اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

فيما سبق:

درستُ إيجاد الدالة العكسية لدالة. (الدرس 7–1)

والآن:

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثّل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.

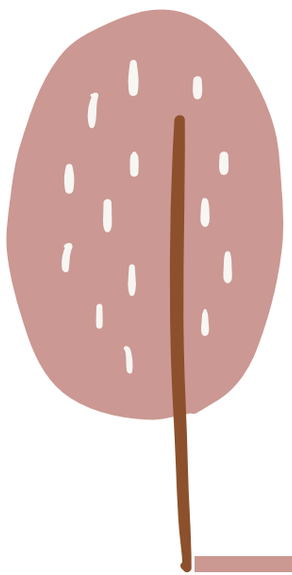
المفردات:

اللوغاريتم

logarithm

الدالة اللوغاريتمية

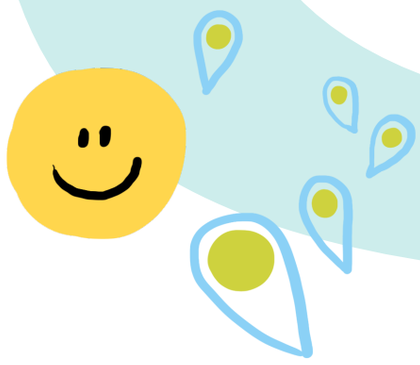
logarithmic function

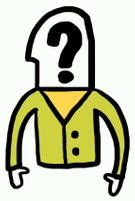


قدرات

اذا كان مع خالد ٣ امثال ما مع أحمد وكان مع أحمد ٦٠٠ ريال فما مجموع ما معهما

٩٠٠ ١٢٠٠ ١٨٠٠ ٢٤٠٠





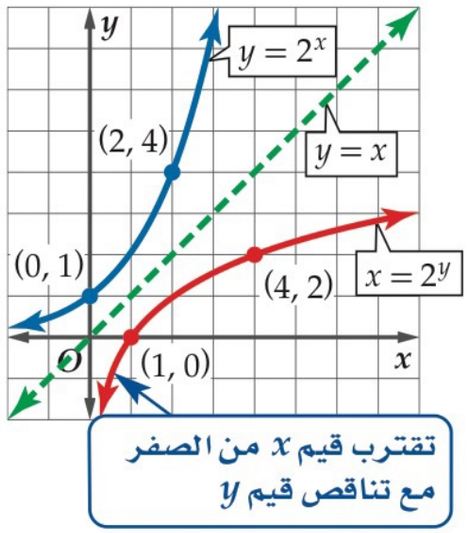
لماذا

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية: يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًّا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b.

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

مفهوم أساسي

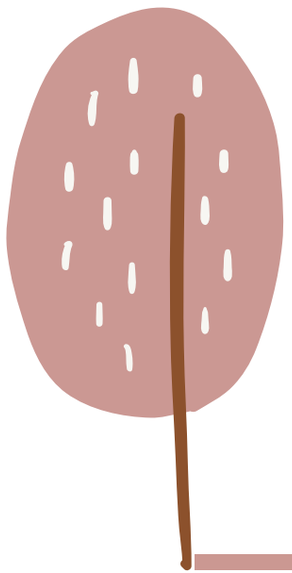
اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$



مثال

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

$\log_b x = y$

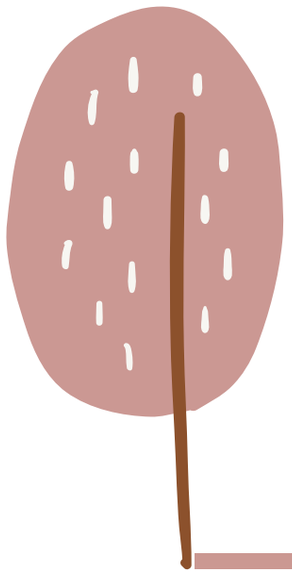
$b^y = x$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

تحقق من فهمك

$\log_4 16 = 2$ (**1A**

$\log_3 729 = 6$ (**1B**



التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

مثال

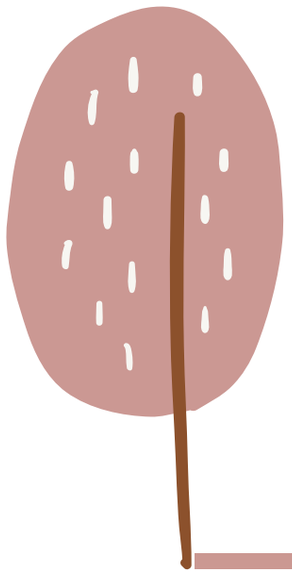
اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a) $15^3 = 3375$ **b)** $4^{\frac{1}{2}} = 2$

