القانون العام والمميز

اليوم :

التاريخ :

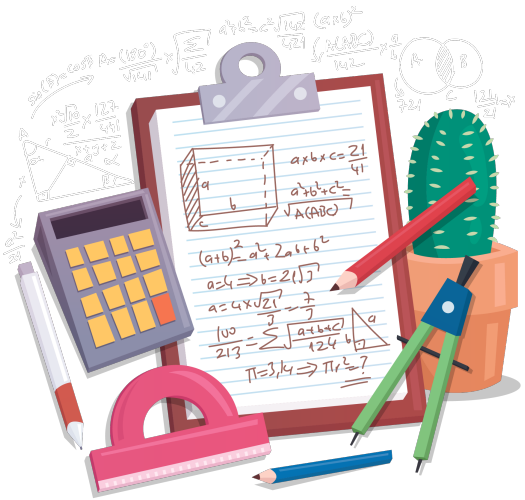
الحصة :

الاستراتيجية :

تمهيد :

ماهي طرق حل
المعادلات التربيعية ؟

فيما سبق : درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع .



فكرة الدرس :

- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام .
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها .

المفردات :

- القانون العام .
- المميز .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

أُطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$$h = -4.9t^2 + 117t + 42$$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0.$$

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

ما تأثير زيادة قيمة t في المعادلة على قيمة h ؟

ما شكل تمثيل المعادلة البياني؟

ما اتجاه فتحة القطع المكافئ؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

طرق حل المعادلات التربيعية

التمثيل البياني

التحليل إلى العوامل

الجذر التربيعي

إكمال المربع

القانون العام

مجموعة رقمية للرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

$ax^2 + bx + c = 0$ معادلة تربيعية على الصورة القياسية

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ اقسم كلا الطرفين على a

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ اطرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ أكمل المربع

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ حلّل الطرف الأيسر

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ بسّط الطرف الأيمن

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ خاصية الجذر التربيعي

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اطرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بسّط

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

$2x^2 + 8x + 1 = 0$

$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$

$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$

$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$

$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$

$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$

$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

مجموعة رفعة رياضيات
تطوير - إنشاء - توثيق

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

مثال : معادلة لها جذران نسبيان

حل المعادلة x^2 - 10 x = 11 باستعمال القانون العام .

أولا : اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$

، وحدد قيم كل من a , b , c .

ax^2 + b x + c = 0

x^2-10 x =11 → 1x^2- 10 x - 11 = 0

ثم اعوض بعد ذلك بتلك القيم في القانون العام .

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{10 \pm 12}{2}$$

$$X = \frac{10 + 12}{2} \quad \text{او} \quad x = \frac{10 - 12}{2}$$

$$= \frac{22}{2} = 11 \qquad = \frac{-2}{2} = -1$$

وعليه يكون الحلان هما : 11 , 1 -

. تحقق : عوض كلتا القيمتين في المعادلة الاصلية

$x^2 - 10x = 11$

$(11)^2 - 10(11) = 11$

$121 - 110 = 11$

$11 = 11$ √

$x^2 - 10x = 11$

$(-1)^2 - 10(-1) = 11$

$1 + 10 = 11$

$11 = 11$ √

تحقق من فهمك :

(1A $x^2 + 6x = 16$

مجموعة رفعة الرياضيات
تصوير - إنتاج - توثيق

$2x^2$ + 25 x + 33 = 0 (1B

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

عندما يكون ماتحت الجذر في القانون العام صفرًا ، فإننا نحصل على جذر نسبي واحد، ويكون حل المعادلة في هذه الحالة هو هذا الجذر النسبي ، ولكنه مكرر مرتين .

مثال : معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

حل المعادلة $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدد قيم كل من a, b, c وعوض هذه القيم في القانون العام .

$$a = 1, b = 8, c = 16$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(16)}}{2}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$= \frac{-8}{2} = -4$$

الحل مكرر هو 4- (مكرر مرتين)

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

(2A $x^2 - 16x + 64 = 0$

(2B $x^2 + 34x + 289 = 0$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها على الصورة الجذرية .

مثال : الجذور غير النسبية

حل المعادلة $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام .

$$a = 2, b = 6, c = -7$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$$

الحلان التقريبيان هما : 0.9 , -3.9

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

(3A $3x^2 + 5x + 1 = 0$

(3B $x^2 - 8x + 9 = 0$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

ملاحظات :

إذا كان ماتحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا ، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين .

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

تذكّر أن تكتب حلك في الصورة $a + bi$ ، وهذه الصورة تُسمّى الصورة القياسية للعدد المركب.

مثال : الجذور المركبة

حل المعادلة : $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام .

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$

$$= 3 \pm i$$

الحلان هما : $3 - i$, $3 + i$ وهما عددان مركبان مترافقان .

تحقق من فهمك :

(4A $3x^2 + 5x + 4 = 0$

(4B $x^2 - 4x = -13$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

الجذور

تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X.

الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية، لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. العبارة $b^2 - 4ac$ تسمى **المميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{المميز}$$

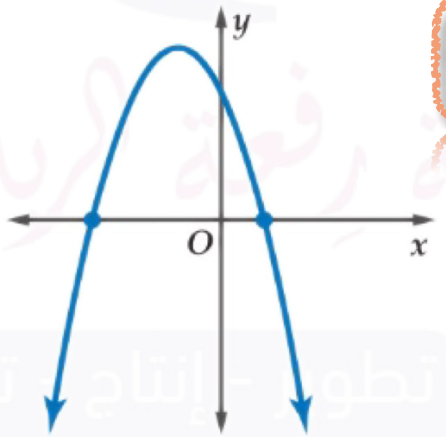
ويمكنك استعمال المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية وأنواعها، والجدول في الصفحة الآتية يلخص الأنواع الممكنة للجذور، وذلك للتأكد من صحة حلك.

المميز

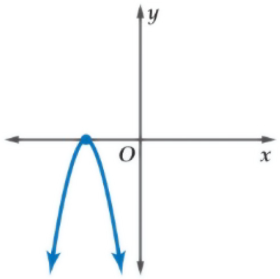
في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ **حيث** a, b, c **أعداد نسبية**، $a \neq 0$.

$b^2 - 4ac > 0$

مربع كامل	ليست مربعًا كاملاً
عدد الجذور وأنواعها	عدد الجذور وأنواعها
جذران حقيقيان نسبيان	جذران حقيقيان غير نسبيين

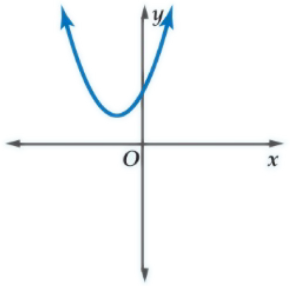


$b^2 - 4ac = 0$



جذر حقيقي مكرر مرتين

$b^2 - 4ac < 0$



جذران مركبان

مثال : وصف الجذور

اوجد قيمة المميز لكل من المعادلتين التربيعيتين الاتيتين ، وحدد عدد جذور كل منهما وانواعها :

(a $7x^2$ **- 11 x + 5 = 0**

a = 7 , b = -11 , c = 5

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)$**(5)**

= 121 – 140

= -19

المميز سالب ، لذا يوجد جذران مركبان مترافقان.

(b x^2 **+ 22x + 121 = 0**

a = 1 , b = 22 , c = 121

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)$**(121)**

= 484 - 484

= 0

المميز يساوي صفرا ، لذا يوجد جذر حقيقي واحد مكرر مرتين .

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

(4A $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

(4B $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية ، والجدول أدناه يلخص تلك الطرائق .

حل المعادلات التربيعية

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا مثال: $x^2 - 7x = 0$؛ أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 5x + 6 = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	عندما لايمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها. مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تأكد : حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $x^2 + 12x - 9 = 0$

5) $10x^2 - 3 = 13x$

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أجب عن الفرعين a،b لكلِّ معادلة تربيعية مما يأتي:

9) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

13) $x^2 + 45x = -200$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أجب عن الفرعين **a** ، **b** لكلٍّ معادلة تربيعية مما يأتي:

21) $x^2 - 6x = -9$

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا :

32) اكتشف الخطأ : حددت كلٌّ من هدى وندى عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

هدى

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

وبما أن المميز موجب فللمعادلة حلان حقيقيان.

ندى

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

وبما أن المميز سالب فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

34) تبرير : حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك:

a) إذا كانت إشارتا كلٍّ من المعاملَين a،c في المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة القياسية مختلفتين، فإن جذرَي المعادلة حقيقيان.

b) إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدريب على اختبار

36) أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟

A $x^2 - 2x + 5 = 0$

B $x^2 - 2x - 5 = 0$

C $x^2 = 19$

D $x^2 - 8x = -16$

37) قيمة المميز للمعادلة $x^2 - 8x = 0$ هي:

A -64

B -8

C 8

D 64

تحصيلي :

قيمة المميز للمعادلة x^2 -8x = 0 تساوي ...

-46 ، 8 ، 46 ، -8

الواجب :

مجموعة رفقة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق