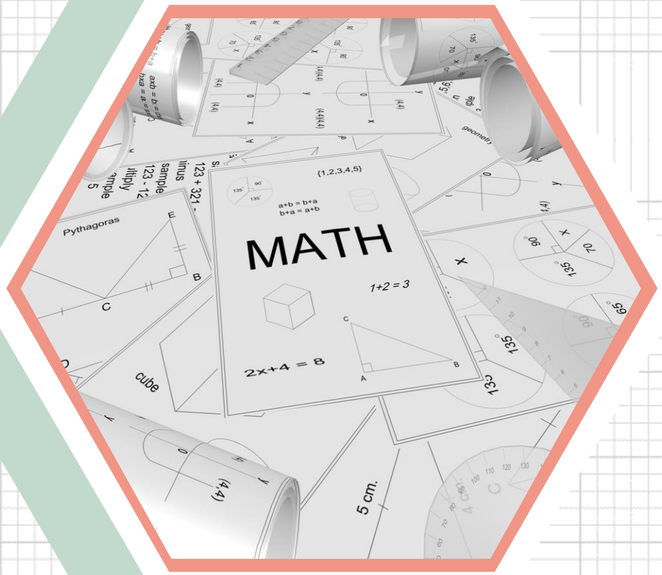
رياضيات ٢-١



إعداد:أ/عبدالعزيز الشريف

الباب
الثالث

كثيرات الحدود
ودوالها

٣-٨
الجذور والأصفار

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

- درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية.

والآن

- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية للدالة.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

المفردات

- النظرية الأساسية في الجبر.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنعٍ الدالةَ:
$g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$،
لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات،
حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.
ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

ملحوظة

أنواع الجذور تعلمت سابقًا أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًّا تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x.

مفهوم أساسي

ملخص المفهوم

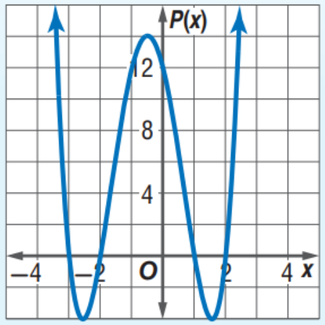
أضف إلى مطويتك

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x.

مثال: افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي: $-3, -2, 1, 2$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.

تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

النظرية الأساسية في الجبر

ملحوظة

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي — **النظرية الأساسية في الجبر**

أضف إلى مطويتك

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

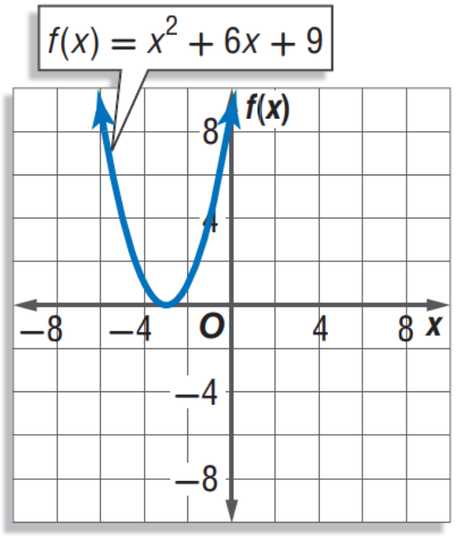
تحديد عدد الجذور وأنواعها

مثال (١)

حلّ كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها ونوعها :

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$x^2 + 6x + 9 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 3)^2 = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x + 3 = 0$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = -3$	بإيجاد قيمة x



وبما أن العامل $(x + 3)$ مكرر مرتين في تحليل كثيرة الحدود، فإن -3 جذر مكرر مرتين. أي للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين هو -3 .

