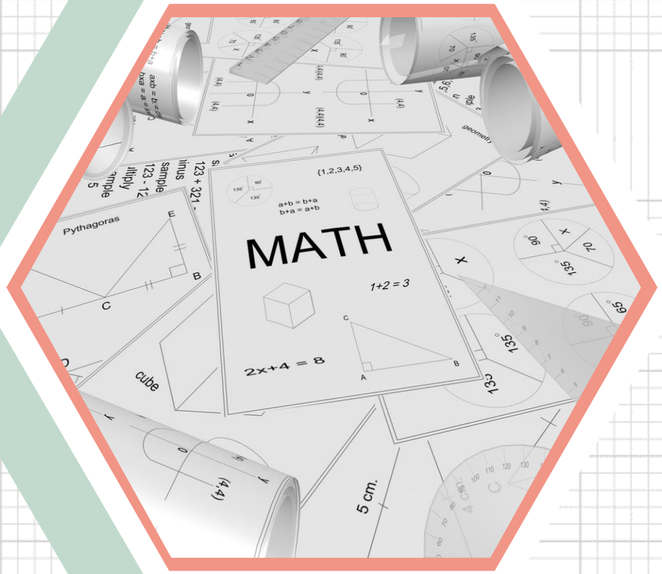
رياضيات ٢-١



إعداد:أ/عبدالعزيز الشريف

الباب
الثالث

كثيرات الحدود
ودوالها

٦-٣
حل معادلات كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

- درستُ حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى عوامل.

والآن

- أحلّل كثيرات الحدود.
- أحلّ معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

المفردات

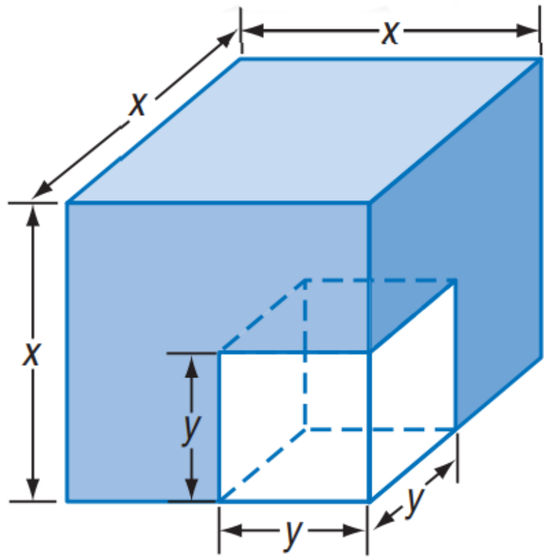
- كثيرة حدود أولية.
- الصورة التربيعية.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبدالعزيز الشريف

لماذا؟

قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطي حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية $x^3 - y^3$.



تصميم: عبدالعزيز الشريف
DES: Abdulaziz AL-Sharif

تحليل كثيرات الحدود

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقًا أنه يمكنك تحليل كثيرات الحدود التربيعية تمامًا كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكنك تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية بقوانين خاصة.

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مجموع مكعبين والفرق بينهما

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

مجموع مكعبين والفرق بينهما

ملحوظة

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

مثال (١)

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

a) $16x^4 + 54xy^3$

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(8x^3 + 27y^3)$ أخرج العامل المشترك الأكبر

كل من $8x^3$ و $27y^3$ مكعب كامل، لذا تستطيع استعمال طريقة مجموع مكعبين.

$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$ $\quad 8x^3 = (2x)^3;\ 27y^3 = (3y)^3$

$= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$ مجموع مكعبين

$= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ بسّط

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ اكتب العامل المشترك الأكبر

إرشادات للدراسة

التحليل التام لكثيرات الحدود

يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حللت إلى أقصى درجة ممكنة.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

b) $8y^3 + 5x^2$

الحد الأول مكعب كامل، لكن الحد الثاني ليس كذلك، لذا لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال طريقة مجموع مكعبين، ولا يمكن تحليلها كذلك بطرائق تحليل كثيرات الحدود التربيعية، أو بإخراج العامل المشترك الأكبر؛ لذا فهي كثيرة حدود أولية.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

مجموع مكعبين والفرق بينهما

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

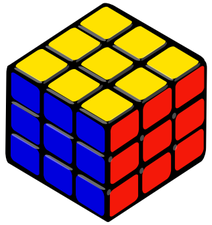
(1A $5y^4 - 320yz^3$

(1B $-54w^4 - 250wz^3$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم :عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

