مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

مع سلسلة رفعة متعة..

تحصيلي

رياضيات

جواهر العنزي - فريعه العمري - ندى الناصر - هند العديني

نسخه إلكترونية مجانية لا تباع

الأستاذة / جواهر العنزي و هند العديني و فريعة العمري و ندى الناصر

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

مع سلسلة رفعة متعة تحصيلي

رقم الإيداع: 1444/3938 تاريخ: 1444/04/27

هـ، ورقم ردمك 978-603-04-3485-5

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ، أما بعد:

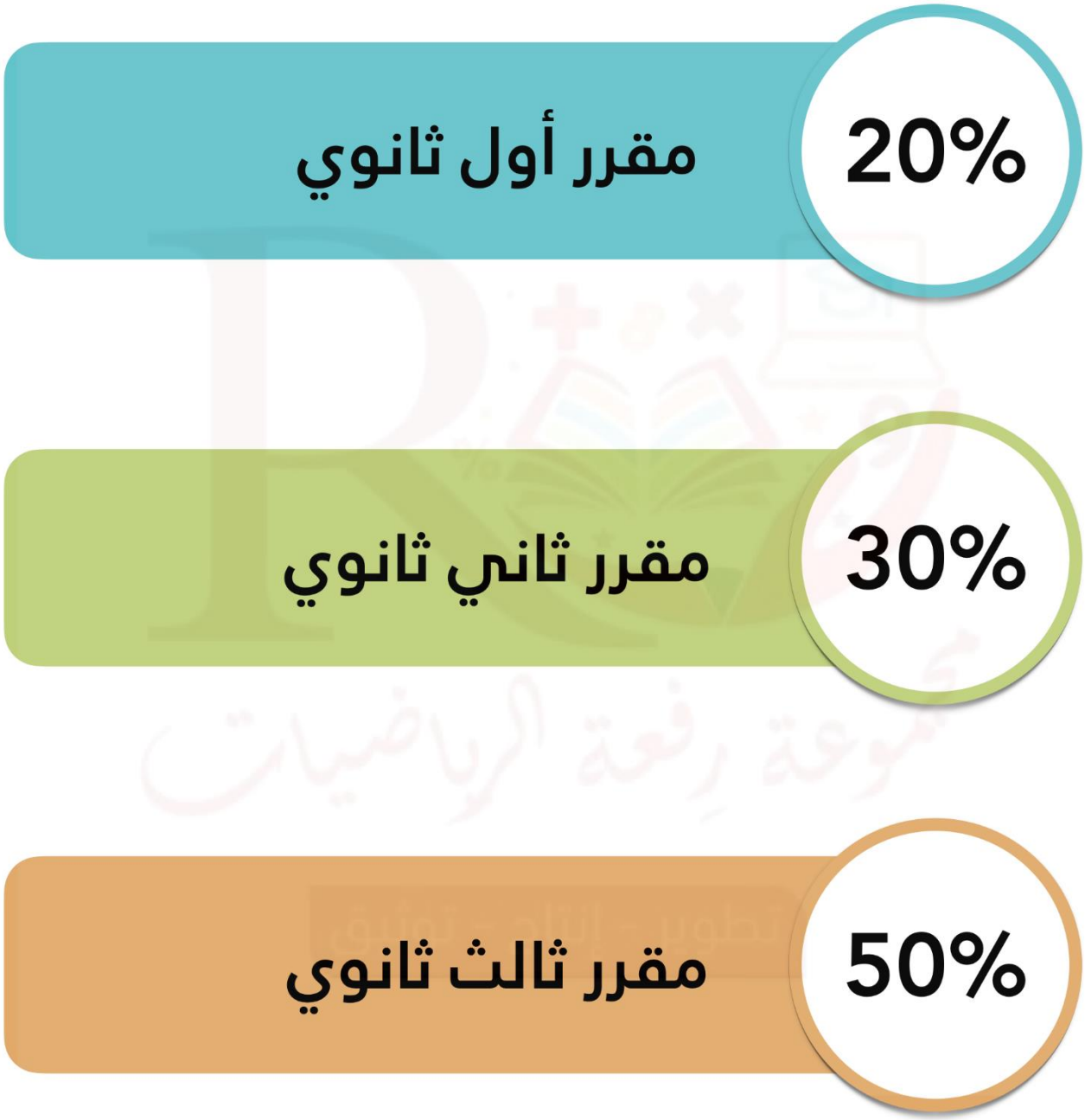
نبذة تعريفية لمجموعة رفعَه

هي مجموعة تدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات ، وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام .
وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات ، تقدم مجموعة رفعة بين أيديكم هذا العمل ضمن " سلسلة كُتب رفعَة "

ونطمح من خلاله توصيل المفاهيم الرياضية وجميع موضوعات الرياضيات للاستعداد الجيد لاختبار التحصيلي بصورة سلسه وواضحة ... ولإفادة طلابنا وطالباتنا ، وتوفير جهود معلمينا ومعلماتنا الأفاضل .

والله ولي التوفيق

نسبة التحصيلي في مقررات الرياضيات



رياضيات

أول ثانوي

الفصل الأول

التبرير والبرهان

التبرير الاستقرائي والتخمين

- التبرير الاستقرائي : تبرير نستعمل فيه أمثله محددة للوصول إلى نتيجة .
- التخمين : العبارة النهائية التي توصلت إليها باستعمال التبرير الاستقرائي .

مثال : الحد التالي للنمط $\ldots , 3 , 6 , 9 , 12 , \ldots$ هو 15

- المثال المضاد : هو مثال معاكس أي مثال نثبت به أن الجملة المعطاة غير صحيحة دائمًا .

ولإثبات عدم صحة التخمين يكفي تقديم مثال واحد معاكس قد يكون عدد أو رسم أو عبارة .

مثال : المثال المضاد للعبارة " إذا كان n عددًا حقيقيًا ، فإن $n^2 > n$ " هو $n = 1$ ، لأن $1^2 \not> 1$

المنطق

- العبارة : جملة خبرية لها حالتان فقط إما أن تكون صائبة (T) أو تكون خاطئة (F)
- رمز العبارة : يرمز لها بالرمز مثل p أو q .
- نفي العبارة : هو معنى مضاد لمعنى العبارة إذا كانت العبارة (T) نفيها (F) والعكس إذا كانت العبارة p فإن نفيها $\sim p$ أو ليس p .

مثال : العبارة " المربع مستطيل " (T)
ونفيها العبارة " المربع ليس مستطيل " (F)

- عبارة الوصل : عبارة مركبة ناتجة من ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و) $p \wedge q$.
- عبارة الفصل : عبارة مركبة ناتجة من ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (أو) $p \vee q$.

العبارات الشرطية

- العبارة الشرطية : تكتب على صورة (إذا ... فإن ...)
- تسمى الجملة بعد إذا " فرض "
- وتسمى الجملة بعد فإن " نتيجة "
- يرمز لها بالرمز $p \rightarrow q$.

مثال : إذا كان $x^2 = 16$ فإن $x = 4$.

جداول الصواب

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

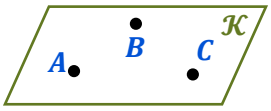
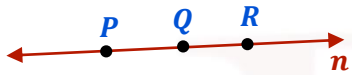
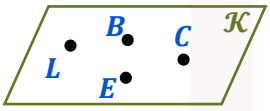
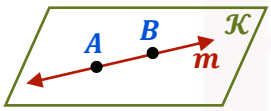
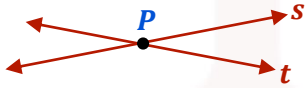
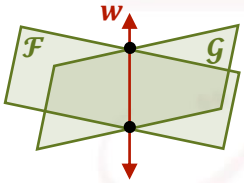
العبارات الشرطية المرتبطة

العبارة	كتابتها	الرمز	مثال
العبارة الشرطية	إذا " فرض" فإن " نتيجة	$p \rightarrow q$	إذا كان $m\angle A = 90°$ فإن $\angle A$ قائمة .
العكس	تبديل الفرض والنتيجة	$q \rightarrow p$	إذا كانت $\angle A$ قائمة فإن $m\angle A = 90°$
المعكوس	نفي كل من الفرض والنتيجة	$\sim p \rightarrow \sim q$	إذا كان $m\angle A \neq 90°$ فإن $\angle A$ ليست قائمة .
المعاكس الإيجابي	تبديل الفرض والنتيجة ثم نفيهما	$\sim q \rightarrow \sim p$	إذا لم تكن $\angle A$ قائمة فإن $m\angle A \neq 90°$

- العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي متكافئتان منطقيًا .
- عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئتان منطقيًا .

النقاط والمستقيمات والمستويات

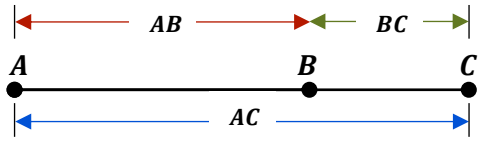
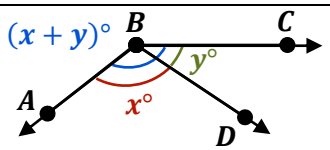
- المسلمة : عبارة تقبل على أنها صحيحة دون برهان .

المسلمة	مثال
أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط .	
أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط .	
كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل .	
كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة .	
إذا وقعت نقطتان في مستوى ، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في ذلك المستوى .	
إذا تقاطع مستقيمان ، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.	
إذا تقاطع مستويان ، فإن تقاطعهما يكون مستقيماً.	

نظرية نقطة المنتصف

- إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

جمع أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا

إذا علمت أن النقاط A , B , C على استقامة واحدة ، فإن النقطة B تقع بين A و C إذا كان $AB + BC = AC$	تقع النقطة D داخل $\angle ABC$ إذا وفقط إذا كان $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$
	

خصائص الأعداد الحقيقية

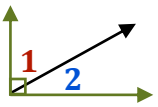
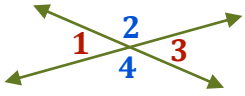
- لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

الخاصية	مثال
الجمع للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإن $a + c = b + c$
الطرح للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإن $a - c = b - c$
الضرب للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإن $a \cdot c = b \cdot c$
القسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$، فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
الانعكاس للمساواة	$a = a$
التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإن $b = a$
التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ و $b = c$ ، فإن $a = c$
التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإنه يمكننا أن نضع b مكان a في أي معادلة أو عبارة جبرية تحتوي على a
التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

خصائص القطع المستقيمة والزوايا

الخاصية	القطع المستقيمة		الزوايا	
	المساواة	التطابق	المساواة	التطابق
الانعكاس	$AB = AB$	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$	$m\angle 1 = m\angle 1$	$\angle 1 \cong \angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$ فإن $CD = AB$	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ فإن $m\angle 2 = m\angle 1$	إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ فإن $\angle 2 \cong \angle 1$
التعدي	إذا كان $AB = CD$ و $CD = EF$ فإن $AB = EF$	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$ فإن $m\angle 1 = m\angle 3$	إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 2 \cong \angle 3$ فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

نظريات الزوايا

الزاويتين المتكاملتين	الزاويتين المتتامتين	الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$	 $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	 $m\angle 1 = m\angle 3$ و $m\angle 2 = m\angle 4$

تطابق المكملات

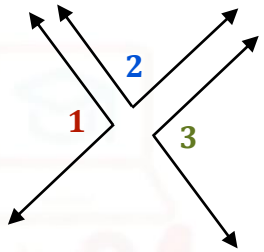
- الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين .

مثال :

إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

وكان $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

فإن $\angle 1 \cong \angle 3$



تطابق المتممات

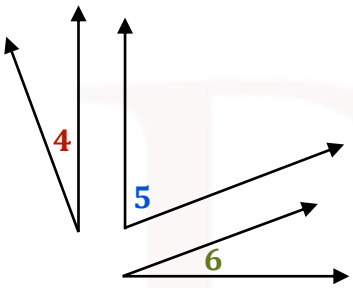
- الزاويتان المتتامتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين .

مثال :

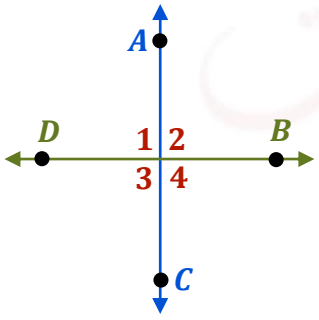
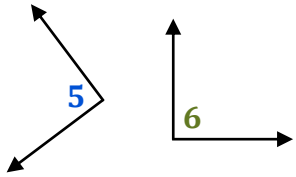
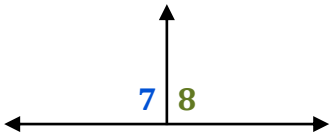
إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90°$

وكان $m\angle 5 + m\angle 6 = 90°$

فإن $\angle 4 \cong \angle 6$

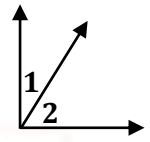
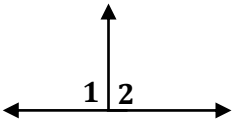
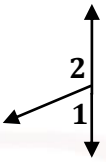
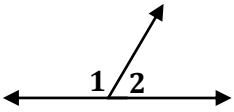
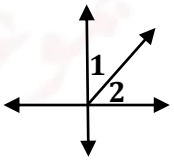
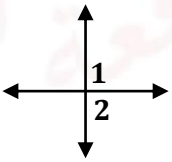
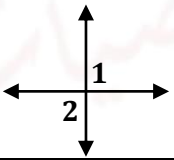
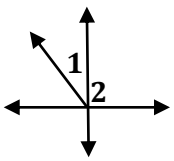


الزاوية القائمة

النظرية	مثال	
يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونان أربع زوايا قائمة .	إذا كان $DB \perp AC$ ، فإن $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة .	
جميع الزوايا القائمة متطابقة .	إذا كانت $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$	
المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة .	إذا كان $DB \perp AC$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 2 \cong \angle 3$ و $\angle 3 \cong \angle 4$ و $\angle 4 \cong \angle 1$	
إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين ، فإنهما قائمتان .	إذا كانت $\angle 5 \cong \angle 6$ ، وكانت $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتين ، فإن $\angle 5$ و $\angle 6$ قائمتان .	
إذا تجاورت زاويتان على مستقيم ، وكانتا متطابقتين ، فإنهما قائمتان .	إذا كانت $\angle 7$ و $\angle 8$ متجاورتين على مستقيم ، وكانت $\angle 8 \cong \angle 7$ فإن $\angle 7$ و $\angle 8$ قائمتان .	

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

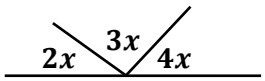
1	أكمل المتتابعة ... , ... , −7 , 0 , 7 , 14						
	A	14	B	12	C	−10	D	−14
2	ما المعاكس الإيجابي للعبارة : " إذا كان تاجر فإنه غني "						
	A	إذا كان غني فإنه تاجر	B	إذا لم يكن تاجر فإنه ليس غني	C	إذا لم يكن غني فإنه ليس تاجر	D	إذا كان تاجر فإنه غني
3	إذا كانت الزاوية 2 , 1 متجاورتين فإنهما متكاملتين ، أي الأشكال الآتية يمثل مثال مضاد لذلك :						
	A		B		C		D	
4	إذا كانت A , B زاويتان متتامتان ، و A , C متتامتان ، فأي الآتي صحيح :						
	A	$m\angle B = m\angle C$	B	$m\angle B + m\angle C = 180°$	C	$m\angle B < m\angle C$	D	$m\angle C < m\angle B$
5	المعكوس للعبارة : " إذا كانت $x = 2$ فإن $x^2 = 4$ " :						
	A	إذا كانت $x^2 = 4$ فإن $x = 2$	B	إذا كانت $x^2 \neq 4$ فإن $x \neq 2$	C	إذا كانت $x \neq 2$ فإن $x^2 \neq 4$	D	إذا كانت $x = 2$ فإن $x^2 = 4$
6	أي ..... ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط .						
	A	نقطة واحدة	B	نقطتين	C	ثلاث نقاط	D	أربع نقاط
7	الحد التالي في النمط 2, 5, 11, 23,						
	A	37	B	43	C	47	D	53
8	العبارة : " إذا كانت ∠2 , ∠1 زاويتان تشتركان في نقطة فإنهما متجاورتان ، أي مما يلي مضاد لهذه العبارة :						
	A		B		C		D	
9	إذا كان $m\angle a + m\angle b = 90°$, $m\angle a + m\angle c = 180°$ ، فأي مما يلي صحيح :						
	A	$m\angle b = m\angle c$	B	$m\angle b > m\angle c$	C	$m\angle b < m\angle c$	D	$m\angle b = m\angle c = m\angle a$
10	"إذا كان مجموع قياسي زاويتين يساوي 90° فإنهما متتامتان " أي العبارات الآتية هي عكس العبارة الشرطية :						
	A	إذا كانت الزاويتين متتامتين فإن مجموع قياسيهما 90°	B	إذا كانت الزاويتان غير متتامتان ، فإن مجموع قياسهما 90°	C	إذا كانت الزاويتان متتامتان ، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي 90°	D	إذا كانت الزاويتان غير متتامتان فإن مجموع قياسيهما لا يساوي 90°
11	ما الخاصية التي تبرر العبارة : إذا كان $3\left(x - \frac{7}{6}\right) = 5$ فإن $3x - \frac{7}{2} = 5$						
	A	التوزيع	B	التجميع	C	الطرح	D	الضرب
12	(الزاويتان المتكاملتان متجاورتين على مستقيم دائمًا) أي مما يأتي يعد مثالًا مضادًا للعبارة :						
	A	زاويتان غير متجاورتين	B	زاويتان منفرجتان غير متجاورتين	C	زاويتان قائمتان غير متجاورتين	D	زاويتان متكاملتان ومتجاورتان على مستقيم

اختر الإجابة الصحيحة :

13 ثلاث نقاط A , B , C إذا كانت $AB + BC = AC$ فإنها تشكل :

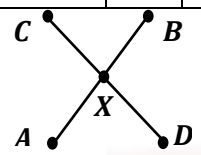
A	B	C	D
مثلث طول ضلعه الأكبر AC	مثلث طول ضلعه الأكبر AB	قطعة مستقيمة AC	قطعة مستقيمة AB

