الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية
Parent Functions and Transformations

تعلمت سابقاً التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها

الآن

اقوم بتعيين الدوال الرئيسة وأصفها و أمثلها بيانياً.

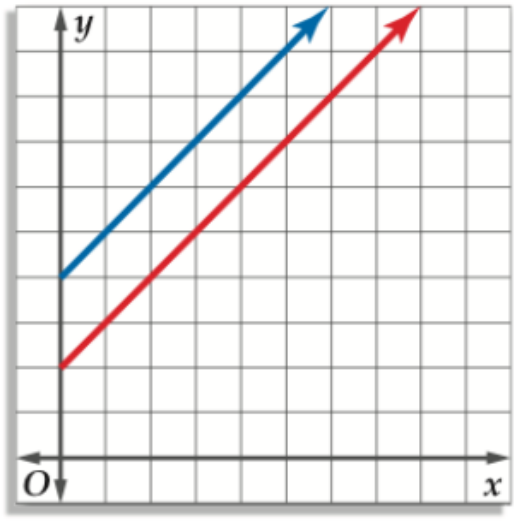
اقوم بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة وأمثلها بيانياً.

المفردات

الدالة الرئيسة (الأم) parent function	الدالة الثابتة constant function	الدالة المحايدة identity function
الدالة التربيعية quadratic function	الدالة التكعيبية cubic function	دالة الجذر التربيعي square root function
دالة المقلوب reciprocal function	دالة القيمة المطلقة absolute value function	الدالة الدرجية step function
دالة أكبر عدد صحيح greatest integer function	التحويل الهندسي transformation	الإزاحة (الانسحاب) translation
الانعكاس reflection	التمدد dilation	

AWATEF ALJOHANI

لماذا ؟

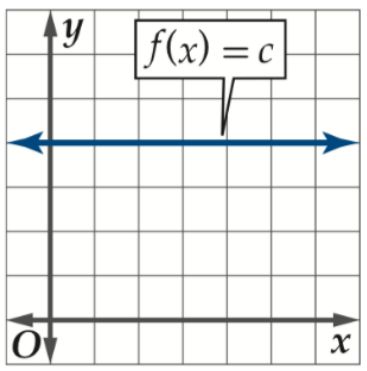


استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّلُ بمستقيم أفقي.

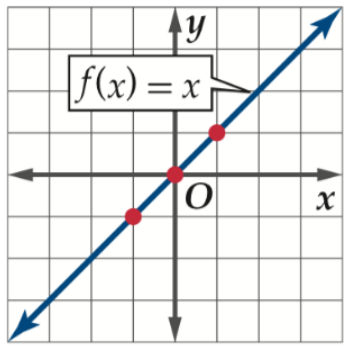


المجال	
المدى	
الأصفار	
المقطع y	
الإتصال	
السلوك	

AWATEF ALJOHANI

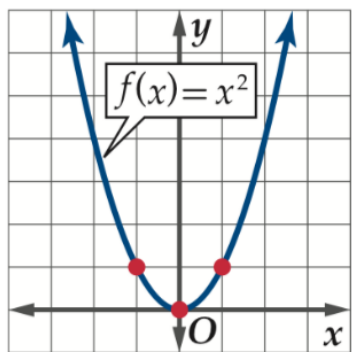
المجال	
المدى	
الأصفار	
المقطع y	
الإتصال	
السلوك	

تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



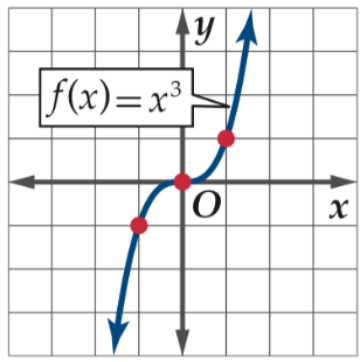
المجال	
المدى	
الأصفار	
المقطع y	
الإتصال	
السلوك	

يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



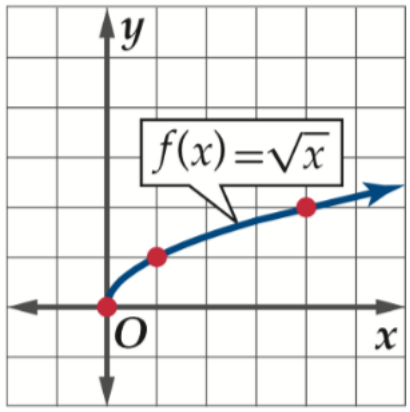
المجال	
المدى	
الأصفار	
المقطع y	
الإتصال	
السلوك	

الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



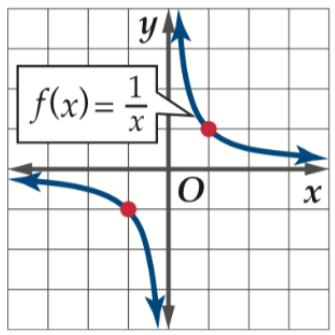
AWATEF ALJOHANI

تكتب دالة الجذر التربيعي على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\ , x \geq 0$.

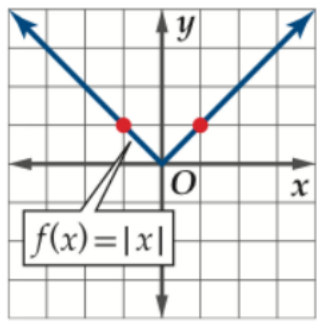


المجال	
المدى	
الأصفار	
المقطع y	
الإتصال	
السلوك	

تكتب دالة المقلوب على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\ , x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



المجال	
المدى	
الأصفار	
المقطع y	
الإتصال	
السلوك	



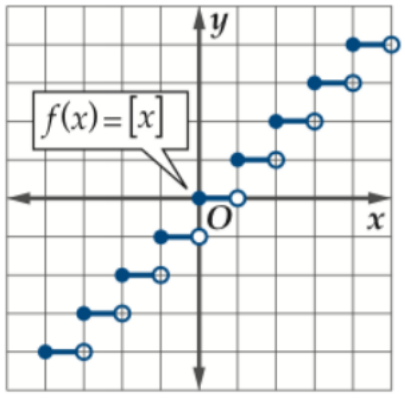
$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

المجال	
المدى	
الأصفار	
المقطع y	
الإتصال	
السلوك	

AWATEF ALJOHANI

المجال	
المدى	
الأصفار	
المقطع y	
الإتصال	
السلوك	

النموذج



يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$،
وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

$$[-4] = -4, [-1.5] = -2, [\frac{1}{3}] = 0$$

AWATEF ALJOHANI

التحويلات الهندسية : تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

التحويلات الهندسية

قياسية	غير قياسية
تغير موقع المنحنى ولا تغير أبعاده	تغير شكل المحنى

يمكنه أن تتنبأ الدالة الأصلية الأم حدد سؤال عن طريق التحويلات

AWATEF ALJOHANI

ورقة عمل تفاعلية

الإنسحاب

الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

مثال ٢ص٥٠

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 4$

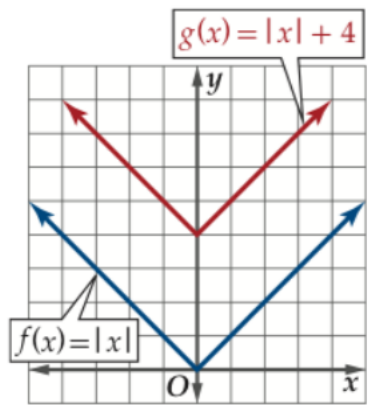
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

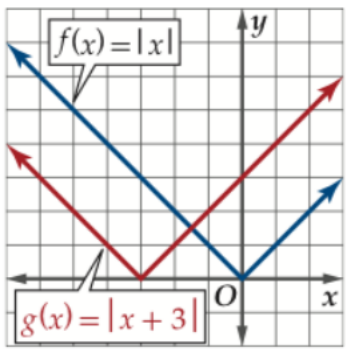
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

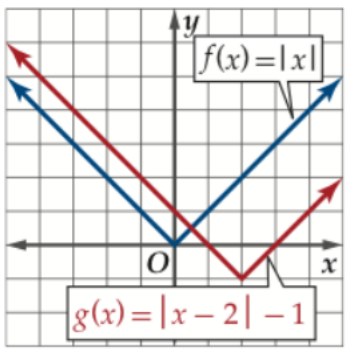
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

AWATEF ALJOHANI

الإنسحاب

الدالة الأصلية $f(x)$

أفقي ↔

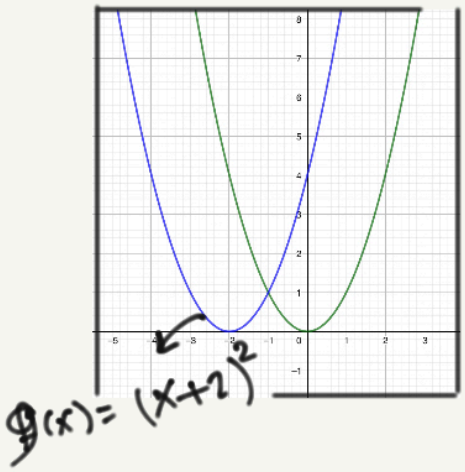
$g(x)=f(x\pm k)$

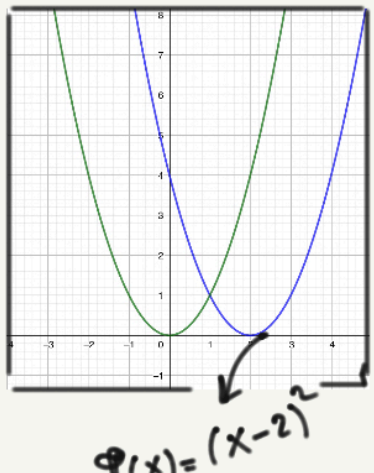
- $f(x+k)$ يسار
- $f(x-k)$ يمين

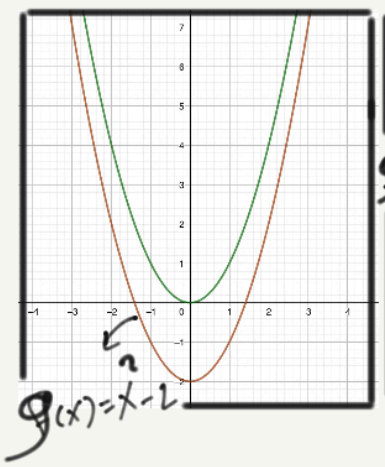
رأسي ↕

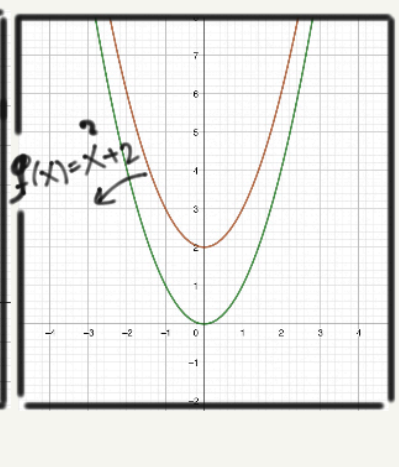
$g(x)=f(x)\pm k$

- $f(x)-k$ أسفل
- $f(x)+k$ أعلى









AWATEF ALJOHANI

تحقق من
فهمك ٢ص٥٠

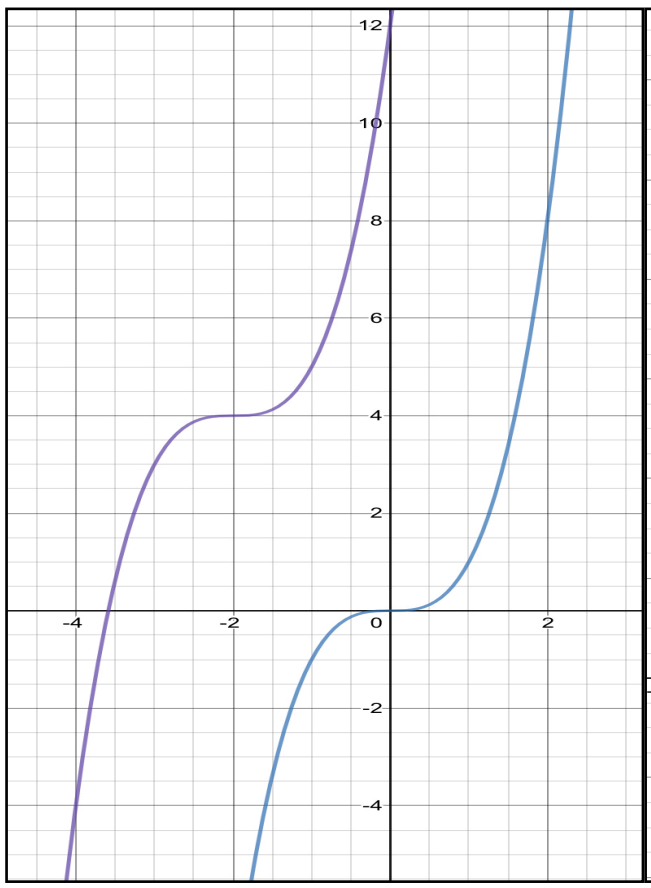
تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

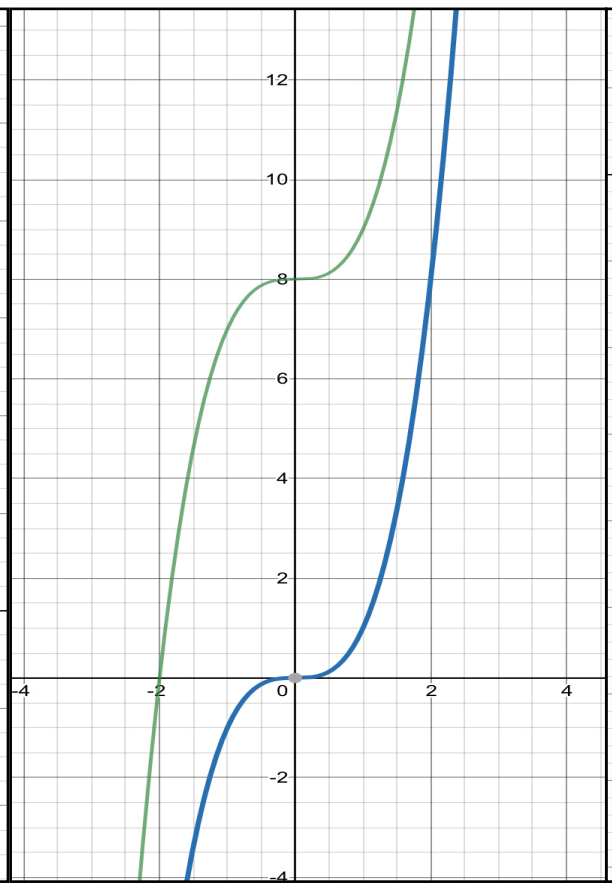
2A $h(x) = x^3 - 5$ **2B** $h(x) = 8 + x^3$ **2C** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

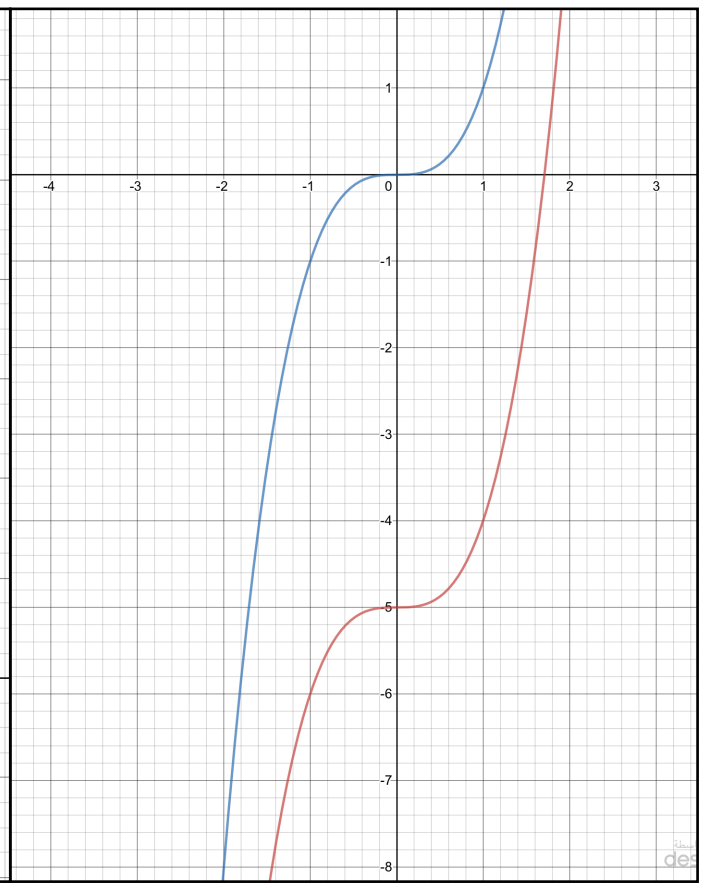
AWATEF ALJOHANI

تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

2A) $h(x) = x^3 - 5$ **2B)** $h(x) = 8 + x^3$ **2C)** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$







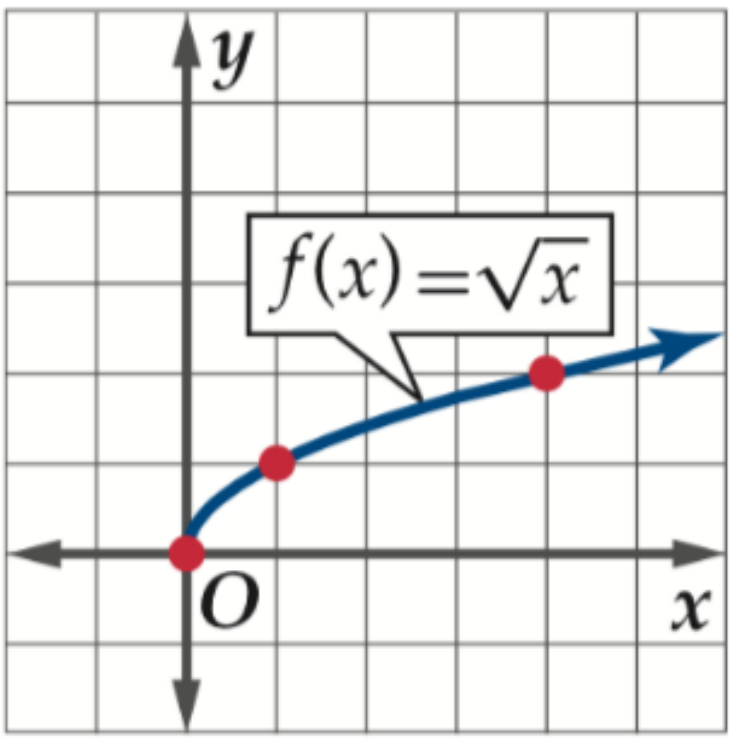
AWATEF ALJOHANI

تأكد ص٥٥

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

7) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

8) $g(x) = \sqrt{x - 7} + 3$



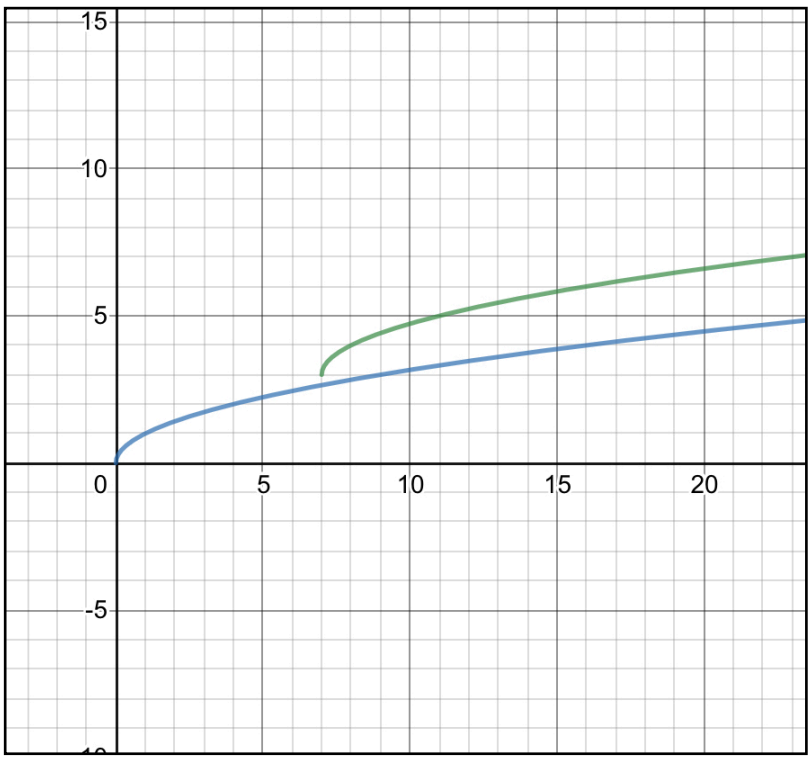
AWATEF ALJOHANI

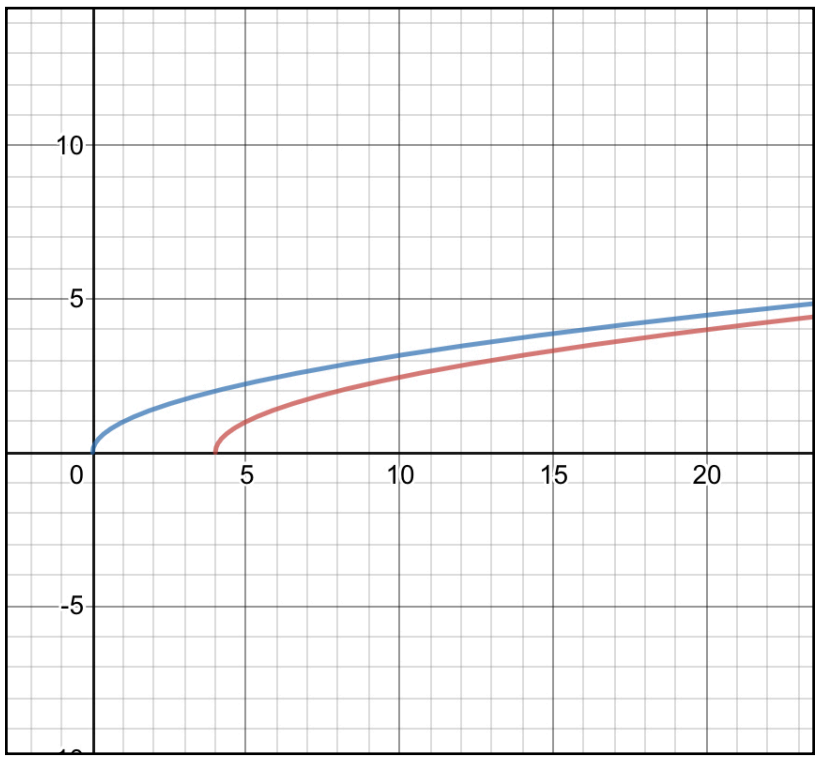
تأكد ص٥٥

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: **(مثال 2)**

7) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

8) $g(x) = \sqrt{x - 7} + 3$





AWATEF ALJOHANI

الإنعكاس

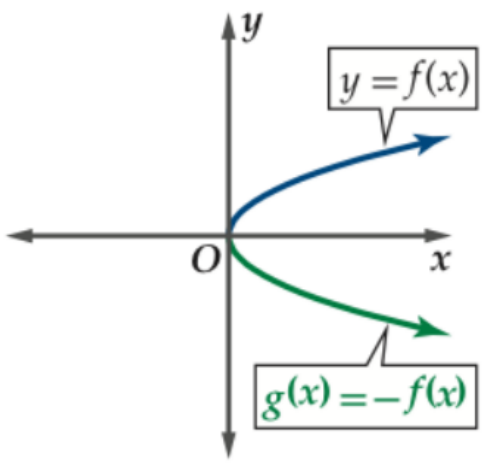
الانعكاس، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

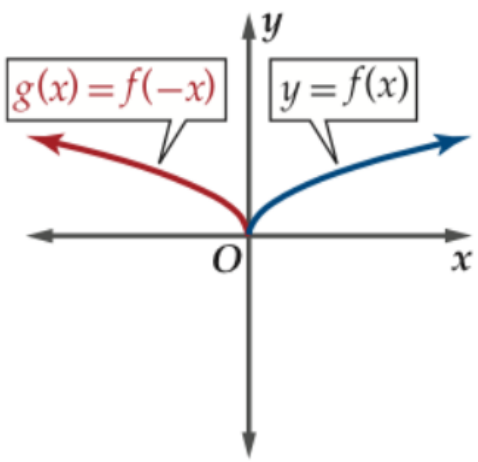
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x .

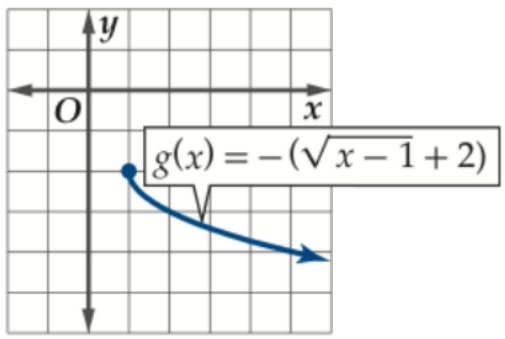


الانعكاس حول المحور y

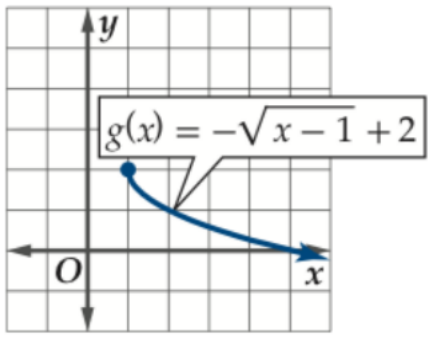
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -\left(\sqrt{x-1} + 2\right)$.



انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

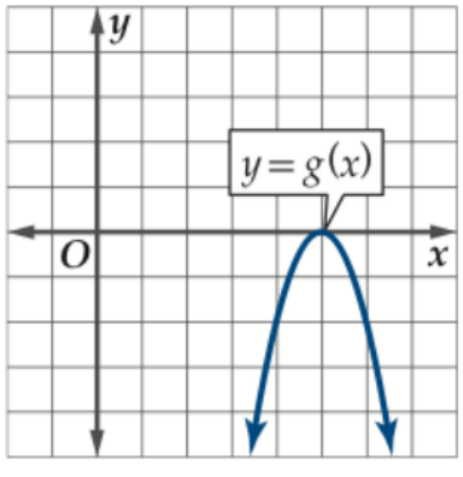
AWATEF ALJOHANI

كتابة معادلات التحويل

مثال ٣ص٥١

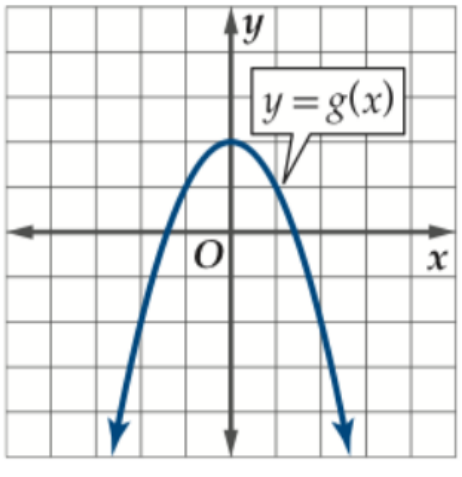
صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:

(a



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x ، أي أن $g(x) = -(x - 5)^2$.

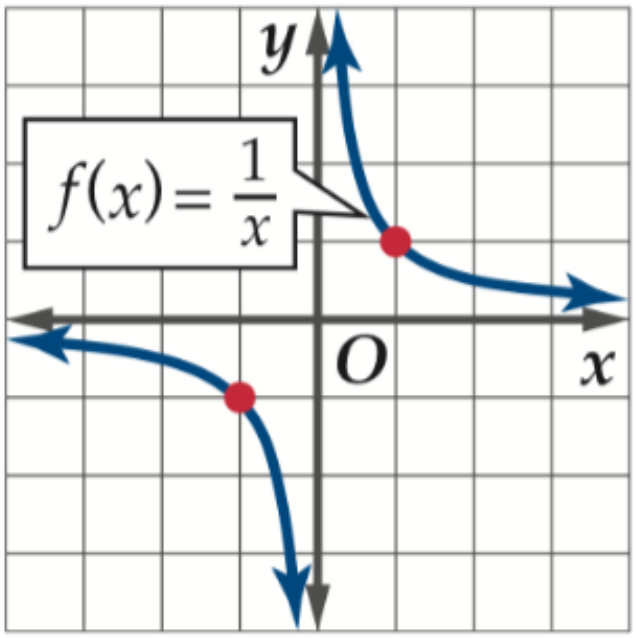
(b



منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

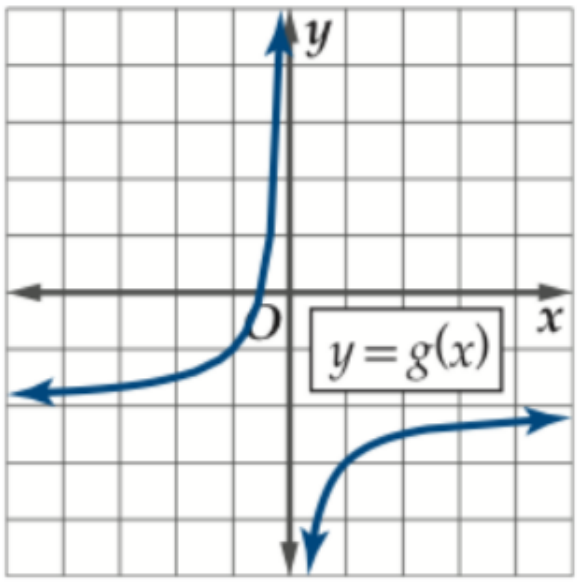
AWATEF ALJOHANI

تحقق من فهمك ٣ص٥١

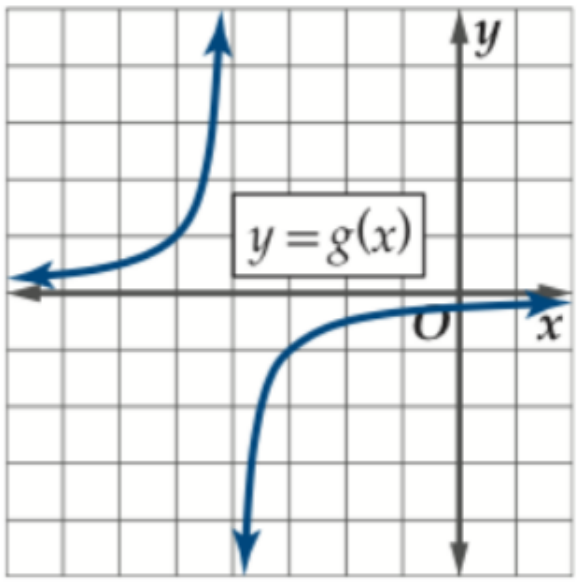


صف العلاقة بين منحنيي $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3A



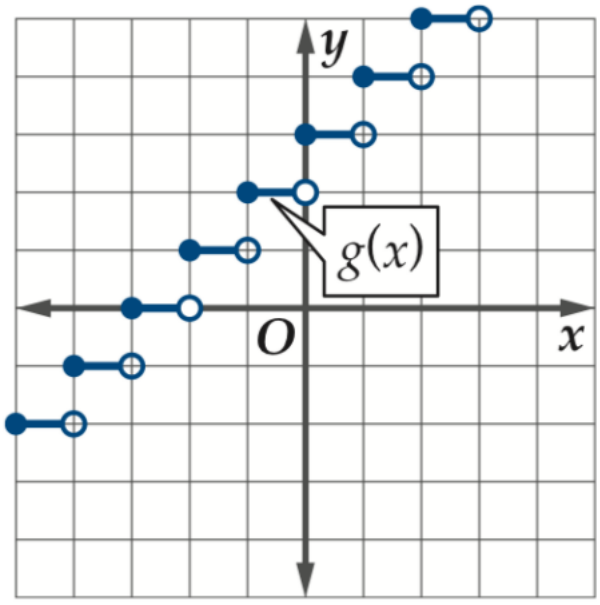
(3B



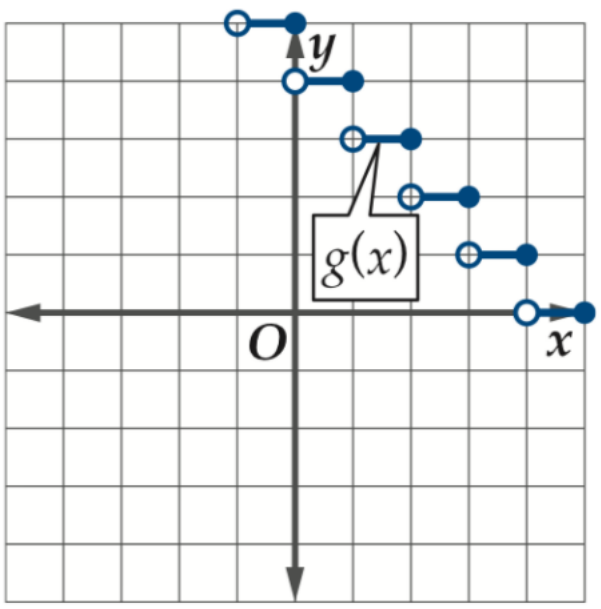
AWATEF ALJOHANI

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

(11



(12

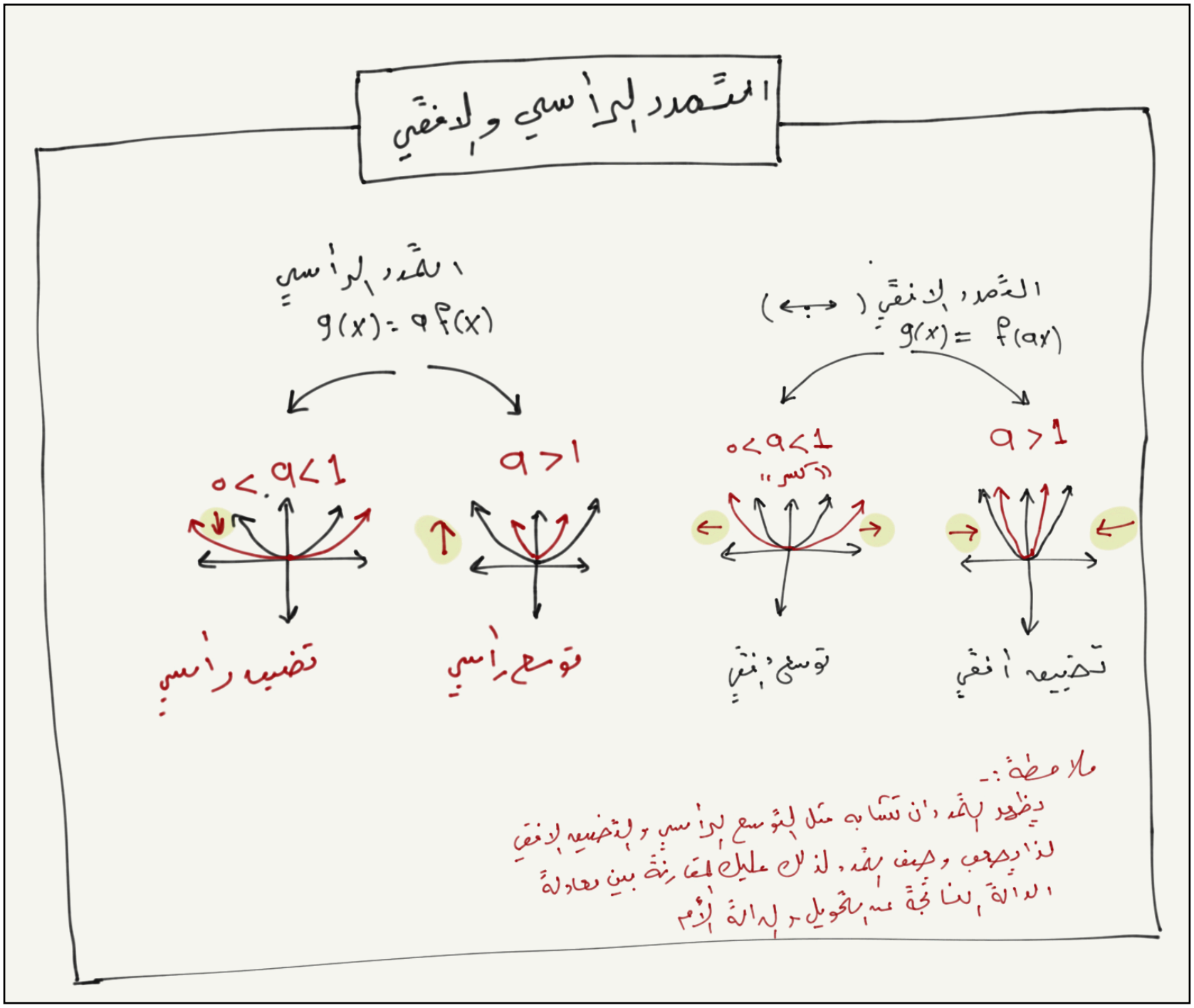


AWATEF ALJOHANI

التمدد

التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

الدقيقة ٢:٥٠



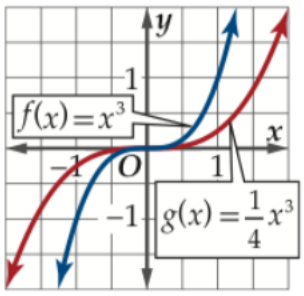
AWATEF ALJOHANI

وصف التمثيلات البيانية

مثال ٤ص٥٢

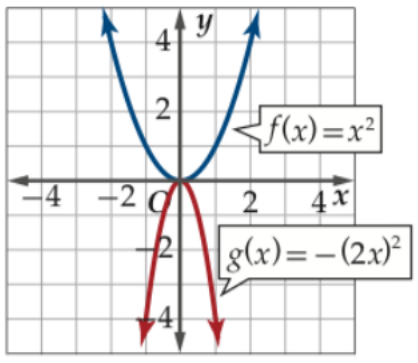
عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

(a $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$ ؛ لأن
$g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.

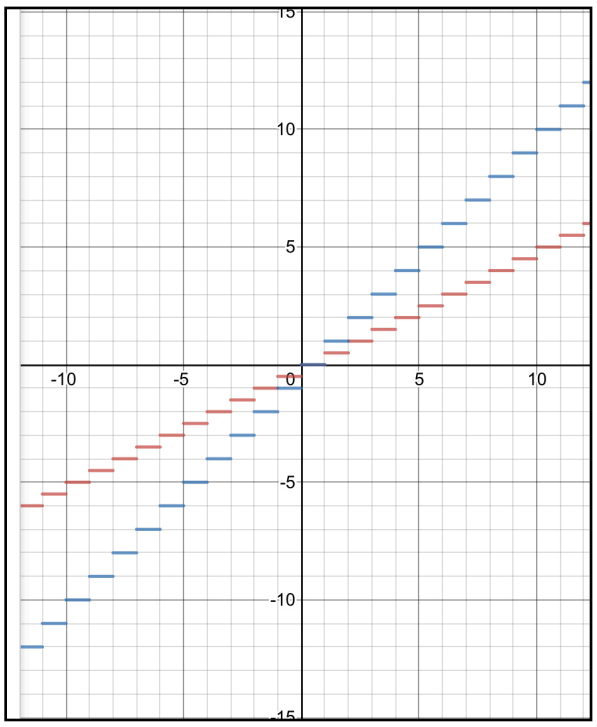
(b $g(x) = -(2x)^2$



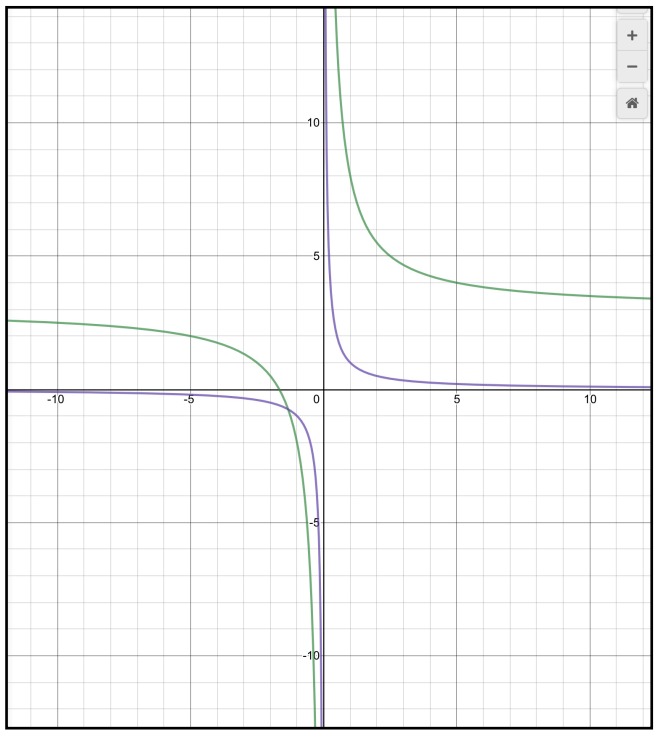
منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ أولًا؛ لأن
$f(x) = x^2, f(2x) = (2x)^2$ وَ $2 > 1$، ثم انعكاس حول المحور x؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$

تحقق من فهمك ص٥٢

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$



4B) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

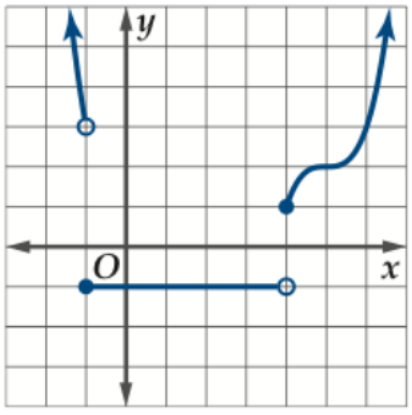


AWATEF ALJOHANI

تمثيل الدوال متعددة التعريف

مثال ٥ص٥٣

مثّل الدالة بيانيًّا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$.



في الفترة $(-\infty, -1)$، أمثّل الدالة $y = 3x^2$.

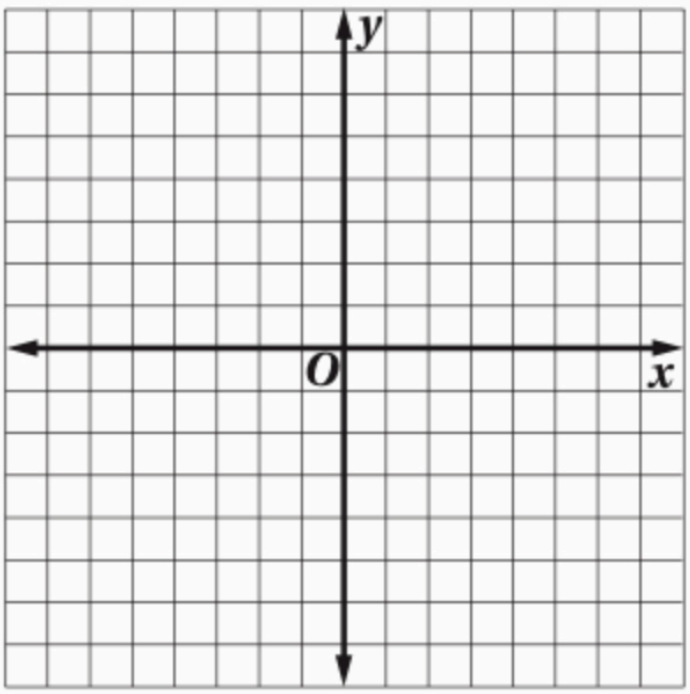
في الفترة $[-1, 4)$، أمثّل الدالة الثابتة $y = -1$.

في الفترة $[4, \infty)$ أمثّل الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطة عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.

تحقق من فهمك ص٥٣

$g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \le 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$ (**5A**

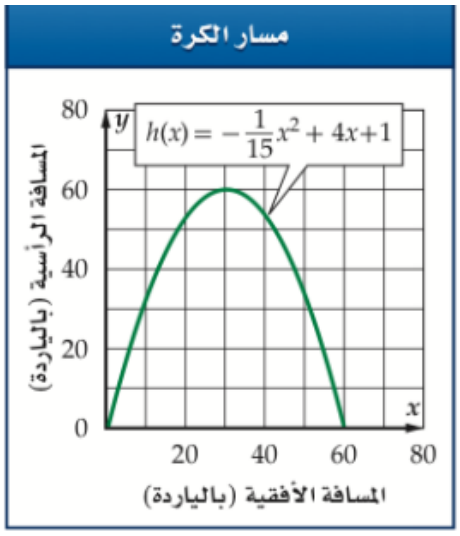


AWATEF ALJOHANI

التحويلات الهندسية على الدوال

مثال ٦ ص٥٣

كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة باليادرة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية باليادرة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x - h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

الدالة الأصلية $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$

حلّل $-\frac{1}{15}x^2 + 4x$ $= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$

أكمل المربع $= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$

اكتب $x^2 - 60x + 900$ على صورة مربع كامل ثم بسّط $= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61$

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

تحقق من فهمك ص٥٣

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

AWATEF ALJOHANI

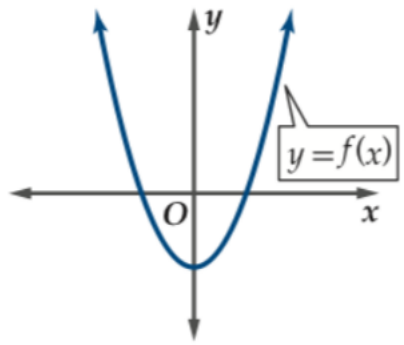
التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

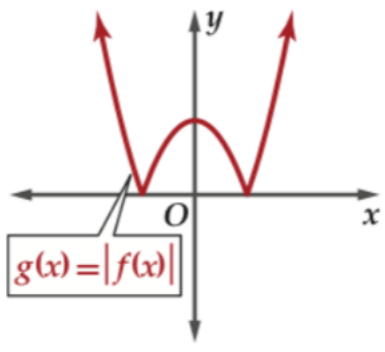
مفهوم أساسي

التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$$g(x) = |f(x)|$$

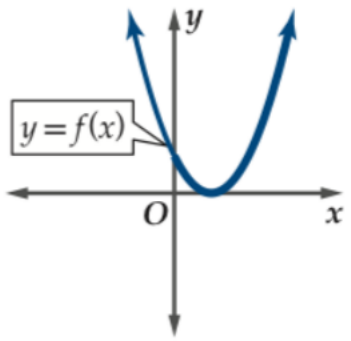
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

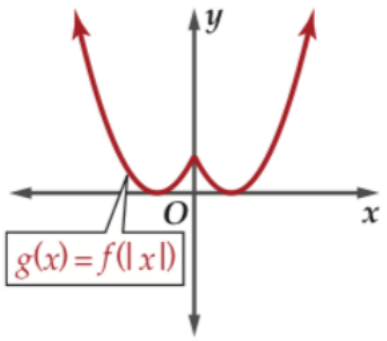




$$g(x) = f(|x|)$$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





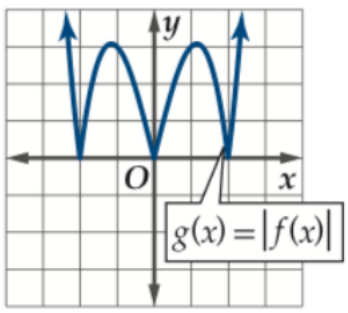
AWATEF ALJOHANI

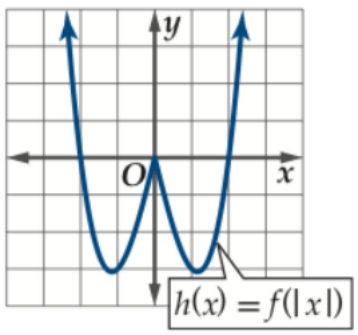
استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

a) $g(x) = |f(x)|$ **b)** $h(x) = f(|x|)$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.

ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.

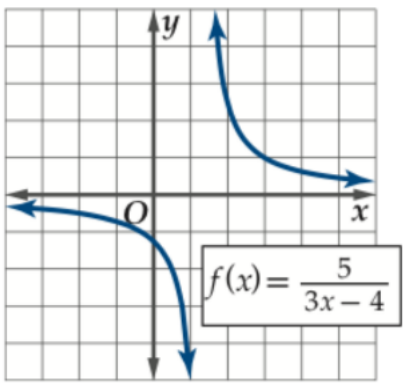




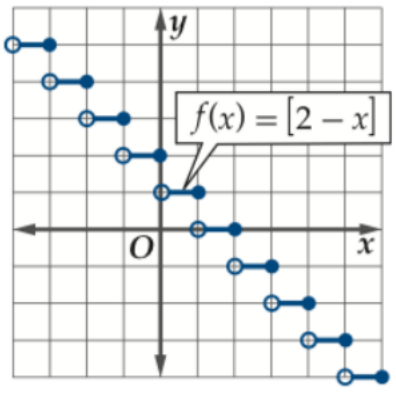
تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

(7A



(7B



AWATEF ALJOHANI

تدرب ص٥٦

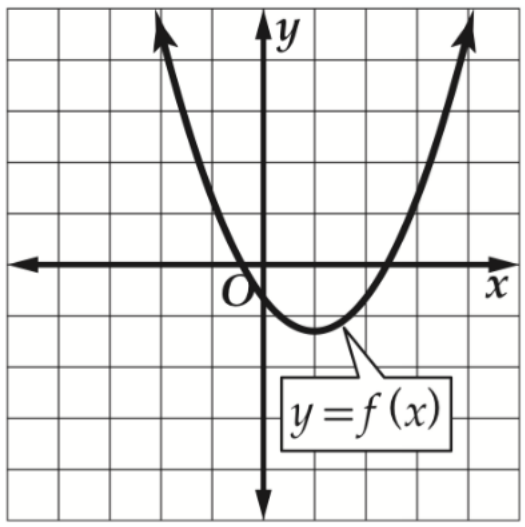
استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (مثال 7)

31 $f(x) = \sqrt{x + 2} - 6$

50) اكتشف الخطأ: وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [x + 4]$. فقال محمد: أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار. وقال عبد الملك: إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى أعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

AWATEF ALJOHANI

66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟



A $(0,\infty)$

B $(-\infty,1)$

C $(-1,\infty)$

D $(1,\infty)$

67) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2 + 8}{2}$ ؟

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

AWATEF ALJOHANI

1-5 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الدوال الرئيسة (الأم) الدالة الرئيسة هي أبسط صورة في عائلة الدالة.

الدالة الرئيسة (الأم)	الصيغة	ملاحظات
الدالة الثابتة	$f(x) = c$	التمثيل البياني هو مستقيم أفقي.
الدالة المحايدة	$f(x) = x$	إحداثيات أي نقطة على التمثيل البياني (a, a).
الدالة التربيعية	$f(x) = x^2$	التمثيل البياني على صورة حرف U.
الدالة التكعيبية	$f(x) = x^3$	المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
دالة الجذر التربيعي	$f(x) = \sqrt{x}$	التمثيل البياني في الربع الأول.
دالة المقلوب	$f(x) = \frac{1}{x}$	التمثيل البياني مكون من جزأين.
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$	التمثيل البياني على صورة حرف V.
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$	دالة أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x؛ وهي نوع من الدوال الدرجية.

مثال

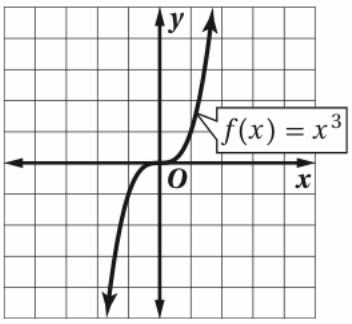
صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ من حيث: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$، المدى: $\{y \mid y \in \mathbf{R}\}$.

المنحنى يمر بنقطة الأصل، لذا فالمقطع x هو 0 ، والمقطع y هو 0.

والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل والدالة فردية؛ لأن

$f(-x) = -f(x)$.



وكذلك الدالة متصلة؛ لأنه يمكن تتبع منحناها دون رفع القلم عن الورقة.

وعندما تتناقص x بلا حدود فإن y تؤول إلى سالب ما لا نهاية، وعندما تتزايد x بلا حدود فإن y تؤول إلى موجب ما لانهاية.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

لاحظ أن الدالة متزايدة دائمًا، لذا فهي متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

تمارين

صف خصائص التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ من حيث: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-5 تدريبات إعادة التعليم

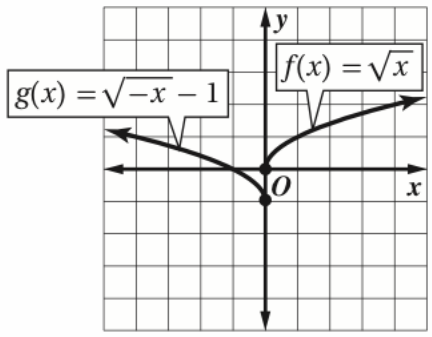
(تتمة)

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم) يمكن إجراء تحويل للدالة الرئيسة لإنشاء منحنيات أخرى في عائلة هذه الدالة.

الانسحاب (الإزاحة)	$g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا ...	...$\|k\|$ وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
		...$\|k\|$ وحدة إلى أسفل عندما $k < 0$.
	$g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا...	...h وحدة إلى اليمين عندما $h > 0$.
		...$\|h\|$ وحدة إلى اليسار عندما $h < 0$.
الانعكاس	$g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$...	...حول المحور x.
	$g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$...	... حول المحور y.
التمدد	$g(x) = a \cdot f(x)$ هو تمدد لمنحنى $f(x)$ ويكون:	...توسعًا رأسيًّا إذا كان $a > 1$.
		...تضيقًا رأسيًّا إذا كان $0 < a < 1$.
	$g(x) = f(ax)$ هو تمدد لمنحنى $f(x)$ ويكون:	...تضيقًا أفقيًّا إذا كان $a > 1$.
		...توسعًا أفقيًّا إذا كان $0 < a < 1$.

مثال عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = \sqrt{-x} - 1$، ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$، ومثّلهما بيانيًّا على المستوى نفسه.

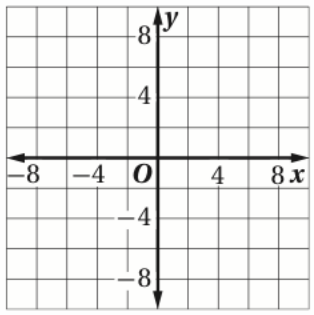
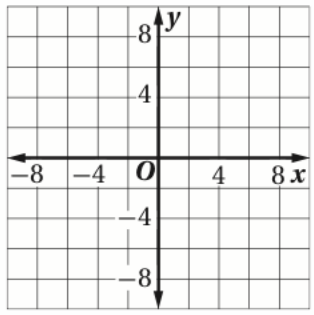


منحنى $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور y، ومزاح وحدة واحدة إلى أسفل.

تمارين:

عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$، ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$ ومثّلهما بيانيًّا على المستوى نفسه:

1) $g(x) = 0.5\,|x + 4|$



2) $g(x) = 2x^2 - 4$