

ضرب المصفوفات

تمهيد:

إذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 19 \end{bmatrix}$ ،
فجد $\underline{R} \cdot 5$

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

الاستراتيجية :

فيما سبق :

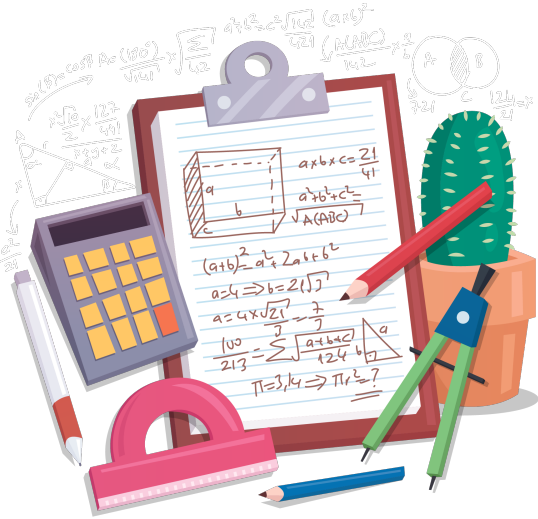
فكرة الدرس :

درسُ ضرب المصفوفات في عدد .

- أضرب المصفوفات .
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات .

تطوير - إنتاج - توثيق

إعداد : نورة الحربي ، روية السلمي .



لماذا ؟

	الشهر وعدد الأقلام			
نوع القلم	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام B ، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة P .

مصفوفة الأسعار P

الحبر الجاف الحبر السائل قلم الرصاص

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عدد الأقلام B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

يبين الجدول أن المكتبة باعت 249 قلم رصاص في شهر 2، فما عدد أقلام الحبر الجاف التي باعتها المكتبة في شهر صفر؟

تطوير - إنتاج - توثيق

ما سعر بيع الأقلام في شهر المحرم؟

ضرب المصفوفات

يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ،
وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$ ، فإن الناتج هو
المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.



تطوير - إنتاج - توثيق

ملاحظات:

إرشادات للدراسة

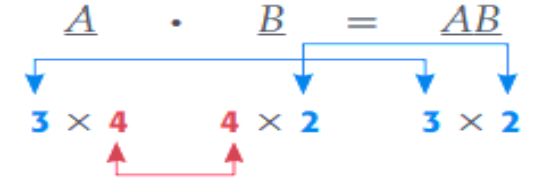
رمز المصفوفة

أحياناً تكتب $A_{m \times n}$
لتعبر عن مصفوفة A
رتبتها $m \times n$.

مثال : رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $A \cdot B$ في كل مما يأتي ، وإن كانت كذلك ، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة .

$$(a) \quad \underline{A}_{3 \times 4} \cdot \underline{B}_{4 \times 2}$$

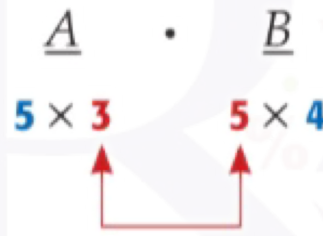


بما ان عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فان مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ معرفة ، ورتبتها 3×2

تحقق من فهمك:

$$(1A) \quad \underline{A}_{4 \times 6} \cdot \underline{B}_{6 \times 2}$$

$$(b) \quad \underline{A}_{5 \times 3} \cdot \underline{B}_{5 \times 4}$$



بما ان عدد أعمدة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فان مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ غير معرفة .

$$(1B) \quad \underline{A}_{3 \times 2} \cdot \underline{B}_{3 \times 2}$$

تطوير - إنتاج - توثيق

يمكن إيجاد ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج .

ضرب المصفوفات

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة $\underline{AB}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة $\underline{A}$ ، بعناصر العمود r من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

الرموز:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$$

مثال:

مثال : ضرب المصفوفات المربعة

اوجد $\underline{X} \underline{Y}$ اذا كانت $\underline{X} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\underline{XY} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

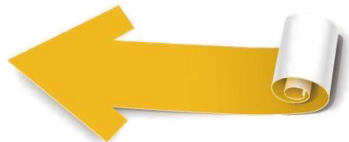
لاجراء عملية ضرب مصفوفتين لابد من اتباع الخطوات التالية :

الخطوة 1 : اضرب **عناصر الصف الأول** في المصفوفة $\underline{X}$ في **عناصر العمود الأول** في المصفوفة $\underline{Y}$ بالترتيب ، ثم اجمع نواتج الضرب ، وضع النتيجة في الصف الأول ، والعمود الأول من المصفوفة $\underline{X} \underline{Y}$.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 : اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني ، واكتب النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني .

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ \end{bmatrix}$$



الخطوة 3 : اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول ، واكتب النتيجة في الصف الثاني والعمود الأول .

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4 : اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني .

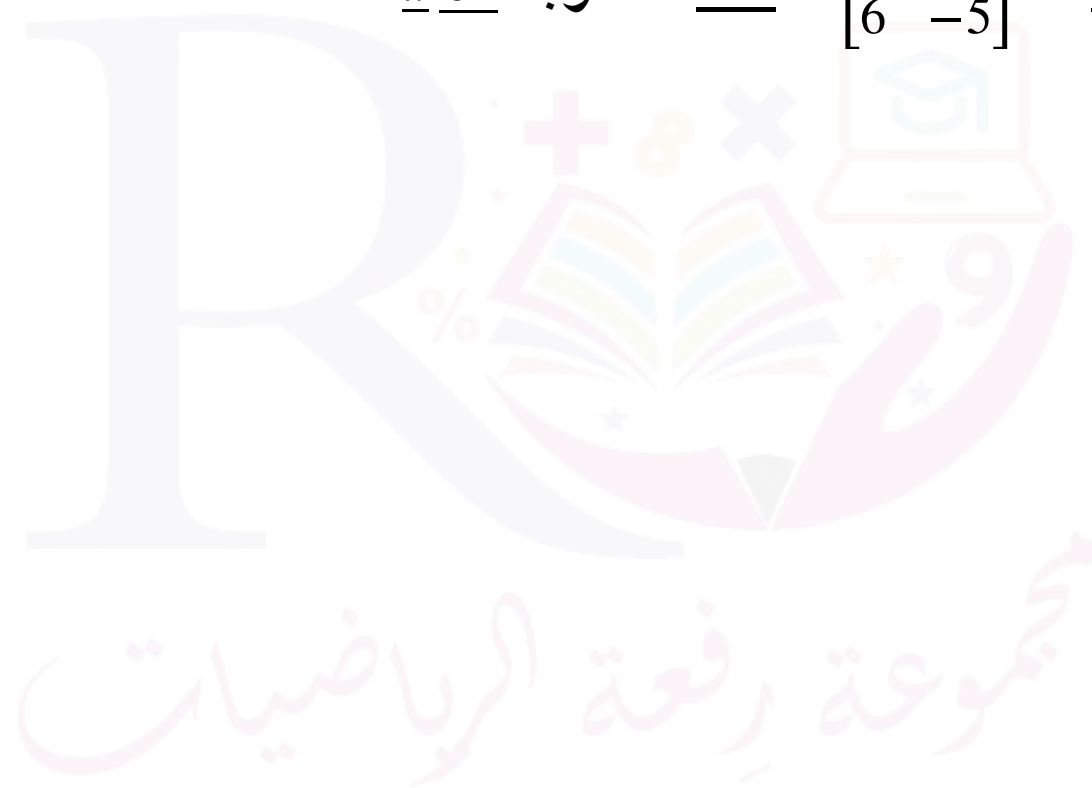
$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$

الخطوة 5 : بسط المصفوفة الناتجة .

$$\begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

تصوير - إساح - توييق

(2) إذا كانت $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $\underline{u} \underline{v}$.



مثال : ضرب المصفوفات

المركز الثالث	المركز الثاني	المركز الأول	الفريق
3	7	4	A
1	9	8	B
3	5	10	C
6	3	3	D

سباحة : في مسابقة للسباحة بين اربع فرق سجلت 7 نقاط لمن يحل في المركز الأول ، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني ، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث . استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة .

افهم : المعطيات

- جدول يبين عدد مرات حصول 4 فرق على المراكز الثلاثة الأولى في مسابقة للسباحة .
- عدد النقاط التي تحتسب للفرق في كل مركز .
- **المطلوب :** تحديد الفريق الفائز .

خطط : يمكن إيجاد النقاط النهائية التي احرزها كل فريق بضرب مصفوفة النتائج للفريق في مصفوفة عدد النقاط التي تحتسب لكل من المراكز (الأول و الثاني و الثالث) .

حل : اكتب كلا من النتائج والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين ، ورتب المصفوفتين على ان يكون **عدد الصفوف** في مصفوفة النقاط **يساوي عدد الاعمدة** في مصفوفة النتائج .

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{RP} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7) + 7(4) + 3(2) \\ 8(7) + 9(4) + 1(2) \\ 10(7) + 5(4) + 3(2) \\ 3(7) + 3(4) + 6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي احرزها كل من الفرق A , B , C , D على الترتيب ، لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة ، لأنه حصل على اكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة .

تحقق : المصفوفة $\underline{R}$ من الرتبة 4×3 ، والمصفوفة $\underline{P}$ من الرتبة 3×1 ، لذا فان حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 4×1 .



تدل البحوث الصحية والرياضية أن ممارسة السباحة نصف ساعة يوميًا تخفف ضغط الدم وتقوي القلب وتقلل معدل الكوليسترول في الدم وتزيد كفاءة الدورة الدموية، وتحرق 250 : 500 سعرة حرارية؛ لذا تعدّ من أفضل الرياضات لتخفيض الوزن.

مبيعات : ارجع الى فقرة « لماذا؟ » بداية الدرس ، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد سعر بيع الأقلام في كل شهر .



تطوير - إنتاج - توثيق

تذكر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات ، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات .

اختبار الخاصية الإبدالية

مثال :

إذا كانت $\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، فاوجد ناتج كل مما يأتي :

$\underline{G} \underline{H}$ (a)

$$\underline{G} \underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6-5 & 3-24-35 \\ 8+4+0 & 12+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

$\underline{H} \underline{G}$ (b)

$$\underline{H} \underline{G} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -18+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان $\underline{G} \underline{H} \neq \underline{H} \underline{G}$

a) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{A} \underline{B} = \underline{B} \underline{A}$ ؟



مثال : اختبار خاصية التوزيع

إذا كانت $\underline{J} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $\underline{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{L} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، فاجد ناتج كل مما يأتي :

$$\underline{J} \underline{K} + \underline{J} \underline{L} \quad (b)$$

$$\underline{J} (\underline{K} + \underline{L}) \quad (a)$$

$$\underline{J} \underline{K} + \underline{J} \underline{L} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{J} (\underline{K} + \underline{L}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix})$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3) + 4(-1) & 2(2) + 4(3) \\ -5(3) + (-2)(-1) & -5(2) + (-2)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-4) + 4(3) & 2(-1) + 4(0) \\ -5(-4) + (-2)(3) & -5(-1) + (-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 8 & 2 + 12 \\ 5 - 4 & -5 - 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\underline{J} (\underline{K} + \underline{L}) = \underline{J} \underline{K} + \underline{J} \underline{L} \quad \text{لاحظ ان}$$

(5) إذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

، فحدد ما إذا كانت المعادلة $\underline{R} = \underline{S} \underline{R} + \underline{T} \underline{R}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا .

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ، ولأي عدد k ، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٍّ منها معرفتين:

خاصية التوزيع
من اليمين
للمصفوفات

$$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\underline{C} + \underline{B}\underline{C}$$

خاصية التوزيع
من اليسار
للمصفوفات

$$\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{C}\underline{A} + \underline{C}\underline{B}$$

خاصية التجميع
لضرب
المصفوفات في
عدد

$$k(\underline{AB}) = (k\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(k\underline{B})$$

خاصية التجميع
لضرب المصفوفات

$$(\underline{AB})\underline{C} = \underline{A}(\underline{BC})$$

تأكد:

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يأتي أم لا، وإن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$\underline{A}_{2 \times 4} \cdot \underline{B}_{4 \times 3} \quad (1)$$

$$\underline{C}_{5 \times 4} \cdot \underline{D}_{5 \times 4} \quad (2)$$

$$\underline{E}_{8 \times 6} \cdot \underline{F}_{6 \times 10} \quad (3)$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[9 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

إذا كانت $\underline{X} = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$, $\underline{Z} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ فحدّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

$$\underline{XY} = \underline{YX} \quad (13)$$



تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كلِّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$\underline{A}_{5 \times 5} \cdot \underline{B}_{5 \times 5} \quad (16)$$

$$\underline{M}_{3 \times 1} \cdot \underline{N}_{2 \times 3} \quad (17)$$

$$\underline{J}_{2 \times 1} \cdot \underline{K}_{2 \times 1} \quad (19)$$

أوجد الناتج في كلِّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$[1 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (21)$$

تطوير - إنتاج - توثيق

(29) **أجنحة فندقية:** لدى مؤسسة للأجنحة الفندقية 3 مبانٍ

للإيجار، ويبين الجدول المجاور عدد الغرف في كل مبنى.
فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا
220 ريالاً، وللغرفة التي تحوي سريرين 250 ريالاً، وللغرفة
التي تحوي ثلاثة أسرة 360 ريالاً.

عدد الغرف			
غرفة بثلاث أسرة	غرفة بسريرين	غرفة بسرير واحد	المبنى
2	2	3	1
1	3	2	2
0	3	4	3

(a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الغرف، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

(b) اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

(c) ما مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

إذا كانت $k = 2$ ، $\underline{P} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ ، فحدّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

$$k(\underline{P}\underline{Q}) = \underline{P}(k\underline{Q}) \quad (30)$$



مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

إذا كانت $k = 2$ ، $\underline{P} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ ، فحدّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

$$\underline{PR} + \underline{QR} = (\underline{P} + \underline{Q})\underline{R} \quad (32)$$



مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

(43) **تبرير:** إذا كانت رتبة المصفوفة $\underline{AB}$ هي 5×8 ، ورتبة المصفوفة $\underline{A}$ هي 5×6 ، فما رتبة المصفوفة $\underline{B}$ ؟

تدريب على الاختبار

(48) في مشغل ثلاث آلات حياكة، فإذا كان إنتاج كل آلة في 3 أشهر كما في الجدول أدناه، وسعر بيع القطعة الواحدة من إنتاج كل آلة معطى أيضًا، فما المبلغ الذي سيحصل عليه المشغل من مبيعات الأشهر الثلاثة؟

سعر بيع القطعة	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3
28	26	19	36
19	48	27	16
31	36	11	18

A 6012 ريال
B 5400 ريال
C 1221 ريال
D 2320 ريال

(49) **رتبة المصفوفة:** ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- A** 1×4
B 3×3
C 4×1
D 4×3

تحصيلي:

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ فإن $\underline{A} \underline{A}$ تساوي .

الواجب:

تطوير - إنتاج - توثيق