14 قيمة x في الشكل المجاور :



A	B	C	D
20	40	90	180

15 في الشكل المجاور ، إذا كان $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ و $\overline{AX} \cong \overline{CX}$ ، فإن :



A	B	C	D
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$	$\overline{BX} \cong \overline{CX}$	$\overline{DX} \cong \overline{XB}$	$\overline{BD} \cong \overline{DA}$

16 أي مما يلي يعتبر مثال مضاد للعبارة : " إذا كان n عدد أولي ، فإن $n + 1$ ليس أولي "

A	B	C	D
$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$

17 إذا كانت العبارة p , q خطأ فأي العبارات الآتية تكون قيمتها صواب :

A	B	C	D
$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow p$

18 في جدول الصواب أي التالي يدل على قيم الصواب للعبارة $p \wedge q$:

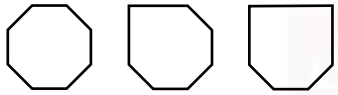
p	q	$p \wedge q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

A	B	C	D
T T T F	T F F T	T F F F	T F T T

19 إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في .....

A	B	C	D
نقطة	نقطتين	مستقيم	مستوى

20 انظر إلى النمط الآتي ، ما الشكل التالي في النمط :



A	B	C	D

21 إذا كانت p صحيحة ، و q صحيحة ، فأي العبارات التالية تكون خاطئة :

A	B	C	D
$p \vee q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$

22 إذا كانت p صحيحة ، و q خاطئة ، فأي العبارات التالية تكون خاطئة :

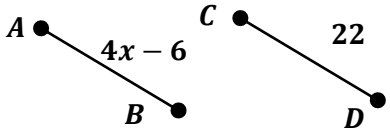
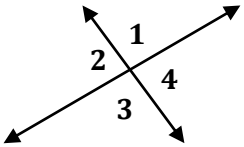
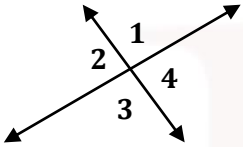
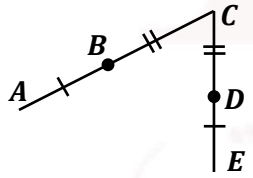
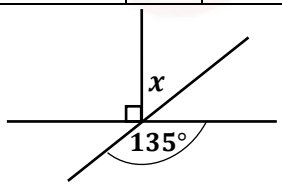
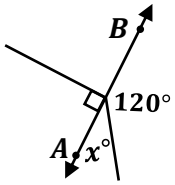
A	B	C	D
$p \vee q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$

23 إذا كانت الزاويتان A , B متتامتين ، وكانت $m\angle A = 40°$ ، فما قياس $\angle B$:

A	B	C	D
$30°$	$40°$	$50°$	$60°$

24 إذا كانت الزاويتان $1 , 2$ متكاملتان ، وكان $m\angle 1 = 120°$ ، فإن قياس $\angle 2$ يساوي :

A	B	C	D
$30°$	$40°$	$50°$	$60°$

اختر الإجابة الصحيحة :								
25	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، فإن $x = \cdots$ 							
	A	28	B	16	C	7	D	4
26	من الشكل المرسوم :  إذا كانت $m\angle 1 = 2x \, , m\angle 4 = 3x + 80$ فإن $m\angle 1$ تساوي :							
	A	20°	B	25°	C	40°	D	50°
27	من الشكل المرسوم :  إذا كانت $m\angle 1 = 2x \, , m\angle 4 = 3x + 80$ فإن $m\angle 2$ تساوي :							
	A	150°	B	140°	C	130°	D	100°
28	بين أيًا من العبارات تنتج منطقيًا من العبارتين التاليتين : إذا اشتريت وجبتين ، فإنك ستحصل على علبة عصير مجانًا . اشترى خليل وجبتين .							
	A	اشترى خليل وجبة واحدة فقط .	B	سيحصل خليل على وجبة مجانية .	C	سيحصل خليل على علبتي عصير مجانًا.	D	حصل خليل على علبة عصير مجانًا.
29	إذا كانت $DC = BC$ ، فإن $AB + BC = AB + DC$ ماهي الخاصية المستعملة : 							
	A	الانعكاس	B	التعويض	C	التعدي	D	التماثل
30	أوجد قيمة x في الشكل المجاور : 							
	A	45°	B	50°	C	55°	D	60°
31	في الشكل المجاور AB مستقيم ، ما قيمة x : 							
	A	40°	B	60°	C	70°	D	80°
32	النقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، إذا كان $EF = 3x + 7 \, , DE = 8x - 3$ ، فإن قيمة x تساوي :							
	A	2	B	5	C	13	D	26

مفاتيح الإجابات

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	A	A	C	C	C	C	C	A	A	C	D
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
D	C	C	B	B	A	C	C	A	C	A	C
				32	31	30	29	28	27	26	25
				A	B	A	B	D	B	C	C

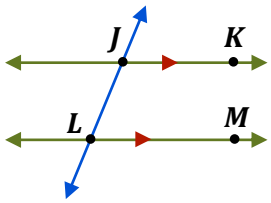
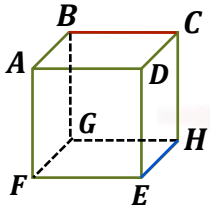
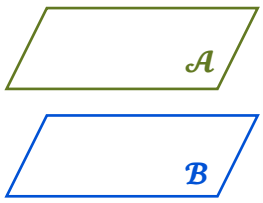
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - تدوين

الفصل الثاني

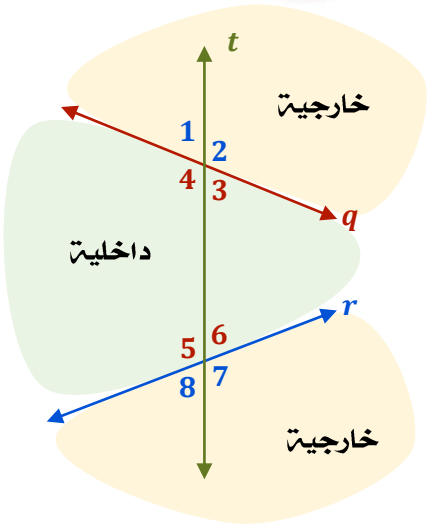
التوازي والتعامد

مجموعة رقعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

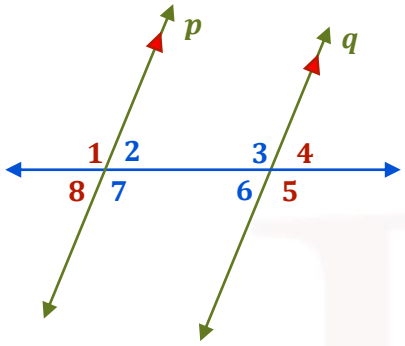
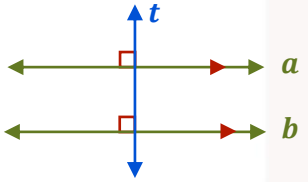
التوازي والتخالف

المفهوم	مثال	
المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان لا يتقاطعان أبداً ويقعان في المستوى نفسه .	$\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$	
المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان لا يتقاطعان أبداً ولا يقعان في المستوى نفسه .	$\overline{EH}$ يخالف $\overline{BC}$	
المستويان المتوازيان هما مستويان غير متقاطعين .	المستويان $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ متوازيان	

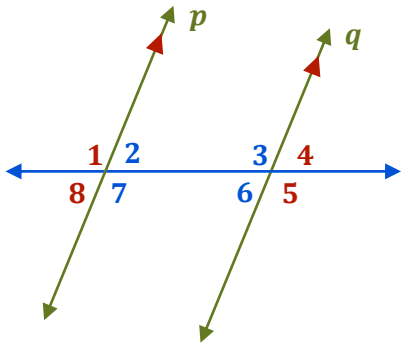
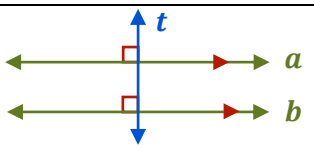
علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع

العلاقات	مثال	
القاطع : هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في المستوى نفسه وفي نقاط مختلفة .	t قاطع للمستقيمين q , r	
زوايا داخلية	$\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$	
زوايا خارجية	$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$	
الزاويتان المتحالفتان	$\angle 4$ و $\angle 5$ ، $\angle 3$ و $\angle 6$	
الزاويتان المتبادلتان داخليًا	$\angle 3$ و $\angle 5$ ، $\angle 4$ و $\angle 6$	
الزاويتان المتبادلتان خارجيًا	$\angle 1$ و $\angle 7$ ، $\angle 2$ و $\angle 8$	
الزاويتان المتناظرتان	$\angle 1$ و $\angle 5$ ، $\angle 2$ و $\angle 6$ $\angle 3$ و $\angle 7$ ، $\angle 4$ و $\angle 8$	

المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا

الزوايا والمستقيمات المتوازية			مثال
إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن :	كل زاويتين متناظرتين متطابقتان	$\angle 1 \cong \angle 3$ $\angle 2 \cong \angle 4$ $\angle 5 \cong \angle 7$ $\angle 6 \cong \angle 8$	
	كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان	$\angle 2 \cong \angle 6$ $\angle 7 \cong \angle 3$	
	كل زاويتين متحالفتين متكاملتان	$\angle 2 + \angle 3 = 180°$ $\angle 6 + \angle 7 = 180°$	
	كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان	$\angle 1 \cong \angle 5$ $\angle 4 \cong \angle 8$	
إذا كان مستقيم عموديًا على أحد المستقيمين المتوازيين فإنه عموديًا على الآخر .		$a \parallel b$ و $t \perp a$ فإن $t \perp b$	

توازي مستقيمين

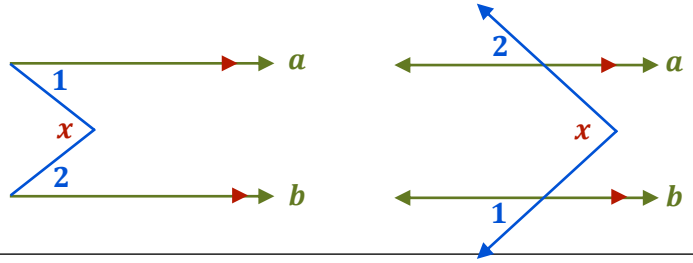
عكس الزوايا والمستقيمات المتوازية		مثال
إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى ونتج عن التقاطع زاويتان :	متناظرتان متطابقتان $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 2 \cong \angle 4$ $\angle 7 \cong \angle 5$ و $\angle 6 \cong \angle 8$	
	متبادلتان داخليًا متطابقتان $\angle 6 \cong \angle 2$ و $\angle 7 \cong \angle 3$	
	متحالفتان متكاملتان $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ $\angle 6 + \angle 7 = 180°$	
	متبادلتان خارجيًا متطابقتان $\angle 5 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 8$	
إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى ، وكان عموديًا على كل منهما ، فإن المستقيمين متوازيان .		

فإن المستقيمين متوازيان $p \parallel q$

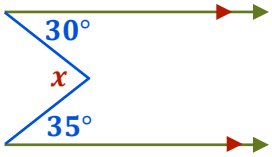
$t \perp a , t \perp b$ فإن : $a \parallel b$

التوازي بشكل M

- إذا كان $a \parallel b$ ، فإن : $m\angle x = m\angle 1 + m\angle 2$

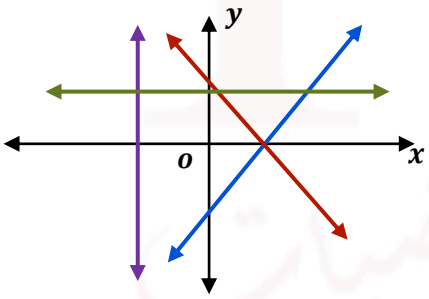


مثال : ما قيمة x في الشكل أدناه :



$$m\angle x = 30 + 35$$
$$m\angle x = 65°$$

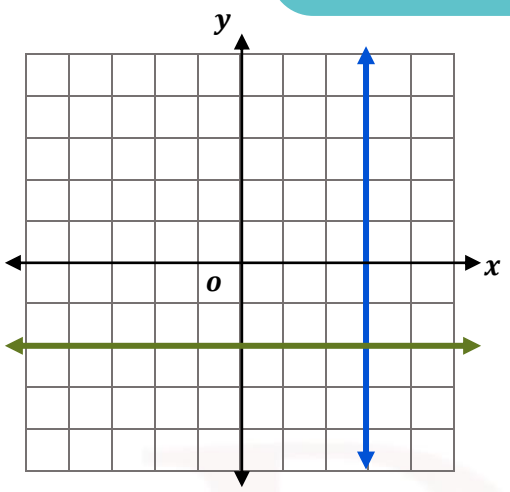
ميل المستقيم

الميل	مثال
هو نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، حيث : $x_2 \neq x_1$	أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(8, 6), (2, 4)$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$
حالات الميل	مثال
موجب	
سالب	
يساوي صفر	
غير معرف	

صيغ معادلات المستقيم

صيغة الميل والمقطع	مثال
$y = mx + b$ حيث m ميل المستقيم ، و b مقطع المحور y	اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله 3 ، ومقطع المحور y له 2 $y = 3x + 2$
صيغة الميل ونقطة	مثال
$y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث m ميل المستقيم ، و (x_1, y_1) نقطة على المستقيم	اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله 4 ، ويمر بالنقطة $(3, 2)$ $y - 3 = 4(x - 2)$

معادلات المستقيمات الأفقية والرأسية



- معادلة المستقيم الأفقي هي $y = b$
  حيث b مقطع المحور y
  مثال : $y = -2$

- معادلة المستقيم الرأسي هي $x = a$
  حيث a مقطع المحور x
  مثال : $x = 3$

معادلات المستقيمات المتوازية

- المستقيمات المتوازية لهما الميل نفسه .

مثال : المستقيمان $y = 2x - 5$, $y = 2x + 3$
متوازيان لأن :

$$m_1 = 2 \ , m_2 = 2$$

معادلات المستقيمات المتعامدة

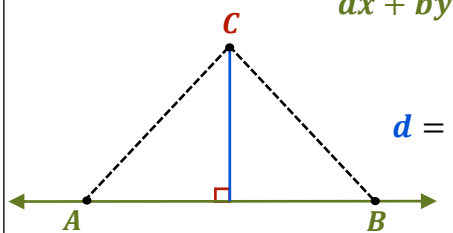
- المستقيمات المتعامدة : ميل أحدهما هو معكوس مقلوب الآخر .
- أي حاصل ضربهما يساوي -1

مثال : المستقيمان $y = -\frac{1}{2}x - 5$, $y = 2x + 3$
متعامدان لأن :

$$m_1 = 2 \ , m_2 = -\frac{1}{2}$$
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

البعد بين نقطة ومستقيم

- البعد بين نقطة ومستقيم هو طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم .
- المسافة بين نقطة (x_1 , y_1) و مستقيم $ax + by + c = 0$



$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

البعد بين مستقيمين متوازيين

- إذا كان المستقيمان المتوازيان على الصورة :

$$y_1 = mx + b_1$$
$$y_2 = mx + b_2$$

فإن البعد بينهما :

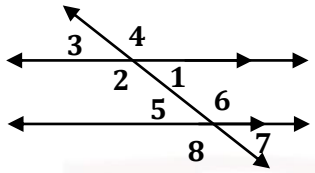
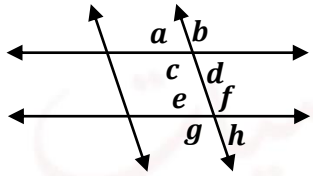
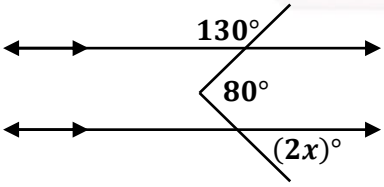
$$d = \frac{|b_2 - b_1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

مثال : البعد بين المستقيمين المتوازيين $y = 5 , y = 3$

$$d = \frac{|5 - 3|}{\sqrt{(0)^2 + 1}} = 2$$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	احسب معادلة المستقيم المعامد لـ $y = 5x + 3$ عند النقطة $(0\,,3)$							
	A	$y = -5x + 3$	B	$y = -\frac{1}{5}x + 3$	C	$y = \frac{1}{5}x + 3$	D	$y = -5x + \frac{1}{3}$
2	أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(0\,,5)\,,(9\,,2)$							
	A	$\frac{1}{4}$	B	$\frac{1}{3}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$-\frac{1}{3}$
3	الزاويتان 2 و 5 زاويتان : 							
	A	داخليتان متحالفتان	B	متناظرتين	C	متبادلتين خارجيًا	D	متبادلتين داخليًا
4	قيمة r التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $B(5\,,-7)\,,A(r\,,3)$ يساوي -5 :							
	A	-7	B	0	C	3	D	10
5	ما ميل المستقيم الذي معادلته $2x + y = 5$:							
	A	2.5	B	2	C	-1	D	-2
6	المستقيم $y = -1$ يمر بالنقطتين :							
	A	$(-2\,,-7)\,,(-2\,,1)$	B	$(4\,,-7)\,,(4\,,7)$	C	$(7\,,1)\,,(-2\,,1)$	D	$(4\,,-1)\,,(-2\,,-1)$
7	المستقيم المعامد لـ $y = -\frac{3}{2}x + 7$:							
	A	$y = \frac{2}{3}x + 4$	B	$y = \frac{1}{4}x - 1$	C	$y = \frac{3}{2}x + 4$	D	$y = \frac{3}{4}x - 5$
8	أوجد مجموع $a + d + f + g$: 							
	A	$360°$	B	$340°$	C	$270°$	D	$180°$
9	أي مما يلي يعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $y = 3x - 6\,,3y = 9x + 27$							
	A	مستقيمان متعامدان	B	مستقيمان متوازيان	C	مستقيمان لهما المقطع y نفسه	D	مستقيمان لهما المقطع x نفسه
10	في الشكل الآتي ما قيمة x : 							
	A	$15°$	B	$25°$	C	$30°$	D	$50°$
11	معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $y = 2x + 3$							
	A	$y = 2x + \frac{1}{3}$	B	$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$	C	$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$	D	$y = -\frac{1}{2}x - 3$

اختر الإجابة الصحيحة :

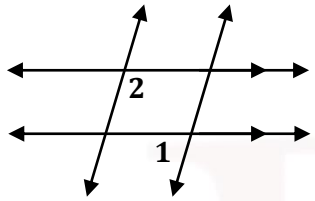
12 أي مما يلي معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2\,,1)$ ، ويوازي المستقيم $y=\frac{1}{3}x+5$

A	B	C	D
$y=3x+7$	$y=\frac{1}{3}x+7$	$y=-\frac{1}{3}x-5$	$y=-3x-5$

13 معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0\,,5)$, $(-9\,,2)$

A	B	C	D
$y=\frac{1}{3}x+5$	$y=-\frac{1}{3}x-5$	$y=\frac{1}{3}x-5$	$y=-\frac{1}{3}x+5$

14 في الشكل الآتي ، إذا كان $m\angle 1=80°$ فإن $m\angle 2$ تساوي :

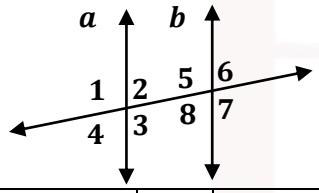


A	B	C	D
$10°$	$80°$	$100°$	$120°$

15 مستقيم يمر بالنقطتين $(4\,,1)$, $(4x\,,-7)$ ، وميله يساوي 2 فما قيمة x :

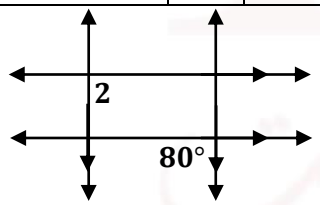
A	B	C	D
-8	-2	0	2

16 أي الحقائق الآتية ليست كافية لإثبات أن المستقيم a يوازي المستقيم b :



A	B	C	D
$\angle 2\cong\angle 4$	$\angle 2\cong\angle 8$	$\angle 4\cong\angle 6$	$\angle 1\cong\angle 5$

17 احسب قياس $\angle 2$ في الشكل المجاور :



A	B	C	D
$100°$	$90°$	$80°$	$10°$

18 ما ميل المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $y=3x-3$

A	B	C	D
3	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

19 ما معادلة المستقيم الذي ميله 2 ، ويمر بالنقطة $(0\,,8)$

A	B	C	D
$y=2x+8$	$y=2x-4$	$y=2x-8$	$y=2x+4$

20 عدد المستويات التي تمر بمستقيمين متوازيين :

A	B	C	D
0	1	2	عدد لا نهائي

21 البعد بين المستقيمين المتوازيين $y=4\,,y=-2$:

A	B	C	D
6	2	-2	-6

22 المسافة بين المستقيمين المتوازيين $y=x+2$, $y=x$ تساوي :

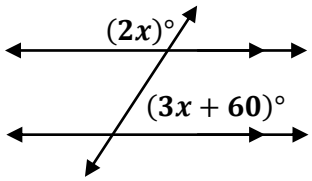
A	B	C	D
1	1.5	$\sqrt{2}$	-6

23 أي المستقيمات الآتية يوازي المستقيم $y-2x=2$:

A	B	C	D
$2y+4x=4$	$y-4x=2$	$3y-11=6x$	$y=2-2x$

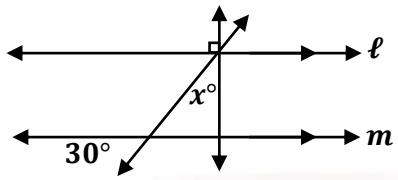
اختر الإجابة الصحيحة :

24 أوجد قيمة x :



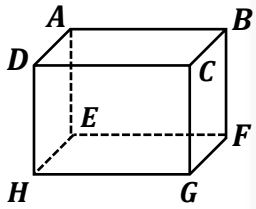
A		B		C		D	
$24°$		$30°$		$50°$		$60°$	

25 في الشكل المجاور : إذا كان $m \parallel \ell$ ، فما قيمة x :



A		B		C		D	
$15°$		$30°$		$60°$		$80°$	

26 في الشكل المجاور : متوازي مستطيلات
أي زوج من القطع المستقيمة متخالفه :

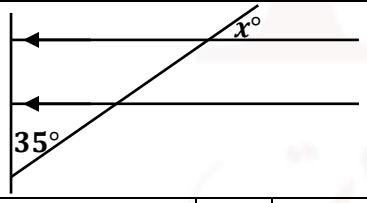


A		B		C		D	
$\overline{BC}, \overline{FG}$		$\overline{BF}, \overline{DH}$		$\overline{HG}, \overline{DH}$		$\overline{BC}, \overline{EF}$	

27 المسافة بين النقطة $(2, 4)$ والمستقيم $y = 2x + 5$, $y = x$ تساوي :

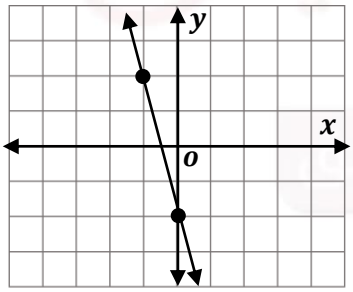
A		B		C		D	
$13\sqrt{5}$		5		$\sqrt{5}$		$5\sqrt{5}$	

28 إذا كان أحمد يرمي مجموعة من الأسهم على الحائط بشكل عامودي
فإذا رمي سهم على الحائط بحيث يصنع زاوية $35°$ مع الحائط
فما هو قياس الزاوية x :



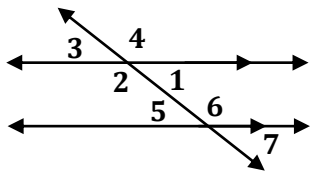
A		B		C		D	
$35°$		$55°$		$70°$		$100°$	

29 ما ميل المستقيم الممثل بيانيًا:



A		B		C		D	
4		$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		-4	

30 الزاويتان 1 و 5 زاويتان :



