت زاوية مرجعية قياسها 42° لإيجاد القياس الآخر للزاوية B .

تحقق من فهمك

حدِّد إن كان لكل مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95°, r = 10, s = 12$

3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32°, n = 7, p = 4$

3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47°, a = 15, b = 18$

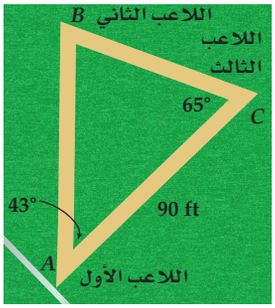


الربط بالحياة

يقع إستاد الملك فهد الدولي بالجهة الشمالية الشرقية من مدينة الرياض على مساحة إجمالية تبلغ 500 000 متر مربع ، ويتكون من مبنى اللاعبين وملعب كرة القدم العشبي وملحقاته الخدمية ومضمار للجري ولألعاب القوى وقناة الحماية والمدرجات ومقاعد الجمهور .
المصدر : الهيئة العامة للرياضة

مثال 4 من واقع الحياة

استعمال قانون الجيوب لحل مسألة



كرة قدم: يُمثّل الشكل المجاور إحدى التمريرات الحاسمة بين ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 72°$	مجموع زوايا المثلّث $180°$
$\frac{\sin 72°}{90} = \frac{\sin 43°}{x}$	قانون الجيوب
$x \sin 72° = 90 \sin 43°$	استعمل الضرب التبادلي
$x = \frac{90 \sin 43°}{\sin 72°}$	حُلَّ بالنسبة لِـ x
$x \approx 64.5$	استعمل الآلة الحاسبة

إذن المسافة بين اللاعبين تساوي 64.5 ft تقريبًا.

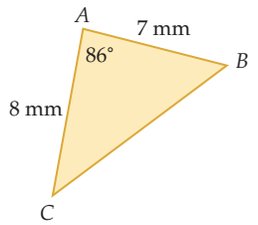
تحقق من فهمك

4) كرة قدم: أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني في الشكل أعلاه.

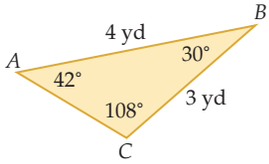
تأكد

مثال 1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

1)



2)

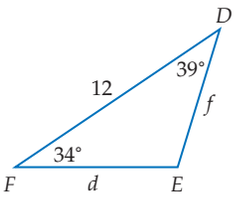


3) $A = 40°, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

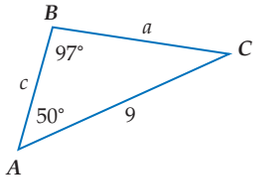
4) $B = 103°, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in}$

مثال 2 حُلّ كلَّ مثلّث مما يأتي، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:

5)



6)



7) $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 80°, H = 40°, g = 14$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلّث ABC في كلٍّ ممَّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

8) $A = 95°, a = 19, b = 12$

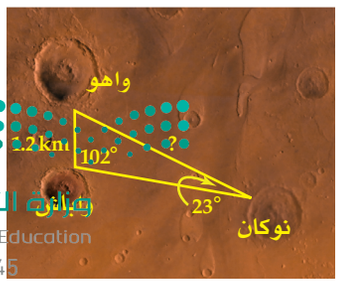
9) $A = 60°, a = 15, b = 24$

10) $A = 34°, a = 8, b = 13$

11) $A = 30°, a = 3, b = 6$

مثال 4

12) فضاء: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين فوّهة واهو وفوّهة نوكان.

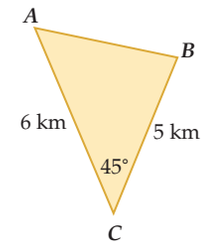


وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

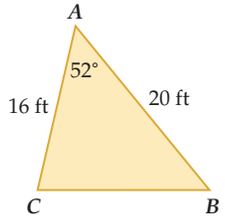
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد مساحة كلٍّ من المثلَّثات الموضَّحة في الأشكال الآتية مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة:

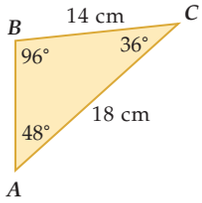
(13



(14



(15



(16 $C = 25°, a = 4 \text{ ft}, b = 7 \text{ ft}$

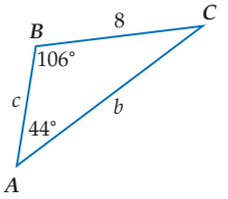
(17 $A = 138°, b = 10 \text{ in}, c = 20 \text{ in}$

(18 $B = 92°, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$

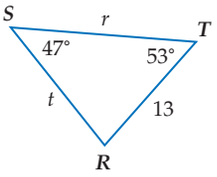
(19 $C = 116°, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$

مثال 2 حُلّ كلَّ مثلَّث ممّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

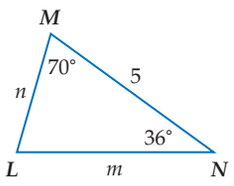
(20



(21



(22



(23 $\triangle HJK$ الذي فيه: $h = 31, J = 20°, H = 53°$.

(24 $\triangle NPQ$ الذي فيه: $n = 22, Q = 57°, P = 109°$.

(25 $\triangle ABC$ الذي فيه: $C = 67°, a = 2.5, A = 50°$.

(26 $\triangle ABC$ الذي فيه: $b = 20, C = 142°, B = 18°$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممَّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(27 $A = 100°, a = 7, b = 3$

(28 $A = 75°, a = 14, b = 11$

(29 $A = 38°, a = 21, b = 18$

(30 $A = 52°, a = 9, b = 20$

(31 $A = 42°, a = 5, b = 6$

(32 $A = 44°, a = 14, b = 19$

(33 $A = 131°, a = 15, b = 32$

(34 $A = 30°, a = 17, b = 34$

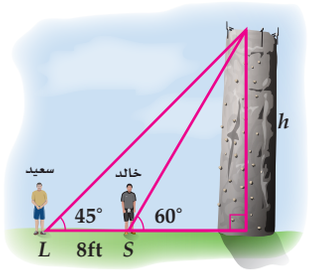
مثال 4 **جغرافيا:** في الشكل المجاور ثلاثة مواقع جغرافية تشكِّل مثلَّثا. إذا كانت المسافة بين الرياض والدوادمي 236 km، وبين الرياض والزلفي 262 km، وقياس الزاوية عند الدوادمي 72°، فأجب عما يأتي:



(35 أوجد قياس الزاوية عند مدينة الرياض.

(36 أوجد المسافة بين الزلفي والدوادمي.

37) تسلُّق: يقف خالد وسعيد أمام جدار صخري للتسلُّق والمسافة بينهما 8 أقدام كما هو مبيّن في الشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخري، مقرِّبًا إلى أقرب قدم؟



مسائل مهارات التفكير العليا

38) اكتشف الخطأ: $\triangle RST$ فيه: $R = 56°, r = 24, t = 12$. فإذا حاول كلٌّ من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$، فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

رضوان

$$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$$
$$\sin T \approx 0.4145$$
$$T \approx 24.5°$$

علي

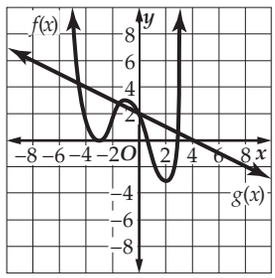
بما أن $r > t$ فلا يوجد للمثلَّث حلّ.

39) تبرير: أوجد أطوال أضلاع مثلَّثين مختلفين ABC، بحيث يكون في كلٍّ منها $A = 55°$، $C = 20°$.

40) مسألة مفتوحة: إذا كانت $d = 38, R = 62°$، فأوجد قيمة لِـ r، بحيث لا يوجد للمثلَّث DRF حلّ عندها . ووضِّح إجابتك.

تدريب على اختبار

41) إجابة قصيرة: في الشكل المجاور التمثيل البياني لكلٍّ من $f(x), g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$؟



42) إذا كان أحد أصفار الدالّة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو 4. فأيٌّ مما يأتي يُمثّل تحليلًا للعبارة: $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

A $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$

B $(x - 6)(x + 3)(x - 4)$

C $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$

D $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية فيما يأتي: (الدرس 3-8)

43) $\sin 210°$ **44)** $\cos \frac{3}{4}\pi$ **45)** $\cot 60°$

في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كلِّ زاوية مُعطاة: (الدرس 2-8)

46) $125°$ **47)** $-32°$ **48)** $\frac{2}{3}\pi$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية (إن وجد): (مهارة سابقة)

49) $64 + 48 + 36 + \ldots$ **50)** $27 + 36 + 48 + \ldots$ **51)** $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5(1.1)^n$

إذا كانت $w = 6, x = -4, y = 1.5, z = \frac{3}{4}$، فأوجد قيمة كلِّ عبارة ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

52) $w^2 + y^2 - 6xz$ **53)** $x^2 + z^2 + 5wy$ **54)** $wy + xz + w^2 - x^2$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

8-4 مساحة متوازي الأضلاع
Area of Parallelogram

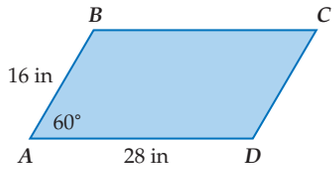
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل نسبة الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

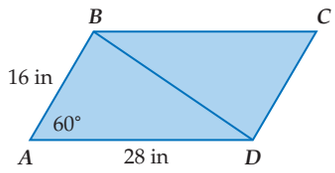
يمكنك إيجاد مساحة أيّ مثلَّث باستعمال الجيب. وكذلك يمكنك استعمال الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

نشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



الخطوة 1: ارسم القطر $\overline{BD}$.



يقسم القطر $\overline{BD}$ متوازي الأضلاع إلى مثلَّثين متطابقين هما: $\triangle CDB$, $\triangle ABD$.

الخطوة 2: أوجد مساحة $\triangle ABD$.

$K = \frac{1}{2}(AB)(AD)\sin A$ صيغة مساحة المثلَّث

$= \frac{1}{2}(16)(28)\sin 60°$ $AB = 16, AD = 28, A = 60°$

$= 224\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ اضرب وعوِّض قيمة $\sin 60°$

$= 112\sqrt{3}$ بسِّط

الخطوة 3: أوجد مساحة $\square ABCD$.

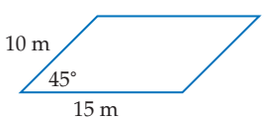
مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتَي المثلَّثين: $\triangle CDB$, $\triangle ABD$.

وبما أن $\triangle CDB \cong \triangle ABD$، فإن مساحة $\triangle CDB$ تساوي مساحة $\triangle ABD$.

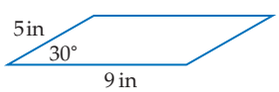
لذا فإن مساحة $\square ABCD$ تساوي مثلَي مساحة $\triangle ABD$. أي $2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3} \approx 387.98 \text{ in}^2$

تمارين:

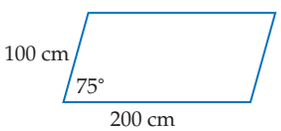
1)



2)



3)



أوجد كلًّا ممّا يأتي لكلِّ متوازي أضلاع أعلاه:

a) المساحة.

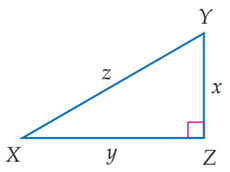
b) المساحة عندما يصبح قياس الزاوية المعلومة نصف القياس المُعطى.

c) المساحة عندما يكون قياس الزاوية المعلومة مثلي القياس المُعطى.

اختبار منتصف الفصل

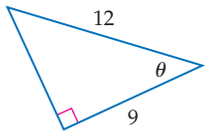
الدروس 8-1 إلى 8-4

حُلّ $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين: 1, 2 وفق القياسات المُعطاة، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



1) $Y = 65°, x = 16$ **2)** $X = 25°, x = 8$

3) أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ



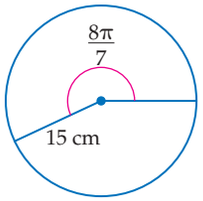
4) ارسم زاوية قياسها $-80°$ في الوضع القياسي.

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

5) $215°$ **6)** $-350°$

7) $\frac{8\pi}{5}$ **8)** $\frac{9\pi}{2}$

9) اختيار من متعدد: طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة أدناه، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة يساوي:



A 4.2 cm
B 17.1 cm
C 53.9 cm
D 2638.9 cm

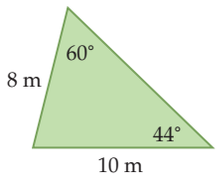
أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من الدالّتين المثلّثيتين فيما يأتي:

10) $\tan \pi$ **11)** $\cos \frac{3\pi}{4}$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقطتين الآتيتين في كلِّ مرَّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ:

12) $(0, -5)$ **13)** $(6, 8)$

14) حديقة: عند فيصل حديقة مثلّثة الشكل كما في الشكل أدناه. ما مساحة الحديقة؟



حدّد إن كان للمثلّث ABC في كلٍّ ممَّا يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

15) $A = 38°, a = 18, c = 25$

16) $A = 65°, a = 5, b = 7$

17) $A = 115°, a = 12, b = 8$

في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

18) $240°$

19) $\frac{9\pi}{4}$

20) $-\frac{\pi}{4}$

21) اختيار من متعدد: افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos \theta > 0$. في أيِّ ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ؟

A الربع الأول أو الثاني
B الربع الأول أو الثالث
C الربع الثاني أو الثالث
D الربع الأول أو الرابع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-5

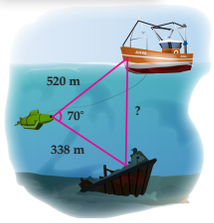
قانون جيوب التمام
Law of Cosines

فيما سبق:
درست حلّ مثلّثات باستعمال قانون الجيوب. الدرس (4-8)

والآن:
- أستعمل قانون جيوب التمام لحلّ مثلّثات.
- أختار طرقًا مناسبة لحلّ مثلّثات.

المفردات:
قانون جيوب التمام
Law of Cosines

لماذا؟



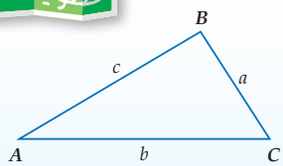
الغوّاصات التي تُنزلها السفن إلى المحيط تُستعمل لإيصال الأشخاص إلى أعماق لا يمكنهم الوصول إليها بوسائل أخرى. الغواصة في الشكل المجاور على بُعد 520 m من السفينة، وترسل ضوءًا إلى حطام سفينة أخرى على بُعد 338 m عنها، يمكن استعمال حساب المثلّثات لإيجاد المسافة بين السفينة والحطام.

استعمال قانون جيوب التمام لحلّ المثلّثات: لا يمكنك استعمال قانون الجيوب لحلّ مثلّث مثل المثلّث المرسوم في الشكل أعلاه. يمكنك استعمال **قانون جيوب التمام** لحل المثلّث في الحالتين الآتيتين:

- معرّفة طولي ضلعين في المثلّث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع – زاوية – ضلع (حالة SAS))
- معرّفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلّث (ضلع – ضلع – ضلع (حالة SSS))

مفهوم أساسي
أضف إلى مطويتك

قانون جيوب التمام



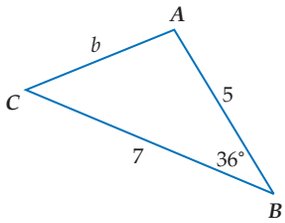
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ستبرهن هذه الصيغة في السؤال (31)

مثال 1
حَلُّ مثلّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حُلّ $\triangle ABC$ الموضّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

قانون جيوب التمام	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$a = 7, c = 5, B = 36°$	$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36°$
استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط	$b^2 \approx 17.4$
خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$b \approx 4.2$

الخطوة 2: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية A.

قانون جيوب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$a = 7, b = 4.2, c = 5$	$7^2 = (4.2)^2 + 5^2 - 2(4.2)(5) \cos A$
اطرح $(4.2)^2$ و 5^2 من كلا الطرفين	$7^2 - (4.2)^2 - 5^2 = -2(4.2)(5) \cos A$
اقسم كلًّا من الطرفين على $-2(4.2)(5)$	$\frac{7^2 - (4.2)^2 - 5^2}{-2(4.2)(5)} = \cos A$
استعمل الآلة الحاسبة	$-0.1514 \approx \cos A$
أوجد قيمة $\cos^{-1} -0.1514$	$99° \approx A$

الخطوة 3: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (36^\circ + 99^\circ) \approx 45^\circ$$

إذن: $b \approx 4.2,\ A \approx 99^\circ,\ C \approx 45^\circ$

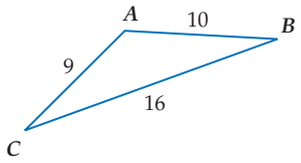
تحقق من فهمك

1) حُلّ $\triangle FGH$ الموضَّح في الشكل المجاور الذي فيه: $G = 82^\circ, f = 6, h = 4$ مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المثلَّث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة، وتكون الخطوة الأولى للحلِّ هي إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلَّث حتى نضمن أن الزاويتين الأخريين حادَّتان عند استعمال قانون الجيوب بعد ذلك.

مثال 2 حل مثلَّث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة

حُلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية الكبرى في $\triangle ABC$ وهي $\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ — قانون جيوب التمام

$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10)\cos A$ — $a = 16, b = 9, c = 10$

$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10)\cos A$ — اطرح 9^2 و 10^2 من كلا الطرفين

$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$ — اقسم كلًّا من الطرفين على $-2(9)(10)$

$-0.4167 \approx \cos A$ — استعمل الآلة الحاسبة

$115^\circ \approx A$ — أوجد قيمة $\cos^{-1} -0.4167$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قياس $\angle B$.

$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115^\circ}{16}$ — $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

$\sin B \approx \frac{9 \sin 115^\circ}{16}$ — اضرب كل من الطرفين في 9

$\sin B \approx 0.5098$ — استعمل الآلة الحاسبة

$B \approx 31^\circ$ — أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.5098$

الخطوة 3: أوجد قياس $\angle C$.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (115^\circ + 31^\circ) \approx 34^\circ$$

إذن: $A \approx 115^\circ, B \approx 31^\circ, C \approx 34^\circ$.

تحقق من فهمك

2) حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5, b = 11, c = 8$ مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استعمال قانون جيوب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس زاوية أخرى.

إرشادات للدراسة

التقريب

يمكن أن يؤدي التقريب في بعض الأحيان إلى إجابات غير دقيقة، مثل أن يكون لدينا مثلَّث مجموع قياسات زواياه 181°.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

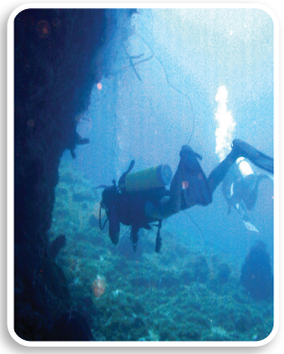
اختيار الطريقة المناسبة لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال قانون الجيوب وقانون جيوب التمام لحل مثلَّثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقلِّ إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسَي أيِّ عنصرين آخرين من عناصر المثلَّث. وإذا كان للمثلَّث حلّ، فيجب أن تُقرّر ما إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام لحلِّه.

ملخّص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حَلُّ المثلَّثات غير القائمة الزاوية

إذا أُعطيت	فابدأ الحلَّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أيِّ ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام



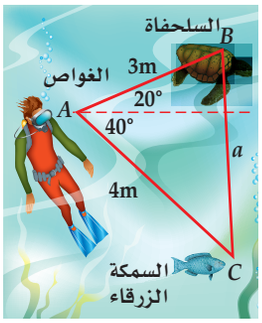
الربط بالحياة

الرقم القياسي لأعمق مسافة غاص إليها غوّاص هو 318.2 m.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال قانون جيوب التمام

غوص: ينظر غواص إلى أعلى بزاوية قياسها 20° ليرى سلحفاة تبعد عنه 3 m، وينظر إلى أسفل بزاوية قياسها 40° فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4 m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟



افهم: تعرف قياسَي الزاويتين المتكوِّنتين من نظر الغوّاص إلى أعلى وإلى أسفل، كذلك تعرف المسافة بين الغوّاص وكلٍّ من السلحفاة والسمكة الزرقاء.

خطط: استعمل هذه المعلومات لرسم شكل تقريبي يُمثِّل المسألة. بما أن طولي ضلعين في المثلَّث وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلوم لديك، فيمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المسألة.

حُلّ:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ — قانون جيوب التمام

$a^2 = 4^2 + 3^2 - 2(4)(3) \cos 60°$ — $b = 4, c = 3, A = 60°$

$a^2 = 13$ — استعمل الآلة الحاسبة

$a \approx 3.6$ — أوجد قيمة a الموجبة

إذن المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء تساوي 3.6 m تقريبًا.

تحقّق: باستعمال قانون الجيوب، يمكنك التوصل إلى أنَّ: $B \approx 74°, C \approx 46°$.
بما أن $C < A < B, c < a < b$، فإن الحلَّ منطقي.

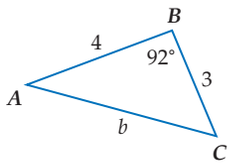
تحقق من فهمك

3) ماراثون: ركض سعيد مسافة 6 km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها 79° ، وركض مسافة 7 km . ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟

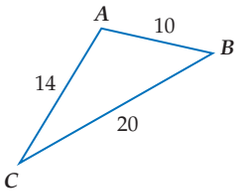
تأكـد

المثالان 1, 2 حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(1



(2

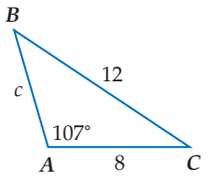


(3 $a = 5, b = 8, c = 12$

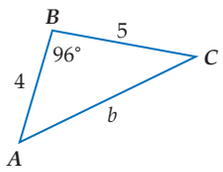
(4 $B = 110°, a = 6, c = 3$

مثال 3 حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلِّ كلِّ مثلَّث ممَّا يأتي، ثم حُلَّ المثلَّث مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(5



(6



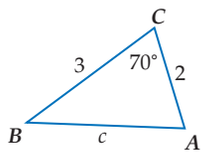
(7 $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 35°, s = 16, t = 9$.

(8 كرة قدم: في إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بُعد 20 m من لاعب الجناح الأيمن. ودار لاعب خطّ الوسط بزاوية قياسها 40° ، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بُعد 16 m منه. ما المسافة بين لاعبي الجناحين؟

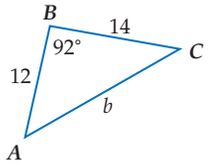
تدرب وحل المسائل

المثالان 1، 2 حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

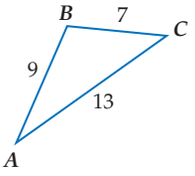
(9



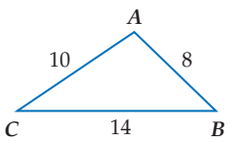
(10



(11



(12



(13 $A = 116°, b = 5, c = 3$

(14 $C = 80°, a = 9, b = 2$

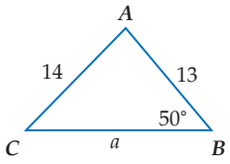
(15 $f = 10, g = 11, h = 4$

(16 $w = 20, x = 13, y = 12$

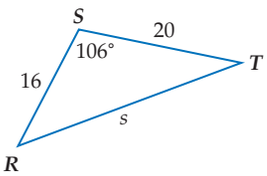
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 3 حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلِّ كلِّ مثلَّث ممَّا يأتي، ثم حُلَّ المثلَّث مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

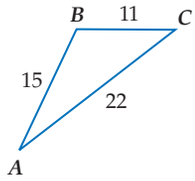
(17



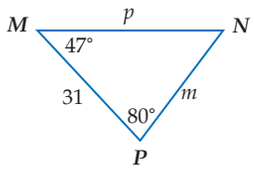
(18



(19



(20



(21 $\triangle ABC$ الذي فيه: $C = 84°, c = 7, a = 2$.

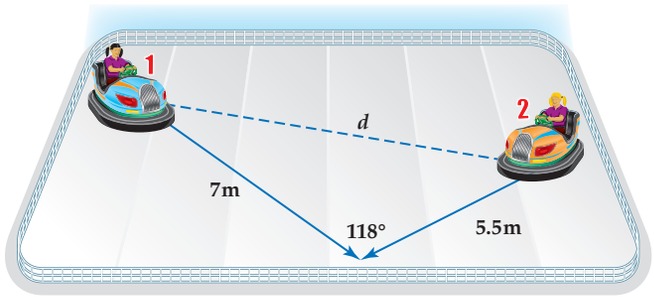
(22 $\triangle HJK$ الذي فيه: $h = 18, j = 10, k = 23$.

(23 استكشاف: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الأخرى، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

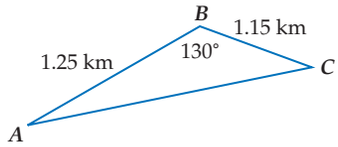
(24 سباق: ميدان للسباق على شكل مثلَّث أطوال أضلاعه 1.8 km, 2 km, 1.2 km . أوجد قياس كلِّ زاوية من زواياه.

(25 أرض: قطعة أرض على شكل مثلَّث أطوال أضلاعه 140 m , 210 m , 300 m . استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مقرّبةً إلى أقرب متر مربع.

(26 ألعاب سيارات: في ساحة سيارات اللعب في مدينة ألعاب، اصطدمت السيارتان 1, 2 كما هو مبيَّن في الشكل أدناه، ما المسافة d التي كانت بين السيارتين قبل تصادمهما؟

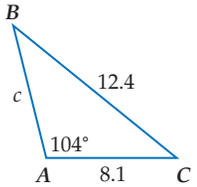


(27 رياضة مائية: يركب أحمد دراجته المائية ليقطع المسافة من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C بسرعة 28 كلم/ ساعة. ثم يعود من النقطة C إلى النقطة A مباشرة بسرعة 35 كلم/ ساعة. كم دقيقة تحتاج إليها الرحلة ذهابًا وإيابًا، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

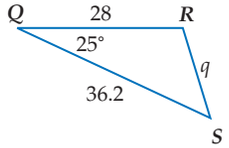


حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

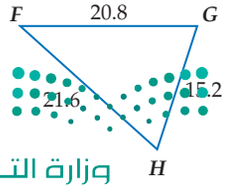
(28



(29

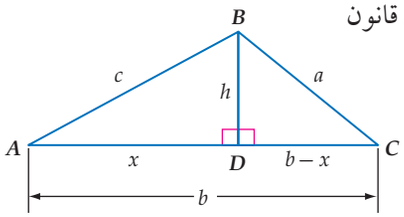


(30



وزارة التعليم
Ministry of Education

مسائل مهارات التفكير العليا



31) برهان: استعمل الشكل المجاور ونظرية فيثاغورس، لاشتقاق قانون جيوب التمام، مستعملًا الإرشادات الآتية:

أولًا: طبِّق نظرية فيثاغورس على $\triangle DBC$.

ثانيًا: استعمل المعلومات التالية في $\triangle ADB$.

- $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$

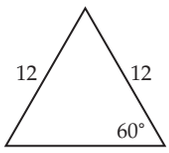
32) تبرير: مثلَّث أطوال أضلاعه 14.5 cm, 8 cm, 10.6 cm . وضِّح كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية الكبرى فيه. ثم أوجدها مقرَّبة إلى أقرب درجة.

33) اكتب: قارن بين الحالات التي تستطيع فيها استعمال قانون الجيوب لحلِّ مثلَّث بتلك التي تستطيع فيها استعمال قانون جيوب التمام.

تدريب على اختبار

34) إجابة قصيرة: حُلَّ المعادلة: $\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$

35) هندسة: محيط الشكل المجاور يساوي:

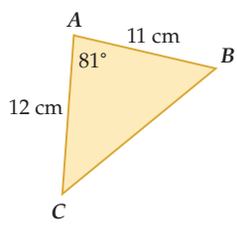


A 24 **B** 30 **C** 36 **D** 48

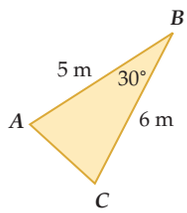
مراجعة تراكمية

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرَّبةً إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس 4-8)

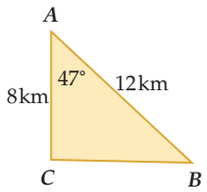
36)



37)



38)



39) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-9, 6)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ. (الدرس 3-8)

ارسم الزوايا الآتية في الوضع القياسيّ، ثم أوجد الزاوية المرجعيّة لكلٍّ منها. (الدرس 3-8)

40) $-15°$ **41)** $\frac{5}{4}\pi$ **42)** $245°$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

8-6

الدوالّ الدائرية
Circular Functions

رابط الدرس الرقمي

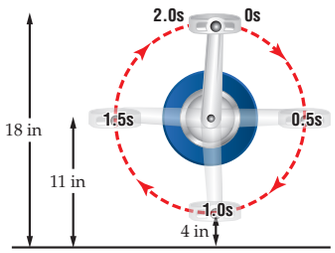
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست إيجاد قيم دوالّ مثلّثية باستعمال زوايا مرجعية. الدرس (3-8)

والآن:
- أجد قيم دوالّ مثلّثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.
- أستعمل خواصّ الدوالّ الدورية في إيجاد قيم دوالّ مثلّثية.

المفردات:
دائرة الوحدة
unit circle
الدالّة الدائرية
circular function
الدالّة الدورية
periodic function
الدورة
cycle
طول الدورة
period

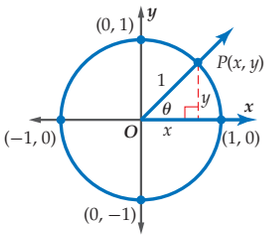
لماذا؟



عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدّال في أثناء دورانه يمثِّل دالّة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.

لاحظ أن البدّال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كلَّ ثانيتين.

الدوالّ الدائرية: **دائرة الوحدة** هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة. يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالَّتَي: الجيب وجيب التمام.



$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

وبذلك فإن قيمة $\cos\theta$ هي الإحداثي x، وقيمة $\sin\theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

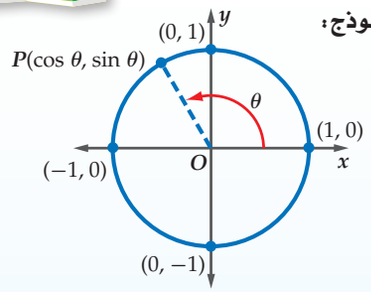
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دوالّ في دائرة الوحدة

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن: $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$

النموذج:



الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

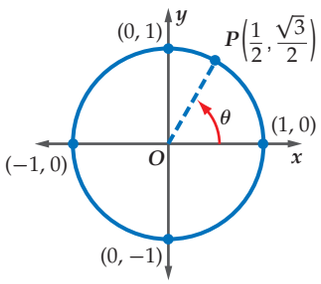
مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن:
$P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

كلٌّ من $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$ دالّة بالنسبة إلى θ. وتُسمّى كلٌّ منهما **دالّة دائرية**؛ لأن تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مثال 1

إيجاد قيمة الجيب وجيب التمام لزاوية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta$, $\sin\theta$.



$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تحقق من فهمك

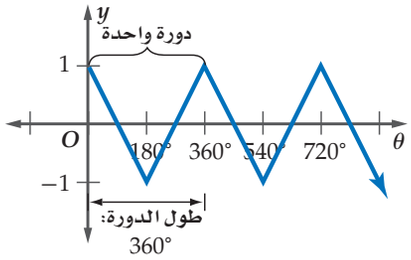
1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta$, $\sin\theta$.

إرشادات للدراسة

الدوالّ الدائرية

بما أن طول القوس المقابل للزاوية التي قياسها θ يساوي $r\theta$، فإنه يمكن التعبير عن مجال الدالّة المثلّثية بطول القوس المقابل للزاوية بدلًا من قياسها، وعندئذ تسمى دالّة دائرية.

الدوالّ الدورية : في **الدوالّ الدورية** يكون شكل الدالّة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمّى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبيّن في التمثيل البياني للدالّة أدناه.



θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تتكرر الدورة كل 360°

إرشادات للدراسة

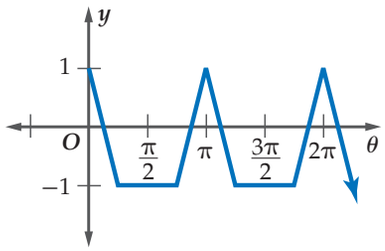
الدورات

يمكن أن تبدأ الدورة عند أيّ نقطة في منحنى الدالّة الدورية. ففي المثال 2 إذا كانت بداية الدورة عند $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط سيبدأ بالتكرار عند $\frac{3\pi}{2}$، ويكون طول الدورة هو:

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

مثال 2 إيجاد طول الدورة

أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.

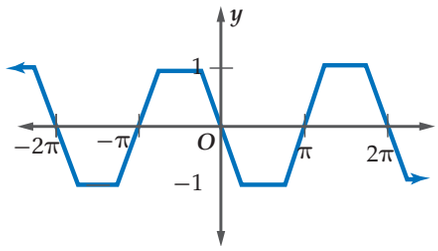


يبدأ تكرار النمط عند ... ، $\pi, 2\pi$ ،

ولذلك طول الدورة هو π.

تحقق من فهمك

2) أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



دوران العجلة والبدّال في الدراجة الهوائية، ولعبة العجلة الدوّارة، والعديد من الألعاب في مدن الألعاب، ودوران الأشياء المختلفة في الفضاء، كلها تُمثّل دوالّ دورية.



الربط بالحياة

أغلب متسابقي الدرَّاجات الهوائية يديرون البدّالات بمعدَّلات تزيد على 200 دورة/دقيقة. أما غالبية الناس الذي يركبون دراجات هوائية فيديرونها بمعدَّلات تتراوح بين 90-120 دورة/دقيقة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال الدوالّ الدوريَّة

درَّاجات هوائية : **عُدْ إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغيّر ارتفاع البدّال في الدرَّاجة الهوائية بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:**

الارتفاع (in)	الزمن (s)
18	0
11	0.5
4	1.0
11	1.5
18	2.0
11	2.5
4	3.0

a) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية:

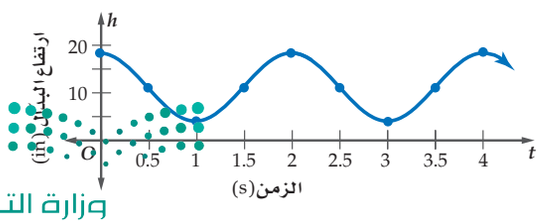
0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 , 2.5, 3

عند 0s يكون الارتفاع 18 in. وعند 0.5s، يكون الارتفاع 11 in، وعند 1s يكون الارتفاع 4 in، وهكذا.

b) أوجد طول دورة الدالّة.

طول الدورة هو الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة، لذلك طول الدورة 2 ثانية.

c) مثّل الدالّة بيانيًّا. افترض أن المحور الأفقي يُمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يُمثّل الارتفاع h.



أقصى ارتفاع يصله البدّال 18 in. وأقلّ ارتفاع 4 in، ولأن طول الدورة ثانيتان، لذا فإن النمط يتكرَّر كلَّ ثانيتين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

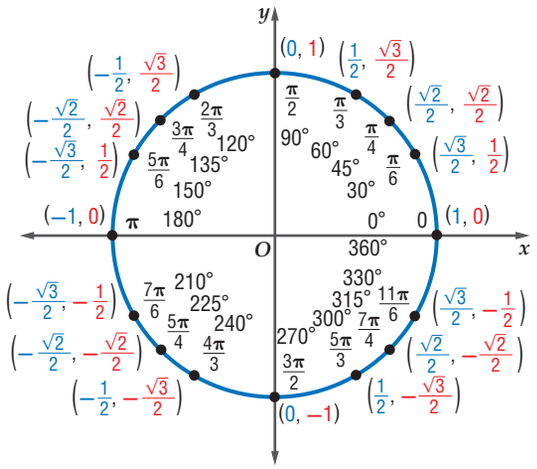
تحقق من فهمك

3) دراجات هوائية افترض أن البدّال للدرّاجة الهوائية المحدَّدة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدَّل دورة واحدة لكل ثانية.

A) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

B) أوجد طول دورة الدالّة ومثِّلها بيانيًّا.

يبيِّن الشكل المجاور القيم الدقيقة لكلٍّ من $\cos\theta, \sin\theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثِّل الإحداثي x قيمة $\cos\theta$ ، ويمثِّل الإحداثي y قيمة $\sin\theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.



يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالّتين: $\cos\theta, \sin\theta$ بيانيًّا، حيث يمثِّل المحور الأفقي قيم θ. والمحور الرأسي قيم الدالّة المطلوبة.

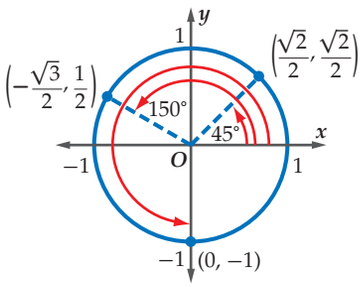
إرشادات للدراسة

الراديان

عند تمثيل دالَّتي الجيب وجيب التمام يمكن تدريج المحور θ بالراديان.

تتكرَّر دورة كلٍّ من دالَّتَي الجيب وجيب التمام كل 360°. وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كلٍّ منهما 360° أو 2π.

إذا كانت النقاط المبيّنة في الشكل تمثِّل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 270°, \theta = 150°, \theta = 45°$.

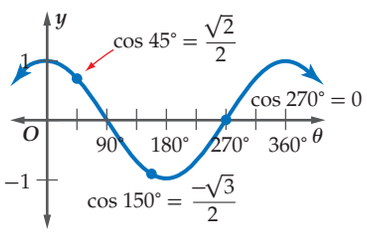


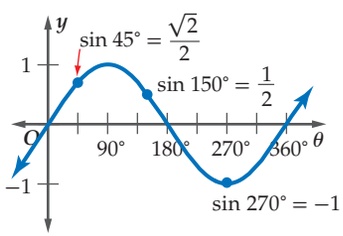
$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

كما يمكنك تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $\cos\theta, \sin\theta$ كما يأتي:





بما أن طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين هو 360°، فإن قيم كلٍّ من الدالّتين تتكرّر كلَّ 360°.
لذلك فإن $\sin(x + 360°) = \sin x$, $\cos(x + 360°) = \cos x$

مثال 4 حساب قيم الدوالّ المثلّثية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية ممّا يأتي:

a) $\cos 480°$

$$\cos 480° = \cos(120° + 360°)$$
$$= \cos 120°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

b) $\sin \frac{11\pi}{4}$

$$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$$
$$= \sin \frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تحقق من فهمك

4A) $\sin 420°$

4B) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

تأكـد

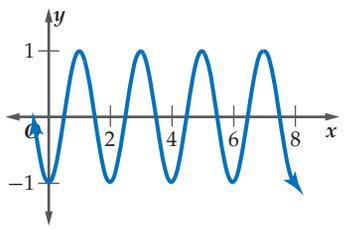
مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\sin\theta$, $\cos\theta$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

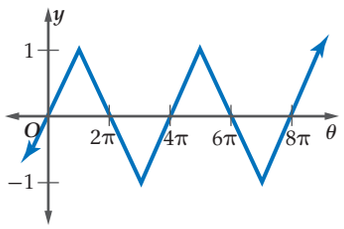
2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

3)



4)



مثال 3 **5) أرجوحة:** إذا مثَّل ارتفاع أرجوحة دالّة دوريّة في الزمن، بحيث تصل الأرجوحة إلى أقصى ارتفاع لها وهو 2 m، ثم تعود إيابًا لتصل 2 m مرّة أخرى مرورًا بأقلِّ ارتفاع لها وهو $\frac{1}{2}$ m، مستغرقة زمنًا قدره ثانية واحدة بين أقلِّ ارتفاع وأقصى ارتفاع، فأجب عما يأتي:

a) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهابًا وإيابًا بدءًا بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه؟

b) مثّل بيانيًّا ارتفاع الأرجوحة h باعتبارها دالّة في الزمن t.

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية ممّا يأتي:

6) $\sin \frac{13\pi}{6}$

7) $\sin(-60°)$

8) $\cos 540°$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

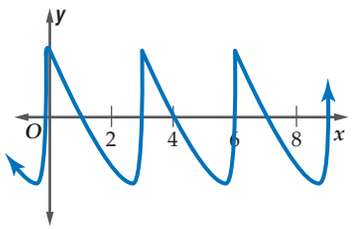
10) $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

11) $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

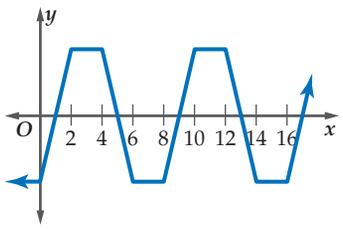
12) $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدوالّ الآتية:

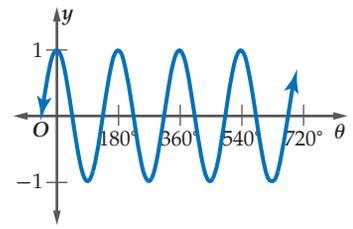
13)



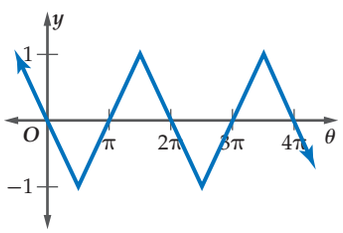
14)



15)



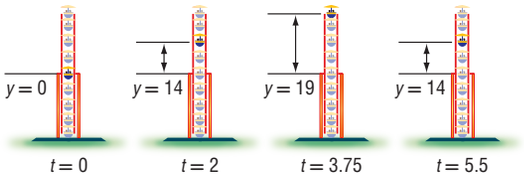
16)



مثال 3

17) العجلة الدّوارة: يبيِّن الشكل المجاور موقع مقعد راكب y بالأقدام عن مركز العجلة بعد t ثانية. إذا تغيَّر ارتفاع المقعد y في العجلة بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:





a) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع المقعد y عند الثواني الآتية: 0, 2, 3.75, 5.5, 7.5, 9.5, 11.25, 13, 15.5

b) أوجد طول دورة الدالّة.

c) مثِّل الدالّة بيانيًّا. افترض أنَّ المحور الأفقي يمثِّل الزمن t، والمحور الرأسي يمثِّل الارتفاع y.

مثال 4 أوجد القيم الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية ممَّا يأتي:

18) $\sin\frac{7\pi}{3}$

19) $\cos(-60°)$

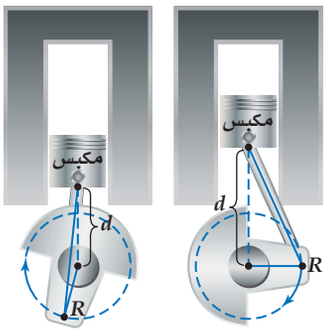
20) $\cos 450°$

21) $\sin\frac{11\pi}{4}$

22) $\sin(-45°)$

23) $\cos 570°$

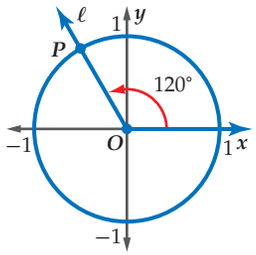
24) محرّكات: في المحرّك المجاور، تمثّل (d) المسافةَ من المكبس إلى مركز الدائرة التي تُسمّى ناقل الحركة (الكرنك)، وتشكّل دالّةً في الزمن. إذا علمت أن النقطة R الواقعة على ذراع المكبس تدور بسرعة 150 دورة/ ثانية، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين:



a) أوجد طول الدورة بالثواني.

b) إذا كانت أقصر قيمة للمسافة d تبلغ 1 cm، وأكبر قيمة 7 cm، فمثّل منحنى الدالّة بيانيًّا، معتبرًا أن المحور الأفقي يمثّل الزمن t ، والمحور الرأسي يمثّل المسافة d .

25) تمثيلات متعدّدة: يقطع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة P كما يبيِّن الشكل المجاور.



a) هندسيًّا: انسخ الشكل في دفترك، وارسم ضلع الانتهاء لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها $30^\circ, 60^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 315^\circ$ في الوضع القياسي.

b) جدوليًّا: أنشئ جدولًا للقيم يوضِّح ميل كلِّ ضلع انتهاء، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c) تحليليًّا: ماذا تستنتج بالنسبة إلى العلاقة بين ظلِّ الزاوية والميل؟ وضِّح إجابتك.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي:

26) $\cos 45^\circ - \cos 30^\circ$

27) $6(\sin 30^\circ)(\sin 60^\circ)$

28) $2\sin\frac{4\pi}{3} - 3\cos\frac{11\pi}{6}$

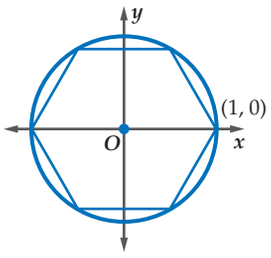
29) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\sin 3\pi$

30) $(\sin 45^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2$

31) $\frac{(\cos 30^\circ)(\cos 150^\circ)}{\sin 315^\circ}$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) هندسة: رُسِم سداسي منتظم داخل دائرة وحدة مركزها نقطة الأصل، بحيث تقع رؤوسه جميعها على الدائرة كما في الشكل المجاور. إذا كانت إحداثيات أحد رؤوس السداسي $(0, 1)$، فما إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى من السداسي؟



33) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من خالد ونواف بحساب قيمة المقدار $\cos\frac{-\pi}{3}$. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

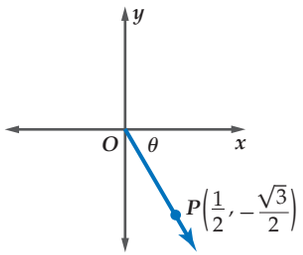
خالد

$$\cos\frac{-\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$$
$$= -0.5$$

نواف

$$\cos\frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$
$$= \cos\frac{5\pi}{3} = 0.5$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



34) **تحدٍّ:** إذا بدأ نصف المستقيم الموضَّح في الشكل المجاور من نقطة الأصل مارًّا بالنقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المستوى الإحداثي، فاذكر قياسًا للزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x .

35) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.
" طول دورة دالّة الجيب من مضاعفات π"

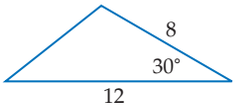
36) **اكتب:** وضِّح كيف يمكنك حساب طول دورة الدالّة الدورية، باستعمال التمثيل البياني للدالّة. ضمّن في توضيحك وصفًا للدورة.

تدريب على اختبار

37) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8$ يساوي:

A 5 **B** 13 **C** 31 **D** 161

38) **هندسة:** مساحة المثلَّث الموضَّح في الشكل المجاور تساوي:

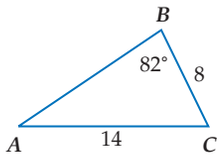


A 48 **B** 96 **C** 41.6 **D** 24

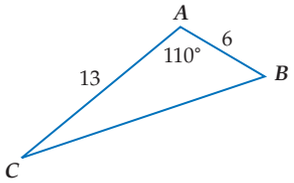
مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المثلَّثات الآتية، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرسان 5-8, 4-8)

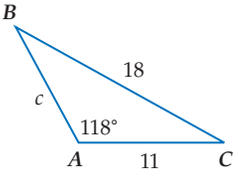
39)



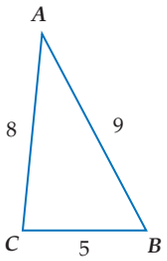
40)



41)



42)



حدّد ما إذا كان للمثلَّث في كلٍّ ممَّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرس 4-8)

43) $A = 72^\circ, a = 6, b = 11$

44) $A = 46^\circ, a = 10, b = 8$

45) $A = 110^\circ, a = 9, b = 5$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

46) $\frac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$

47) $\frac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$

48) $\frac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-8 تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا
Graphing Trigonometric Functions

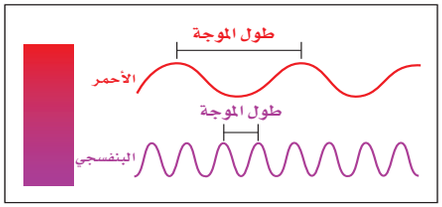
فيما سبق:
درست الدوالّ الدورية. الدرس (6-8)

والآن:
- أصف دوالّ الجيب وجيب التمام والظلّ، وأمثّلها بيانيًا.
- أصف دوالّ مثلَّثية أخرى، وأمثّلها بيانيًا.

المفردات:
السعة amplitude
التردد frequency

لماذا؟

لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة. فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.



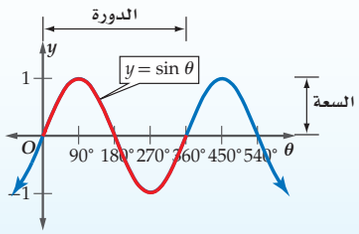
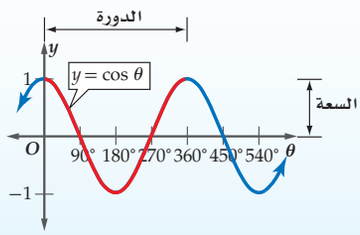
ويمكنك تمثيل الحركة الموجية بالمعادلة: $y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$، حيث تمثّل A سعة الموجة، λ طول الموجة.

دوالُّ الجيب وجيب التمام والظلّ: يمكنك تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا في المستوى الإحداثي. تذكّر أن منحنيات الدوالّ الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكلِّ دورة يُسمّى طول الدورة.

سعة منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

مفهوم أساسي — دالتا الجيب وجيب التمام

أضف إلى مطويتك

الدالّة المولدة (الأم)	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

قراءة الرياضيات

رمز طول الموجة
يُستعمل الرمز λ للدلالة على طول الموجة، ويُقرأ لمبدا.

يمكنك تطبيق ما تعلمتهُ في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوالّ الأخرى على التمثيل البياني للدوالّ المثلَّثية في صورتها العامة: $y = a \cos b\theta$, $y = a \sin b\theta$، التي سعتها $|a|$، وطول دورتها $\frac{360°}{|b|}$.

إرشادات للدراسة

طول الدورة
في الدالّتين: $y = a \sin b\theta$، $y = a \cos b\theta$، b تُمثّل عدد الدورات في 360°. ففي المثال 1 يدلُّ العدد 3 في الدالّة: $y = 4 \cos 3\theta$ على وجود 3 دورات في 360°. مما يعني وجود دورة واحدة في 120°.

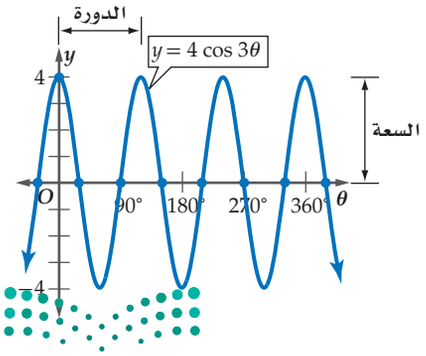
مثال 1 — إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4 \cos 3\theta$.

السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة يساوي $\frac{4 - (-4)}{2} = 4$ أو $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|} = 120°$

من الرسم يكرّر الرسم نفسه كلَّ 120°



تحقق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي:

1A) $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

1B) $y = 3 \sin 5\theta$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

استعمل منحنيات الدوالّ المولّدة (الأم) لتمثيل كلٍّ من الدالّتين: $y = a \cos b\theta$, $y = a \sin b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام المناسبة بيانيًّا. ويمكنك أيضًا استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ.

إذا كانت دورة كلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ تبدأ عند $\theta = 0$ ، فإن نقاط تقاطع كلٍّ منهما مع المحور θ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \cos b\theta$	$y = a \sin b\theta$
$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

إرشادات للدراسة

نقاط التقاطع مع المحور θ

يمكن إيجاد نقاط تقاطع منحنى الدالّة مع المحور θ بوضع $y = 0$ وحلّ المعادلة أو إيجاد قيم θ التي تحقّقها.

مثال 2 تمثيل دالَّتي الجيب وجيب التمام بيانيًّا

مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

a $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2 , b = 1$.

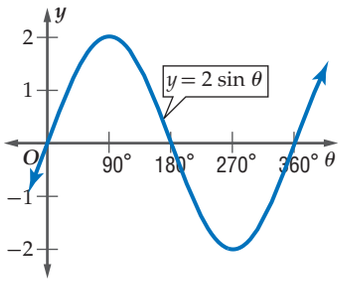
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسيًّا بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2 .

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|} = 360°$ ← دورة واحدة طولها 360° .

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$

$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$



إرشادات للدراسة

السعة

في التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$، تكون السعة هي $|a|$ ، والقيمة العظمى هي $y = |a|$، والقيمة الصغرى هي $y = -|a|$.

b $y = \cos 4\theta$

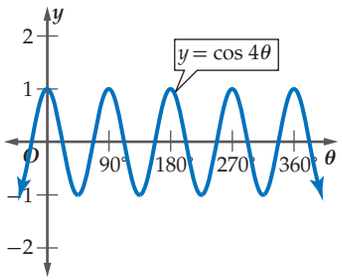
أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ، حيث: $a = 1 , b = 4$.

السعة: $|a| = |1| = 1$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (22.5°, 0)$

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (67.5°, 0)$



تحقق من فهمك

مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

2A $y = 3 \cos \theta$

2B $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوالّ المثلّثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتمُّ وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد**، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالّة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلًا إذا كان طول الدورة للدالّة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

مثال 3 من واقع الحياة — تمثيل موقف بدالّة دورية



الربط بالحياة

يمكن للفيلة سماع صوت يبعد عنها 5 أميال. ويمكن للإنسان سماع الأصوات التي يتراوح ترددها بين 20 هيرتز إلى 20000 هيرتز.

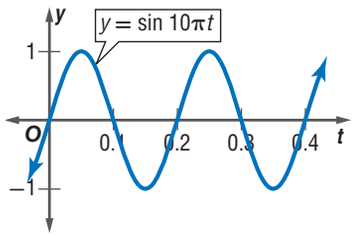
أصوات: تُسمّى الأصوات التي يكون ترددها أقلَّ من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات/ ثانية.

a) أوجد طول دورة الدالّة التي تعبر عن موجات الصوت.

يوجد 5 دورات في الثانية، وطول الدورة هو مقلوب التردد، ويساوي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة، لذلك فإن طول الدورة هو $\frac{1}{5} = 0.2$.

b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب تُمثّل موجة الصوت y باعتبارها دالّة في الزمن t، ثم مثِّلها بيانيًّا.

طول الدورة $= \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	اكتب العلاقة بين طول الدورة و b
$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert} = 0.2$	عوّض
$0.2\lvert b \rvert = 2\pi$	اضرب الطرفين في $\lvert b \rvert$
$b = 10\pi$	اضرب الطرفين في 5؛ b موجبة
$y = a \sin b\theta$	الصورة العامة لدالّة الجيب
$y = 1 \sin 10\pi t$	$a = 1,\ b = 10\pi,\ \theta = t$
$y = \sin 10\pi t$	بسّط



تحقق من فهمك

3) **أصوات:** يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

A) أوجد طول دورة الدالّة.

B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب التمام التي تعبِّر عن موجات الصوت، ثم مثِّلها بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

السعة وطول الدورة

لاحظ أن السعة تؤثّر في منحنى الدالّة في اتجاه المحور y، أما طول الدورة فيؤثّر في اتجاه المحور x .

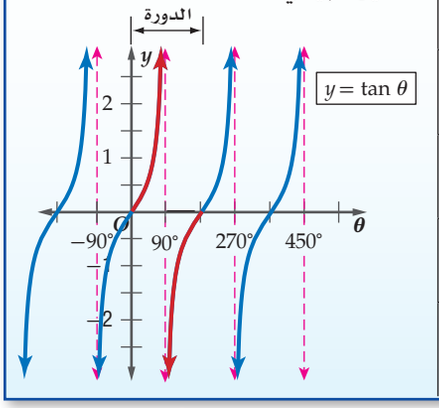
تُعَدّ دالّة الظلِّ من الدوالّ المثلّثية التي لها خطوط تقارب.

مفهوم أساسي — دالّة الظلّ

أضف إلى مطويتك

الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \tan\theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180°n, n \in Z\}$
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة
طول الدورة	$180°$

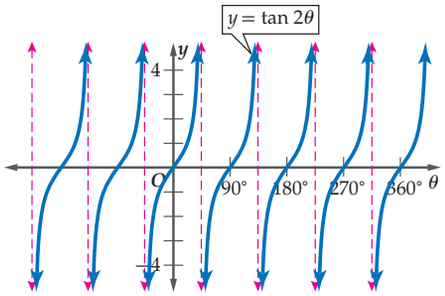
التمثيل البياني للدالّة



طول الدورة لمنحنى الدالّة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180°}{\lvert b \rvert}$ ، ولا يوجد سعة لهذه الدالّة. وخطوط التقارب الرأسية لها تكون عند المضاعفات الفردية للعدد $\left(\frac{180°}{\lvert b \rvert} \cdot \frac{1}{2}\right)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 4 تمثيل دوالّ الظلّ بيانيًّا



أوجد طول دورة الدالّة $y = \tan 2\theta$. ومثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

طول الدورة: $180^\circ _ |b| = \frac{180^\circ}{|2|} = 90^\circ$

خط تقارب عند: $180^\circ _ |_2 b| = \frac{180^\circ}{2|2|} = 45^\circ$

ارسم خطوط التقارب عند

$\ldots, -3 \cdot 45^\circ = -135^\circ, -1 \cdot 45^\circ = -45^\circ, 1 \cdot 45^\circ = 45^\circ, 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ, \ldots$

استعمل $y = \tan \theta$، ولكن ارسم دورة كاملة كل 90°.

تحقق من فهمك

4) أوجد طول دورة الدالّة $y = \frac{1}{2}\tan \theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

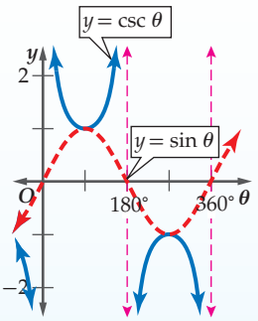
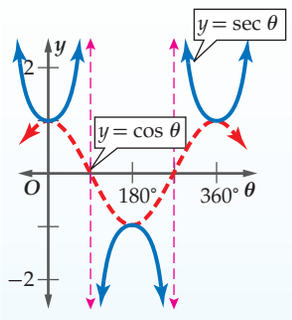
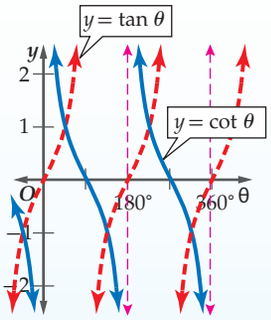
دالّة الظلّ

لا يوجد سعة لدالّة الظلّ بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها.

تمثيل الدوالّ المثلّثية الأخرى بيانيًّا: ترتبط منحنيات دوالّ قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام بمنحنيات دوالّ الجيب، وجيب التمام، والظلّ.

مفهوم أساسي دوالّ قاطع التمام والقاطع وظلّ التمام

أضف إلى مطويتك

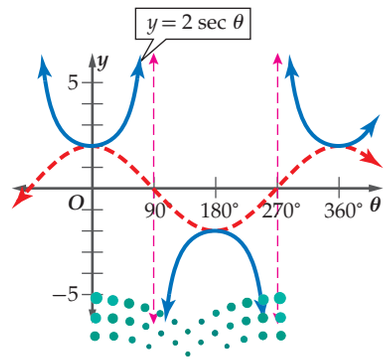
الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n, n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة	غير معرَّفة	غير معرَّفة
طول الدورة	360°	360°	180°

قراءة الرياضيات

الرمز ∨

يُقرأ: الرمز ∨ "أو" ويعني هنا اتحاد فترتين.

مثال 5 تمثيل الدوالّ المثلّثية الأخرى بيانيًّا



أوجد طول دورة الدالّة $y = 2 \sec \theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

طول دورة الدالّة يساوي 360°، وبما أن $y = \sec \theta$ هي مقلوب $y = \cos \theta$ فإنه لتمثيل $y = 2 \sec \theta$ ، استفد من تمثيل $y = 2 \cos \theta$ واتبع ما يلي:

– ارسم الدالّة $y = 2 \cos \theta$.

– ارسم خطوط التقارب الرأسية عند نقاط تقاطع الدالّة $y = 2 \cos \theta$ مع محور θ.

– مثّل الدالّة $y = 2 \sec \theta$.

إرشادات للدراسة

دوالّ المقلوب

يمكنك استعمال منحنيات الدوالّ: $y = \sin \theta, y = \cos \theta,$ $y = \tan \theta$ لتمثيل منحنيات دوالّ المقلوب $\csc \theta, \sec \theta, \cot \theta$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021-1443

تحقق من فهمك

5) أوجد طول دورة الدالّة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالّة بيانيًّا.

تأكـد

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

المثالان 1, 2

1) $y = 4 \sin \theta$ **2)** $y = \sin 3\theta$

3) $y = \cos 2\theta$ **4)** $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5) عناكب: عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

a) أوجد طول دورة الدالّة.

b) افرض أن سعة الدالّة وحدة واحدة. واكتب دالّة جيب تُمثّل اهتزازات الشبكة y كدالّة في الزمن t، ومثلها بيانيًّا.

المثالان 4, 5

أوجد طول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

6) $y = 3 \tan \theta$ **7)** $y = 2 \csc \theta$ **8)** $y = \cot 2\theta$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

9) $y = 2 \cos \theta$ **10)** $y = 3 \sin \theta$ **11)** $y = \sin 2\theta$

12) $y = \cos 3\theta$ **13)** $y = \frac{3}{4} \cos \theta$ **14)** $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

15) $y = 3 \cos 2\theta$ **16)** $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$ **17)** $y = \sin \frac{\theta}{2}$

مثال 3

18) أمواج: قارب في عرض البحر يرتفع إلى أعلى وينخفض إلى أسفل مع الأمواج. الفرق بين أعلى ارتفاع وأقلِّ ارتفاع للقارب 8 بوصات. ويكون القارب مستقرًّا عندما يكون في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة. وتستمر كل دورة في هذه الحركة الدورية لمدة 3 ثوانٍ. اكتب دالّة جيب تُمثّل حركة القارب ومثِّلها بيانيًّا. افترض أن h: الارتفاع بالبوصات، وt: الزمن بالثواني. وأن القارب يكون في وضع مستقرٍّ عندما $t = 0$.

19) كهرباء: يتمثّل فرق الجهد الكهربائي الخارج من أحد الأجهزة الكهربائية بين: 165, 165− فولت، وبتردد مقداره 50 دورة في الثانية في دالّة دورية. اكتب دالّة جيب تمام تُمثّل فرق الجهد V كدالّة في الزمن t، ومثِّلها بيانيًّا. افترض أنه عندما $t = 0$ فإن فرق الجهد يساوي 165 فولت.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

المثالان 5 ,4 أوجد طول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثِّلها بيانيًّا:

20) $y = \tan \frac{1}{2}\theta$

21) $y = 3 \sec \theta$

22) $y = 2 \cot \theta$

23) $y = \csc \frac{1}{2}\theta$



24) زلازل: محطة لرصد الزلازل رصدت موجة لزلزال ذات تردد 0.5 هيرتز، وسعتها تساوي مترًا واحدًا.

a) اكتب دالّة جيب تمثِّل ارتفاع الموجة h كدالّة في الزمن t . افترض أن نقطة الاتزان للموجة $h = 0$ تقع في منتصف المسافة بين أخفض نقطة وأعلى نقطة في الموجة.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

الربط بالحياة

الزلزال هو اهتزاز مفاجئ في القشرة الأرضية ينتج عن تكسُّر الصخور بسبب حركة الصفائح الأرضية، وينتج عن هذا الاهتزاز موجات زلزالية تنطلق من النقطة التي حدث عندها الكسر في باطن الأرض، وتنتشر في جميع الاتجاهات.

المصدر: كتاب العلوم للصف الثالث المتوسط، الفصل الدراسي الأول. طبعة 1436 هـ .

25) اهتزازات: سلك مشدود بين نقطتين يهتز بتردد 130 هيرتز. اكتب دالّة جيب التمام التي تمثِّل اهتزازات السلك y كدالّة في الزمن t ، ومثِّلها بيانيًّا. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة . وإذا تضاعف التردد ، فماذا يحصل لكلٍّ من طول الدورة والسعة؟

أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة لكلٍّ من الدوالّ الآتية، ثم مثّلها بيانيًّا:

26) $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta$

27) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\theta$

28) $y = 2 \tan \frac{1}{2}\theta$

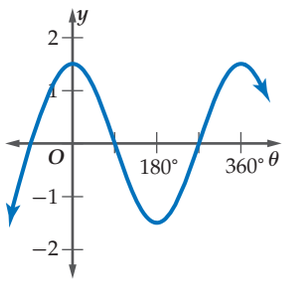
29) $y = 2 \sec \frac{4}{5}\theta$

30) $y = 5 \csc 3\theta$

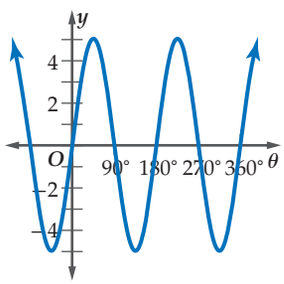
31) $y = 2 \cot 6\theta$

حدّد طول دورة كلٍّ من الدوالّ الممثَّلة بيانيًّا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:

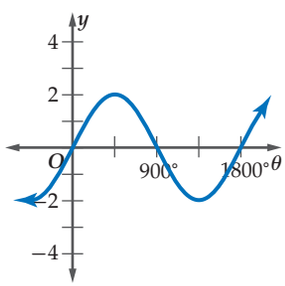
32)



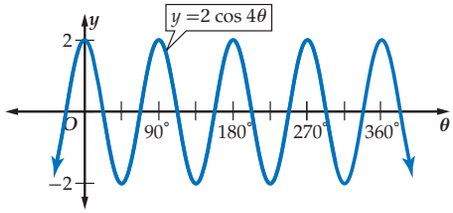
33)



34)



35)



مسائل مهارات التفكير العليا

36) تحدٍّ: حدِّد المجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين $y = a\cos\theta$ ، $y = a\sec\theta$ حيث a عدد حقيقي موجب.

37) تبرير: عيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين منحنى الدالّة $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ ، ومنحنى الدالّة $y = \sin\frac{1}{2}\theta$.

38) مسألة مفتوحة: اكتب دالّة مثلّثية سعتها 3 ، وطول دورتها 180°. ثم مثّلها بيانيًّا.

39) اكتب: وضِّح كيف تُحسب سعة الدالّة $y = -2\sin\theta$. ووضِّح كيف يؤثّر المعامل السالب في التمثيل البيانيّ للدالّة.

تدريب على اختبار

40) مراجعة: أيّ من الزوايا الآتية تحقّق $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ؟

A 990° **B** 1080° **C** 1830° **D** 1215°

41) إجابة قصيرة: أوجد الحدّ رقم 100001 في المتتابعة:

13, 20, 27, 34, 41, …

42) إذا كان عدد سكان إحدى المدن قبل عشر سنوات يساوي 312430 نسمة، وعدد السكان الحالي يساوي 418270 نسمة، فما النسبة المئوية للزيادة في عدد السكان خلال السنوات العشر الماضية؟

A 25% **B** 34% **C** 66% **D** 75%

مراجعة تراكمية

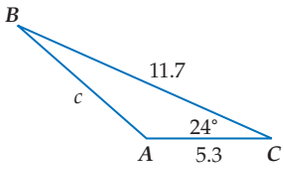
أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-8)

43) $\cos 120° - \sin 30°$

44) $3(\sin 45°)(\sin 60°)$

45) $4\sin\frac{4\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6}$

46) حُلَّ المثلّث المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، والزاويتين إلى أقرب درجة. (الدرس 5-8)



47) مثِّل الدالّة $y = x^2 + 1$ بيانيًّا. (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-8

الدوالّ المثلَّثية العكسية
Inverse Trigonometric Functions

فيما سبق:
درست تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا. الدرس (7-8)

والآن:
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية العكسية.
- أحل معادلات باستعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية.

المفردات:
القيم الأساسية
principal values
دالّة الجيب العكسية
Arcsine function
دالّة جيب التمام العكسية
Arccosine function
دالّة الظل العكسية
Arctangent function
المعادلة المثلَّثية
Trigonometric equation

لماذا؟

لقد تعلّمت كيف تستعمل الدوالّ المثلَّثية العكسية لإيجاد قياسات الزوايا الحادّة. مثال: يتكئ رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in، ويصل ارتفاعه إلى 75 in . ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالّة الظلّ.



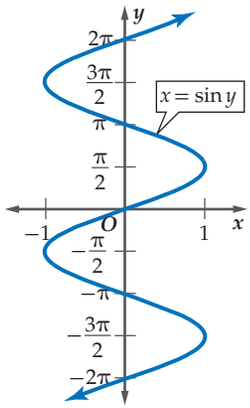
$$\tan\theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلّها 0.2 مستعملًا الآلة الحاسبة العلمية.

SHIFT tan .2 = 11.30993247

إذن قياس الزاوية θ حوالي 11° .

معكوس الدالّة المثلَّثيّة: إذا علمت قيمة الدالّة المثلَّثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالّة لإيجاد قياس الزاوية. تذكّر أن معكوس الدالّة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: y , x. فمعكوس: $y = \sin x$ ، هو $x = \sin y$ ، الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



لاحظ أن معكوس الدالّة ليس دالّة لوجود عدد من قيم y لكلِّ قيمة من قيم x.

لكن إذا تمَّ تحديد مجال الدالّة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$،

فإن المعكوس يكون دالّة عكسية.

تُسمّى القيم في هذا المجال المحدّد **القيم الأساسية**. فالدوالّ المثلَّثية ذات المجال المحدّد تُمثّل بأحرف كبيرة، هكذا:

- $y = \text{Sin}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \text{Cos}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \pi$
- $y = \text{Tan}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

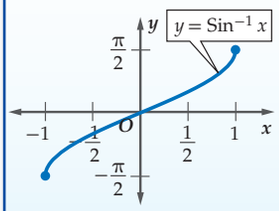
يمكنك استعمال الدوالّ ذات المجالات المحددة لتعريف دوالّ عكسية: لكلٍّ من دالّة الجيب، ودالّة جيب التمام ودالّة الظلّ وهي **دالّة الجيب العكسية**، و**دالّة جيب التمام العكسية**، و**دالّة الظلّ العكسية** كما يأتي:

إرشادات للدراسة

رموز الدوالّ العكسية
يُرمز للدوالّ العكسية أحيانًا ببعض الرموز الأخرى مثل:
دالّة الجيب العكسية
$y = \text{Arcsin}\, x$
دالّة جيب التمام العكسية
$y = \text{Arccos}\, x$
دالّة الظل العكسية
$y = \text{Arctan}\, x$

مفهوم أساسي — **الدوالّ المثلَّثية العكسية**

أضف إلى مطويتك

الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى	نموذج
دالّة الجيب العكسية	$y = \text{Sin}^{-1}\, x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	
دالّة جيب التمام العكسية	$y = \text{Cos}^{-1}\, x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$	
دالّة الظل العكسية	$y = \text{Tan}^{-1}\, x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$	

في العلاقة $y = \cos^{-1} x$، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ فإن $y = 60°, 300°$، كما أن كلَّ زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين بضلع الانتهاء تُعدّ قيمة لـ y أيضًا. أما في الدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$، فإذا كانت $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ فقط.

مراجعة المفردات

الدوالّ العكسية

f, f^{-1} كلٌّ منهما دالّة عكسية للأخرى تعني: $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

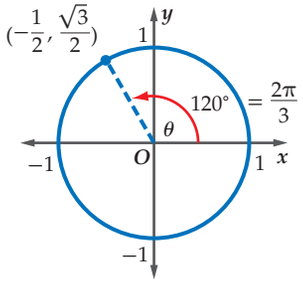
مثال 1 إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية العكسية

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

a) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

المطلوب إيجاد الزاوية θ ، حيث $0° \le \theta \le 180°$ والتي قيمة جيب التمام لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 1: استعمال دائرة الوحدة



أوجد نقطة على دائرة الوحدة إحداثيّها x هو $-\frac{1}{2}$.

نلاحظ أن: $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ، عندما $\theta = 120°$

إذن $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

الطريقة 2: استعمال الزاوية المرجعية

بما أن المطلوب $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، حيث $0° \le \theta \le 180°$

فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني.

أوجد الزاوية الحادّة (المرجعية θ')

بما أن $\cos\theta' = \frac{1}{2}$، فإن $\theta' = 60° = \frac{\pi}{3}$

إذن $\theta = 180° - \theta'$ — θ زاوية تقع في الربع الثاني

$= 180° - 60°$

$= 120°$

الطريقة 3: استعمال الآلة الحاسبة

المفاتيح: 120 (−1÷2) cos SHIFT =

إذن $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

b) $\text{Tan}\ -11$

المطلوب إيجاد الزاوية θ في الفترة $-90° < \theta < 90°$ والتي ظلُّها يساوي 1.

المفاتيح: 45 1 tan SHIFT =

إذن $\text{Tan}-11 = 45° = \frac{\pi}{4}$.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

1A) $\text{Cos}^{-1} 0$

1B) $\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية

تذكّر أنه عند حسابك قيمة معكوس الدالّة المثلّثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

عند حساب قيمة معينة بوجود عدد من الدوالّ المثلّثية، استعمل ترتيب العمليات الحسابية للحلِّ.

مثال 2 إيجاد قيمة مثلّثية

أوجد قيمة $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$ مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: tan SHIFT cos (1 ÷ 2) = 1.732050808

إذن $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 1.73$.

تحقق: $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60°$, $\tan 60° \approx 1.73$

إذن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة:

(2A $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$

(2B $\cos\left(\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

حَلُّ المعادلات المثلّثية باستعمال الدوالّ العكسية: **المعادلة المثلّثية** هي معادلة تحتوي على دوالّ مثلّثية بزوايا مجهولة القياس. وحَلُّ المعادلة المثلّثية يعني: إيجاد قياس الزوايا المجهولة، والتي دوالّها المثلّثية تجعل المعادلة المثلّثية صحيحة، وذلك بإعادة كتابتها باستعمال الدوالّ المثلّثية العكسية.

مثال 3 على اختبار

إذا كان $\text{Sin}\,\theta = -0.35$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

إرشادات للاختبار

حذف البدائل

إشارة $\text{Sin}\,\theta$ تُحدّد قياس الزاوية في الربع الأول أو الربع الرابع، وبما أن -0.35 قيمة سالبة، فابحث عن زاوية في الربع الرابع.

اقرأ فقرة الاختبار

جيب الزاوية θ هو -0.35. ويمكن كتابة هذا في الصورة: $\theta = \text{Sin}^{-1}(-0.35)$.

حلُّ فقرة الاختبار

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: SHIFT sin (−0.35) = −20.48731511

إذن $\theta \approx -20.5°$. الإجابة الصحيحة هي A.

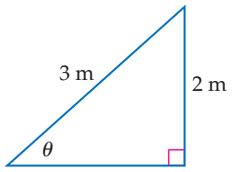
تحقق من فهمك

3) إذا كان $\text{Tan}\,\theta = 1.8$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $0.03°$ **B** $29.1°$ **C** $60.9°$ **D** لا يوجد حلّ

يمكنك استعمال الدوالّ المثلّثية العكسيّة؛ لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في مثلّث قائم الزاوية بمعرَّفة طولي ضلعين فيه.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال الدوالّ المثلّثية العكسية



لعبة التزحلق: لعبة تزحلق للأطفال، ارتفاعها 2 m ، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تصنعها لعبة التزحلق مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

بما أن طول الضلع المقابل وطول الوتر معلومان، فيمكن استعمال دالّة الجيب.

$\text{Sin}\ \theta = \frac{2}{3}$ — دالّة الجيب

$\theta = \text{Sin}^{-1}\frac{2}{3}$ — دالّة معكوس الجيب

$\theta \approx 41.8°$ — استعمل الآلة الحاسبة

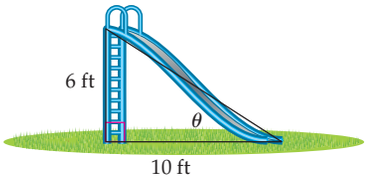
إذن قياس الزاوية يساوي $41.8°$ تقريبًا.

تحقّق: باستعمال الآلة الحاسبة، $\sin 41.8 \approx 0.66653 \approx \frac{2}{3}$.

أيّ أن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

4) تزلج: يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



تأكـد

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

1) $\text{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$

2) $\text{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$

3) $\text{Cos}^{-1}(-1)$

مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

4) $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

5) $\tan(\text{Cos}^{-1}1)$

6) $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

مثال 3 **7) اختيار من متعدد:** إذا كان $\text{Sin}\ \theta = 0.422$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

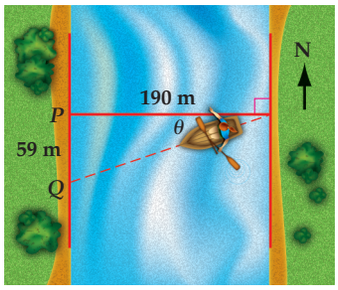
A $25°$ **B** $42°$ **C** $48°$ **D** $65°$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

8) $\text{Cos}\,\theta = 0.9$ **9)** $\text{Sin}\,\theta = -0.46$ **10)** $\text{Tan}\,\theta = 2.1$

مثال 4



11) قوارب: يسير قارب في اتجاه الغرب؛ ليقطع نهرًا عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي أزاح التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

12) $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **13)** $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

14) $\text{Sin}^{-1}(-1)$ **15)** $\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$

16) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **17)** $\text{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

18) $\tan\left[\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

19) $\cos\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{5}\right)$ **20)** $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}\right)$

21) $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{9}\right)$ **22)** $\sin\left[\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

مثال 3 حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

23) $\text{Tan}\,\theta = 3.8$ **24)** $\text{Sin}\,\theta = 0.9$

25) $\text{Sin}\,\theta = -2.5$ **26)** $\text{Cos}\,\theta = -0.25$

27) $\text{Cos}\,\theta = 0.56$ **28)** $\text{Tan}\,\theta = -0.2$

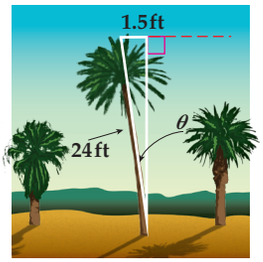
مثال 4



الربط بالحياة

فوائد شجرة نخلة التمر لا تُعدّ ولا تُحصى، منها قيمتها الغذائية العالية، وتُعدّ مصدرًا ممتازًا للطاقة الحرارية لجسم الإنسان، إذ تحوي ما يقارب 80% من السكريات، وتحتوي الثمار على الأملاح المعدنية والعناصر النادرة المفيدة لجسم الإنسان كالبوتاسيوم والماغنسيوم والحديد وفيتامينات أ، ب، $ب_2$، $ب_6$، ويستفيد الناس من أجزاء النخيل كلها.

29) نخيل: شجرة نخيل طولها 24 ft، تميل عن الاتجاه الرأسي بمقدار 1.5 ft كما في الشكل المجاور، اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تميل بها الشجرة، ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.



حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

30) $\csc \theta = 1$ **31)** $\sec \theta = -1$ **32)** $\sec \theta = 1$

33) $\csc \theta = \frac{1}{2}$ **34)** $\cot \theta = 1$ **35)** $\sec \theta = 2$

36) تمثيلات متعدّدة: أجب عما يأتي، معتبرًا $y = \text{Cos}^{-1} x$.

a) بيانيًّا: مثّل الدالّة بيانيًّا. وأوجد المجال والمدى.

b) عدديًّا: اختر قيمة للمتغيّر x بين $-1, 0$. ثم أوجد قيمة الدالّة عندها إلى أقرب جزء من عشرة.

c) تحليليًّا: قارن بين التمثيل البياني للدالّة $y = \cos x$، والتمثيل البياني للدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من خليل وعبدالرحمن بحلِّ المعادلة $\cos \theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

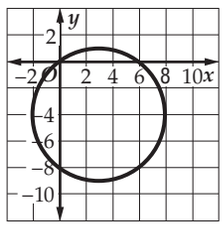
خليل	عبدالرحمن
$\cos \theta = 0.3$	$\cos \theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 72.5^\circ$	$\cos^{-1} 0.3 = 162.5^\circ$

38) تبرير: وضِّح كيف يرتبط مجال الدالّة $y = \text{Sin}^{-1} x$ مع مدى الدالّة $y = \text{Sin } x$.

39) اكتب: فسّر لماذا تكون كلٌّ من $\text{Sin}^{-1} 8, \text{Cos}^{-1} 8$ غير معرَّفة، بينما $\text{Tan}^{-1} 8$ معرَّفة.

تدريب على اختبار

40) إجابة قصيرة: أوجد معادلة الدائرة الممثَّلة في الشكل الآتي:



41) إذا كان $g(x) = 4 - 2x, f(x) = 2x^2 - 3x$ ، فأوجد $g[f(x)]$.

A $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

B $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

C $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

D $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

مراجعة تراكمية

42) أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4 \cos 2\theta$ ، ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا. (الدرس 7-8)

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-8)

43) $\cos 3\pi$ **44)** $\tan 120^\circ$ **45)** $\sin 300^\circ$ **46)** $\sec \frac{7\pi}{6}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوالّ المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية (الدرس 8-1)

- $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
- $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ ، $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ ، $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

الزوايا وقياسها والدوالّ المثلَّثية للزوايا (الدرسان 8-2, 8-3)

- يُحدّد قياس الزاوية المرسومة في الوضع القياسي بمقدار الدوران واتجاهه من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ، بمعلومية إحداثيي النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الجيوب وقانون جيوب التمام (الدرسان 8-4, 8-5)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

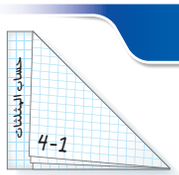
الدوالّ الدائرية والدوالّ المثلَّثية العكسية (الدرسان 8-6, 8-8)

- إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x, \sin\theta = y$.
- $y = \text{Sin}\ x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \text{Cos}\ x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \pi$
- $y = \text{Tan}\ x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ، $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا (الدرس 8-7)

- للدوالّ المثلَّثية التي في إحدى الصورتين $y = a\sin b\theta, y = a\cos b\theta$ ، سعة تساوي $|a|$ ، وطول دورة يساوي $\frac{360^\circ}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{|b|}$.
- أما الدالّة المثلَّثية $y = a\tan b\theta$ فطول دورتها يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$ ، ولا يوجد لها سعة.

المطويات منظم أفكار



تأكّد من أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية

حساب المثلَّثات ص 401
النسبة المثلَّثية ص 401
الدالّة المثلَّثية ص 401
الجيب ص 401
جيب التمام ص 401
الظلّ ص 401
قاطع التمام ص 401
القاطع ص 401
ظلّ التمام ص 401
دوالّ المقلوب ص 402
معكوس الجيب ص 404
معكوس جيب التمام ص 404
معكوس الظلّ ص 404
زاوية الارتفاع ص 405
زاوية الانخفاض ص 405
الوضع القياسي ص 410
ضلع الابتداء ص 410
ضلع الانتهاء ص 410
الراديان ص 412
الزاوية المركزية ص 413
طول القوس ص 413
الزاوية الربعية ص 417
الزاوية المرجعية ص 417
قانون الجيوب ص 423
حل المثلَّث ص 423
قانون جيوب التمام ص 431
دائرة الوحدة ص 437
الدالّة الدائرية ص 437
الدالّة الدورية ص 438
الدورة ص 438
طول الدورة ص 438
السعة ص 444
التردد ص 445
القيم الأساسية ص 451
دالّة الجيب العكسية ص 451
دالّة جيب التمام العكسية ص 451
دالّة الظلّ العكسية ص 451
المعادلة المثلَّثية ص 453

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كلِّ جملة فيما يأتي:

1) _____ يُستعمل لحلِّ مثلَّث بمعلومية قياسي زاويتين وطول ضلع فيه.

2) الدوالّ $\cot\theta, \csc\theta, \sec\theta$ تسمى _____

3) تُسمى المسافة الأفقية في الدورة _____ .

4) إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن هذه الزاوية تُسمى _____.

5) _____ هي الزاوية المحصورة بين خطِّ النظر والخطِّ الأفقي عندما ينظر الشخص إلى أعلى.

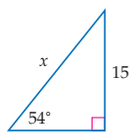
6) _____ منحنى دالّة الجيب أو منحنى دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

مراجعة الدروس

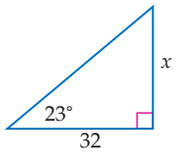
8-1 الدوالّ المثلّثية في المثلّثات القائمة الزاوية ص 401-409

استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

7)

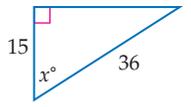


8)

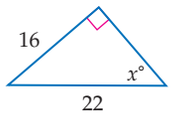


أوجد قيمة x مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

9)



10)

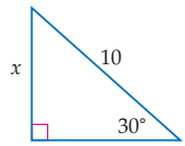


11) شاحنة: ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3 ft عن سطح الأرض. ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة، بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض 20°، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



مثال 1

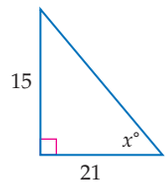
استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x.



$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	دالّة الجيب
$\sin 30° = \frac{x}{10}$	عوِّض
$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\frac{10}{2} = x$	اضرب الطرفين في 10
$5 = x$	بسِّط

مثال 2

أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



$\tan x° = \frac{15}{21}$	$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
$\tan^{-1}\frac{15}{21} = x$	معكوس الظلّ
$35.5° \approx x°$	استعمل الآلة الحاسبة

8-2 الزوايا وقياساتها ص 410-415

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممَّا يأتي:

12) $215°$ **13)** $\frac{5\pi}{2}$

14) -3π **15)** $-315°$

في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كلِّ زاوية من الزوايا المُعطاة:

16) $265°$ **17)** $-65°$ **18)** $\frac{7\pi}{2}$

19) درَّاجة هوائية: إطار درَّاجة هوائية يدور 8 دورات في الدقيقة. إذا كان طول نصف قطر الإطار 15 in، فأوجد قياس الزاوية θ التي يدورها الإطار في ثانية واحدة بالراديان.



مثال 3

حوِّل القياس $160°$ إلى قياس بالراديان.

$$160° = 160°\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$$

$$\frac{160\pi}{180} \text{ rad} = \frac{8\pi}{9}$$

مثال 4

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية $150°$.

زاوية بقياس موجب:

$150° + 360° = 510°$ — أضف $360°$

زاوية بقياس سالب:

$150° - 360° = -210°$ — اطرح $360°$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

8-3 الدوالّ المثلّثية للزوايا ص 416-421

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

20) $\cos 135°$ **21)** $\tan 150°$

22) $\sin 2\pi$ **23)** $\cos \frac{3\pi}{2}$

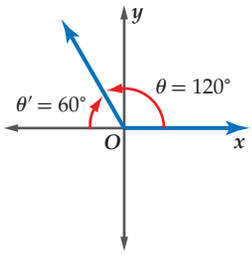
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بنقطة من النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ .

24) $(-4, 3)$ **25)** $(5, 12)$ **26)** $(16, -12)$

27) كرة: قذفت كرة من حافة سطح بناية بزاوية قياسها $70°$، وبسرعة ابتدائية مقدارها 5m. المعادلة التي تُمثّل المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة هي: $x = v_0(\cos \theta)\, t$، حيث: v_0 هي السرعة الابتدائية، وθ هي قياس الزاوية التي قذفت فيها الكرة، وt هو الزمن (بالثواني). ما المسافة الأفقية التقريبية التي تقطعها الكرة بعد مرور 10 ثوانٍ.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 120°$.



بما أن ضلع الانتهاء للزاوية $120°$ يقع في الربع الثاني، فإن قياس الزاوية المرجعية θ هو $180° - 120° = 60°$.

دالّة الجيب موجبة في الربع الثاني، إذن:

$$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 6

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة (6, 5). فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ.

$$r = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{61}}{61} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{61}}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{61}}{6} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{6}{5}$$

8-4 قانون الجيوب ص 422-428

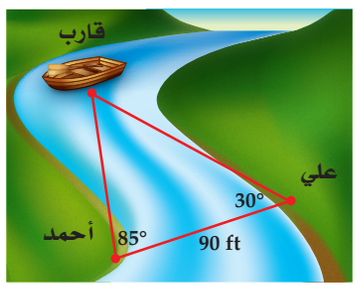
حدّد ما إذا كان للمثلَّث في كلٍّ ممَّا يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول مقرَّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

28) $C = 118°, c = 10, a = 4$

29) $A = 25°, a = 15, c = 18$

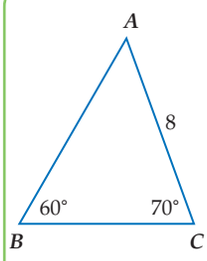
30) $A = 70°, a = 5, c = 16$

31) قوارب: يقف علي وأحمد على جانبَي نهر. كم يبعد علي عن القارب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



مثال 7

حُلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



أولًا أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$60° + 70° + A = 180°, \quad A = 50°$$

استعمل الآن قانون الجيوب لإيجاد قيمتَي a, c.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \qquad \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a} \qquad \frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c}$$

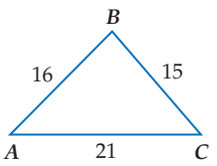
$$a = \frac{8 \sin 50°}{\sin 60°} \approx 7.1 \qquad c = \frac{8 \sin 70°}{\sin 60°} \approx 8.7$$

إذن $A = 50°, c \approx 8.7, a \approx 7.1$.

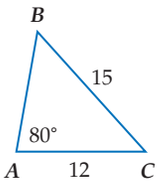
8-5 قانون جيوب التمام ص 431-436

حدِّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم قانون جيوب التمام) في حلّ كلٍّ من المثلَّثات الآتية، ثم حُلّ كلّ مثلَّث منها مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(32)



(33)



(34) $C = 75°, a = 5, b = 7$

(35) $A = 42°, a = 9, b = 13$

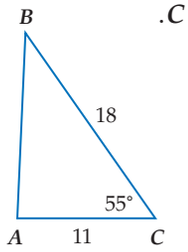
(36) $b = 8.2, c = 15.4, A = 35°$

(37) زراعة: يريد مزارع وضع سياج لقطعة أرض مثلَّثة الشكل. طولا ضلعيها 325 ft, 120 ft، وقياس الزاوية المحصورة بينهما 70°. فما طول السياج الذي يحتاج إليه؟

مثال 8

حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه $C = 55°, b = 11, a = 18$.

أُعطي في السؤال طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. ابدأ برسم المثلَّث واستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قيمة c.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 18^2 + 11^2 - 2(18)(11)\cos 55°$$
$$c^2 \approx 217.9$$
$$c \approx 14.8$$

ثم استعمل قانون جيوب التمام مرّة أخرى لإيجاد قياس الزاوية B.

$$11^2 = 18^2 + (14.8)^2 - 2(18)(14.8)\cos B$$
$$\frac{11^2 - 18^2 - (14.8)^2}{-2(18)(14.8)} = \cos B$$
$$0.7921 \approx \cos B$$
$$38° \approx B$$

قياس الزاوية الثالثة A

$$m\angle A \approx 180° - (55° + 38°) \approx 87°$$

إذن $A \approx 87°, B \approx 38°, c \approx 14.8$

8-6 الدوالّ الدائرية ص 437-443

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

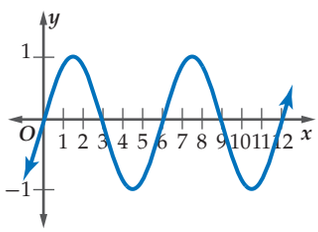
(38) $\cos(-210°)$

(39) $(\cos 45°)(\cos 210°)$

(40) $\sin -\frac{7\pi}{4}$

(41) $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(42) أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



(43) إطارات: طول قطر إطار دائري 18 in، ويدور 4 دورات في الدقيقة الواحدة. ما طول دورة الدالّة التي تُمثّل ارتفاع نقطة تقع على الحافة الخارجية للإطار كدالّة في الزمن؟

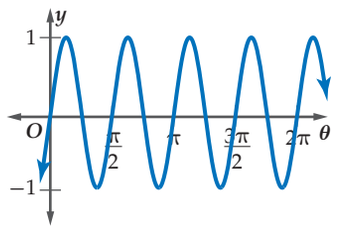
مثال 9

أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 510°$.

$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$
$$= \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال 10

أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



يبدأ النمط بالتكرار عند π، $\frac{\pi}{2}$، وهكذا... ولذلك طول الدورة هو $\frac{\pi}{2}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

8-7 تمثيل الدوالّ المثلّثية بيانيًّا ص 444-450

أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة للدوالّ الآتية، ثم مثّل كلًّا منها بيانيًّا:

44 $y = 4 \sin 2\theta$

45 $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

46 $y = 3 \csc \theta$

47 $y = 3 \sec \theta$

48 $y = \tan 2\theta$

49 $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

50 **رياضة:** قفز لاعب على جهاز الاهتزاز، فاهتز الجهاز بتردد قدره 10 هيرتز. إذا كانت السعة تساوي 5 ft، فاكتب دالّة جيب تُمثّل الارتفاع y في اهتزاز الجهاز كدالّة في الزمن t.

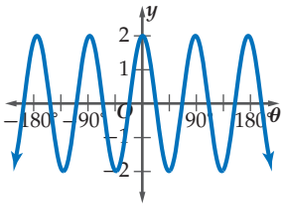
مثال 11

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

السعة: $|a| = |2| = 2$. لذلك فالتمثيل البياني للدالّة تكون له قيمة عظمى هي 2، وقيمة صغرى هي -2.

وطول الدورة:

$$\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$$



8-8 الدوالّ المثلّثية العكسية ص 451-456

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

51 $\text{Sin}^{-1}(1)$

52 $\text{Tan}^{-1}(0)$

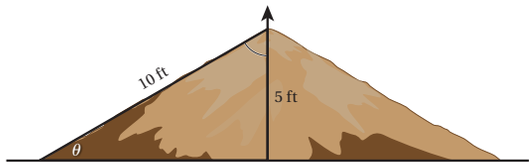
53 $\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

54 $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

55 $\text{Tan}^{-1} 1$

56 $\text{Cos}^{-1} 0$

57 **منحدرات:** منحدر ارتفاعه 5 أقدام، وطوله 10 أقدام كما يظهر في الشكل أدناه. اكتب دالّة مثلّثية عكسية، يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية θ التي يصنعها المنحدر مع الأرض الأفقية، ثم أوجد قياس هذه الزاوية.



أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

58 $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

59 $\sin\left(\text{Tan}^{-1} 0\right)$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك .

60 $\text{Tan}\,\theta = -1.43$

61 $\text{Sin}\,\theta = 0.8$

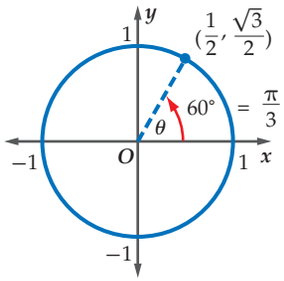
62 $\text{Cos}\,\theta = 0.41$

مثال 12

أوجد قيمة $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. واكتبه بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ حيث $0° \le \theta \le 180°$، بحيث يكون جيب تمامها $\frac{1}{2}$.

استعمل دائرة الوحدة.



أوجد نقطة على دائرة الوحدة، بحيث يكون الإحداثي x لها $\frac{1}{2}$ بما أن: $\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 60°$

إذن $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60° = \frac{\pi}{3}$.

مثال 13

أوجد قيمة $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

sin SHIFT TAN 1 ÷ 2 = 0.4472135955

إذن $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 14

إذا كان $\text{Cos}\,\theta = 0.72$، فأوجد θ.

استعمل الآلة الحاسبة.

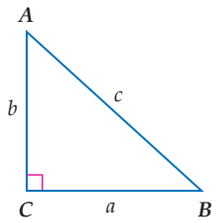
SHIFT COS 0.72 = 43.9455195623

إذن $\theta \approx 43.9°$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2024-1445

اختبار الفصل

حُلّ $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي باستعمال القياسات الواردة، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



1) $A = 36°, c = 9$

2) $a = 12, A = 58°$

3) $a = 9, c = 12$

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

4) $325°$

5) $-175°$

6) $\frac{9\pi}{4}$

7) $-\frac{5\pi}{6}$

8) حدّد ما إذا كان للمثلَّث ABC الذي فيه $A = 110°, a = 16, b = 21$ حل واحد أم حلان أم ليس له حل. ثم أوجد الحلول (إن أمكن)، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممَّا يأتي (في السؤال 14، اكتب الزاوية بالدرجات):

9) $\cos(-90°)$

10) $\sin 585°$

11) $\cot \frac{4\pi}{3}$

12) $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

13) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

14) $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$

15) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ فأوجد كلًّا من: $\cos\theta, \sin\theta$.

16) **اختيار من متعدد:** أيٌّ من الزوايا الآتية يكون الجيب والظلّ لها سالبين؟

A $65°$

B $310°$

C $120°$

D $265°$

أوجد السعة وطول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين. ثم مثِّل الدالّتين بيانيًّا:

17) $y = 2\sin 3\theta$

18) $y = \frac{1}{2}\cos 2\theta$

19) **اختيار من متعدد:** طول دورة الدالّة $y = 3\cot\theta$ يساوي:

A $120°$

B $180°$

C $360°$

D $1080°$

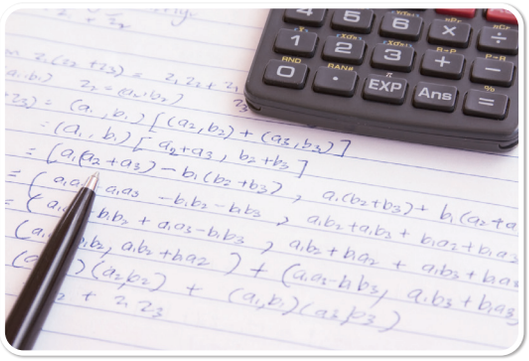
20) حدّد أنسب طريقة نبدأ بها لحلّ $\triangle XYZ$ (قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام)، الذي فيه: $y = 15, z = 9, X = 105°$، ثم حُلّ المثلَّث مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

21) **سواقٍ:** عجلة ساقية طول قطرها 20 ft، تكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن ارتفاع أعلى العجلة يُمثّل الارتفاع عند الزمن 0. اكتب دالّة مثلّثية تُمثِّل ارتفاع النقطة h في الشكل أدناه كدالّة في الزمن t. ثم مثِّل الدالّة بيانيًّا.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

استعمال الآلة الحاسبة العلمية



تُعدّ الآلات الحاسبة العلمية والآلات الحاسبة البيانية من الأدوات المهمة والفاعلة في حلِّ المسائل. كما لاحظت سابقًا فإن بعض أسئلة الاختبارات تتضمن خطوات أو حسابات تحتاج فيها إلى استعمال الآلة الحاسبة العلمية.

استراتيجية استعمال الآلة الحاسبة العلمية

الخطوة 1

تَعرّف الدوالّ المختلفة في الآلة الحاسبة العلمية جيدًا ، ومتى تَستعمل كلًّا منها.

- **الصيغة العلمية:** للحسابات المتعلّقة بالأعداد الكبيرة.
- **الدوالّ الأُسّية:** مسائل النموِّ والاضمحلال والربح المركب.
- **الدوالّ المثلّثية:** مسائل تتضمن زوايا، ومسائل ترتبط بحلِّ المثلّث، ومسائل في القياس غير المباشر.
- **الجذور التربيعية والنونية:** مسائل ترتبط بالبُعد في المستوى الإحداثي، ومسائل ترتبط بنظرية فيثاغورس.

الخطوة 2

استعمل الآلة الحاسبة العلمية لحلِّ المسائل.

- تذكّر أن تعمل بالصورة الأكثر فاعلية، فبعض الخطوات يمكن القيام بها ذهنيًّا أو يدويًّا، وفي بعضها الآخر يلزم استعمال الآلة الحاسبة العلمية.
- تحقّق من إجابتك إذا كان الوقت يسمح بذلك.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المُعطيات لحلِّها:

عندما وقف محمد على بُعد 18 ft من قاعدة شجرة، شكّل زاوية قياسها 57° مع قمة الشجرة. ما ارتفاع الشجرة مقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة؟

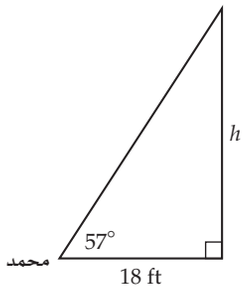
A 27.7 ft

B 28.5 ft

C 29.2 ft

D 30.1 ft

اقرأ المسألة بعناية. أُعطيت بعض القياسات، وطلب إليك إيجاد ارتفاع الشجرة. إذن من المفيد في البداية أن ترسم مخطّطًا يُمثّل المسألة.



استعمل دالّة مثلّثية لكتابة علاقة تربط الطولين بقياس الزاوية في المثلّث القائم الزاوية.

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ دالّة الظل

$\tan 57° = \frac{h}{18}$ عوّض

لإيجاد ارتفاع الشجرة h تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57°$. استعمل الآلة الحاسبة العلمية.

$1.53986 \approx \frac{h}{18}$ استعمل الآلة الحاسبة

$27.71748 \approx h$ اضرب الطرفين في 18

يبلغ ارتفاع الشجرة 27.7 ft تقريبًا؛ إذن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

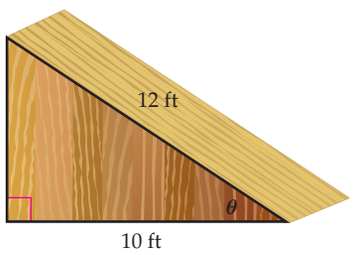
اقرأ كلَّ مسألة وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل مُعطيات المسألة لحلها:

1) تقلع طائرة من المطار بسرعة ثابتة. بعد أن قطعت الطائرة مسافة أفقية مقدارها 800 m كانت على ارتفاع 285 m رأسيًّا. ما زاوية ارتفاع الطائرة خلال الإقلاع؟

A 15.6° **B** 18.4°

C 19.6° **D** 22.3°

2) ما زاوية ارتفاع المنحدر الذي يُمثّله الشكل أدناه؟



A 26.3°

B 28.5°

C 30.4°

D 33.6°

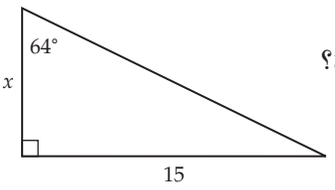
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) ما قيمة x في الشكل المجاور، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2) ما طول الدورة في التمثيل البياني للدالّة: $y = 3 \cos 4\theta$ ؟

A 90°

B 180°

C 270°

D 360°

3) تتكون مجموعة حلِّ المعادلة $\sqrt{8x + 1} - 4 = 1 - 2x$ من:

A عددين صحيحين موجبين.

B عدد صحيح موجب واحد فقط.

C عددين صحيحين أحدهما موجب والآخر سالب.

D ليس لها حلول حقيقية.

4) ما القيمة الدقيقة لِـ $\sin 240°$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) المقدار $i^{50} + i^{51} + i^{53}$ يساوي :

A i

B $-i$

C -1

D 0

6) ما قيمة m في المثلَّث MNO الذي فيه: $M = 35°, N = 74°, n = 12.4$ cm، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm

B 8.5 cm

C 14.6 cm

D 35.9 cm

7) أوجد قيمة المحددة : $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

A -144

B -72

C 72

D 144

8) إذا كان $(x + 1)$ عاملًا لكثيرة الحدود $P(x) = x^3 + Kx^2 + 2Kx - 2$، فإن قيمة K تساوي:

A 6

B $\frac{1}{3}$

C -3

D 3

9) ما باقي قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

A -11

B 1

C -1

D 11

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي:

10) تعتمد سرعة موجة المدِّ (تسونامي) v على معدّل عمق مياه البحر. إذا علمت أن الصيغة الآتية تُمثّل سرعة المد عندما يكون معدّل عمق الماء d كيلومترًا، $v = 356\sqrt{d}$، وإذا علمت أن موجة المدّ (تسونامي) تسير بسرعة 145 km/h، فما معدَّل عمق الماء، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة؟

11) أوجد معكوس $g(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$.

12) إذا كان $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$، فأوجد قيمة $(f \circ g)(\frac{11}{2})$.

13) إذا كان $\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}$، حيث

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

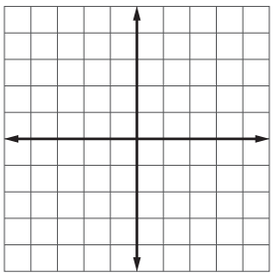
فأوجد قيمة العنصر C_{32} (العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني من $\underline{C}$) .

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي موضِّحًا خطوات الحلِّ:

14) إذا كان $f(x) = -|x+4| + 3$، فأجب عمَّا يأتي

a) مثّل الدالّة $f(x)$ بيانيًّا .



b) حدِّد مجال الدالّة ومداها.

c) أوجد المقاطع للمحاور x، y .

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس ...	8-1	8-7	مهارة سابقة	8-3	مهارة سابقة	8-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

المسافة بين نقطتين	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثانية	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$
مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$	$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$
الضرب بثابت	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثالثة (قاعدة الأقطار)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

كثيرات الحدود

مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$
مربع المجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مكعب المجموع	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
مربع الفرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
مكعب الفرق	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
حاصل ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

الإحصاء والاحتمال

	${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
$n! = n\,(n-1)\,.\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1$	$P(B/A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$
$0! = 1$	$P(A') = 1 - P(A)$
${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	

المتتابعات والمتسلسلات

الحد النوني في المتتابعة الهندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
الحد النوني في المتتابعة الحسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
مجموع حدود المتتابعة الهندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ or $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع حدود المتتابعة الحسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ or $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

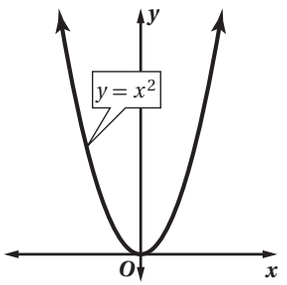
الصيغ

حساب المثلثات

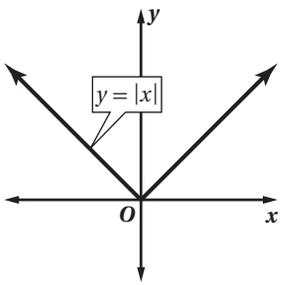
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
الدوال المثلثية	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
متطابقات مثلثية	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

الدوال الرئيسة (الأم)

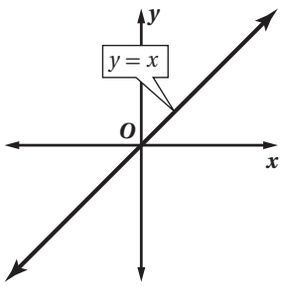
الدوال التربيعية



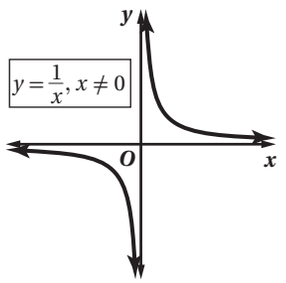
دوال القيمة المطلقة



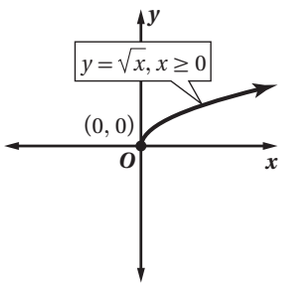
الدوال الخطية



دوال المقلوب



دوال الجذر التربيعي



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$	$\underline{A}^{-1}$
النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{A}$	$-\underline{A}$
مصفوفة الوحدة	$\underline{\mathrm{I}}$
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
المتوسط	$\bar{x}$
الانحراف المعياري	s
الحادثة المتممة	A'
احتمال الحادثة A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\cot(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\csc(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec(x)$
معكوس دالة الجيب	$\sin^{-1} x$
معكوس دالة جيب التمام	$\cos^{-1} x$
معكوس دالة الظل	$\tan^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
أصغر من	$<$
أصغر من أو يساوي	$\leq$
أكبر من	$>$
أكبر من أو يساوي	$\geq$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	$\boldsymbol{i}$
تركيب الدالتين f و g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\underline{A}_{m \times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	aij
محددة المصفوفة $\underline{A}$	$\lvert \underline{A} \rvert$