تحقق من فهمك

$4^3 = 64$ (**2A**

$125^{\frac{1}{3}} = 5$ (**2B**



إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

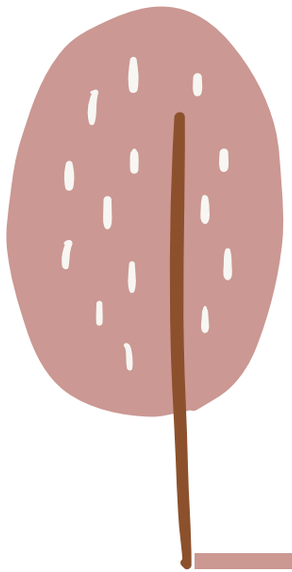
a) $\log_{16} 4$

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$



إرشادات للدراسة

الأس الصفري:

- تذكّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

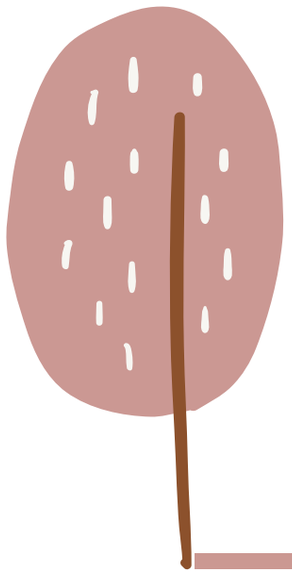
الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$



استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

مثال

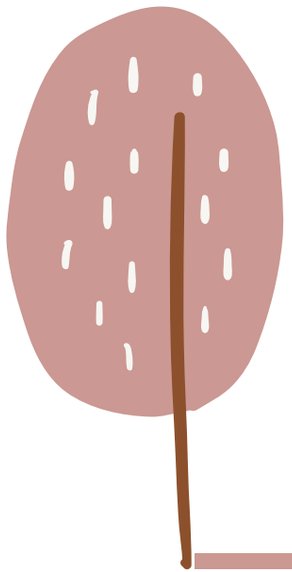
دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

b) $\log_{10} 0.001$ **d)** $\log_{10}(-5)$

تحقق من فهمك

4A) $\log_9 81$

4B) $3^{\log_3 1}$

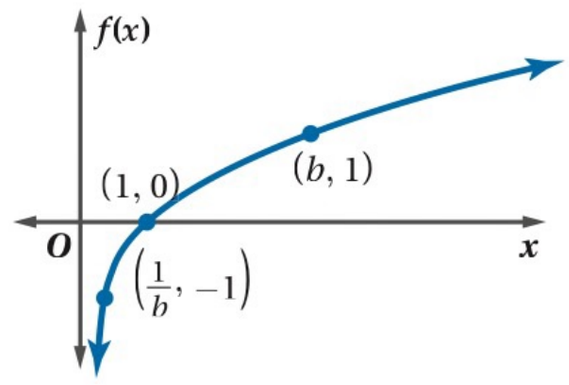


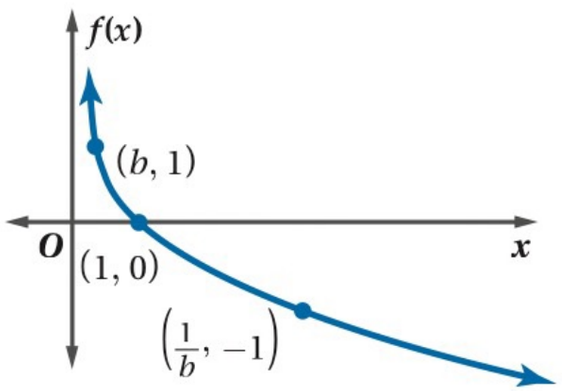
تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$، حيث $b \neq 1$، وكل من العددين b , x موجبًا دالة لوغاريتمية. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x,\ b > 1$	الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x,\ 0 > b > 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد	خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متناقص
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)	المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)	المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
خط التقارب:	المحور y	خط التقارب:	المحور y
مقطع المحور x:	1	مقطع المحور x:	1





$$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$$

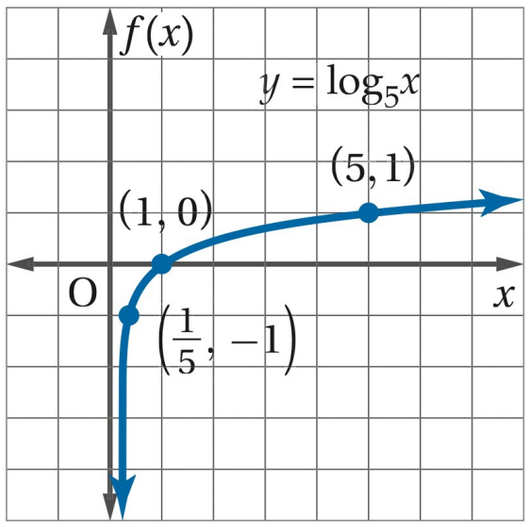
تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثال

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

$f(x) = \log_5 x$ (a

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

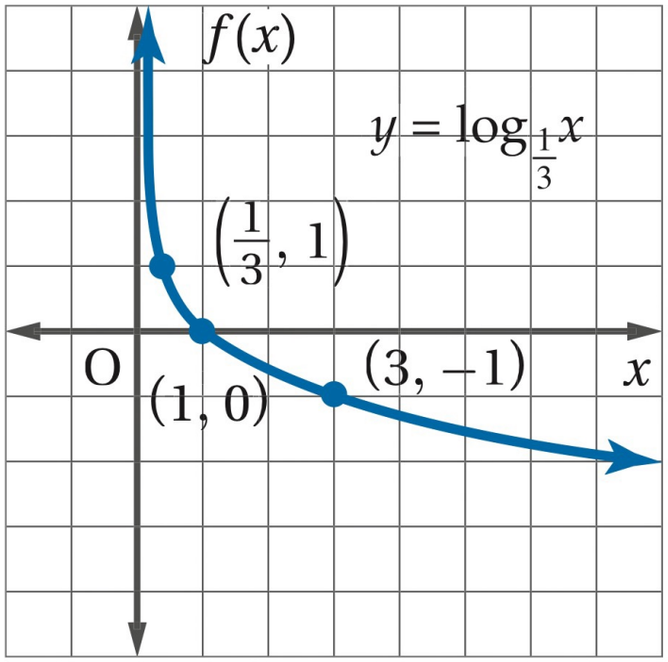


تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثال

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

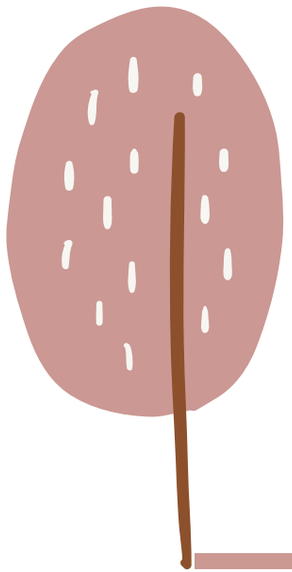
$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (b



تحقق من فهمك

(5A $f(x) = \log_2 x$

(5B $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

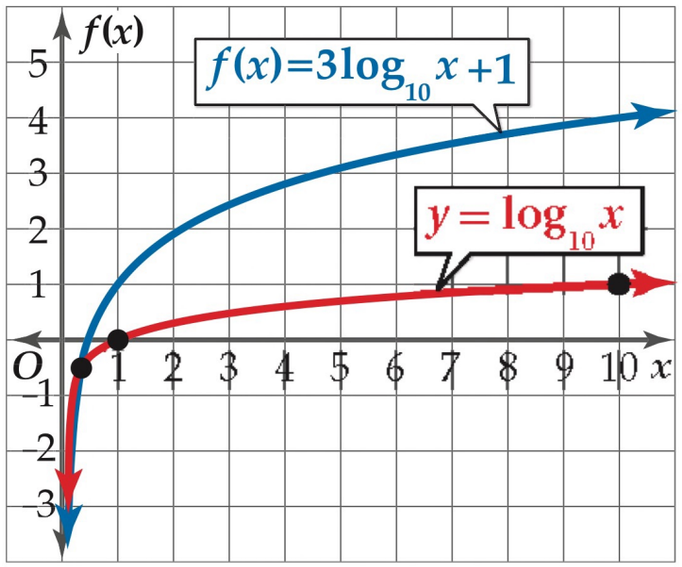


مثال

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a) $f(x) = 3\log_{10} x + 1$



إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

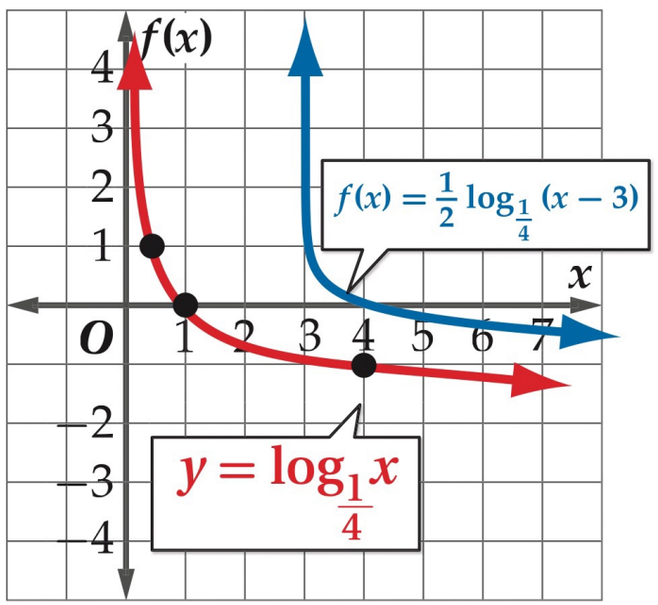
لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثال

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

b $f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

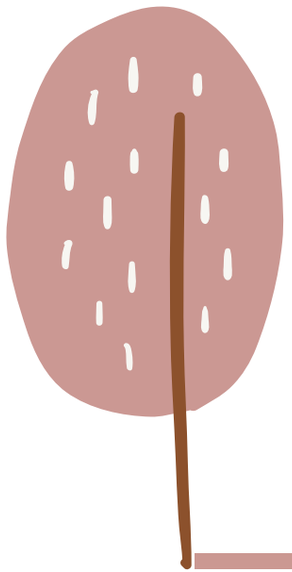


تحقق من فهمك

$f(x) = 2 \log_3 (x - 2)$ (**6A**

تحقق من فهمك

$f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$ (**6B**



إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

مثال

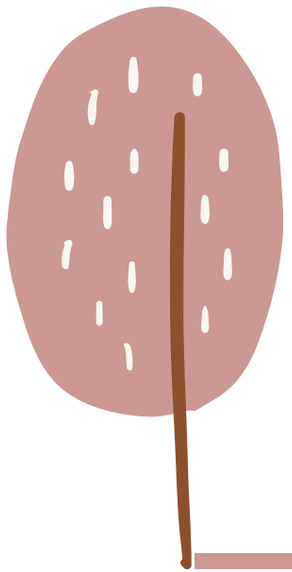
هزات أرضية : يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$ ، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

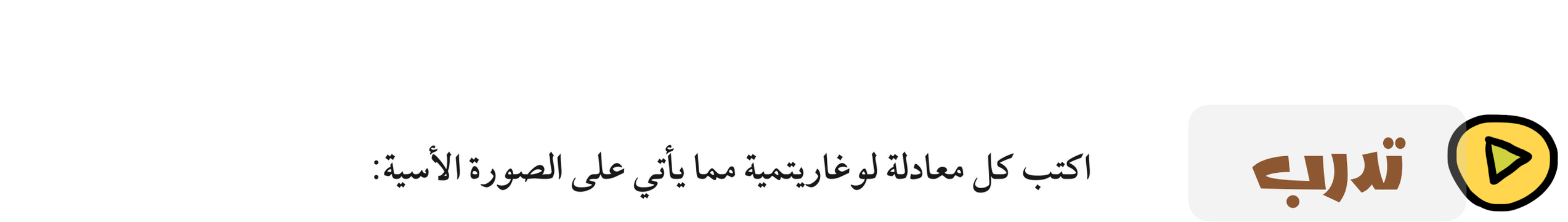
a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

b) أوجد معادلة على الصورة $y = \log_{10} x + c$ للدالة العكسية.

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.





اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

1) $\log_8 512 = 3$

2) $\log_5 625 = 4$

تدرب

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

9) $11^3 = 1331$

10) $16^{\frac{3}{4}} = 8$

تدرب

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلَّ مما يأتي

17) $\log_{13} 169$

18) $\log_2 \frac{1}{128}$

19) $\log_6 1$

تدرب

52) اكتشف الخطأ: أوجدت كل من مها ومريم قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$، أيٌّ منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

مها	مريم
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$ $(\frac{1}{7})^y = 49$ $(7^{-1})^y = 7^2$ $(7)^{-y} = 7^2$ $y = -2$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$ $49^y = \frac{1}{7}$ $(7^2)^y = (7)^{-1}$ $7^{2y} = (7)^{-1}$ $2y = -1$ $y = -\frac{1}{2}$

تدرب

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 2

70) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟

A 5 **B** $\frac{1}{5}$ **C** $-\frac{1}{5}$ **D** -5

71) ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$؟

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

تحصيلي

منحنى الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_b x$ يقطع محور x في النقطة ..

Ⓐ $(0,0)$

Ⓑ $(0,1)$

Ⓒ $(1,1)$

Ⓓ $(1,0)$

تحصيلي

ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_2(x+1) + 3$ ؟

A) 3

B) 2

C) 1

D) 0

تحصيلي

الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ للدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_4(x+1)$ تساوي ..

Ⓐ $4^x - 1$

Ⓑ $4^x + 1$

Ⓒ $x^4 - 1$

Ⓓ $x^4 + 1$