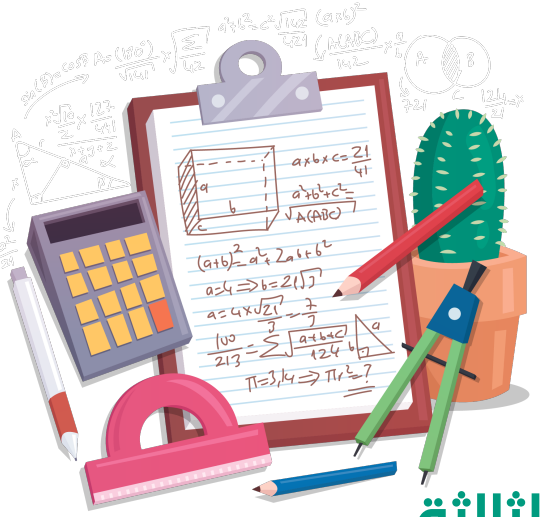
المحددات وقاعدة كرامر

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

الاستراتيجية :



فيما سبق : درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًا .

فكرة الدرس :
- أحسب المحـــددات .
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر .

المفردات :
- المحددة .
- محدد الدرجة الثانية .
- محدد الدرجة الثالثة .
- قاعدة الأقطار .
- مصفوفة المعاملات .
- قاعدة كرامر .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، قام عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، تأكد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. وأنه من الممكن بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدِّدات لحساب مساحتها.

ما الطريقة التي تعرفها سابقاً لإيجاد مساحة مثلث ؟

لماذا يصعب استعمال الصيغة السابقة في هذه الحالة ؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

كل مصفوفة مربعة لها **مـحددة** ، وتسمى محددة المصفوفة من النوع 2×2 **مـحددة الدرجة الثانية**

القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة : هو جمع عناصر المصفوفة التي تمتد من الزاوية اليسرى العلوي للزاوية اليمنى السفلى .

التعبيراللفظي: يرمز لمحددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرمــوز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

القطر الرئيس

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

مثال : محددة الدرجة الثانية

اوجد قيمة كل محدد فيما يأتي :

(a $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (9)5 - (-4)8$

$= 45 + 32$

$= 77$

(b $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6)$

$= 0 - 24$

$= -24$

تحقق من فهمك :

(1A $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

(1B $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

ملاحظات :

قراءة الرياضيات

المحدِّدات :

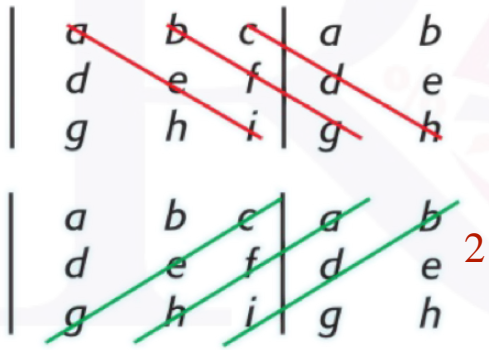
يرمز لمحدِّدة المصفوفة A بالرمز $|A|$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

محددة الدرجة الثالثة : تسمى محددات المصفوفة من الرتبة 3×3

يمكنك حساب هذه المحددات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدد المصفوفة 2×2

الطريقة الأولى : باستعمال قاعدة الأقطار



خطوة 1 : أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

خطوة 2 : أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3 : أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4 : لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة **3** من ناتج الخطوة **2** .

الطريقة الثانية : باستعمال محددة المصفوفة 2×2

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3×3.

مثال : حساب محددة المصفوفة 3×3

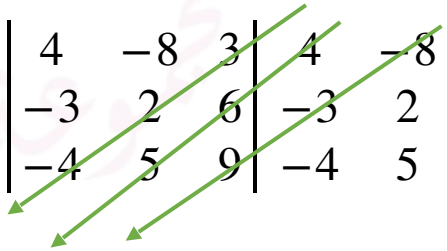
اوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار ، ثم باستعمال محددة المصفوفة 2×2 .

أولا : باستعمال قاعدة الأقطار :

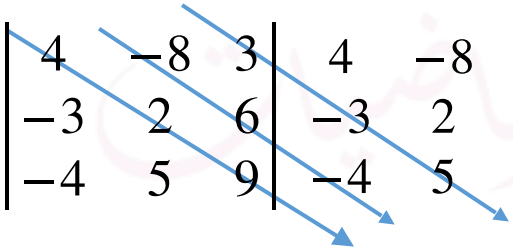
الخطوة 1 : اعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة :

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

الخطوة 2 : جد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها .



-4(2)(3) = -24
5(6) (4) = 120
9(-3) (-8) = 216



4(2) (9) = 72
-8(6) (-4) = 192
3(-3) (5) = -45

الخطوة 3 : اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة .

$-24 + 120 + 216 = 312$, $72 + 192 + (-45) = 219$

الخطوة 4 : اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول .

$219 - 312 = -93$

فتكون قيمة المحددة هي **-93**

ثانيا : باستعمال محددة المصفوفة 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-12) + 8(-3) + 3(-7)$$

$$= -93$$

تحقق من فهمك :

(2A $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(2B $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تستعمل المحددات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث . فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة ، فيمكن استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث .

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

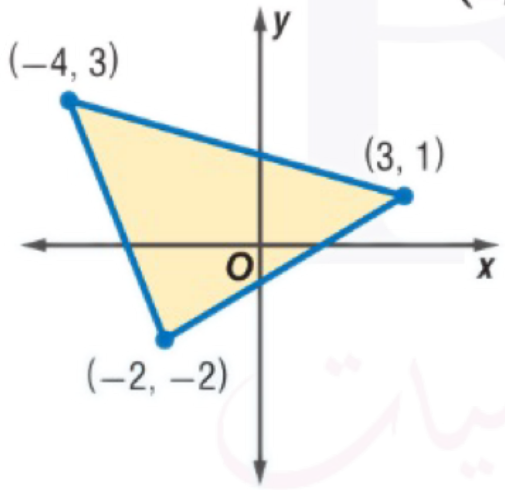
لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A ، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:

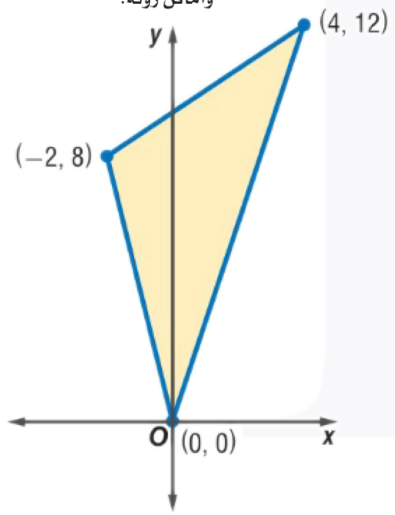


$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال : حساب مساحة المثلث باستعمال المحددات

عالم الحيوان : عد الى فقرة « لماذا؟ » « بداية الدرس . اذا كانت احداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فية النمر موضحة في الشكل المجاور بالكليومترات ، فاستعمل المحددات لإيجاد مساحة الإقليم .

يعيش النمر في أقاليم قد تصل مساحتها إلى $100\,km^2$ ، ويحرس النمر إقليمه الذي يعيش فيه ويعرفه بتتبع أثره وأماكن روثه.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$(a, b) = (0, 0)$

$(c, d) = (4, 12)$

$(e, f) = (-2, 8)$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$0 + 0 + 32 = 32$ $\qquad$ $-24 + 0 + 0 = -24$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(32 - (-24)) = 28$$

فتكون مساحة الإقليم الذي يعيش فيه النمر هي $28K\ m^2$

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

تحقق من فهمك :

خرائط : يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها ، فاذا كانت احداثيات هذه النقاط هي : (9 , 11) , (4 , 6) , (3,15) ، بحيث تمثل كل وحدة على الخريطة 0.5 km. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مصفوفة المعاملات: تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام .

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

المحدِّدات

تستعمل المحدِّدات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

قاعدة كرامر

استعمل قاعدة كرامر لحل نظام من معادلتين خطيتين

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام

$$ax + by = m$$
$$fx + gy = n$$

حيث ،

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$$

$$|C|$$

$c \neq 0$

للنظام حل وحيد

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|} \quad , \quad x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$$

$c = 0$

- للنظام عدد لانهائي من الحلول
- ليس للنظام حل

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال : حل نظام من معادلتين

حل النظام الاتي باستعمال كرامر:

$5x - 6y = 15$

$3x + 4y = -29$

خطوات الحل :

أولا : إيجاد قيمة المحدد (محدد المعاملات)

$$|\underline{c}| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(-6) = 38$$

ثانيا : إيجاد قيمة x , y

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{c}|} = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38}$$

$$= \frac{15(4) - (-29)(-6)}{38}$$

$$= \frac{60 - 174}{38}$$

$$= -3$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{c}|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38}$$

$$= \frac{5(-29) - 3(15)}{38}$$

$$= \frac{-145 - 45}{38}$$

$$= -5$$

حل النظام هو : (-5 , -3)

تحقق :

$5x - 6y = 15$

$5(-3) - 6(-5) = 15$

$-15 + 30 = 15$

$15 = 15$ √

$3x + 4y = -29$

$3(-3) + 4(-5) = -29$

$-9 - 20 = -29$

$-29 = -29$ √

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدِّدة مصفوفة المعاملات $\underline{C}$ صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.

تحقق من فهمك :

(4A $7x + 3y = 37$

$-5x - 7y = -41$

(4B $8x - 5y = 70$

$9x + 7y = 3$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

استعمل قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات خطية .

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + \ell z &= p \end{aligned}$$

حيث ،

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$$

فإن حل هذا النظام هو

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مثال : حل نظام من ثلاث معادلات

حل النظام الاتي باستعمال قاعدة كرامر :

$4x + 5y - 6z = -14$

$3x - 2y + 7z = 47$

$7x - 6y - 8z = 15$

$$|\underline{c}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 621$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|} \quad , \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{621} \quad , \quad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{621} \quad , \quad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{621}$$

$$= \frac{3105}{621} = 5 \quad , \quad = -\frac{1242}{621} = -2 \quad , \quad = \frac{2484}{621} = 4$$

وعليه يكون حل النظام هو : (4 , -2 , 5)

تحقق :

4 (5) + 5(-2) -6 (4) = -14

20 -10 -24 = -14
-14 = -14 √

7 (5) – 6 (-2) -8 (4) = 15

35 + 12 -32 = 15
15 = 15 √

3(5) – 2(-2) + 7 (4) = 47

15 + 4 + 28 = 47
47 = 47 √

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.

تحقق من فهمك :

5A) $3x + 5y + 2z = -7$

$-4x + 3y - 5z = -19$

$5x + 4y - 7z = -15$

5B) $6x + 5y + 2z = -1$

$-x + 3y + 7z = 12$

$5x - 7y - 3z = -52$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد : أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

12) $4x - 5y = 39$

$3x + 8y = -6$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

24) $10a - 3b = -34$

$3a + 8b = -28$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

28)
$$3a - 5b - 9c = 17$$
$$4a - 3c = 31$$
$$-5a - 4b - 2c = -42$$

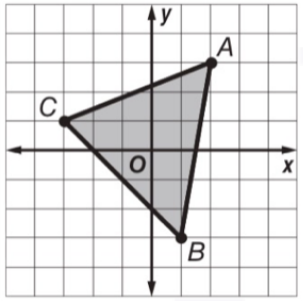
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا :

تدريب على اختبار

35) إجابة قصيرة : أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2، بحيث تكون جميع عناصرها أعدادًا سالبةً ومحدِّدتها تساوي 20.

36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة

تحصيلي : اوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$

الواجب :

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق