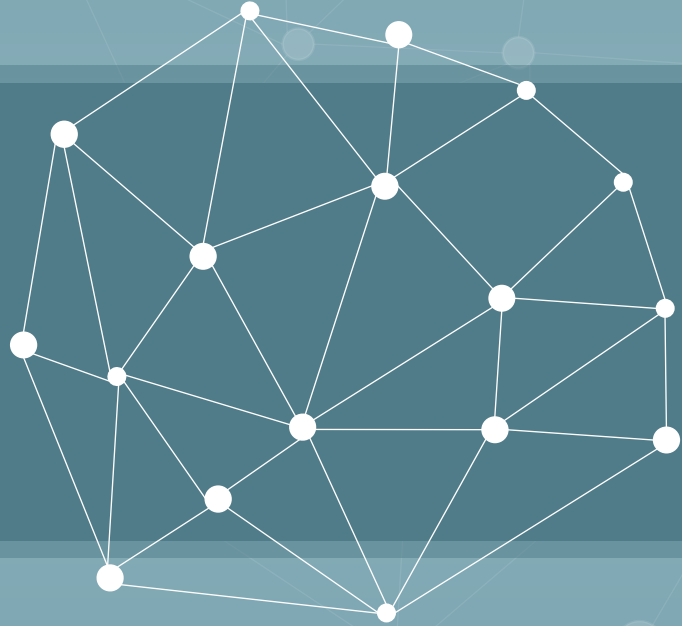
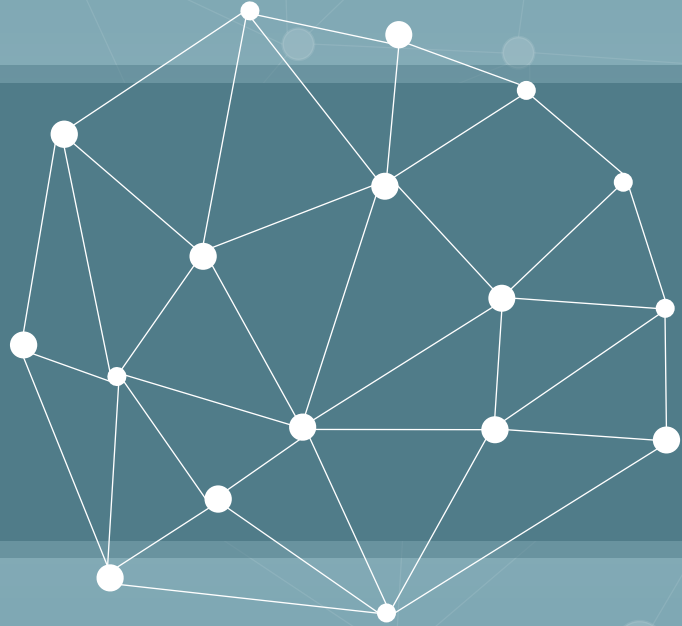


# خِصَائِصُ اللُّوْغَارِ يَتِمَات

أُسْتَاذَةٌ: شَوْقُ السَّحِيمِي



اجيب من الدرس السابق



أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$\log_8 512 \quad \mathbf{(a)}$$

$$22^{\log_{22} 15.2} \quad \mathbf{(b)}$$



## والآن:

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

## فيما سبق:

درست إيجاد قيم عبارات  
لوغاريتمية . (الدرس 3-2)

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8



## لماذا؟

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدرج pH لقياس درجة الحموضة أو

القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعدية. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7

للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني ( $H^+$ ) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي. لأن  $pH = -\log_{10} [H^+]$ ، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$\log_{10} [H^+]_{\text{القهوة}} + \log_{10} [H^+]_{\text{الماء النقي}} = -\log_{10} [H^+]_{\text{القهوة}} - pH_{\text{الماء النقي}} \text{ والتي تكتب بالشكل:}$$

$$\log_{10} \frac{[H^+]_{\text{القهوة}}}{[H^+]_{\text{الماء النقي}}} = pH_{\text{الماء النقي}} - pH_{\text{القهوة}}, \text{ وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي}$$

ستعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{[H^+]_{\text{القهوة}}}{[H^+]_{\text{الماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

**خصائص اللوغاريتمات:** تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

## مفهوم أساسي

### خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي: إذا كان  $b$  عددًا موجبًا حيث  $b \neq 1$ ، فإن  $\log_b x = \log_b y$  إذا وفقط إذا كان  $x = y$ .

مثال: إذا كان  $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن  $x = 8$ ، وإذا كان  $x = 8$  فإن  $\log_5 x = \log_5 8$ .

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

## مفهوم أساسي

### خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت  $x, y, b$  أعداداً حقيقية موجبة، حيث  $b \neq 1$  فإن:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

مثال:  $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن  $b^m = x$  و  $b^n = y$  وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن  $m = \log_b x$ ،  $n = \log_b y$ .

عوض

$$b^m b^n = xy$$

خاصية ضرب القوى

$$b^{m+n} = xy$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$m + n = \log_b xy$$

عوض عن  $m, n$  بالقيمتين  $\log_b x, \log_b y$  على الترتيب

$$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$$

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

## مثال 1

### استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل  $\log_4 3 \approx 0.7925$  لتقريب قيمة  $\log_4 192$ .

$$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3 \quad \log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_4 4^3 + \log_4 3$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$= 3 + \log_4 3$$

$$\log_4 3 \approx 0.7925$$

$$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$$



## مثال 1

### استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل  $\log_4 3 \approx 0.7925$  لتقريب قيمة  $\log_4 192$ .

$$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3 \quad \log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_4 4^3 + \log_4 3$$

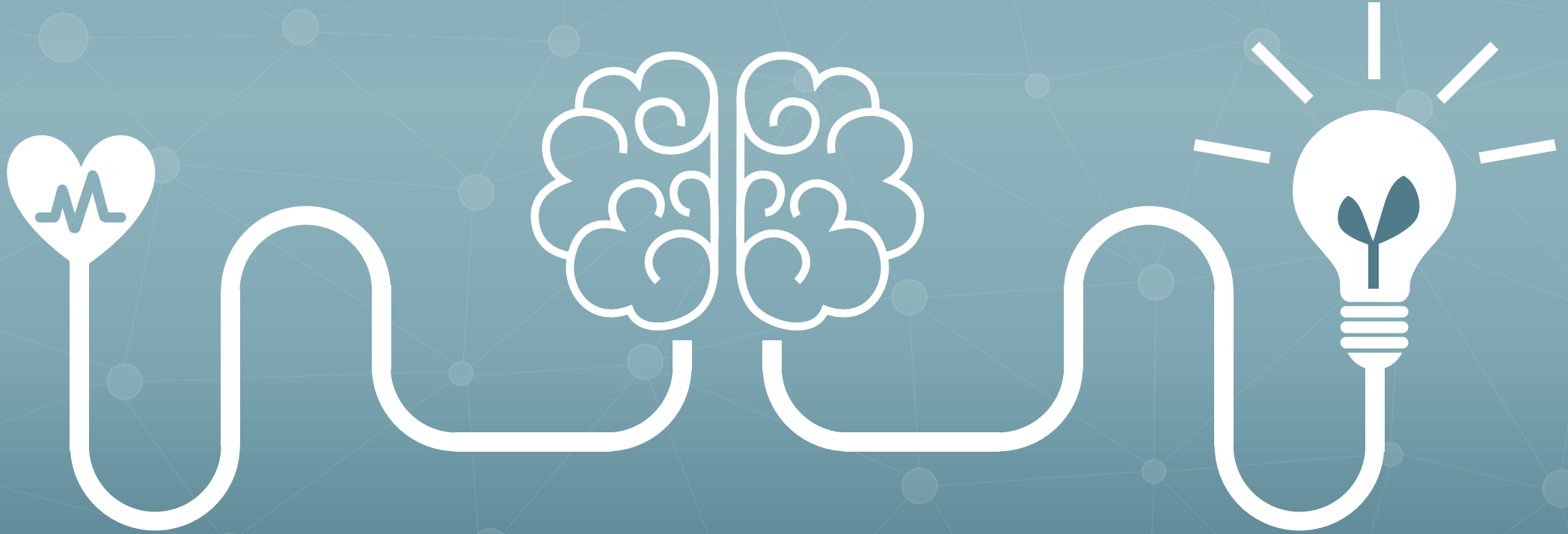
الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$= 3 + \log_4 3$$

$$\log_4 3 \approx 0.7925$$

$$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$$

تُحَقِّقُ مِنْ فَهْمِكَ



تحقق من فهمك



1) استعمل  $\log_4 2 = 0.5$  لإيجاد قيمة  $\log_4 32$ . 2.5

الحل:

## إرشادات للدراسة

### التحقق من الإجابة

يمكنك التحقق من إجابة  
مثال 4 بإيجاد قيمة  $2^{4.6438}$   
مستعملاً الحاسبة والإجابة  
التي ستحصل عليها هي  
25 تقريباً، ولكون  
 $\log_2 25 \approx 4.6438$   
فهذا يعني أن  $25 \approx 2^{4.6438}$ .

