الجذور والأصفار

اليوم :

التاريخ :

الحصة :

الاستراتيجية :

تمهيد :

أوجد قيمة :

$$2x^2 = -8 ?$$

فيما سبق : درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية .

فكرة الدرس :

- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود و أنواعها .
- أجد أصفار دالة كثيرة حدود .
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها .

المفردات :

- النظرية الأساسية في الجبر .

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي .

لماذا ؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالةَ:

$g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$،

لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات،

حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.

ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

بناءً على المعادلة : ما تكلفة إنتاج القطعة الواحدة في عام 1410 هـ ؟

هل تبقى المعادلة صحيحة لقيم X السالبة ؟

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

أنواع الجذور

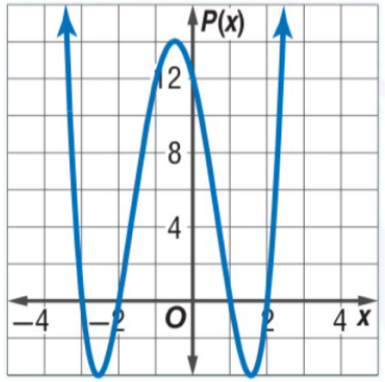
تعلمت سابقاً أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c ، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانياً تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x .

الأصفار ، و العوامل ، و الجذور ، و المقاطع

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x .

مثال: افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



فإن أصفار هذه الدالة هي: $2\ ,\ 1\ ,\ -2\ ,\ -3$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

هي: $2\ ,\ 1\ ,\ -2\ ,\ -3$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x

هي: $(2, 0), (1, 0), (-2, 0), (-3, 0)$.

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

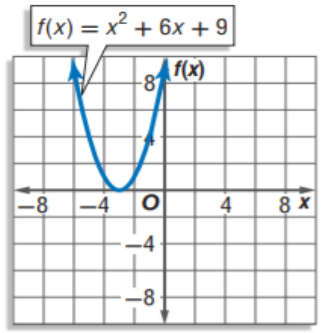
النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

مثال : تحديد عدد الجذور و أنواعها

حل كل معادلة مما يأتي ن واذكر عدد جذورها ، ونوعها :

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$



$$(x+3)^2 = 0x^2 + 6x + 9 = 0$$

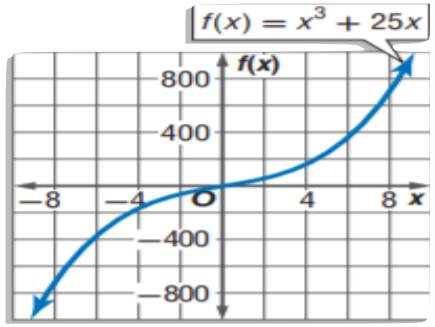
X + 3 = 0

X = -3

بما ان العامل (x + 3) مكرر مرتين في تحليل كثيرة الحدود ، فان 3 – جذر مكرر مرتين . أي للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين هو -3 .

تحقق: بما ان التمثيل البياني للدالة يمس المحور x عندما x = -3 ، فان 3- جذر مكرر مرتين .

b) $x^3 + 25x = 0$



$$x^3 + 25x = 0$$

$$X(x^2 + 25) = 0$$

X =0 $\qquad x^2 + 25 = 0$

$$x^2 = -25$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$X = \pm 5i$$

للمعادلة ثلاثة جذور : جذر حقيقي واحد 0 ، وجذران تخيليان هما 5i , -5i .

تحقق : بما ان التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x عندما x = 0 فان للمعادلة جذرا حقيقيا واحدا هو 0 .

ملاحظات :

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا.

تحقق من فهمك :

(1A $x^3 + 2x = 0$

(1B $x^4 - 16 = 0$

(1C $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6 = 0$ — 3 جذور

$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 = 0$ — 4 جذور

$-2x^5 - 3x^2 + 8 = 0$ — 5 جذور

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية .

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

رينيه ديكارت

(1596 - 1650 م)، فيلسوف ورياضي، وفيزيائي فرنسي، يلقب بـ"أبو الفلسفة الحديثة". له تأثير واضح في علم الرياضيات؛ فقد اخترع نظامًا رياضيًا شكّل أساس الهندسة التحليلية سمِّي باسمه وهو نظام الإحداثيات الديكارتية.

مثال : إيجاد عدد الاصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والاصفار التخيلية لدالة

ملاحظات :

تنبيه!

أصفار الدوال

لن تناقش الحالة التي يكون فيها الحد الثابت مساويًا للصفر في هذا الدرس.

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة ، والسالبة ، والتخيلية لدالة

$$F(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$$

بما ان درجة الدالة f(x) تساوي 6 ، فان لها 6 اصفار : حقيقية او تخيلية او كليهما . استعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها .

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة f(x) .

$$F(x)= \quad x^6 \quad + \quad 3x^5 \quad - \quad 4x^4 \quad - \quad 6x^3 \quad + \quad x^2 \quad - \quad 8x \quad + \quad 5$$

لا	نعم	لا	نعم	نعم	نعم
++	+ -	- -	- +	+ -	- +

نجد ان هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات ، لذا فان عدد الاصفار الحقيقية الموجبة سيكون : 4 او 2 او 0 .

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة f(-x) .

$$F(-x)= \quad (-x)^6 \quad + \quad 3(-x)^5 \quad - \quad 4(-x)^4 \quad - \quad 6(-x)^3 \quad + \quad (-x)^2 \quad - \quad 8(-x) \quad + \quad 5$$

$$F(-) = x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x^2 + 8x + 5$$

نعم	لا	نعم	لا	لا	لا
+ -	- -	- +	+ +	+ +	+ +

نجد ان هناك تغيرين في إشارة المعاملات ، لذا فان عدد الاصفار الحقيقية السالبة سيكون : 2 , 0 .

أنشئ جدولا يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة .

عدد الاصفار الحقيقية الموجبة	عدد الاصفار الحقيقية السالبة	عدد الاصفار التخيلية يساوي العدد 6 مطروحا منه مجموع عدد الاصفار الحقيقية
4	2	0
	0	2
2	2	2
	0	4
0	2	4
	0	6

تحقق من فهمك :

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة ، والحقيقية السالبة ، والتخيلية للدالة .

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تعلمت سابقًا أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائمًا، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلًا إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$، فإنك تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

نظرية الأصفار المركبة المترافقة

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

ملاحظات :

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة ، حول الأصفار إلى عوامل ، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض ، لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

إرشادات للدراسة

استعمال الأصفار لكتابة الدالة

إن أي دالة على الصورة $f(x)=a(x^3-9x^2+16x+26)$، (حيث a عدد صحيح لا يساوي الصفر)، تحقق المعطيات الواردة في المثال 3، ولكن اعتبر أن $a=1$ للتسهيل فقط.

مثال : استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ، ومعاملات حدودها اعداد صحيحه ، اذا كان العددان 5-i , 1- من اصفارها .

افهم : المعطيات : العددان 5-i , 1- من اصفار كثيرة حدود

المطلوب : كتابة دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ، ومعاملات حدودها اعداد صحيحة ، والعددان 5-i , 1- من اصفارها .

خطط : بما ان 5 –i صفر للدالة ، فان 5+i أيضا صفر للدالة بحسب نظرية الاصفار المركبة المترافقة .

لذا فان (5 + i)– x , (5 – i) -x , 1 + x عوامل لكثيرة الحدود .

حل : اكتب المعادلة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها .

$$\begin{aligned}P(x) &= (x+1)\,[x-(5-i)][x-(5+i)]\\ &= (x+1)\,[(x-5)+i][(x-5)-i]\\ &= (x+1)\,[(x-5)^2-i^2]\\ &= (x+1)\,[(x^2-10x+25-(-1)]\\ &= (x+1)\,(x^2-10x+26)\\ &= x^3-10x^2+26x+x^2-10x+26\\ &= x^3-9x^2+16x+26\end{aligned}$$

تحقق : بما ان هناك 3 اصفار ، فان دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة ، ولذا فان $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$

دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ، ومعاملات حدودها اعداد صحيحة ، واصفارها هي : 5 + i , 5 - i , 1- .

تحقق من فهمك :

3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ، ومعاملات حدودها اعداد صحيحه ، اذا كان العددان $2i + 1$, -1 من اصفارها .

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد : حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

3) $16x^4 - 81 = 0$

4) $0 = x^3 - 8$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي :

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدرب وحل المسائل :

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ دالة ممَّا يأتي :

21) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

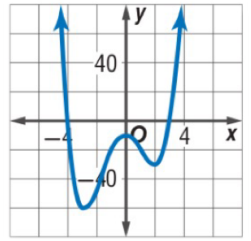
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

(a $-3, 4, i, -i$

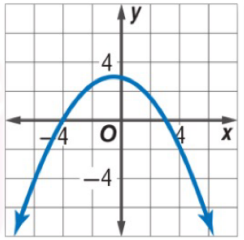
(b $-4, 3$

(c $-4, 3, i, -i$

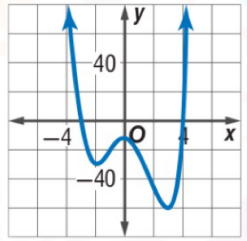
(33



(34

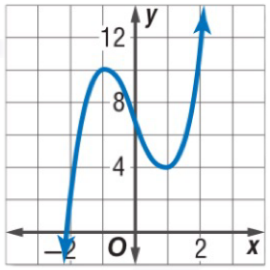


(35



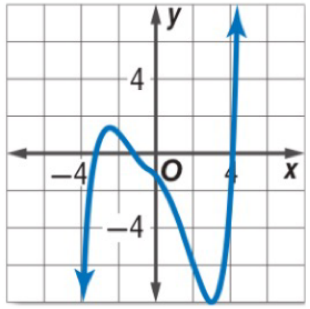
حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ من الدالتين الممثلتين بيانيًّا فيما يأتي، ووضِّح إجابتك:

(36



الدرجة : 3

(37



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

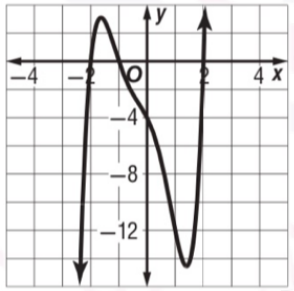
مسائل مهارات التفكير العليا :

40) حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخريات، ووضِّح إجابتك:

$r^3 - 8 = 0$ | $r^2 - 1 = 0$ | $r^3 + 1 = 0$ | $r^4 + 1 = 0$

تدريب على اختبار

43) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟



A $x - 2$

B $x - 1$

C $x + 2$

D $x + 1$

الواجب :