حل معادلات كثيرات الحدود

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

الاستراتيجية :

تمهيد :

أوجد قيمة :

$x^2 + 6x + 9$ ؟

فيما سبق : درستُ حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل .

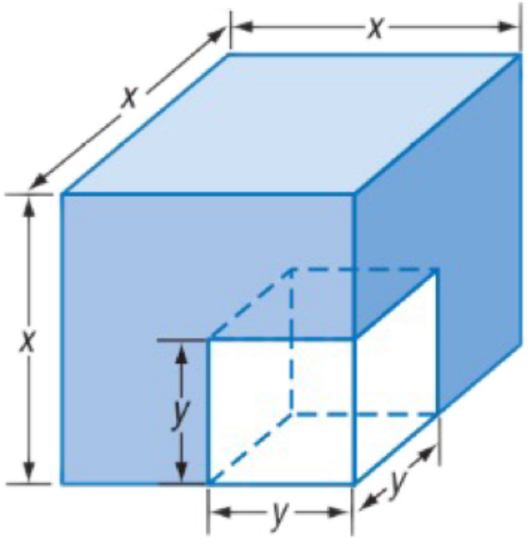
فكرة الدرس :
- أحل كثيرات الحدود .
- أحل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل .

المفردات :
- كثيرة حدود أولية .
- الصورة التربيعية .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطي حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية x^3-y^3.



ملاحظات :

إرشادات للدراسة

التحليل التام لكثيرات الحدود

يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حللت إلى أقصى درجة ممكنة.

مجموع مكعبين والفرق بينهما

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

كثيرة الحدود أولية : تسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة الحدود المعطاة .

مثال : مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلل كلا من كثيرتي الحدود الاتيتين تحليلا تاما ، واذا لم يكن ذلك ممكنا ، فاكتب كثيرة حدود أولية .

a) $16x^4 + 54xy^3$

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(8x^3 + 27y^3)$

كل من $8x^3$, $27y^3$

$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$

$= (2x+3y)((2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2)$

$= (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

b) $8y^3 + 5x^2$

الحد الأول مكعب كامل ، لكن الحد الثاني ليس كذلك ، لذا لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال طريقة مجموع مكعبين ، ولا يمكن تحليلها كذلك بطرائق تحليل كثيرات الحدود التربيعية ، او بإخراج العامل المشترك الأكبر ، لذا فهي كثيرة حدود أولية .

تحقق من فهمك :

1A) $5y^4 - 320\, y\, z^3$

1B) $-54w^4 - 250\, wz^3$

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولًا عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد ما إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملًا واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

مثال : التحليل بتجميع الحدود

حلل كلا من كثيرتي الحدود الاتيتين تحليلا تاما ، واذا لم يكن ذلك ممكنا ، فاكتب كثيرة حدود أولية .

a) $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

$$8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$$

$$= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy)$$

$$= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c)$$

$$= (4x + 3y)(2a + b + c)$$

b) $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

$$20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$$

$$= (20fy - 10hy + 15gy) + (8hz - 16fz - 12gz)$$

$$= 5y(4f + 4g - 2h) - 4z(4f + 3g - 2h)$$

$$= (5y - 4z)(4f + 3g - 2h)$$

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة : للتحقق من صحة إجابتك، اضرب العوامل لتتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

تحقق من فهمك :

2A) $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

2B) $13ax + 18bz - 15by - 14az$

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

التحليل باستعمال الفرق بين مكعبين:
في مثال $3a$، إذا بدأت بالتحليل على اعتبار أن كثيرة الحدود المعطاة فرق بين مكعبين؛ فإنك تحصل على التحليل التالي:
$(x^2-y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
وهو تحليل غير تام ويصعب إتمامه.

إرشادات للدراسة

تجميع 6 حدود أو أكثر
جمّع الحدود التي بينها أكبر عدد من العوامل المشتركة.

تُعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الأساسية لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر، أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكنك تحليلها اعتمادًا على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه .

مثال : التحليل باستعمال الفرق بين مربعين ، ومجموع مكعبين ، والفرق بين مكعبين

حلل كلا من كثيرتي الحدود الاتيتين تحليلا تاما ، واذا لم يكن ذلك ممكنا ، فاكتب كثيرة حدود أولية .

a) $x^6 - y^6$

يمكن اعتبار كثيرة الحدود هذه فرقا بين مربعين او فرقا بين مكعبين ، وفي هذه الحالة يجب ان يتم التحليل أولا على اعتبار انها فرق بين مربعين قبل التحليل على اعتبار انها فرق بين مكعبين ، تسهيلا للتحليل .

$$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$$

$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

b) $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

بما ان كثيرة الحدود هذه من 6 حدود ، اذن حلل أولا بتجميع الحدود .

$$a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$$

$$= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3)$$

$$= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9)$$

$$= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9)$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2$$

تحقق من فهمك :

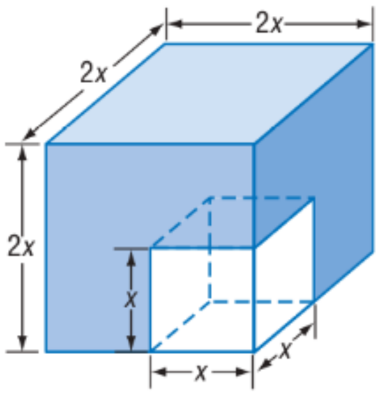
3A) $a^6 + b^6$

3B) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرة الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية .

مثال : حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل

هندسة : ارجع الى فقرة لماذا في بداية هذا الدرس . اذا كان طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير ، وحجم الجزء المتبقي $7000cm^3$ ، فما بعدا المكعبين ؟



بما ان طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير فيمكن ان يعبر عن طول ضلع المكعب الصغير بـ x ، وطول ضلع المكعب الكبير بـ 2x . لاحظ ان حجم الجزء المتبقي يساوي حجم المكعب الكبير مطروحا منه حجم المكعب الصغير.

$$(2x)^3 - x^3 = 7000$$

$$8x^3 - x^3 = 7000$$

$$7x^3 = 7000$$

$$x^3 = 1000$$

$$x^3 - 1000 = 0$$

$$(x-10)(x^2+10x+100) = 0$$

$X - 10 = 0$ أو $x^2 + 10x + 100$

$X = 10$ ، $X = -5 \pm 5i\sqrt{3}$

وبما ان العدد 10 هو الحل الحقيقي الوحيد ، فان طولي ضلعي المكعبين هما : 20cm , 10 cm

تستطيع أحيانًا أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلًا بفرض أن $u = x^2$،
يمكنك كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$.
وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على **الصورة التربيعية**.

الصورة التربيعية

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: au^2+bu+c ، $a\neq 0$ ، a,b,c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

مثال : كتابة عبارات في الصورة التربيعية

اكتب كلا من العبارتين الاتيتين في الصورة التربيعية ان امكن ذلك :

a) $150\,n^8 + 40\,n^4 - 15$

ابحث عن عاملين للعدد 150 ، احدهما مربع كامل ، وعن عاملين للعدد 40 ، احدهما الجذر التربيعي لاحد عاملي العدد 150 .

6 25 8 5

$$150\,n^8 + 40\,n^4 - 15 = 6 \times 25\,n^8 + 8 \times 5\,n^4 - 15$$

$$= 6(5n^4)^2 + 8(5n^4) - 15$$

b) $y^8 + 12y^3 + 8$

لايمكن كتابتها على الصورة التربيعية ، لان $y^8 \neq (y^3)^2$.

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية

لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ u بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصًا بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لايمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

تحقق من فهمك :

5A) $x^4 + 5x + 6$

5b) $8x^4 + 12x^2 + 18$

اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

8) $4x^6 - 2x^3 + 8$

9) $y^6 - 5y^2 + 20$

يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية .

مثال : حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

حل المعادلة $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$.

$$18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$$

$$2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$$

$$2u^2 - 7n + 3 = 0$$

$$(2u - 1)(u - 3) = 0$$

$u = 3$ او $u = \frac{1}{2}$

$3x^2 = 3$ او $3x^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 = 1$ او $x^2 = \frac{1}{6}$

$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ $\qquad$ $x = \pm 1$

حلول المعادلة هي : $\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 1, -1$

تحقق من فهمك :

6A) $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$

4B) $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

27) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

28) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$