طرائق التحليل

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولًا عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد ما إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملًا واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

مفهوم أساسي

ملخص المفهوم: طرائق التحليل

أضف إلى مطويتك

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

التحليل بتجميع الحدود

مثال (٣)

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

(a $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

العبارة الأصلية	$8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$
جمِّع لإخراج العامل المشترك الأكبر	$= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy)$
أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع	$= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c)$
خاصية التوزيع	$= (4x + 3y)(2a + b + c)$

(b $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

العبارة الأصلية	$20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$
جمِّع لإخراج العامل المشترك الأكبر	$= (20fy + 15gy - 10hy) + (-16fz - 12gz + 8hz)$
أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع	$= 5y(4f + 3g - 2h) - 4z(4f + 3g - 2h)$
خاصية التوزيع	$= (5y - 4z)(4f + 3g - 2h)$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: للتحقق من صحة إجابتك، اضرب العوامل لتتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

التحليل بتجميع الحدود

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

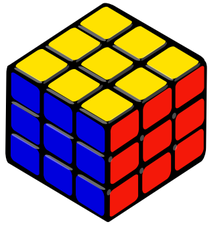
(2A $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

(2B $13ax + 18bz - 15by - 14az$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين

ملحوظة

تُعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الأساسية لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر، أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكن تحليلها اعتمادًا على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه .

إرشادات للدراسة

التحليل باستعمال الفرق بين مكعبين:
في مثال $3a$، إذا بدأت بالتحليل على اعتبار أن كثيرة الحدود المعطاة فرق بين مكعبين؛ فإنك تحصل على التحليل التالي:
$(x^2-y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
وهو تحليل غير تام ويصعب إتمامه.

مثال (٣)

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $x^6 - y^6$

يمكن اعتبار كثيرة الحدود هذه فرقًا بين مربعين أو فرقًا بين مكعبين، وفي مثل هذه الحالة يجب أن يتم التحليل أولًا على اعتبار أنها فرق بين مربعين قبل التحليل على اعتبار أنها فرق بين مكعبين؛ تسهيلًا للتحليل.

الفرق بين مربعين $\quad x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$

مجموع مكعبين والفرق بين مكعبين $\quad = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

إرشادات للدراسة

تجميع 6 حدود أو أكثر

جمّع الحدود التي بينها أكبر عدد من العوامل المشتركة.

(b $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

بما أن كثيرة الحدود هذه من 6 حدود ، إذن حلل أولًا بتجميع الحدود.

$$a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$$

جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر $= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3)$

أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع $= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9)$

خاصية التوزيع $= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9)$

الفرق بين مكعبين $= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 - 6x + 9)$

ثلاثية حدود المربع الكامل $= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

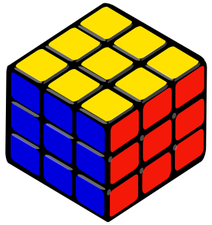
(3A $a^6 + b^6$

(3B $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

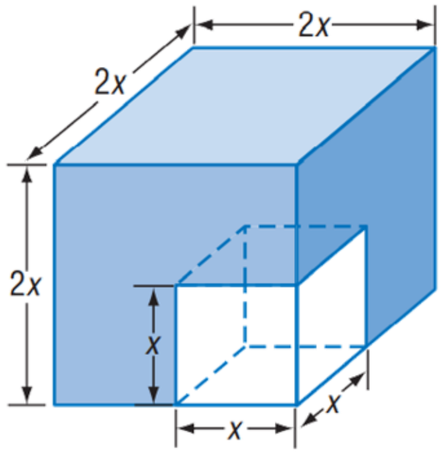
حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل

ملحوظة

حل معادلات كثيرات الحدود: يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية.

مثال (٤)

هندسة: ارجع إلى فقرة لماذا في بداية هذا الدرس. إذا كان طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي $7000\ m^3$، فما بُعدا المكعبين؟



بما أن طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير فيمكن أن يعبَّر عن طول ضلع المكعب الصغير بـ x، وطول ضلع المكعب الكبير بـ $2x$.

لاحظ أن حجم الجزء المتبقي يساوي حجم المكعب الكبير مطروحًا منه حجم المكعب الصغير.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

$(2x)^3 - x^3 = 7000$	حجم الجزء المتبقي
$8x^3 - x^3 = 7000$	$8x^3 = (2x)^3$
$7x^3 = 7000$	بالطرح
$x^3 = 1000$	اقسم على 7 للطرفين
$x^3 - 1000 = 0$	اطرح 1000 من كلا الطرفين
$(x - 10)(x^2 + 10x + 100) = 0$	فرق بين مكعبين
$x - 10 = 0$ أو $x^2 + 10x + 100 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 10$ $x = -5 \pm 5i\sqrt{3}$	

وبما أن العدد 10 هو الحل الحقيقي الوحيد. فإن طولي ضلعي المكعبين هما 10cm, 20cm.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل

تحقق من فهمك

4) إذا كان طول ضلع المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي $3250cm^3$، فأوجد بُعدي المكعبين.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

الصورة التربيعية

ملحوظة

تستطيع أحيانًا أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلًا بفرض أن $u = x^2$، يمكنك كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$.
وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على **الصورة التربيعية**.

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الصورة التربيعية

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: au^2+bu+c ، $a\neq0$ ، a,b,c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

كتابة عبارات في الصورة التربيعية

مثال (٥)

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية

لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ u بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصًا بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لايمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين في الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

(a $150n^8 + 40n^4 - 15$

ابحث عن عاملين للعدد 150؛ أحدهما مربع كامل، وعن عاملين للعدد 40؛ أحدهما الجذر التربيعي لأحد عاملي العدد 150.

$$150n^8 + 40n^4 - 15 = 6\times25n^8 + 8\times5n^4 - 15$$
$$= 6(5n^4)^2 + 8(5n^4) - 15$$

$150 = 6\times25,\ 40 = 8\times5$

$25n^8 = (5n^4)^2$

(b $y^8 + 12y^3 + 8$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية؛ لأن $y^8 \neq (y^3)^2$.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

كتابة عبارات في الصورة التربيعية

تحقق من فهمك

اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين في الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

(5A $x^4 + 5x + 6$

(5B $8x^4 + 12x^2 + 18$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية.

مثال (٦)

حل المعادلة: $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$.

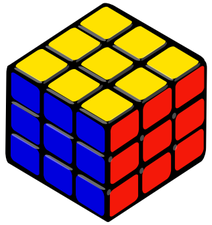
$18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$	$18x^4 = 2(3x^2)^2$
$2u^2 - 7u + 3 = 0$	افرض أن $u = 3x^2$
$(2u - 1)(u - 3) = 0$	حلّل إلى العوامل
$u = \frac{1}{2}$ أو $u = 3$	خاصية الضرب الصفري

عوّض $3x^2$ بدلًا من u	$3x^2 = 3$	$3x^2 = \frac{1}{2}$
اقسم على 3	$x^2 = 1$	$x^2 = \frac{1}{6}$
أوجد الجذر التربيعي	$x = \pm 1$	$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

حلول المعادلة هي: $1, -1, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تأكد

حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

1 $3ax + 2ay - az + 3bx$

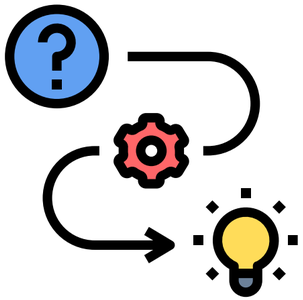
2 $16g^3 + 2h^3$

3 $12qw^3 - 12q^4$

4 $a^6x^2 - b^6x^2$

5 $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

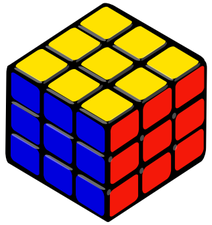
6 $8c^3 - 125d^3$



DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل

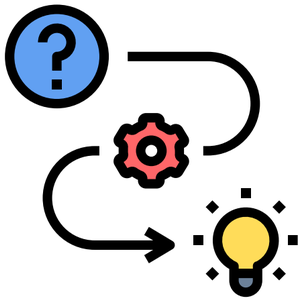


تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

مسائل التفكير العليا

تحد: حلّل المقدار $36x^{2n} + 12x^{n} + 1$ إلى عوامله.



تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تحصيلي

إذا كان الفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{12}, k$ مساويًا للفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$، فما قيمة k ؟

A $\frac{1}{60}$

B $\frac{1}{20}$

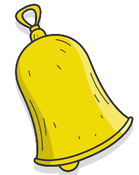
C $\frac{1}{15}$

D $\frac{13}{60}$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif