الفصل الثاني
رياضيات ٥

العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

مجموعة رفعة الرياضيات
@A_Shark_s
تطوير - إنتاج - توثيق

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التاريخ:

اليوم:

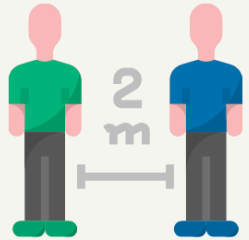
المادة:

نعود بحذر

الالتزام بارتداء الكمامة

عدم المصافحة

غسل اليدين



التباعد الاجتماعي

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

٣-٢ اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درست إيجاد الدالة العكسية لدالة.

و الآن

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثل دوال لوغاريتمية بيانياً.

المفردات

اللوغاريتم - الدالة اللوغاريتمية

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لماذا؟

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

@A_Shark_s

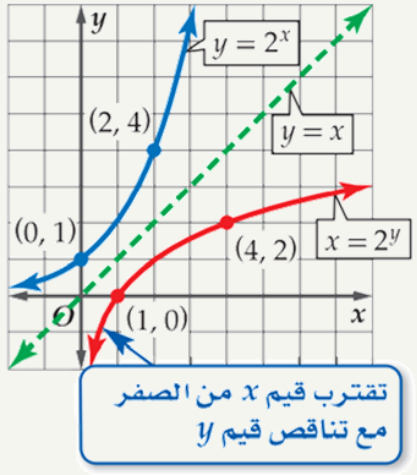
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال و العبارات اللوغاريتمية

الدوال والعبارات اللوغاريتمية : يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًّا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b .

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اللوغاريتم للأساس b

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad b^y = x$$

مثال:

$$\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$$

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

مثال ١

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

(a $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$

(b $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تنبيه!

أساس اللوغاريتم:

قد يختلط عليك معرفة أي الأعداد هو الأساس وأيها الأس في المعادلات اللوغاريتمية؛ لذا استعمل لونين مختلفين لكتابة كل منهما في أثناء الحل؛ لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

1A) $\log_4 16 = 2$

1B) $\log_3 729 = 6$

@A_Shark_s

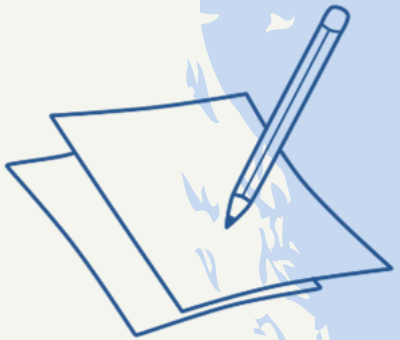
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

(1A $\log_4 16 = 2$

(1B $\log_3 729 = 6$



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

1) $\log_8 512 = 3$

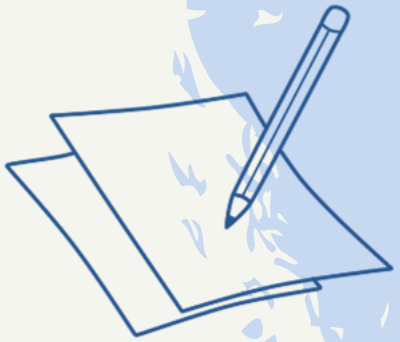
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

1) $\log_8 512 = 3$



@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

مثال ٢

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

(2A $4^3 = 64$

(2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$

@A_Shark_s

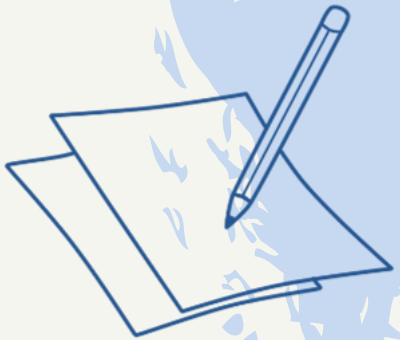
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

(2A $4^3 = 64$

(2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

9) $11^3 = 1331$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

9) $11^3 = 1331$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

مثال ٣

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$	بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y
$4 = 16^y$	تعريف اللوغاريتم
$4^1 = 4^{2y}$	$16 = 4^2$
$1 = 2y$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$\frac{1}{2} = y$	اقسم كلا الطرفين على 2

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$	بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y
$\frac{1}{49} = 7^y$	تعريف اللوغاريتم
$7^{-2} = 7^y$	$\frac{1}{49} = 7^{-2}$
$-2 = y$	خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

@A_Sharks

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$

@A_Shark_s

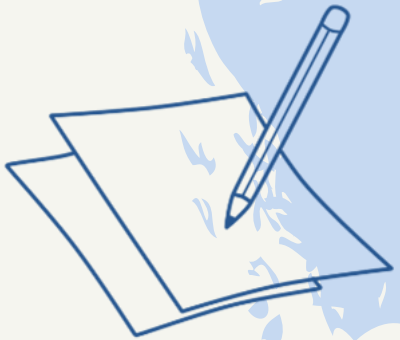
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

(3A $\log_3 81$

(3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:

- تذكّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٤

استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

(a $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $\quad 5^3 = 125$

$= 3$ $\quad \log_b b^x = x$

(b $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $\quad 0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ $\quad \log_b b^x = x$

(c $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ $\quad b^{\log_b x} = x$

(d $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$، فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

4A) $\log_9 81$

4B) $3^{\log_3 1}$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

(4A $\log_9 81$

(4B $3^{\log_3 1}$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

17) $\log_{13} 169$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

17 $\log_{13} 169$

@A_Shark_s

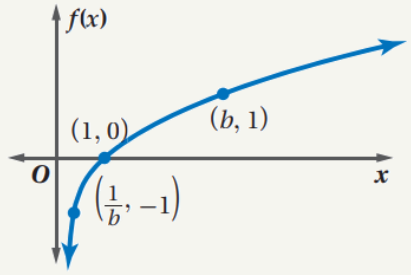
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

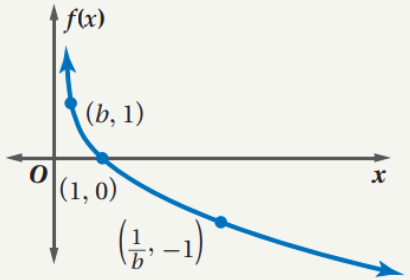
مفهوم أساسي

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$، حيث $b \neq 1$، وكل من العددين b , x موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x,\ b > 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
خط التقارب:	المحور y
مقطع المحور x:	1



الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x,\ 0 > b > 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متناقص
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
خط التقارب:	المحور y
مقطع المحور x:	1



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثال ٥

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

(a $f(x) = \log_5 x$

الخطوة 1: حدّد الأساس.

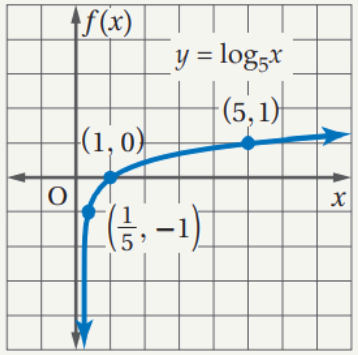
$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $\left(\frac{1}{5}, -1\right), (1, 0), (5, 1)$.



الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٥

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

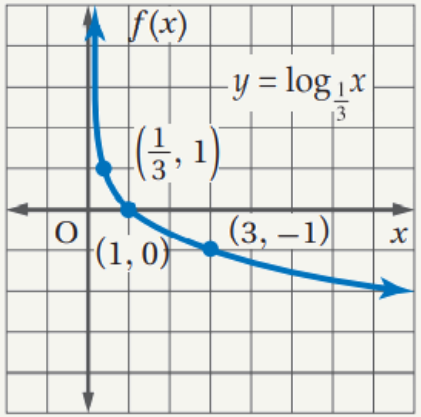
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $(3, -1)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

الخطوة 3: ارسم المنحنى.



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

5A $f(x) = \log_2 x$

5B $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

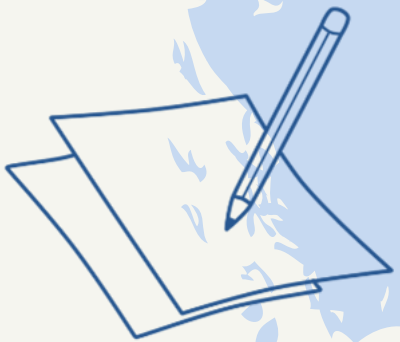
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

$f(x) = \log_2 x$ (**5A**



@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

(5B $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

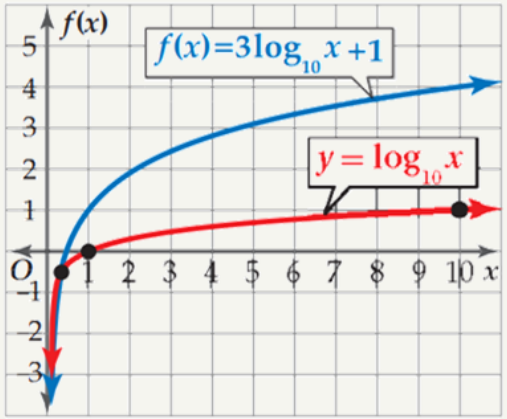
مثال ٦

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a $f(x) = 3\log_{10} x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10 > 1$ فاستعمل النقاط $(b\ ,\ 1)$, $(1\ ,\ 0)$, $(1\ ,\ -1)$, $(\frac{1}{b}\ ,\ -1)$، أي النقاط $(10\ ,\ 1)$, $(1\ ,\ 0)$, $(\frac{1}{10}\ ,\ -1)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.



إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

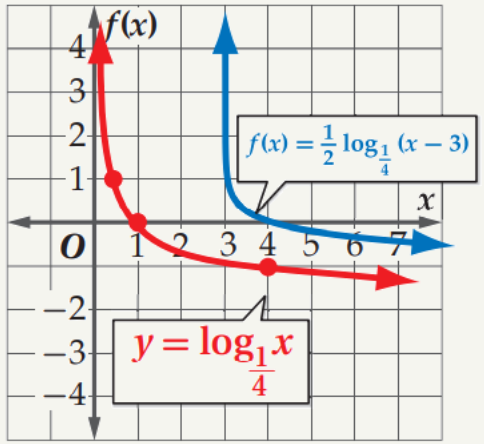
مثال ٦

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

b) $f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.



إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

6A) $f(x) = 2\log_3 (x - 2)$

6B) $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

(6A $f(x) = 2\log_3(x-2)$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

(6B $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

32 $f(x) = \log_3 x$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

(32 $f(x) = \log_3 x$

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

مثال ٧

هزات أرضية : يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$ ، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية	
$= 10^{9.2-1}$	عوّض 9.2 بدلاً من x	
$= 10^{8.2}$	بسّط	
$= 158489319.2$	استعمل الحاسبة	

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

مثال ٧

هزات أرضية : يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$ ، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	أضف العدد 1 لكلا الطرفين

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل التفكير العليا

53) تبرير: دون استعمال الآلة الحاسبة، بيِّن أي القيم التالية أكبر، وبرِّر إجابتك: $\log_7 51, \log_8 61, \log_9 71$

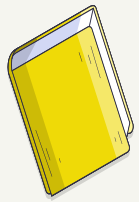
@A_Shark_s

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا



@A_Shark_s