اللوغاريتمات العشرية

فيما سبق:

درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

(الدروس من 3–2 إلى 5–2)

والآن:

- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

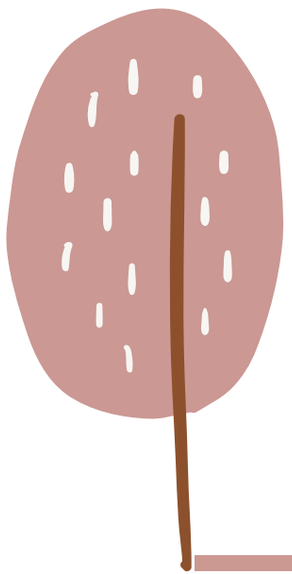
المفردات:

اللوغاريتم العشري

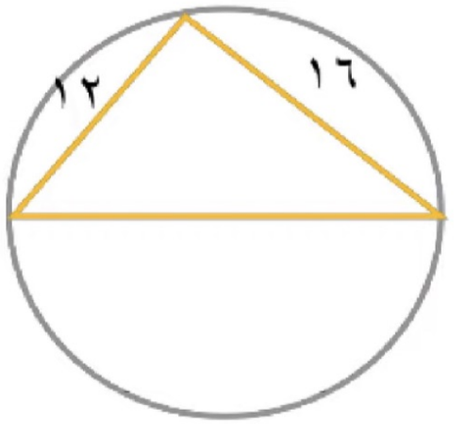
common logarithm

صيغة تغيير الأساس

Change of Base Formula



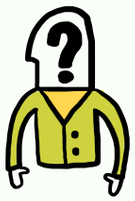
قدرات



أوجد محيط الدائرة؟

أ- ٦٢,٨ ب- ٥٥,٥

ج- ٦٠ د- ٦٦



لماذا

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًّا	10^8 عظمى
التأثير في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًّا في مناطق شاسعة جدًّا تصل إلى مئات الأميال.

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية** ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

مثال

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

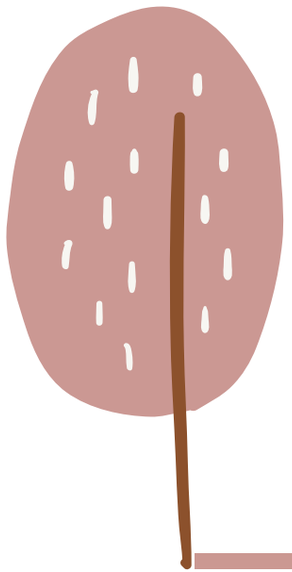
a) $\log 5$

b) $\log 0.3$

تحقق من فهمك

1A) $\log 7$

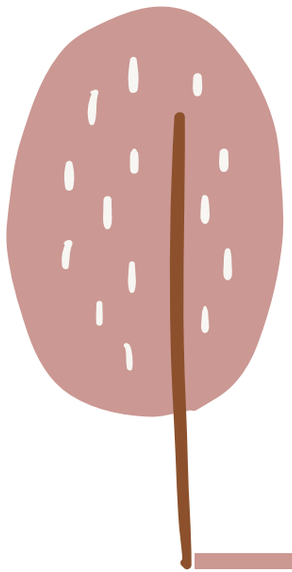
1B) $\log 0.5$



ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$\log x = y \quad \longleftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$\log 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 10^1 = 10$$
$$\log 10^m = m \quad \longleftrightarrow \quad 10^m = 10^m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.



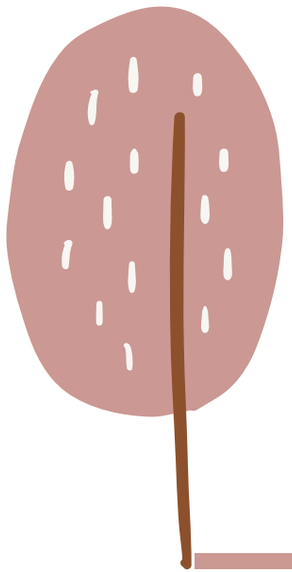
حل معادلات لوغاريتمية

مثال

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه $66.6\ \text{dB}$ تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

تحقق من فهمك

2) **هزات أرضية :** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.



حل معادلات آسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

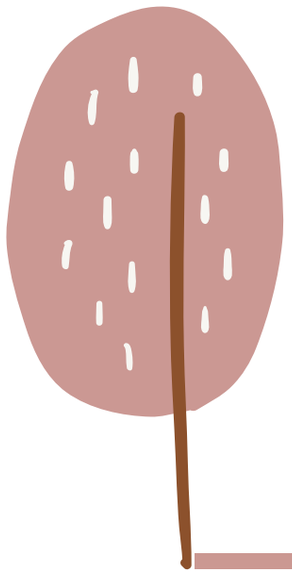
مثال

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

تحقق من فهمك

$3^x = 15$ (**3A**

$6^x = 42$ (**3B**



حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

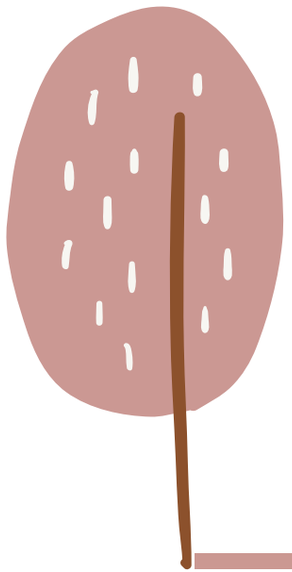
مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $7^{y-2} < 3^{5y}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

تحقق من فهمك

(**4A** $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

(**4B** $4^{y} < 5^{2y+1}$



صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي **صيغة تغيير الأساس**

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

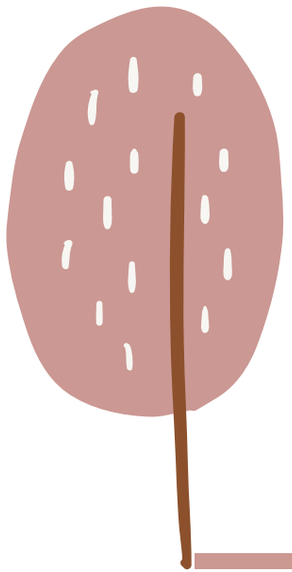
← لوغارتيم العدد الأصلي للأساس b

← لوغارتيم الأساس القديم للأساس b

مثال:
$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log_b a = \log_b n$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$
$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	$x = \log_a n$



يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

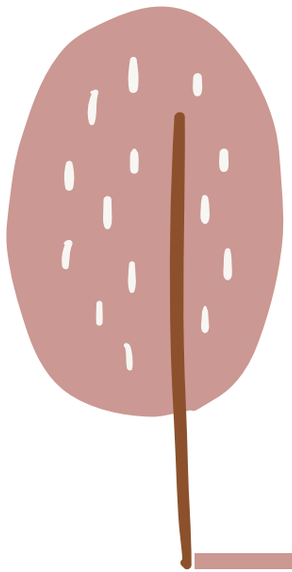
استعمال صيغة تغيير الأساس

مثال

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.



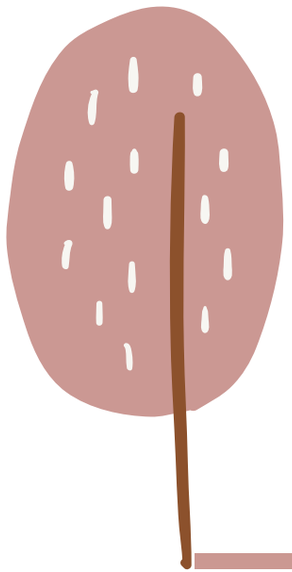
استعمال صيغة تغيير الأساس

مثال

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملًا صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة.



تدرب

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 1)

1) $\log 5$

2) $\log 21$

3) $\log 0.4$

تدرب

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

12) $6^x = 40$

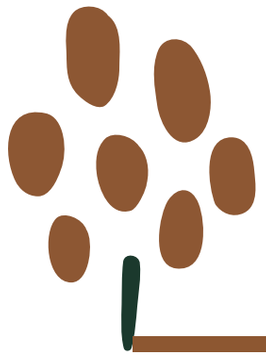
19) $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

تدرب

حل كلًّا مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

20) $5^{4n} > 33$

21) $6^{p-1} \leq 4^{p}$



تدرب

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 5)

26) $\log_3 7$

27) $\log_2 16$

تدرب

36) اكتشف الخطأ: حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

بلال

$$4^{3p} = 10$$

$$\log 4^{3p} = \log 10$$

$$3p \log 4 = \log 10$$

$$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$$

خالد

$$4^{3p} = 10$$

$$\log 4^{3p} = \log 10$$

$$p \log 4 = \log 10$$

$$p = \frac{\log 10}{\log 4}$$

47) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3, g(x) = x - 5$؟

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

48) أي مما يأتي يمثِّل حلًّا للمعادلة $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$؟27

A -4

B -2

C 2

D 4

تحصيلي

ما قيمة $\log_{100} 10$ ؟

(A) 1

(B) -1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 2