## استعمال خاصية لوغاريتم القوة

## مثال 4

إذا كان  $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرب قيمة  $\log_2 25$

$$5^2 = 25 \quad \log_2 25 = \log_2 5^2$$

$$\text{خاصية لوغاريتم القوة} \quad = 2 \log_2 5$$

$$\log_2 5 = 2.3219 \quad \approx 2(2.3219) \approx 4.6438$$

تذكر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.  
افترض أن  $b^m = x, b^n = y$  إذن  $\log_b x = m, \log_b y = n$

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$$

$$b^{m-n} = \frac{x}{y}$$

خاصية قسمة القوى

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$m-n = \log_b \frac{x}{y}$$

عوض عن  $m, n$  بالقيمتين  $\log_b x, \log_b y$  على الترتيب

$$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$$

## مفهوم أساسي

### خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحاً منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت  $x, y, b$  أعداداً حقيقية موجبة، حيث  $b \neq 1$  فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$$

مثال:

## مثال 2

### استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل  $\log_6 5 \approx 0.8982$  لتقريب قيمة  $\log_6 7.2$ .

$$7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5} \quad \log_6 7.2 = \log_6 \left( \frac{36}{5} \right)$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_6 6^2 - \log_6 5$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$= 2 - 0.8982$$

$$\log_6 5 \approx 0.8982$$

$$= 1.1018$$



تُحَقِّقُ مِنْ فَهْمِكَ



تحقق من فهمك



(1) استعمال  $\log_3 2 \approx 0.63$ ؛ لتقريب قيمة  $\log_3 4.5$  . **1.37** تقريباً

الحل:

تذكر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

## مفهوم أساسي

### خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي  $m$ ، وأي عددين موجبين  $x, b$ ، حيث  $b \neq 1$ ، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال:  $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في السؤال 48

يمكنك التحقق من إجابة  
مثال 4 بإيجاد قيمة  $2^{4.6438}$   
مستعملاً الحاسبة والإجابة  
التي ستحصل عليها هي  
25 تقريباً، ولكون  
 $\log_2 25 \approx 4.6438$   
فهذا يعني أن  $25 \approx 2^{4.6438}$ .

## مثال 4

## استعمال خاصية لوغاريتم القوة

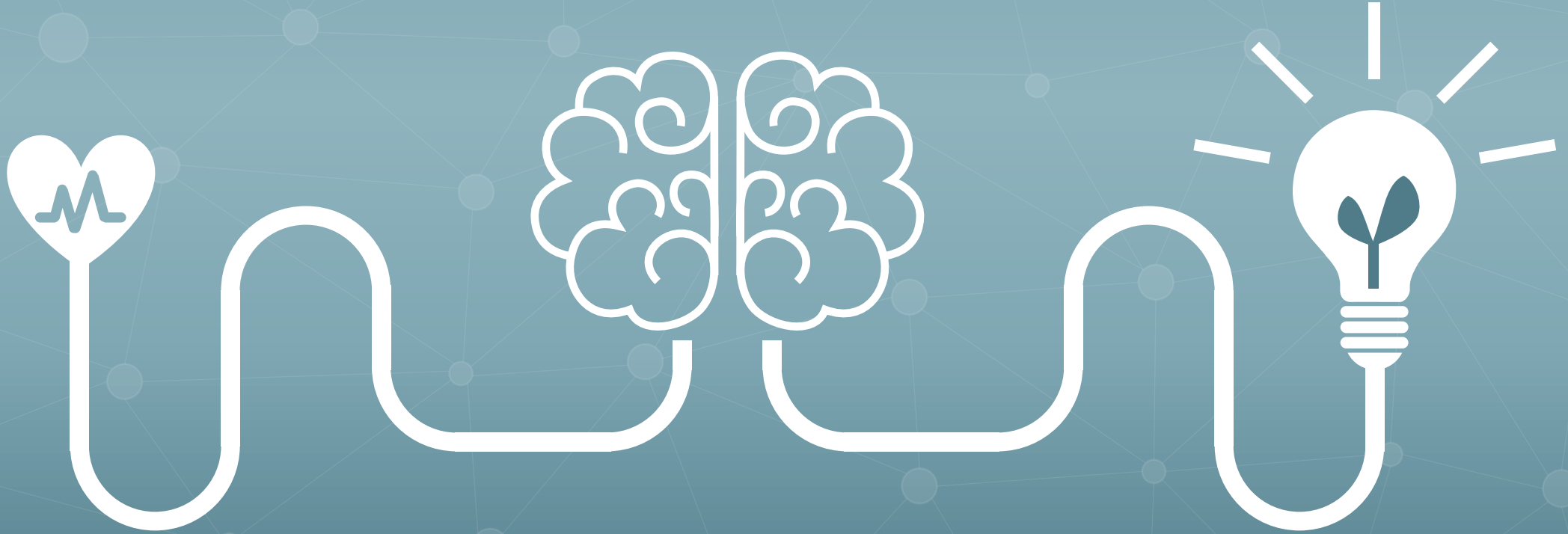
إذا كان  $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرب قيمة  $\log_2 25$

$$5^2 = 25 \quad \log_2 25 = \log_2 5^2$$

$$\text{خاصية لوغاريتم القوة} \quad = 2 \log_2 5$$

$$\log_2 5 = 2.3219 \quad \approx 2(2.3219) \approx 4.6438$$

تُحَقِّقُ مِنْ فَهْمِكَ



تحقق من فهمك



(4) إذا كان  $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرب قيمة  $\log_3 49$  . **3.5424** تقريباً

الحل:



يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لتبسيط العبارات اللوغاريتمية.

## تبسيط العبارات اللوغاريتمية

### مثال 5

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة  $\log_4 \sqrt[5]{64}$ .

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن  $\sqrt[5]{64}$  على صورة قوة 4.

$$\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$$

$$4^3 = 64$$

خاصية قوة القوة

خاصية لوغاريتم القوة

$$\log_b b = 1$$

$$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$$

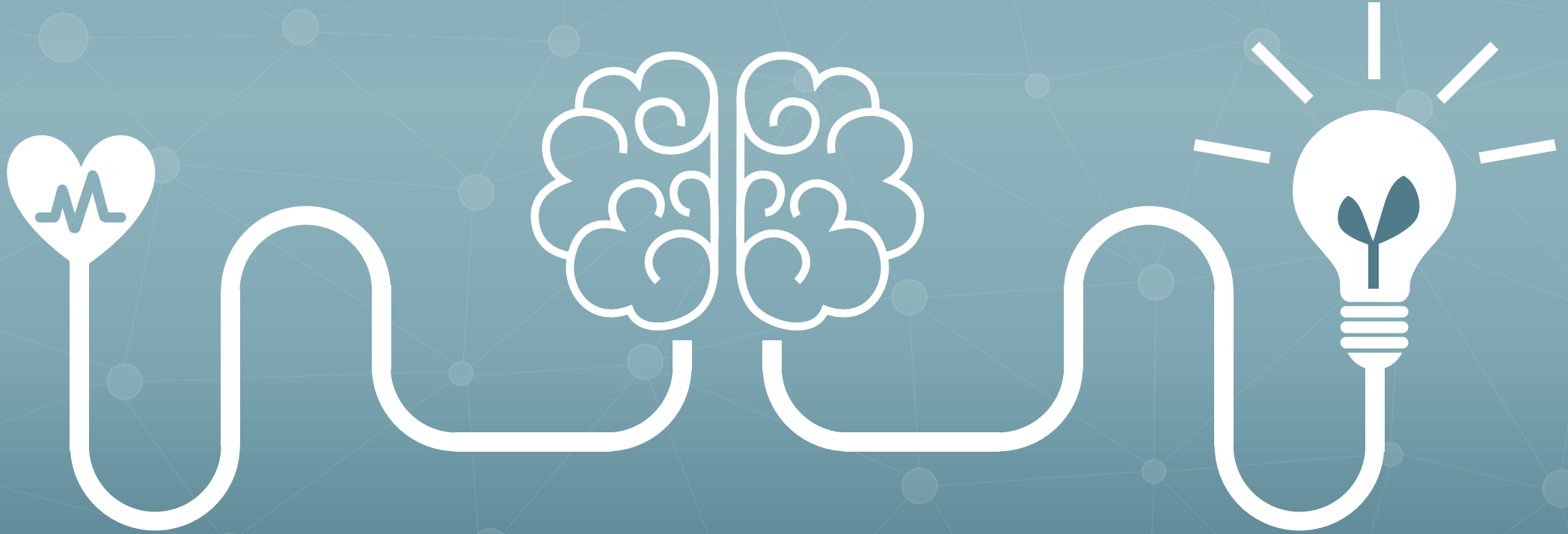
$$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{3}{5} \log_4 4$$

$$= \frac{3}{5} (1) = \frac{3}{5}$$

تُحَقِّقُ مِنْ فَهْمِكَ



تحقق من فهمك



$$\frac{2}{3} \log_6 \sqrt[3]{36} \quad (5A)$$

الحل:

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

$$\log_2 12x^5y^{-2} \quad (\text{a})$$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب  $12, x^5, y^{-2}$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

خاصية لوغاريتم القوة

$$\begin{aligned} \log_2 12x^5y^{-2} &= \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2} \\ &= \log_2 12 + 5 \log_2 x - 2 \log_2 y \end{aligned}$$

$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} \quad (\text{b})$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

خاصية لوغاريتم القوة

$$\begin{aligned} \log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} &= \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2} \\ &= 2 \log_2 a - 3 \log_2 b - 2 \log_2 c \end{aligned}$$

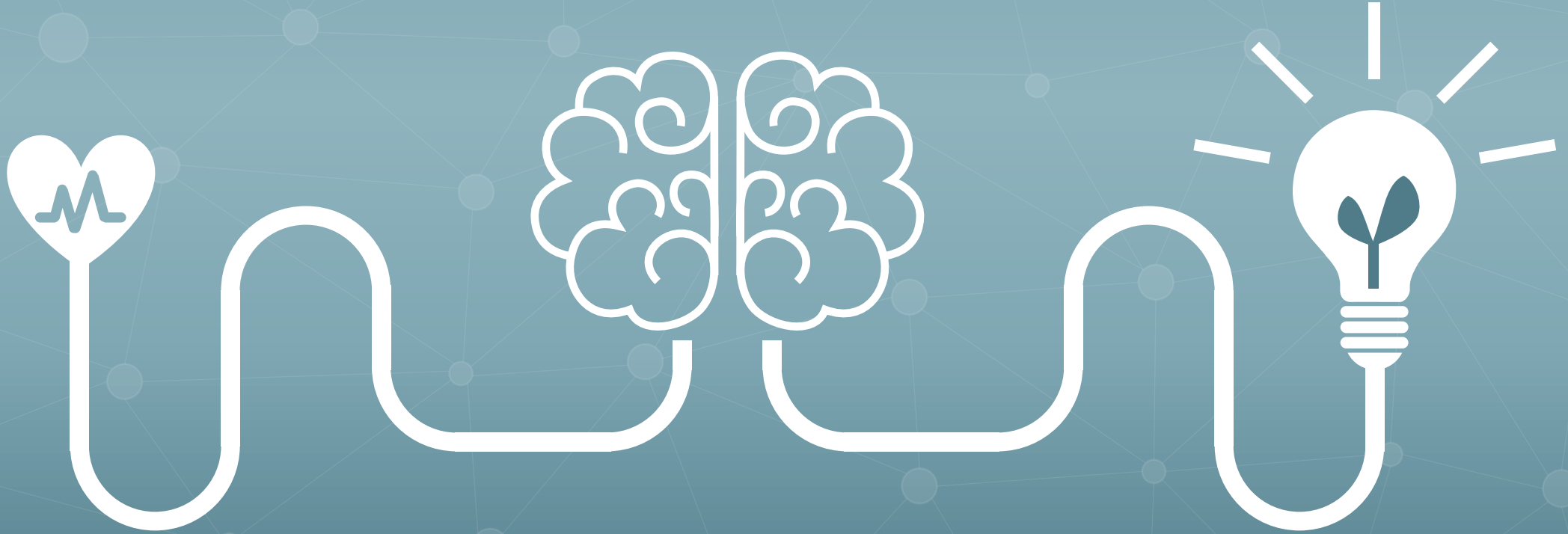
$$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} \quad (\text{c})$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

خاصية لوغاريتم القوة

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} &= \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x} \\ &= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

تُحَقِّقُ مِنْ فَهْمِكَ



$$\log_{13} 6a^3bc^4 \quad (6A)$$

الحل:



## تنبيه!

لوغاريتم المجموع  
لوغاريتم المجموع أو  
الفرق لا يساوي مجموع  
أو فرق اللوغاريتمات ،  
 $\log_a (x \pm 4) \neq$   
 $\log_a x \pm \log_a 4.$

### مثال 7

### كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$$4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x + 6) \quad (a)$$

خاصية لوغاريتم القوة  
 $(x + 6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x + 6}$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

بإنطاق المقام

$$\begin{aligned} 4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x + 6) &= \log_3 x^4 - \log_3 (x + 6)^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x + 6} \\ &= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x + 6}} \\ &= \log_3 \frac{x^4 \sqrt[3]{(x + 6)^2}}{x + 6} \end{aligned}$$

$$0.5 \log_7 (x + 2) + 6 \log_7 2x \quad (b)$$

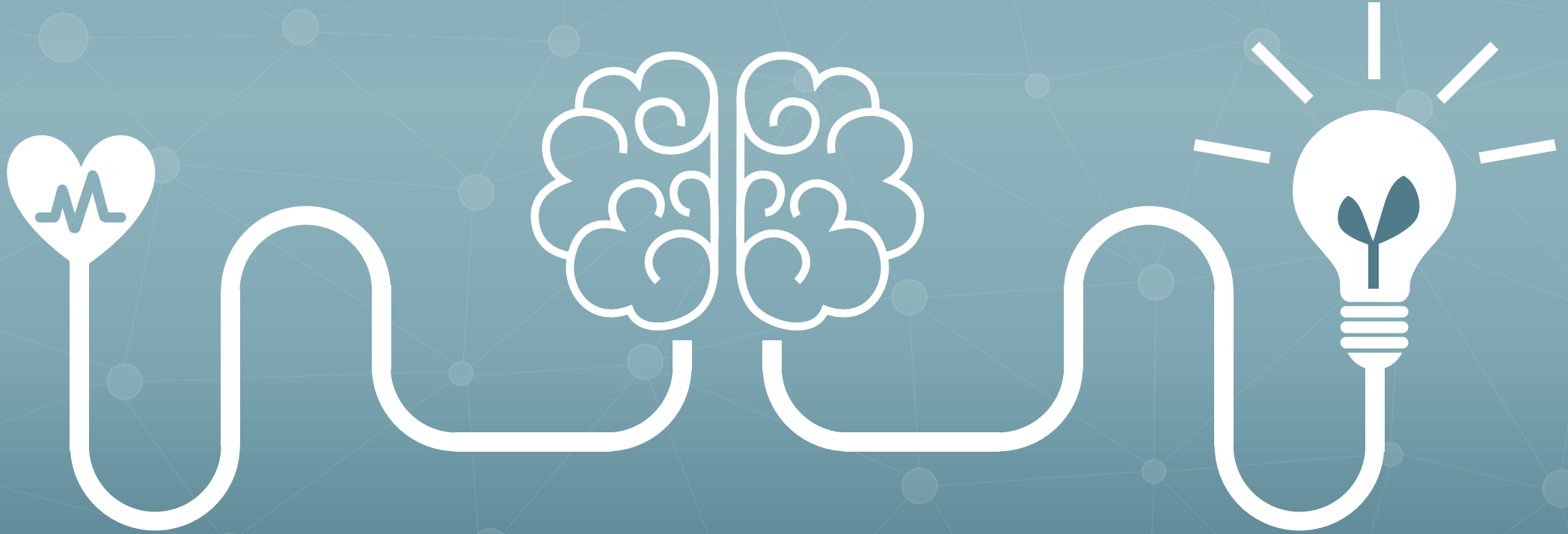
خاصية لوغاريتم القوة

$(x + 2)^{0.5} = \sqrt{x + 2}, 2^6 = 64$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$\begin{aligned} 0.5 \log_7 (x + 2) + 6 \log_7 2x &= \log_7 (x + 2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6 \\ &= \log_7 \sqrt{x + 2} + \log_7 64 x^6 \\ &= \log_7 64 x^6 \sqrt{x + 2} \end{aligned}$$

تُحَقِّقُ مِنْ فَهْمِكَ



$$\log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$$

$$-5 \log_2 (x+1) + 3 \log_2 (6x) \quad (7A)$$

تحقق من فهمك



الحل:



انتهى الدرس