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يمس المحور x عندما $x = -3$. فإن -3 جذر مكرر مرتين. ✓

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

(b $x^3 + 25x = 0$

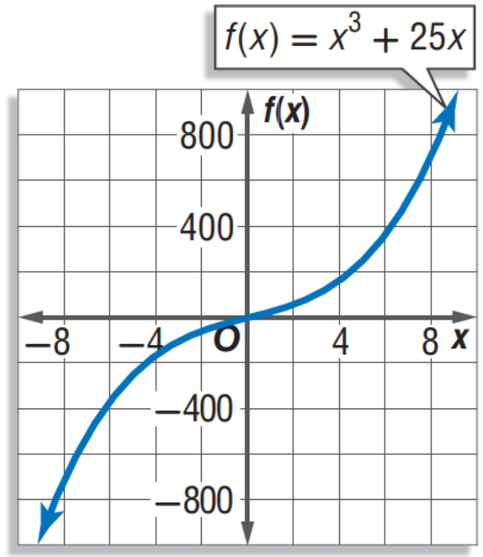
بالتحليل إلى العوامل $x(x^2+25) = 0$

$x = 0$ أو $x^2 + 25 = 0$

$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$

للمعادلة ثلاثة جذور: جذر حقيقي واحد هو 0، وجذران تخيليان هما $-5i$, $5i$.



تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x عندما $x = 0$ ،
فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًّا واحدًا هو 0. ✓

DES: Abdulaziz AL-Sharif
تصميم: عبد العزيز الشريف

تحديد عدد الجذور وأنواعها

تحقق من فهمك

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

(1A $x^3 + 2x = 0$

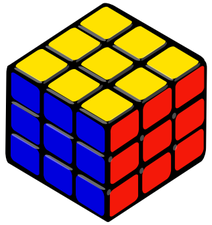
(1B $x^4 - 16 = 0$

(1C $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

ملحوظة

اختبر حَلَّ كلِّ معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6 = 0$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 = 0$	$-2x^5 - 3x^2 + 8 = 0$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

وبالمثل دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار المركبة.

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت

(1650 - 1596 م)، فيلسوف، ورياضي، وفيزيائي فرنسي، يلقب بـ"أبو الفلسفة الحديثة". له تأثير واضح في علم الرياضيات؛ فقد اخترع نظامًا رياضيًا شكّل أساس الهندسة التحليلية سمّي باسمه وهو نظام الإحداثيات الديكارتية.

تصميم :عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

قانون ديكارت للإشارات

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية

مثال (٣)

تنبيه!

أصفار الدوال

لن تناقش الحالة التي يكون فيها الحد الثابت مساويًا للصفر في هذا الدرس.

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة
$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$.

بما أن درجة الدالة $f(x)$ تساوي 6، فإن لها 6 أصفار: حقيقية أو تخيلية أو كليهما. استعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = \underset{\text{لا}}{\overset{+}{x^6}} + \underset{\text{نعم}}{\overset{+}{3x^5}} - \underset{\text{لا}}{\overset{-}{4x^4}} - \underset{\text{نعم}}{\overset{-}{6x^3}} + \underset{\text{نعم}}{\overset{+}{x^2}} - \underset{\text{نعم}}{\overset{-}{8x}} + 5$$

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون: 4 أو 2 أو 0.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون: 4 أو 2 أو 0.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5 \\ &= x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x^2 + 8x + 5 \end{aligned}$$

نعم (+ −) ، لا (− −) ، نعم (− +) ، لا (+ +) ، لا (+ +) ، لا (+ +)

نجد أن هناك تغيرين في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون: 2 أو 0.

أنشئ جدولاً يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية يساوي العدد 6 مطروحًا منه مجموع عدد الأصفار الحقيقية
4	2	0
	0	2
2	2	2
	0	4
0	2	4
	0	6

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية

تحقق من فهمك

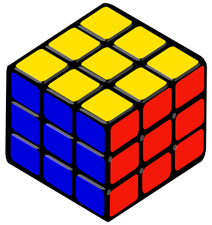
اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة.

$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تصميم: عبد العزيز الشريف

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

نظرية الأصفار المركبة المترافقة

تعلمت سابقًا أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائمًا، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلًا إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$، فإنك تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نظرية الأصفار المركبة المترافقة

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

ملحوظة

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

مثال (٣)

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $i - 5$ ، -1 من أصفارها .

افهم: **المعطيات:** العددان $i - 5$ ، -1 من أصفار كثيرة حدود.

المطلوب: كتابة دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والعددان $i - 5$ ، -1 من أصفارها.

خطط: بما أن $i - 5$ صفر للدالة، فإن $i + 5$ أيضًا صفر للدالة بحسب نظرية الأصفار المركبة المترافقة.

لذا فإن $(i + 5) - x$ ، $(5 - i) - x$ ، $1 + x$ عوامل لكثيرة الحدود.

إرشادات للدراسة

استعمال الأصفار لكتابة الدالة

إن أي دالة على الصورة $f(x)=a(x^3-9x^2+16x+26)$، (حيث a عدد صحيح لا يساوي الصفر)، تحقق المعطيات الواردة في المثال 3، ولكن اعتبر أن $a = 1$ للتسهيل فقط.

DES: Abdulaziz AL-Sharif

حل: اكتب المعادلة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

$P(x) = (x + 1)\,[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$	اكتب الدالة
$= (x + 1)\,[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$	أعد تجميع الحدود
$= (x + 1)\,[(x - 5)^2 - i^2]$	الفرق بين مربعين
$= (x + 1)\,[(x^2 - 10x + 25 - (-1)]$	أوجد مربع الحدين
$= (x + 1)\,(x^2 - 10x + 26)$	بسِّط
$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$	اضرب
$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$	اجمع الحدود المتشابهة

تحقق: بما أن هناك 3 أصفار، فإن دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة، ولذا فإن $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، وأصفارها هي: $5 + i$, $5 - i$, -1 .

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

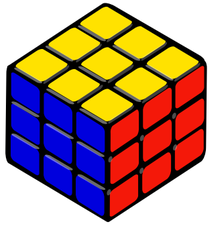
تحقق من فهمك

3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 1 + 2i$ من أصفارها.

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تأكد

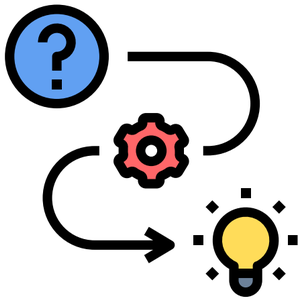
حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

2) $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$

3) $16x^4 - 81 = 0$

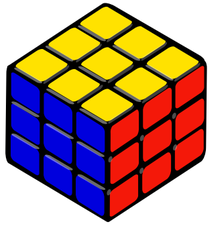
4) $0 = x^3 - 8$



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

مسائل التفكير العليا

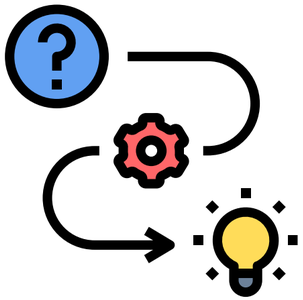
حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخريات، ووضِّح إجابتك:

$r^3 - 8 = 0$

$r^2 - 1 = 0$

$r^3 + 1 = 0$

$r^4 + 1 = 0$

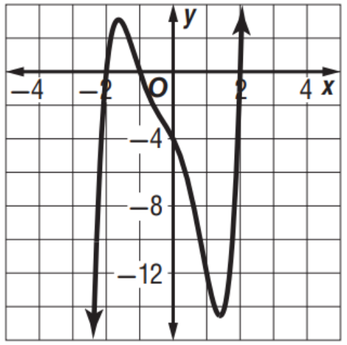


تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تحصيلي

استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟



A $x - 2$

B $x - 1$

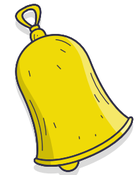
C $x + 2$

D $x + 1$

تصميم: عبد العزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif

تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

تصميم: عبدالعزيز الشريف

DES: Abdulaziz AL-Sharif