أستاذة: شوق السحيمي

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

$\log_3 25a^{-4} b^6$ (a

$\log_7 7^6 x^3 y^{-2}$ (b

اجيبِ من الدرس السابق

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 2-4)

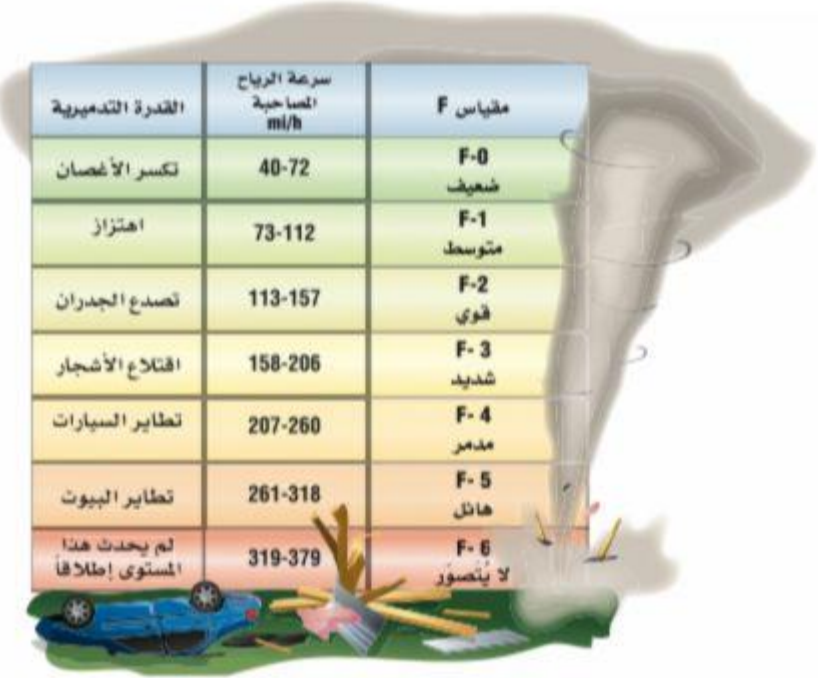
والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنِّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من $F-0$ إلى $F-6$ بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وطول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة $F-6$ هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.



مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F-3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F-4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F-5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F-6 لا يُتصوَّر	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً

حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3 = 216$	خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ216 في المعادلة الأصلية .

$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	عوّض 216 بدلًا من x
$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	حلّل
$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	خاصيتا ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة
$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	بسّط
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓	الحل صحيح

تحقق من فهمك

1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

تحقق

من

فهمك

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x - 9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x - 9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين
$(x - 12)(x + 3) = 0$	حلّل
$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -3$ $x = 12$	حُل كل معادلة

التحقق: $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تحقق من فهمك

3A) $2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

تحقق
من
فهمك

حل المتباينات اللوغاريتمية: **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي
خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$ ، $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

إذا كان $b > 1$ و $\log_b x < y$ ، فإن $x < b^y$

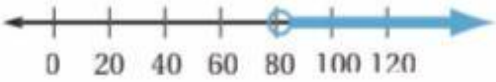
تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين ≤ ، ≥

مثال 4 حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

حُلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 x > 4$	المتباينة الأساسية
$x > 3^4$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x > 81$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 81 \, , \, x \in R\}$



التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$x = 9$	$x = 243$
$\log_3 9 \overset{?}{>} 4$	$\log_3 243 \overset{?}{>} 4$
$2 > 4$ ✗	$5 > 4$ ✓

إذن الحل صحيح.

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية: عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرّفًا.

تحقق من فهمك

حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A) $\log_4 x > 3$

تحقق من فهمك

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلِّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مثال 5 حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

حل المتباينة $\log_4 (x+3) > \log_4 (2x+1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_4 (x+3) > \log_4 (2x+1)$ المتباينة الأساسية

$x + 3 > 2x + 1$ خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$2 > x$ اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \le 0$ أو $2x + 1 \le 0$ ($x \le -3$ أو $x \le -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2 \,,\, x \in R\right\}$.

التحقق: عوّض بعدد يقع بين $2 \,,\, -\frac{1}{2}$ ، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2} ، 2)$.

$x = 1$

$\log_4 (1+3) \overset{?}{>} \log_4 (2+1)$

$\log_4 4 \overset{?}{>} \log_4 3$

$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓ الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$x = 3$

$\log_4 (3+3) \overset{?}{>} \log_4 (2\times3+1)$

$\log_4 6 \overset{?}{>} \log_4 7$

$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗ الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

5) حل المتباينة $\log_5 (x + 4) \leq \log_5 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

تحقق من فهمك

انتهى الدرس