نظريتا الباقي و العوامل

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

الاستراتيجية :

تمهيد :

أوجد قيمة :

$2(x-3) = ?$

$x^2 + 6x + 9?$

فيما سبق : درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية .

فكرة الدرس :

- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي .
- أحدد (باستعمال التعويض التركيبي) إذا كانت ثنائية حد عاملاً من عوامل كثيرة حدود أم لا .

المفردات :

- نظرية الباقي .
- التعويض التركيبي .
- نظرية العوامل .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

قدّر صاحب بقالة أرباحه السنوية بالدالة:
$S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، حيث x عدد السنوات منذ العام 1420هـ، وتمثل $S(x)$ قيمة الأرباح بمئات الريالات.

يمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير الأرباح في العام 1440هـ، بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

ما قيمة X إذا رغبت في معرفة عدد الطلاب عام 1414هـ ؟

هل تتوقع أن يتساوى العدد الفعلي للطلاب عام 1433هـ مع العدد الذي تحصل عليه من الدالة ؟ وضح ذلك .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل : $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$:

الطريقة الأولى : القسمة الطويلة

$$
\begin{array}{r}
-3x - 4 \\
x - 3 \overline{)\ -3x^2 + 5x + 4} \\
(-)\ \underline{-3x^2 + 9x} \\
-4x + 4 \\
(-)\ \underline{-4x + 12} \\
-8
\end{array}
$$

الطريقة الثانية : القسمة التركيبية

$$
\begin{array}{r|rrr}
3 & -3 & 5 & 4 \\
 & & -9 & -12 \\
\hline
 & -3 & -4 & -8
\end{array}
$$

الطريقة الثالثة : التعويض التركيبي

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8 ، وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$	عوّض العدد 3 بدلًا من x
$= -27 + 15 + 4$	اضرب
$= -8$	بسّط

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$ ، وهذا يوضح **نظرية الباقي**

نظرية الباقي

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$ ، وكذلك :

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x - r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

التعويض التركيبي : هو عملية تطبيق نظرية الباقي باستعمال القسمة التركيبية ، وهي طريقة سهلة لإيجاد قيمة دالة عند عدد ، خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية .

مثال : التعويض التركيبي

اذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ ، فأوجد F(4) باستعمال التعويض التركيبي .

بناء على نظرية الباقي ، فان f(4) يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على x – 4 .

	3	-2	0	5	2
4		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

بما ان باقي القسمة يساوي 662 ، فانه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 662$

وللتحقق نستعمل التعويض المباشر .

عوض عن x بالعدد 4 في دالة كثيرة الحدود .

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$$

$$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$$

$$= 768 - 128 + 20 + 2 = 662$$

وعليه فان f(4) = 662 . وبذلك نكون قد توصلنا الى الإجابة نفسها من خلال التعويض المباشر .

مجموعة رقعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

1A) اذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$ ، فأوجد $F(3)$.

1B) $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$ ، فأوجد $g(-1)$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يمكنك استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي تكون فيها حسابات التعويض المباشر معقدة .

مثال : إيجاد قيمة الدالة

مبيعات : ارجع الى فقرة « لماذا » ؟ في بداية هذا الدرس . ما قيمة الأرباح في العام 1440 هـ .؟

اوجد ناتج قسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 20$ مستعملا القسمة التركيبية .

20	0.02	- 0.52	4.03	0.09	77.54
		0.4	-2.4	32.6	653.8
	0.02	- 0.12	1.63	32.69	731.34

تقدر الأرباح بـ 731.34 ريالا تقريبا .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك :

مدارس : يمكن استعمال الدالة $c(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في احدى المناطق منذ عام 1427 هـ ، حيث تمثل x عدد السنوات ، C (x) عدد الطلاب بالعشرات ، قدر عدد طلاب المنطقة عام 1442 هـ .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

عوامل كثيرات الحدود

تبين القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضِّح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

ملاحظات :

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة .

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطًا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملا كثيرة الحدود x^3+x^2-x+15 هما $x+3$ و x^2-2x+5.

مثال : استعمال نظرية العوامل

حدد ما اذا كان $x-5$ عاملا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)=x^3-7x^2+7x+15$ ام لا ، ثم اوجد عواملها الأخرى .

الخطوة 1 : استعمال نظرية العوامل

بناء على نظرية العوامل تكون ثنائية الحد $x-5$ عاملا من عوامل $P(X)$ اذا كان $P(5)=0$ ، ولإيجاد $P(5)$، يمكنك استعمال التعويض التركيبي .

5	1	-7	7	15
		5	-10	-15
	1	-2	-3	0

وبما ان باقي القسمة يساوي صفرا ، أي ان $P(5)=0$ ، فان $x-5$ عامل لكثيرة الحدود .

الخطوة 2 : تحليل كثيرة الحدود

بما ن $x-5$ عامل لكثيرة الحدود ، لذا يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3-7x^2+7x+15$ على النحو الاتي $(x-5)(2x-3-x^2)$.

وتكون $2x-3-x^2$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3-7x^2+7x+15$ على $(x-5)$

تحقق مما اذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل ام لا .

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ وعليه فإن $x^3-7x^2+7x+15=(x-5)(x+1)(x-3)$

تحقق : يمكنك التحقق من اجابتك بضرب العوامل ومقارنة كثيرة الحدود الناتجة بكثرة الحدود الاصلية .

تحقق من فهمك :

3) حدد ما اذا كان x -2 عاملا من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ ام لا ، ثم اوجد عواملها الأخرى .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد :

أوجد $f(-2)$, $f(4)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$

2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$

3) **جوارح:** يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390 هـ، فما العدد التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1443 هـ؟

مرعة رعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

14 $f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى. حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

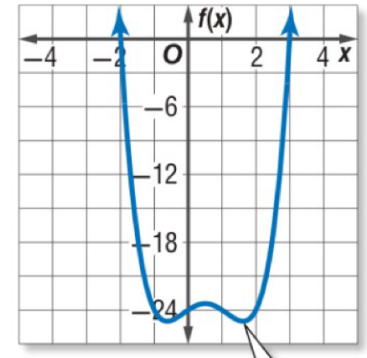
17) $x^3 - 3x + 2; x + 2$

18) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16; x + 2$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

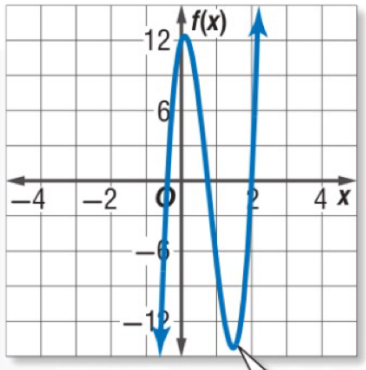
استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

(28



$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

(29



$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كلٍّ مما يأتي يساوي 3:

31 $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

32 $(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا :

تدريب على اختبار

38) أيٌّ مما يأتي هو تحليل للعبارة $27x^3 + y^3$ ؟

A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

39) ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 - i)(4 + i)$؟

A 15 **C** 17

B $16 - i$ **D** $17 - 8i$

تحصيلي :

أي مما يلي اذا قسمنا عليه $f(x) = x^2 - 5x + 7$ كان الباقي 3 ؟

X – 4 ، X - 2 ، x + 2 ، x + 3

الواجب :

مجموعة رفعة الرياضيات