البرمجة الخطية و الحل الأمثل

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

الاستراتيجية :

تمهيد:

حل النظام التالي بيانيا :

$$|y| \geq x$$

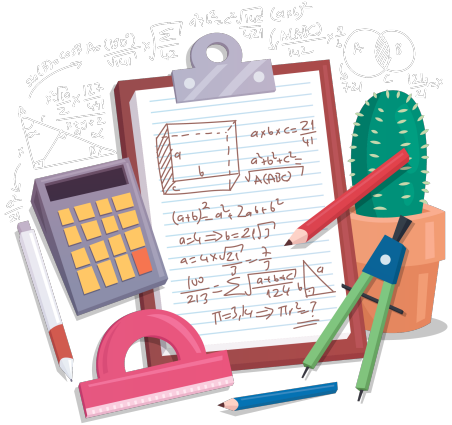
$$y \leq 6$$

$$y \geq -2?$$

فيما سبق : درستُ حل أنظمة متباينات خطية بيانيًا .

فكرة الدرس :

- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة .
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية .



المفردات :

- القيود .
- البرمجة الخطية .
- محدودة .
- غير محدودة .
- الحل الأمثل .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة في اليوم الواحد من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالا
كبير	800	1700	70 ريالا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

ما تكلفة إنتاج 1000 ثوب من المقاس الصغير ؟

أيهما أقل تكلفة، إنتاج ثوب من المقاس الصغير أم ثوب من المقاس الكبير ؟

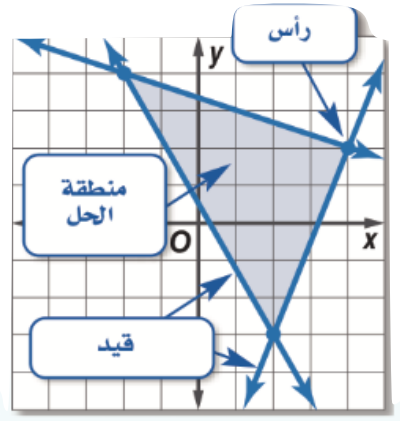
هل تستطيع الشركة إنتاج 2000 ثوب من المقاس الصغير في اليوم الواحد ؟ وضح إجابتك .

القيود : هي الشروط التي تحدد منطقة الحل ويعبر عنها باستعمال أنظمة المتباينات الخطية .

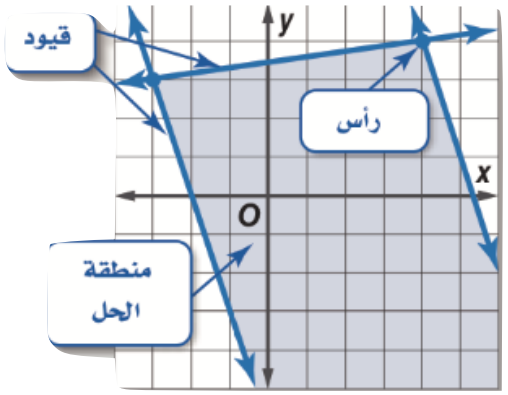
البرمجة الخطية : هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية .

منطقة الحل :

إذا كانت منطقة الحل **محدودة** (مغلقة) أو محصورة بقيود فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل .



إذا كانت منطقة الحل **غير محدودة** (مفتوحة) و ممتدة يمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى .



مثال : منطقة الحل المحدودة

ملاحظات :

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x, y . وتُقرأ f لـ x وَ y .

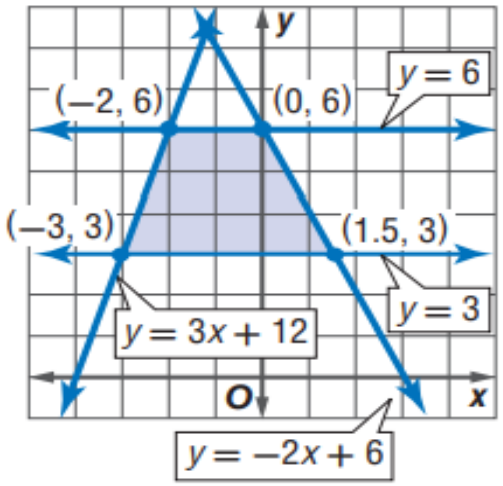
مثل نظام المتباينات الاتي بيانيا ، ثم حدد احداثيات رؤوس منطقة الحل ، واوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة :

$$3 \leq y \leq 6$$

$$y \leq 3x + 12$$

$$y \leq -2x + 6$$

$$F(x , y) = 4x - 2y$$



الخطوة 1 : مثل المتباينات بيانيا ، وحدد احداثيات الرؤوس .

الخطوة 2 : جد قيمة الدالة عند كل رأس .

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة ، (1.5، 3) والقيمة الصغرى للدالة تساوي 20- وتكون عند النقطة (-2،6).

تحقق من فهمك :

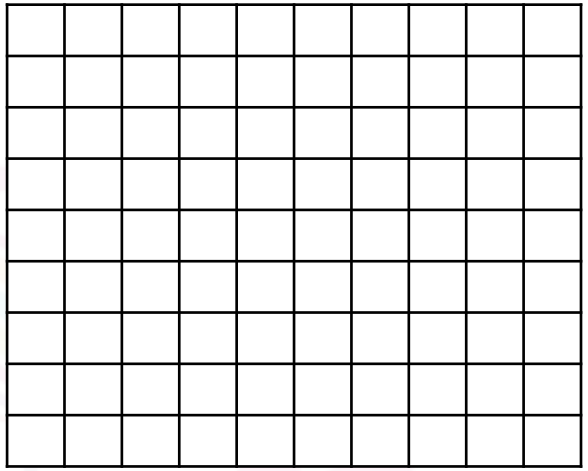
(1A

$-2 \leq x \leq 6$

$1 \leq y \leq 5$

$y \leq x + 3$

F(x , y) = -5x + 2y



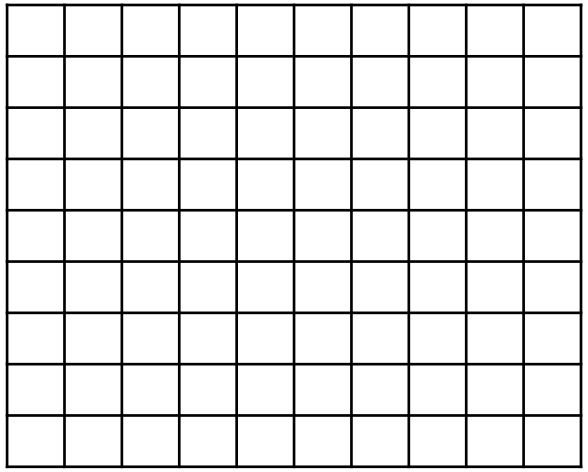
(1B

$-6 \leq y \leq -2$

$y \leq -x + 2$

$y \leq 2x + 2$

F(x , y) = 6x + 4y

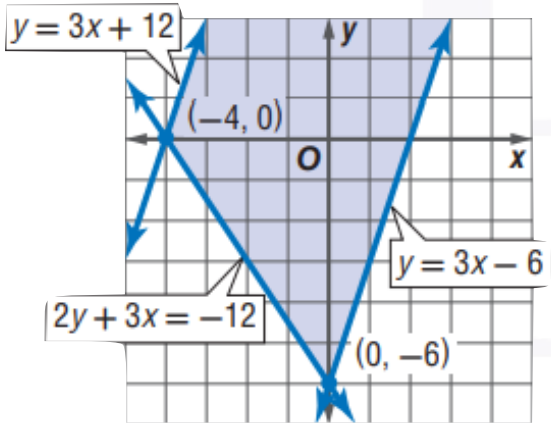


مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال : منطقة الحل غير المحدودة

مثل نظام المتباينات الاتي بيانيا ، ثم حدد احداثيات رؤوس منطقة الحل ، واوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة :

$2y + 3x \geq -12$ ، $y \leq 3x + 12$ ، $y \geq 3x - 6$ ، $f(x, y) = 9x - 6y$



مثل المتباينات ، بيانيا ، واوجد قيمة الدالة عند كل راس ، لان القيمة العظمى أو الصغرى – ان وجدت – تكون عند الرؤوس .

(x , y)	9x - 6y	F(x, y)
(-4 , o)	9(-4) - 6 (0)	-36
(0, -6)	9(0) – 6(-6)	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة (0 , -6) ، ولا توجد قيمة صغرى للدالة ، لان هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي (0 , 8) وتعطي القيمة -48 للدالة وهي اقل من 36-

ملاحظات :

تنبيه

القيمة العظمى والصغرى

لا تفترض عدم وجود قيم عظمى أو صغرى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدّد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.

تحقق من فهمك :

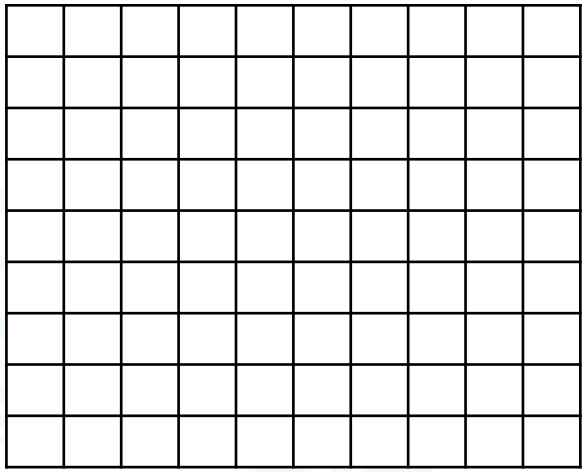
(2A

$y \leq 8$

$y \geq -x + 4$

$y \leq -x + 10$

F(x ,y) = -6x +8y



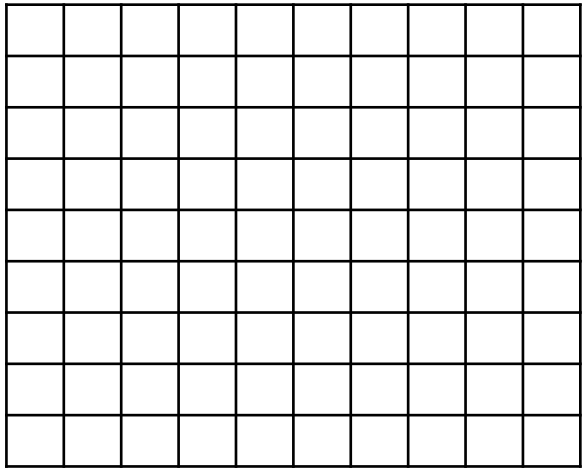
(2B

$y \geq x - 9$

$y \leq -4x + 16$

$y \geq -4x - 4$

F(x ,y) = 10x + 7y



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الحل الأمثل : يسمى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح .

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.

الخطوة 3 مثل نظام المتباينات بيانيًّا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى .

الخطوة 6 عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

مثال : استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

منطقية الحل

اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

أعمال :عد الى الموقف الوارد في بداية الدرس ، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي انتاجها من المقاسين ، لتكون التكلفة اقل ما يمكن .

جاوز عدد مصانع الألبسة الجاهزة بالمملكة 300 مصنع، تغطي بإنتاجها المتميز نحو ثلث احتياجات السوق المحلية.

الخطوة 1 : افرض ان x هي عدد الاثواب المنتجة من المقاس الصغير . y هو عدد الاثواب المنتجة من المقاس الكبير .

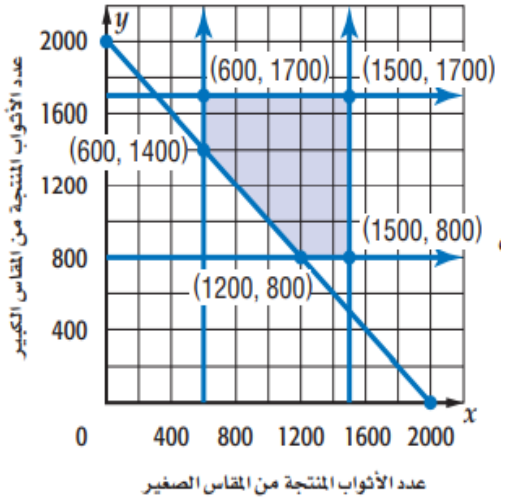
الخطوة 2 :

$$600 \le x \le 1500$$

$$800 \le y \le 1700$$

$$x + y \ge 2000$$

الخطوتان 3، 4 : مثل المتباينات بيانيا كما في الشكل المجاور ، ثم حدد رؤوس منطقة الحل .



الخطوة 5 : الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي : $F(x, y) = 55x + 70y$

الخطوة 6 :

(x, y)	$55x + 70y$	$f(x, y)$
(600, 1700)	55(600) + 70(1700)	152000
(600, 1400)	55(600) + 70(1400)	131000
(1500, 1700)	55(1500) + 70(1700)	201500
(1500, 800)	55(1500) + 70(800)	138500
(1200, 800)	55(1200) + 70(800)	122000

الخطوة 7 : يجب انتاج 1200 ثوب من المقاس الصغير ، و 800 ثوب من المقاس الكبير لتكون التكلفة اقل ما يمكن .

تحقق من فهمك :

3) **مجوهرات** : تصوغ أسماء من 10 الى 25 عقدا ، ومن 15 الى 40 سوارا شهريا . فاذا كانت اجرة صياغة العقد 50 ريالا . واجرة صياغة السوار 30 ريالا ، وصاغت في احد الأشهر 30 قطعة من العقود والاساور على الأقل ، فكم قطعة من كلا النوعين عليها صياغتها لتحصل على اكبر اجر ؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد :

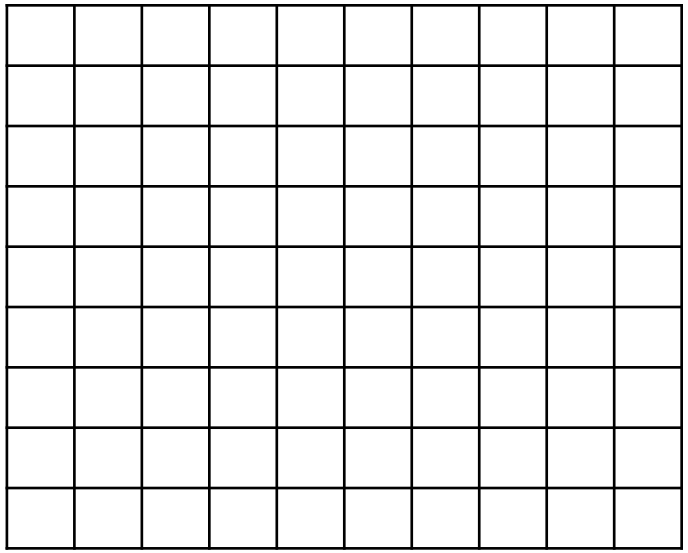
مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

1) $y \le 5$

$x \le 4$

$y \ge -x$

$f(x, y) = 5x - 2y$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

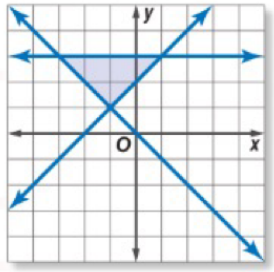
20) إعادة التدوير: يقوم مصنع بإعادة تدوير ما لايزيد على 1200 طن من البلاستيك شهريًّا لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لايقل عن 300 طن في صنع الحاويات الصغيرة وما لايقل عن 450 طنًّا في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحًا قدره 175 ريالًا لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 200 ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة. فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحاويات لتحقيق ذلك الربح؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

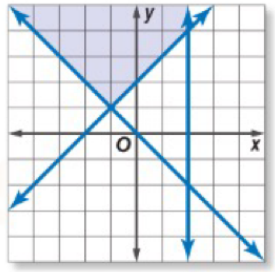
مسائل مهارات التفكير العليا :

23) حدِّد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضِّح إجابتك.

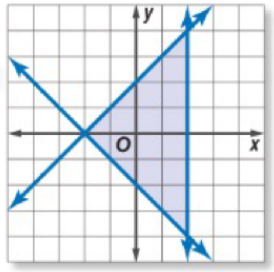
(a



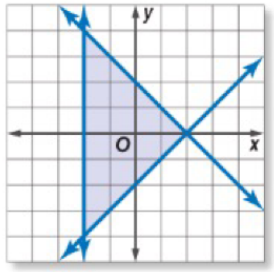
(b



(c



(d



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدريب على اختبار

25) حصل عامل على مبلغ 1950 ريالًا أجرة تبليط مساحة من الأرضيات والجدران في أحد البيوت، فإذا كانت أجرة تبليط المتر المربع من الأرضيات 12 ريالًا، وأجرة تبليط المتر المربع من الجدران 15 ريالًا وكان عدد أمتار بلاط الأرضيات يقل عن 3 أمثال عدد أمتار بلاط الجدران بـ $16m^2$، فأي أنظمة المعادلات الآتية تمثّل هذا الموقف؟

A $x + y = 1950$
$3x = y$

B $12x + 15y = 1950$
$x + 16 = 3y$

C $2x + 3y = 15$
$x + y = 12$

D $x - y = 1950$
$12x + 15y = 3$

26) هندسة: أيٌّ مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16$, $y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.

الواجب :

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق