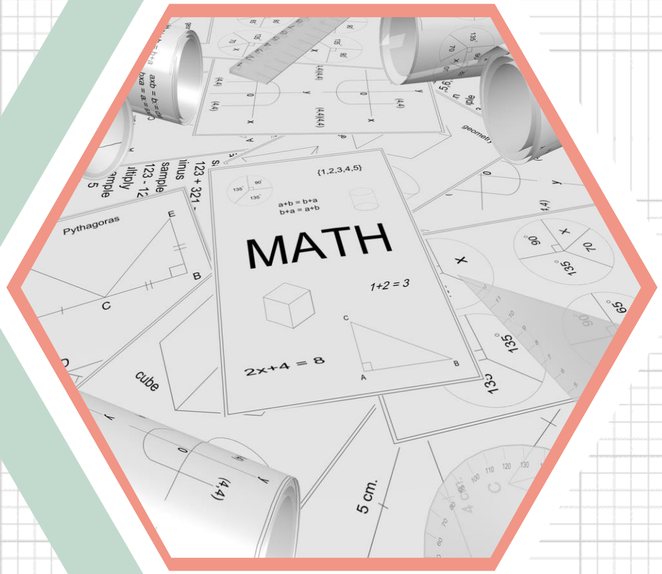
رياضيات ٢-١



إعداد:أ/عبدالعزيز الشريف

الباب
الأول

الدوال
والمتباينات

٦-١
البرمجة الخطية والحل الأمثل

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

- درست حل أنظمة متباينات خطية بيانيًا

والآن

- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة الحل
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

المفردات

- القيود
- البرمجة الخطية
- محدودة
- غير محدودة
- الحل الأمثل

تصميم :عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

لماذا؟

يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة في اليوم الواحد من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالًا
كبير	800	1700	70 ريالًا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

هناك **قيود** إضافية على إنتاج المصنع ناجمة عن الطلب والشحن وكفاءة المصنع. وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

القيمة العظمى والقيمة الصغرى

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه المصانع في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه الأوضاع يمكن التعامل معها عادة باستعمال البرمجة الخطية.

البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

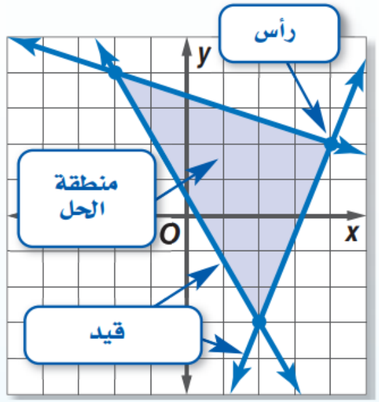
منطقة الحل

مفهوم أساسي

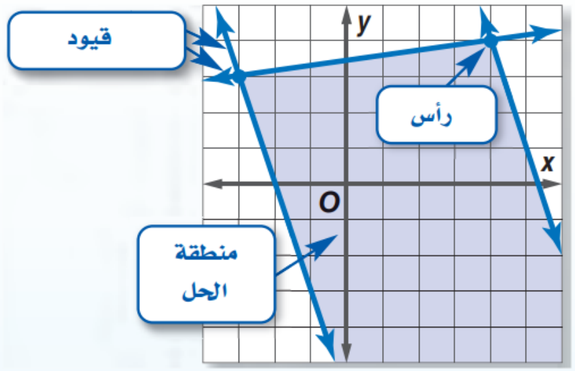
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

منطقة الحل



إذا كانت منطقة الحل محدودة (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى و القيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل.



إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك غير محدودة ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

منطقة الحل المحدودة

مثال (1)

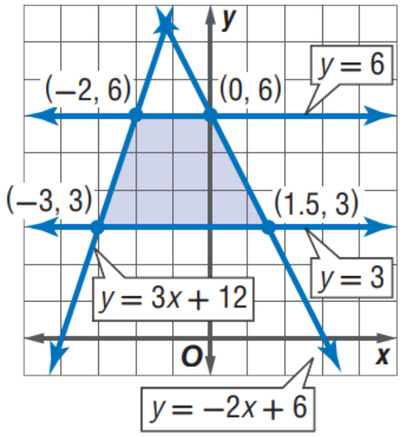
قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x, y. وتُقرأ f لـ x وَ y.

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$
$$y \le 3x + 12$$
$$y \le -2x + 6$$
$$f(x, y) = 4x - 2y$$



الخطوة 1: مثّل المتباينات بيانيًّا، وحدّد إحداثيات الرؤوس.

الخطوة 2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	← قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة $(1.5, 3)$، والقيمة الصغرى للدالة تساوي -20 وتكون عند النقطة $(-2, 6)$.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

منطقة الحل المحدودة

تحقق من فهمك

(1A $-2 \le x \le 6$

$1 \le y \le 5$

$y \le x + 3$

$f(x, y) = -5x + 2y$

(1B $-6 \le y \le -2$

$y \le -x + 2$

$y \le 2x + 2$

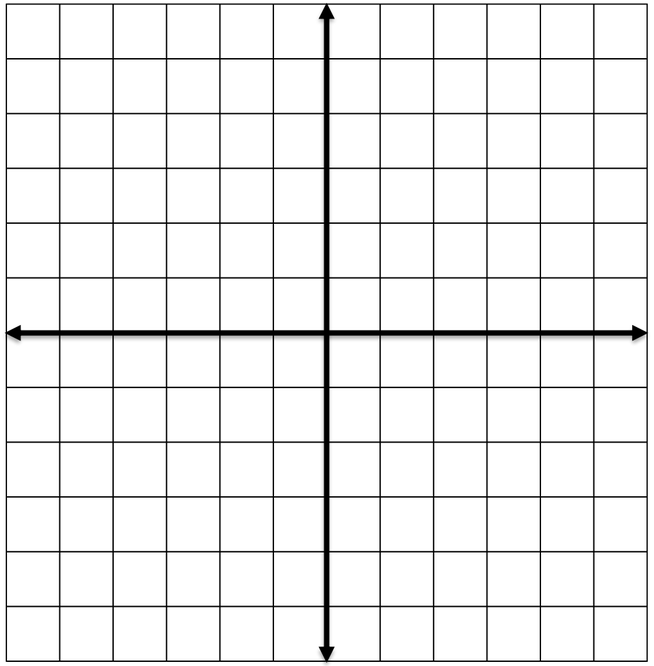
$f(x, y) = 6x + 4y$

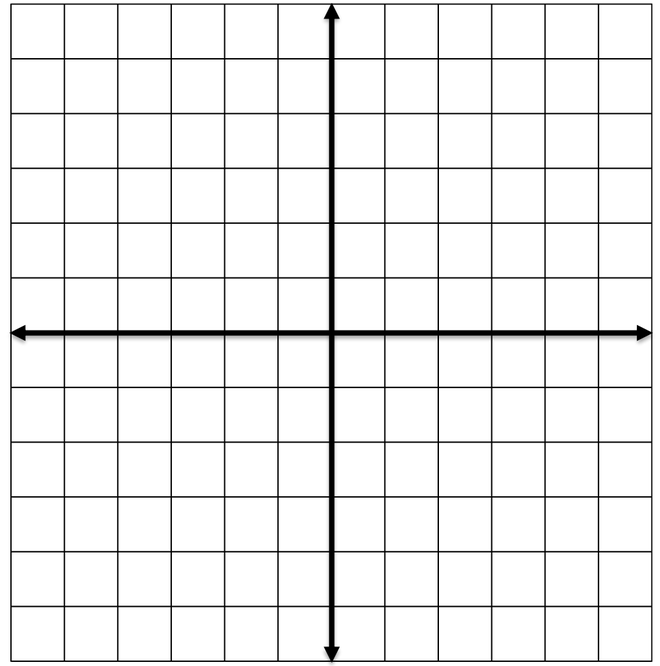
DES: Abdulaziz AL-Sharif

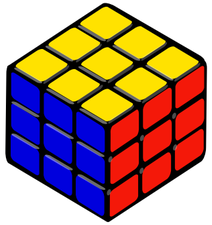
تصميم: عبد العزيز الشريف

منطقة الحل المحدودة

الحل







تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

منطقة الحل غير المحدودة

ملحوظة

إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ مفتوحة وممتدة، فإنها تكون غير محدودة.

تنبيه

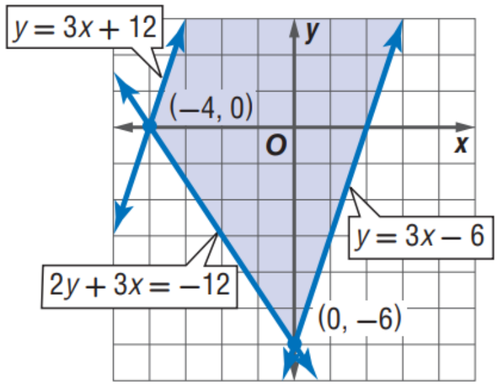
القيمة العظمى والصغرى

لا تفترض عدم وجود قيم عظمى أو صغرى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدِّد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.

مثال (٣)

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا ، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$2y + 3x \geq -12 \ , \ y \leq 3x + 12 \ , \ y \geq 3x - 6 \ , \ f(x, y) = 9x - 6y$$



مثّل المتباينات بيانيًّا، وأوجد قيمة الدالة عند كل رأس؛ لأن القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – تكون عند الرؤوس.

(x, y)	9x − 6y	f(x, y)
(−4, 0)	9(−4) − 6(0)	−36
(0, −6)	9(0) − 6(−6)	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة (0, −6)، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي (0, 8) وتُعطي القيمة 48− للدالة وهي أقل من 36−.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

منطقة الحل غير المحدودة

تحقق من فهمك

(2A

$y \leq 8$

$y \geq -x + 4$

$y \leq -x + 10$

$f(x, y) = -6x + 8y$

(2B

$y \geq x - 9$

$y \leq -4x + 16$

$y \geq -4x - 4$

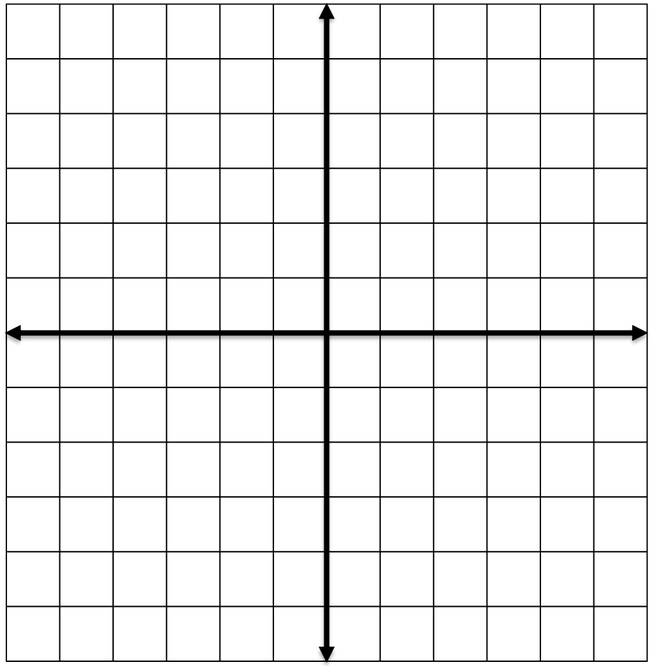
$f(x, y) = 10x + 7y$

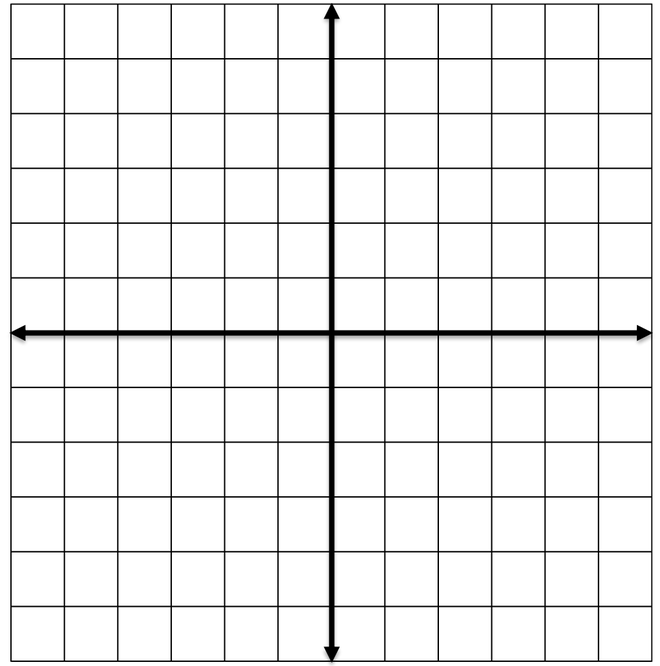
DES: Abdulaziz AL-Sharif

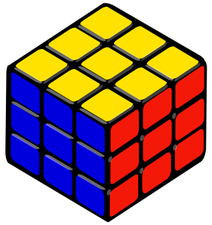
تصميم: عبد العزيز الشريف

منطقة الحل غير المحدودة

الحل







تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

إيجاد الحل الأمثل: يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكن الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الخطوة 1	حدّد المتغيرات.
الخطوة 2	اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.
الخطوة 3	مثل نظام المتباينات بيانيًا.
الخطوة 4	جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
الخطوة 5	اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.
الخطوة 6	عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.
الخطوة 7	اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

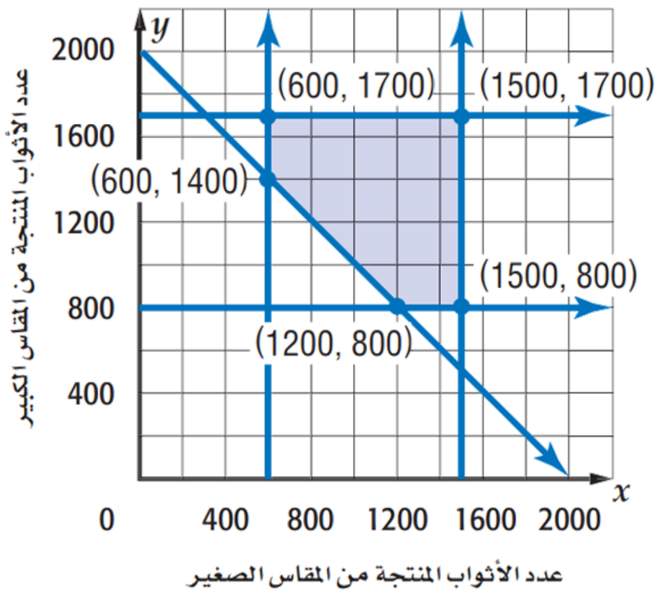
تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

مثال (٣)

أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي يتطلب إنتاجها من المقاسين، لتكون التكلفة أقل ما يمكن.



الخطوة 1 افرض أن x هي عدد الأثواب المنتجة من المقاس الصغير.
y هو عدد الأثواب المنتجة من المقاس الكبير.

الخطوة 2

$$600 \le x \le 1500$$
$$800 \le y \le 1700$$
$$x + y \ge 2000$$

الخطوتان 3 و4 مثِّل نظام المتباينات بيانيًّا كما في الشكل المجاور، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

إرشادات للدراسة

منطقية الحل

اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

الخطوة 5: الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي:

$$f(x, y) = 55x + 70y.$$

الخطوة 6:

(x, y)	55x + 70y	f(x, y)	
(600, 1700)	55(600) + 70(1700)	152000	
(600, 1400)	55(600) + 70(1400)	131000	
(1500, 1700)	55(1500) + 70(1700)	201500	← قيمة عظمى
(1500, 800)	55(1500) + 70(800)	138500	
(1200, 800)	55(1200) + 70(800)	122000	← قيمة صغرى

الخطوة 7: يجب إنتاج 1200 ثوبٍ من المقاس الصغير، و 800 ثوبٍ من المقاس الكبير لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

تحقق من فهمك

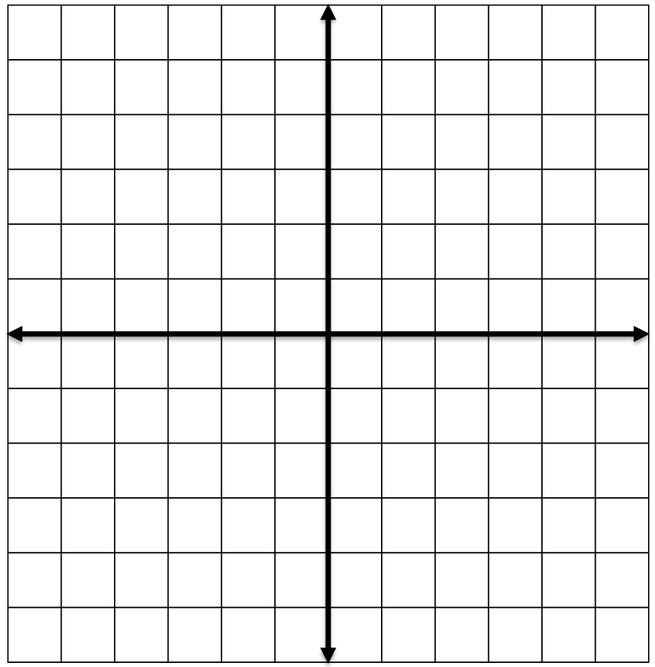
3) **مجوهرات:** يصوغ فهد من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالًا. وأجرة صياغة السوار 30 ريالًا، وصاغ في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليه صياغتها ليحصل على أكبر أجر؟

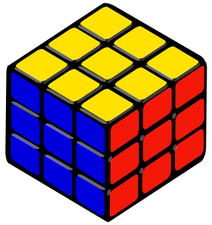
تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الحل





تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الربط مع الحياة

جاوز عدد مصانع الألبسة الجاهزة بالمملكة 300 مصنع، تغطي بإنتاجها المتميز نحو ثلث احتياجات السوق المحلية.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

تأكد

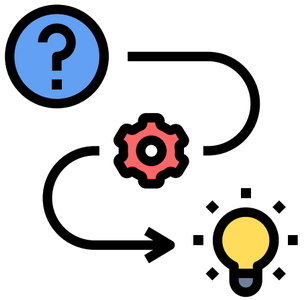
مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

1)

$$y \le 5$$
$$x \le 4$$
$$y \ge -x$$
$$f(x, y) = 5x - 2y$$

2)

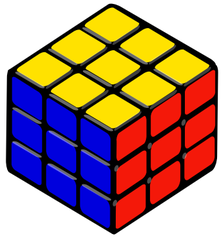
$$y \le -3x + 6$$
$$-y \le x$$
$$y \le 3$$
$$f(x, y) = 8x + 4y$$



DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل:



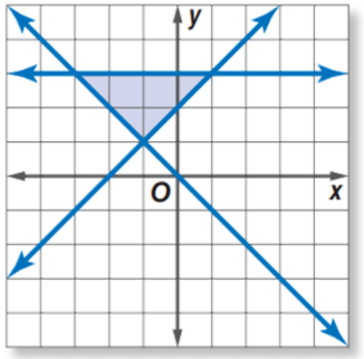
DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبدالعزيز الشريف

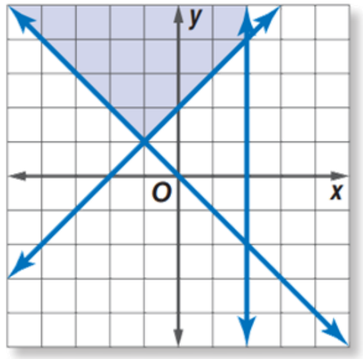
مسائل التفكير العليا

حدِّد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضِّح إجابتك.

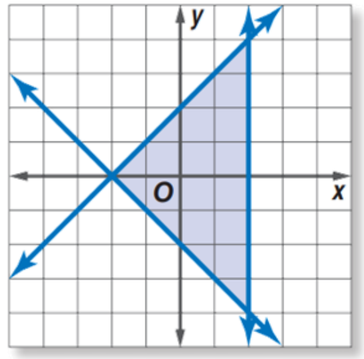
(a



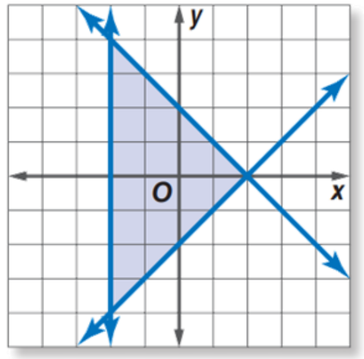
(b

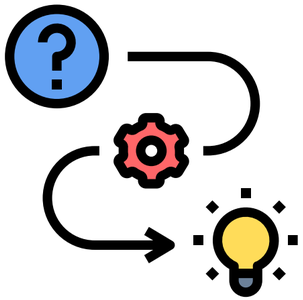


(c



(d





تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تحصيلي

هندسة : أيٌّ مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16$, $y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

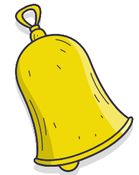
C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.

تصميم :عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif