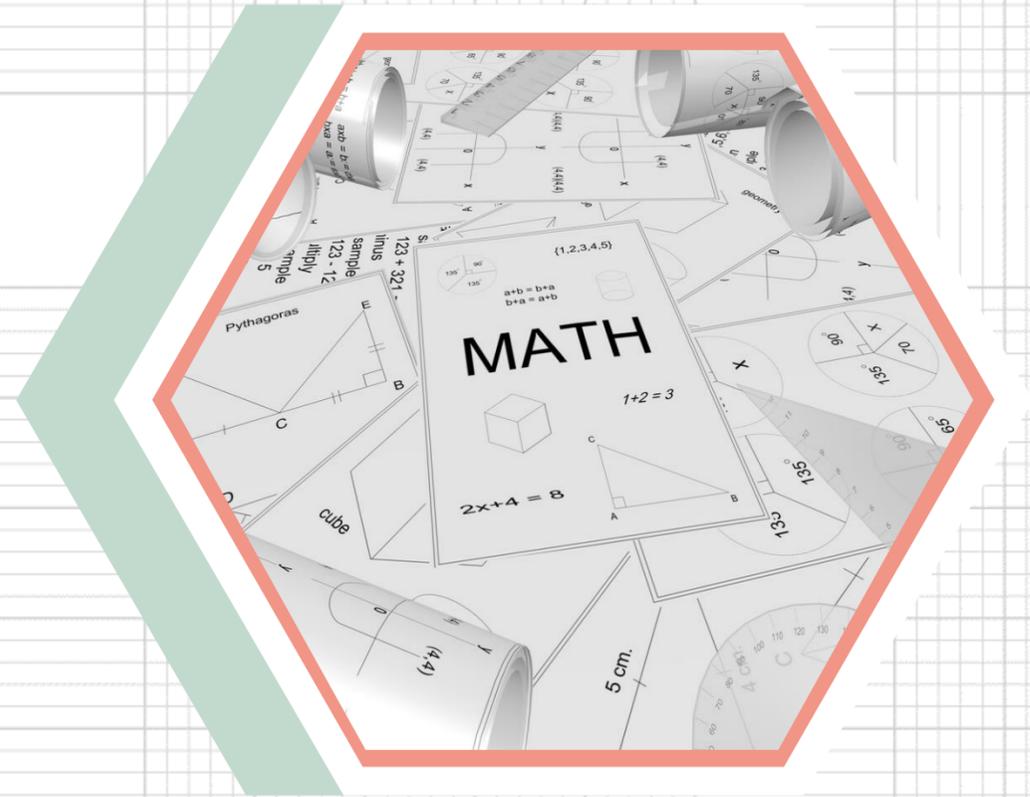


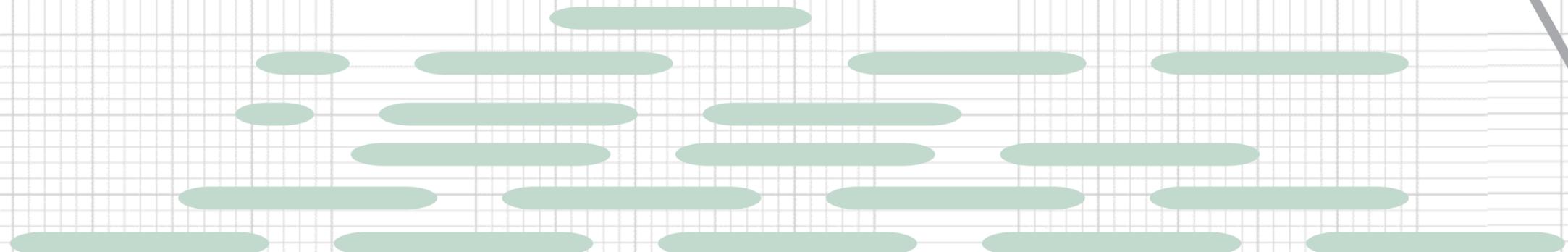
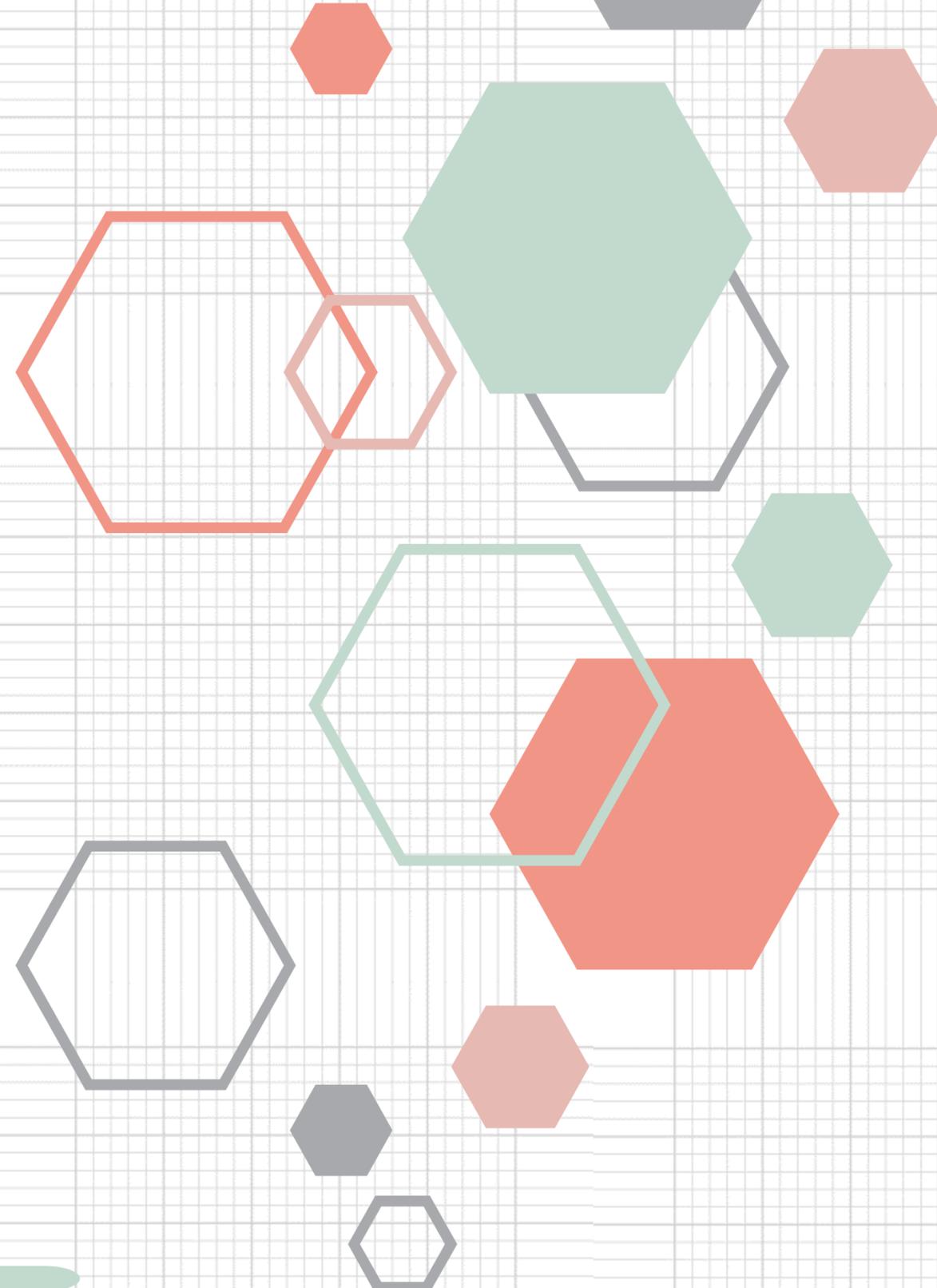
رياضيات ١-٢

إعداد: أ/عبدالعزیز الشریف



٤-٣
قسمت كثيرات الحدود

كثيرات الحدود
وقدوالها





فيما سبق

➤ درستُ قسمةً وحيدات الحد.

والآن

➤ أقسم كثيرات الحدود مستعملًا القسمة الطويلة.

➤ أقسم كثيرات الحدود مستعملًا القسمة التركيبية.



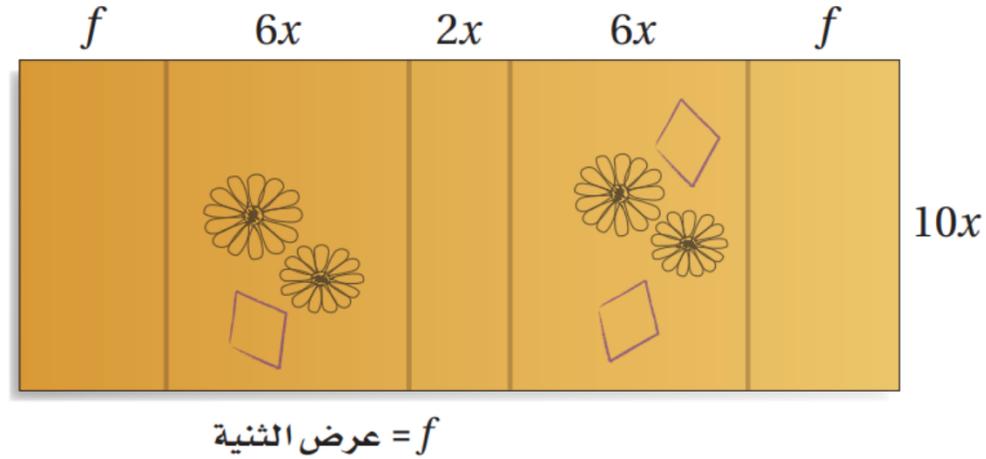
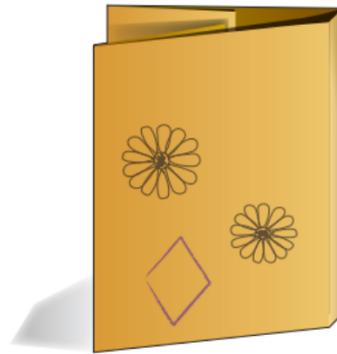
المفردات

القسم التركيبية ➤



لماذا؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.





قسمة كثيرة حدود على وحدة حد

القسمة الطويلة: تعلمت في الدرس (3-3) قسمة وحدات الحد، لذا يمكنك قسمة كثيرة حدود على وحدة حد مستعملًا المهارات نفسها.

مثال (1)

بسط العبارة: $\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$

اقسم كل حد في البسط على المقام

اقسم

$$y^{1-1} = y^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} &= \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18x^2y}{3xy} \\ &= \frac{6}{3} \cdot x^{4-1}y^{3-1} - 1 + \frac{12}{3} \cdot x^{3-1}y^{2-1} - 1 - \frac{18}{3} \cdot x^{2-1}y^{1-1} \\ &= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x \end{aligned}$$



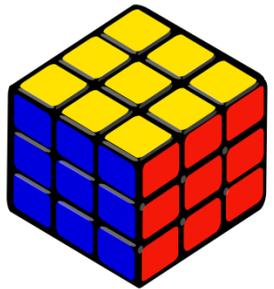
قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

تحقق من فهمك

$$(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1} \quad \mathbf{1B} \quad (20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf) \quad \mathbf{1A}$$



الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف



قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى

يمكنك استعمال عملية مشابهة للقسمة الطويلة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى. وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة.

مثال (٢)

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{) x^2 + 3x - 40} \\ \underline{(-) x^2 - 5x} \\ 8x - 40 \\ \underline{(-) 8x - 40} \\ 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $x + 8$ ، والباقي 0.

$$\frac{x^2}{x} = x \text{ لأن } x \text{ بضرب المقسوم عليه في } x$$

بالطرح

$$\frac{8x}{x} = 8 \text{ لأن } 8 \text{ بضرب المقسوم عليه في } 8$$

بالطرح

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:

- اكتب كثيرة الحدود في كل من المقسوم والمقسوم عليه، بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيباً تنازلياً حسب درجتها.

- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.

- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.

- استمر بقسمة الحد الثاني... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.



تحقق من فهمك

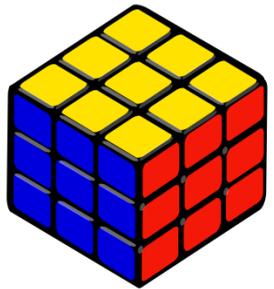
استعمل القسمة الطويلة لإيجاد الناتج في كل مما يأتي :

$$(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1) \quad \text{(2B)}$$

$$(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3) \quad \text{(2A)}$$



الحل



تصميم: عبد العزيز الشريف



اختبار سابق



قد ينتج باقٍ عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية، فمثلاً عند إيجاد $11 \div 3$ يكون الناتج 3 والباقي 2، وتكتب عادةً على الصورة $3 + \frac{2}{3}$. ويمكنك كتابة نتيجة قسمة كثيرتي حدود مع باقٍ بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة

الاختبار من متعدد

يمكنك حذف بعض البدائل عن طريق اختيار قيمة للمتغير a ثم تعويض هذه القيمة في العبارة الأصلية وفي البدائل وإيجاد قيمة كل منها.

مثال (٣)

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

$-a - 10 + \frac{19}{3 - a}$ C
 $-a - 10 - \frac{19}{3 - a}$ D

$a + 10 - \frac{19}{3 - a}$ A
 $-a + 10$ □

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن العامل الثاني مرفوع للأس -1 ، فهذه إذن مسألة قسمة.

$$(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = \frac{a^2 + 7a - 11}{3 - a}$$



حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r} -a - 10 \\ -a + 3 \overline{) a^2 + 7a - 11} \\ \underline{(-) a^2 - 3a} \\ 10a - 11 \\ \underline{(-) 10a - 30} \\ 19 \end{array}$$

لتسهيل عملية القسمة، أعد كتابة $3 - a$ على الصورة $3 - a + 3$

$$-a(-a + 3) = a^2 - 3a$$

$$7a - (-3a) = 10a$$

$$-10(-a + 3) = 10a - 30$$

$$-11 - (-30) = 19$$

ناتج القسمة هو $-a - 10$ ، والباقي 19 .

لذا فإن $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = -a - 10 + \frac{19}{3 - a}$ ومن ثم تكون الإجابة هي البديل C.



تحقق من فهمك

3) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$ ؟

$r - 6 + \frac{13}{1 - r}$ C

$-r - 6 + \frac{13}{1 - r}$ A

$r + 6 - \frac{13}{1 - r}$ D

$r + 6$ B



القسمة التركيبية



القسمة التركيبية: القسمة التركيبية هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مفهوم أساسي

أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

القسمة التركيبية

- الخطوة 1:** اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازلياً بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $X-2$ ، ثم اكتب الثابت 2 في الصندوق، و اكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.
- الخطوة 2:** اضرب المعامل الأول في 2 ، و اكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.
- الخطوة 3:** اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.
- الخطوة 4:** كرر الخطواتين 2 , 3 على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.





القسمة التركيبية

مثال (٤)

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكر أن الحدود تجمع
ولا تطرح عند إجراء
القسمة التركيبية.

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم. وكتب الثابت r في الصندوق، وهو في هذا المثال 4. ثم اكتب المعامل الأول وهو 2 أسفل الخط الأفقي.

$$\begin{array}{r} \underline{4 \mid} \quad 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24 \\ \quad \downarrow \\ \quad 2 \qquad \qquad \qquad | \end{array}$$

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في الثابت r :

$2(4) = 8$ ، وكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.

$$\begin{array}{r} \underline{4 \mid} \quad 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24 \\ \qquad \quad 8 \\ \quad 2 \nearrow \qquad \qquad \qquad | \end{array}$$

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني:

$$-13 + 8 = -5$$

$$\begin{array}{r} \underline{4 \mid} \quad 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24 \\ \qquad \quad 8 \\ \quad 2 \quad -5 \qquad \qquad \qquad | \end{array}$$



تحقق:

اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه،
فيكون الناتج هو المقسوم.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 6 \\ (\times) \quad x - 4 \\ \hline -8x^2 + 20x - 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + 6x \\ \hline 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24 \end{array}$$

الخطوة 4: اضرب المجموع وهو -5 في الثابت r : $-5 \times 4 = -20$ ،

واكتب الناتج أسفل المعامل التالي، ثم اجمع:

$26 + (-20) = 6$. اضرب المجموع وهو 6 في الثابت r :

$6(4) = 24$ ، واطب ناتج الضرب تحت المعامل التالي،

ثم اجمع: $-24 + 24 = 0$.

إذن ناتج القسمة هو $2x^2 - 5x + 6$ ، والباقي 0 .

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24} \\ \underline{ 8 \quad -20 \quad 24} \\ 2 \quad -5 \nearrow \quad 6 \nearrow \quad | \quad 0 \end{array}$$

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود
في كثيرة حدود المقسوم
فأضفه وليكن معامله
صفرًا. فمثلاً إذا كان

المقسوم

$$2x^3 - 4x^2 + 6$$

فاكتبه في صورة

$$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$$



تصميم: عبد العزيز الشريف

القسمة التركيبية

تحقق من فهمك

استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي:

$$(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2) \quad \mathbf{4C}$$

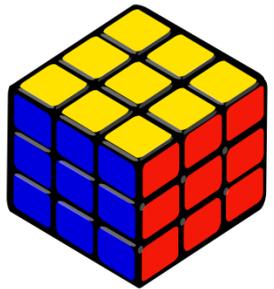
$$(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3) \quad \mathbf{4A}$$

$$(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2) \quad \mathbf{4D}$$

$$(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2) \quad \mathbf{4B}$$



الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف



معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1



ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$ ، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي الواحد، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية.

مثال (٥)

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكر أن تقسم جميع

الحدود في البسط

والمقام على معامل x

في المقام.

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

أعد كتابة العبارة ليكون معامل x في المقسوم عليه 1
وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على 3.

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} = \frac{(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div 3}{(3x + 1) \div 3}$$

$$= \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

بسّط كلا من البسط والمقام

وبما أن المقسوم لا يحتوي حدًا ثابتًا، فضع صفرًا مكانه.

$$x-r = x + \frac{1}{3}, r = -\frac{1}{3} \rightarrow \begin{array}{r|rrrrr} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ & & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 2 & -\frac{2}{3} \end{array}$$



تحقق: أوجد ناتج القسمة مستعملًا القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 + x + 2 \\
 3x + 1 \overline{) 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x} \\
 \underline{(-) 3x^4 + x^3} \\
 (-) -6x^3 + x^2 + 7x \\
 \underline{(-) -6x^3 - 2x^2} \\
 (-) 3x^2 + 7x \\
 \underline{(-) 3x^2 + x} \\
 (-) 6x \\
 \underline{(-) 6x + 2} \\
 -2
 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$ ✓

وعليه فإن الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{x + \frac{1}{3}}$ وأخيرًا بسّط الكسر

اضرب كلاً من البسط والمقام في العدد □

$$\frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \frac{3 \times \frac{2}{3}}{3 \times (x + \frac{1}{3})}$$

$$\text{بسّط} = \frac{2}{3x + 1}$$

وعليه يكون الناتج هو: $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$



معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

تحقق من فهمك

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي :

$$(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1) \quad \text{5B}$$

$$(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1) \quad \text{5A}$$

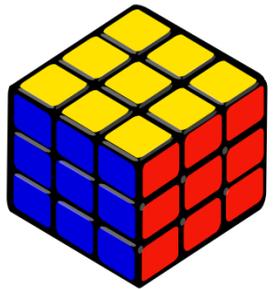
$$(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4) \quad \text{5D}$$

$$(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4) \quad \text{5C}$$



تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



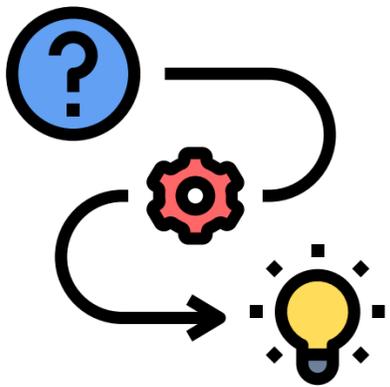
تصميم: عبدالعزيز الشريف

تأكد

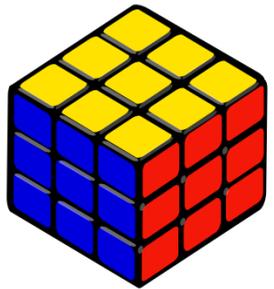
استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلِّ ممَّا يأتي:

$$(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1) \quad (4)$$

$$(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2) \quad (3)$$



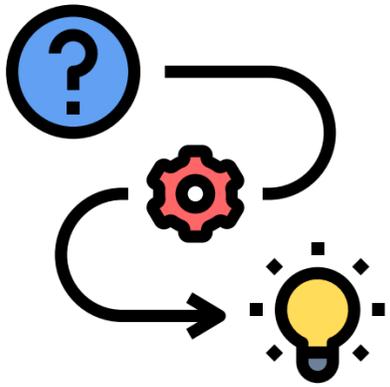
الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

مسائل التفكير العليا

إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتجه عن العلاقة بينهما؟



تصليبي

أيُّ كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟

$x^2 + x + 12^3$ **C**

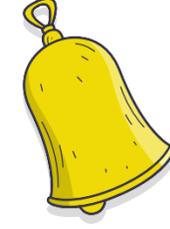
$x^3 + x^2 - 2x^4$ **A**

$1 + x + x^3$ **D**

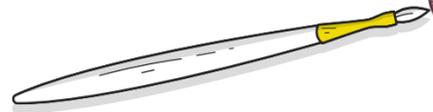
$-2x^2 - 3x + 4$ **B**



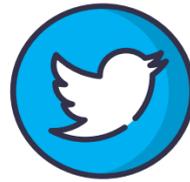
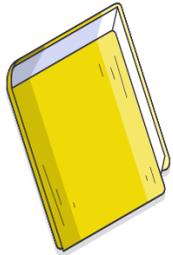
تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح



حساباتي على السوشيال ميديا



تصميم: عبد العزيز الشريف