2-3

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
Logarithms and Logarithmic Functions

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد الدالة العكسية لدالة. (الدرس 7-1)

والآن:

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثّل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

المفردات:

اللوغاريتم
logarithm

الدالة اللوغاريتمية
logarithmic function

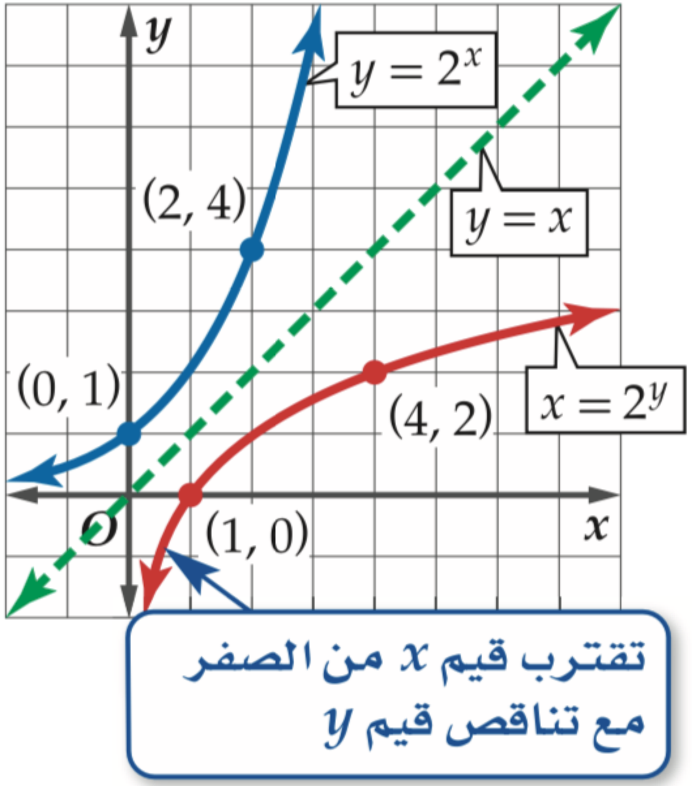
لماذا؟

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية: يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x ، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b .

مفهوم أساسي اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \leftrightarrow 3^y = 27$

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية .

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

تنبيه!

أساس اللوغاريتم:
قد يختلط عليك معرفة أي الأعداد هو الأساس وأيها الأس في المعادلات اللوغاريتمية؛ لذا استعمل لونين مختلفين لكتابة كل منهما في أثناء الحل؛ لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

تحقق من فهمك

$\log_4 16 = 2$ (1A

$\log_3 729 = 6$ (1B

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات أيضًا لكتابة المعادلات الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a) $15^3 = 3375$

b) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

تحقق من فهمك

2A) $4^3 = 64$

2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية.

مثال 3 إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي — الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:

- تذكّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

مثال 4 استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

b) $\log_{10} 0.001$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

d) $\log_{10}(-5)$

تحقق من فهمك

4A) $\log_9 81$

4B) $3^{\log_3 1}$

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا : تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ ، وكل من العددين b , x موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة (الأم) : $f(x) = \log_b x,\ b > 1$

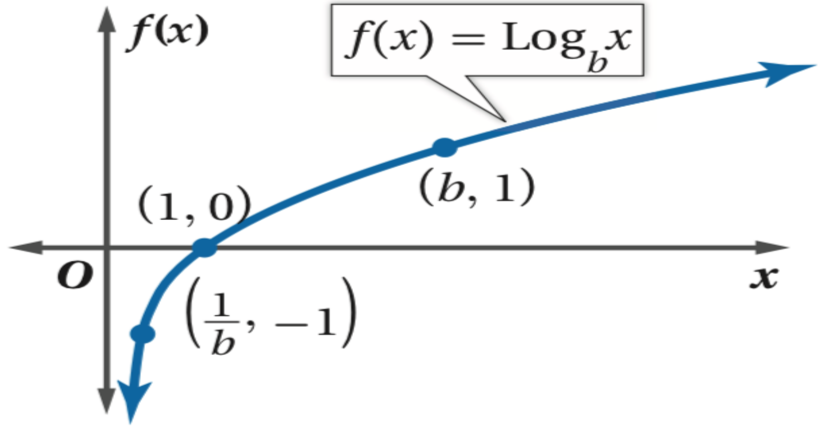
خصائص منحنى الدالة : متصل، متباين، متزايد

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

خط التقارب : المحور y

مقطع المحور x : 1



الدالة الرئيسة (الأم) : $f(x) = \log_b x,\ 0 < b < 1$

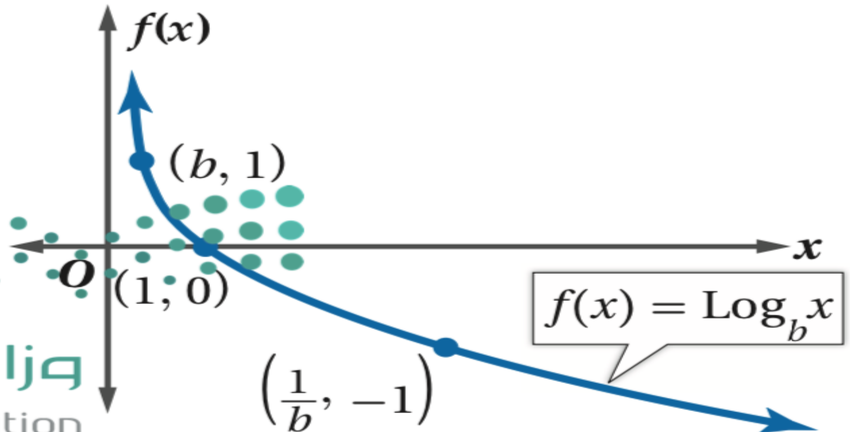
خصائص منحنى الدالة : متصل، متباين، متناقص

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

خط التقارب : المحور y

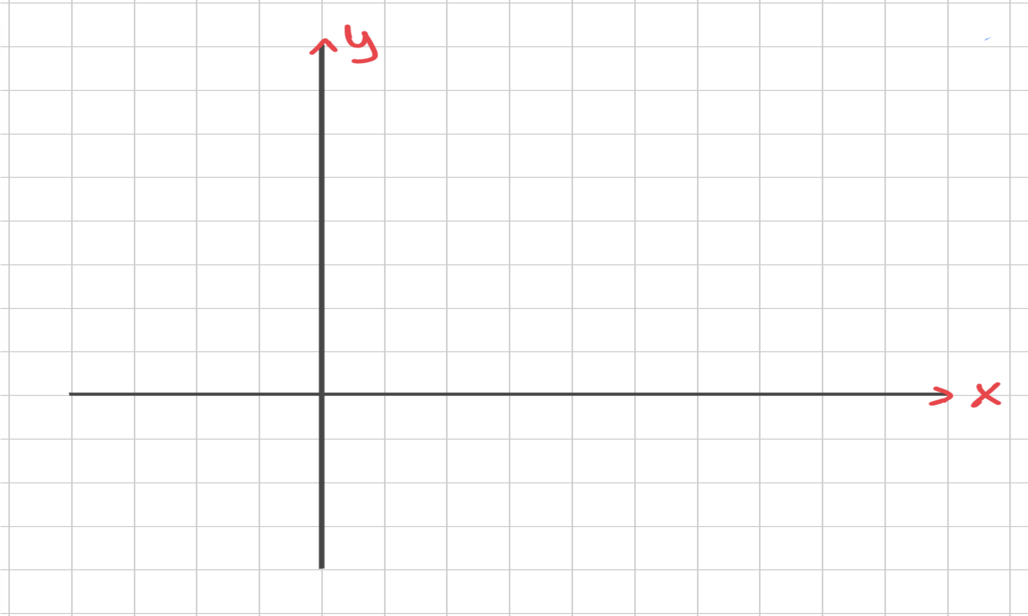
مقطع المحور x : 1



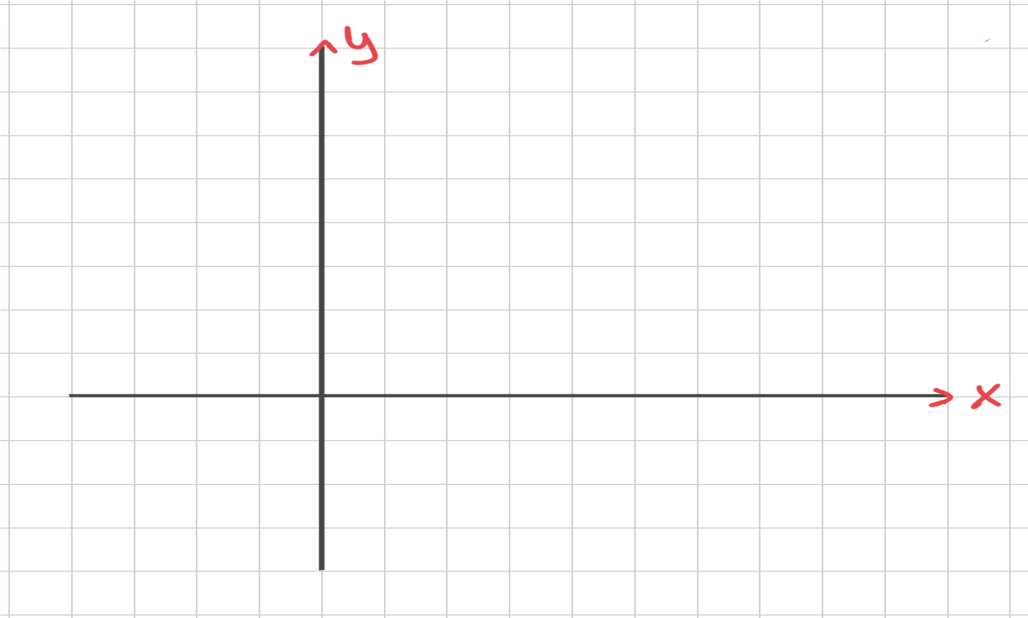
مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a) $f(x) = \log_5 x$

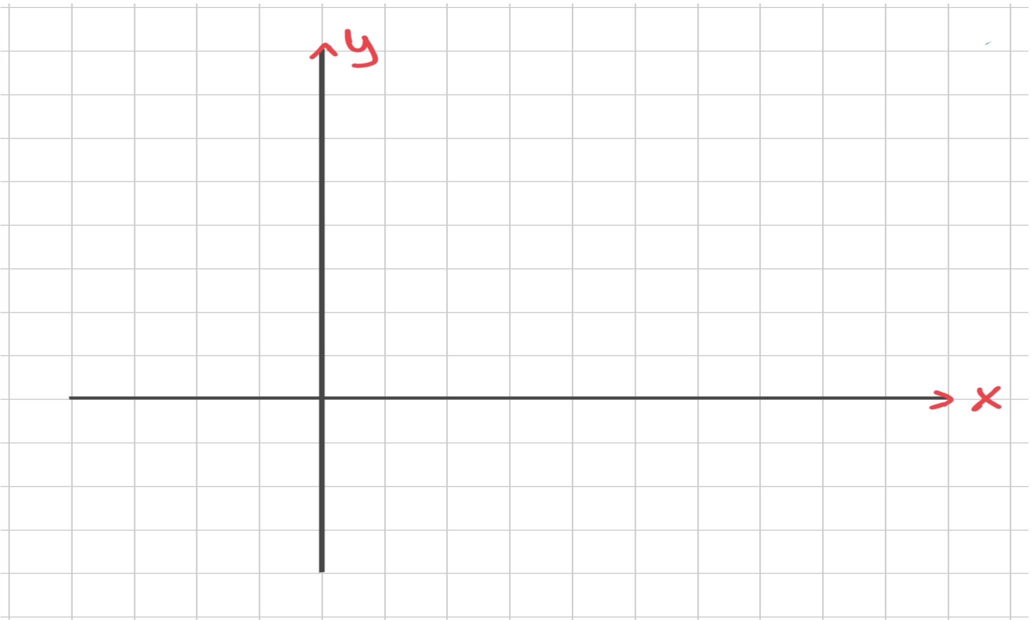


b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

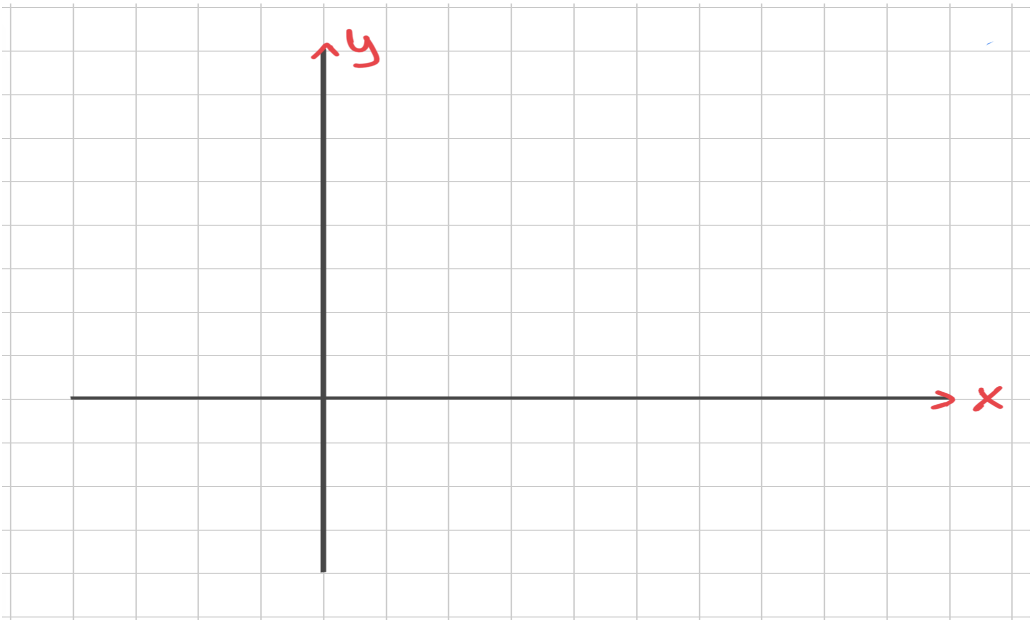


تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \log_2 x$



5B) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

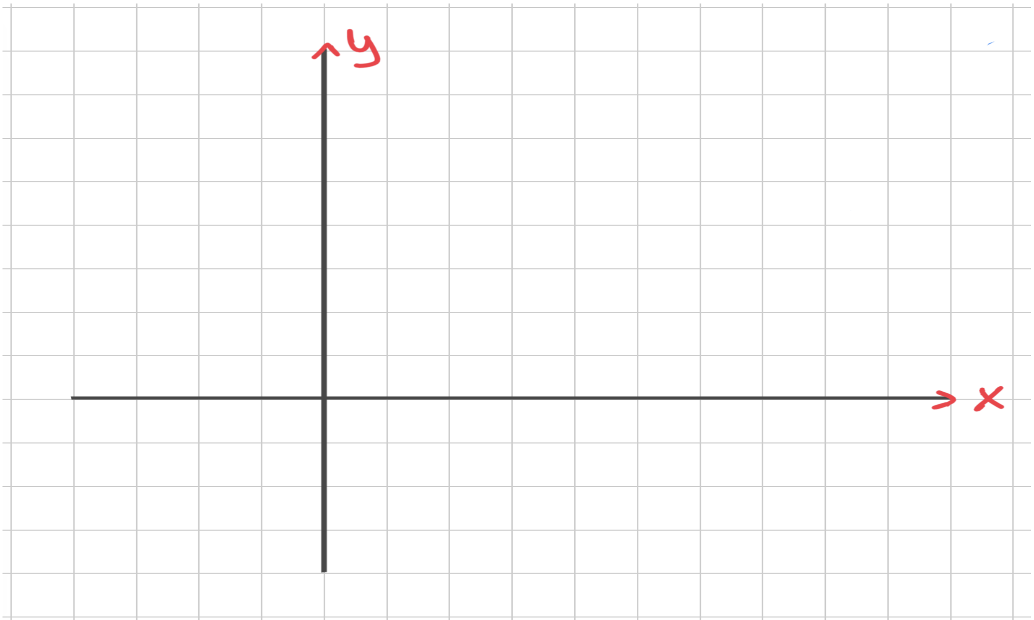


وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

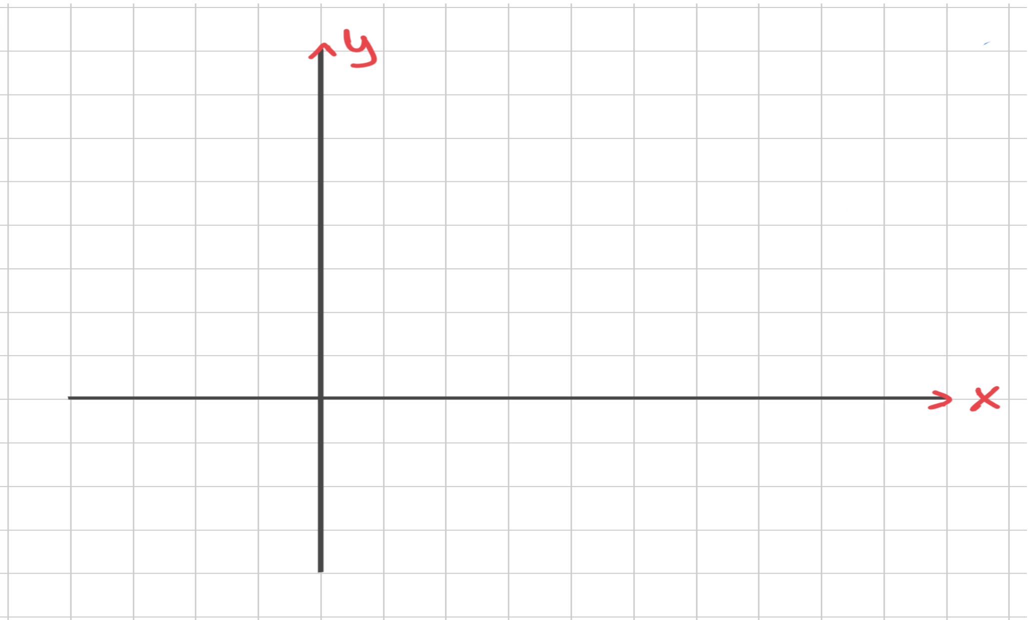
مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a) $f(x) = 3\log_{10} x + 1$



b) $f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$



إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

مثال 7 من واقع الحياة — إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.