A		B		C		D	
داخليتان متحالفتان		متناظرتين		متبادلتين خارجيًا		متبادلتين داخليًا	

مفاتيح الإجابات

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	A	A	B	A	A	D	D	C	A	D	B
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
A	A	C	A	B	A	D	A	A	C	C	A
						30	29	28	27	26	25
						D	D	B	C	D	C

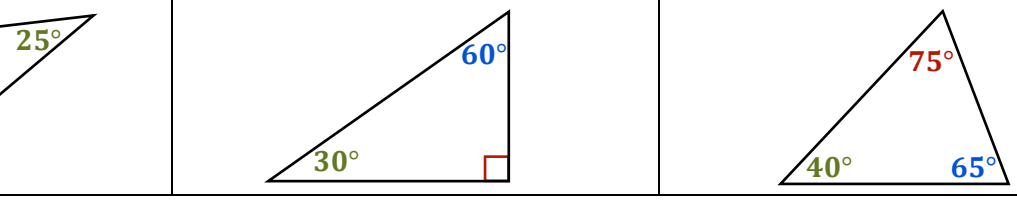
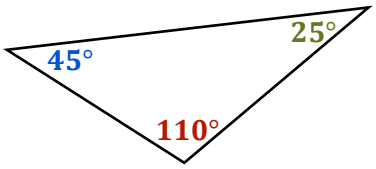
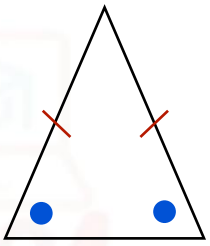
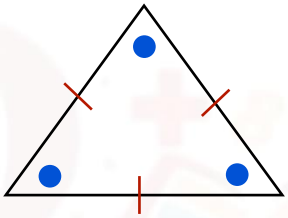
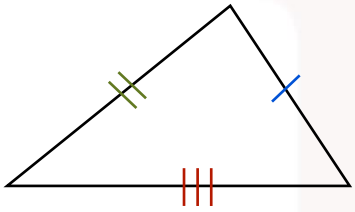
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - تربوي

الفصل الثالث

المثلثات المتطابقة

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تصنيف المثلثات

بالنسبة لزواياه		
حاد الزوايا	قائم الزاوية	منفرج الزاوية
		
بالنسبة لأضلاعه		
متطابق الضلعين	متطابق الأضلاع	مختلف الأضلاع
 زاويتا القاعدة متطابقتان	 متطابق الزوايا وقياس منها $60°$	

- أي مثلث متطابق الضلعين فيه زاوية قياسها $60°$ يكون مثلث متطابق الأضلاع .

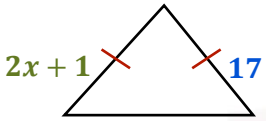
مثال : أوجد قيمة x :

$2x = 16$

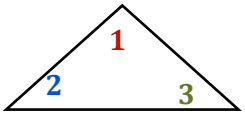
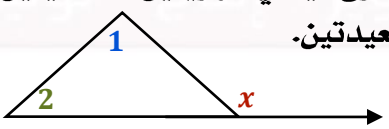
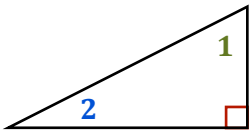
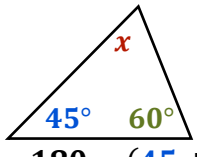
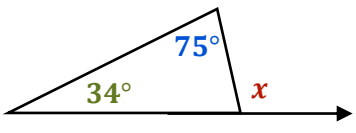
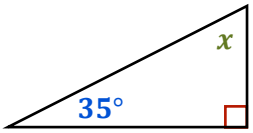
$x = 8$

$2x + 1 = 17$

$2x = 17 - 1$



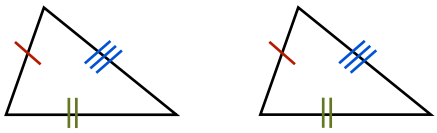
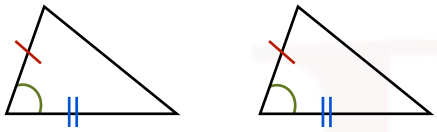
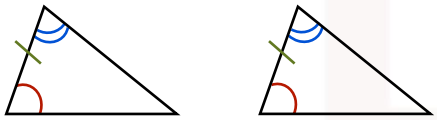
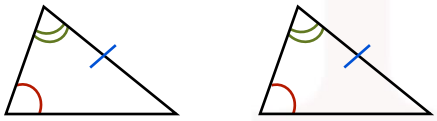
زوايا المثلثات

الزوايا الداخلية	الزوايا الخارجية	الزوايا المتتامة
مجموع الزوايا الداخلية للمثلث $180°$  $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	الزاوية الخارجية في مثلث تساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.  $m\angle x = m\angle 1 + m\angle 2$	الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان .  $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$
مثال : أوجد $m\angle x$ في كل مما يلي :		
 $m\angle x = 180 - (45 + 60)$ $= 180 - 105$ $= 75°$	 $m\angle x = 75 + 34$ $= 109°$	 $m\angle x = 90 - 35$ $= 55°$

- الزاوية الخارجية والزاوية الداخلية المجاورة لها متكاملتان .

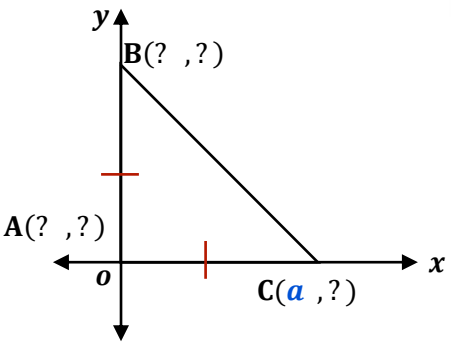
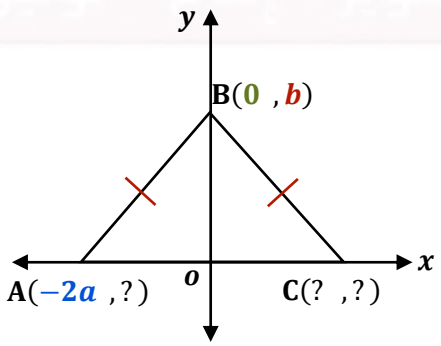
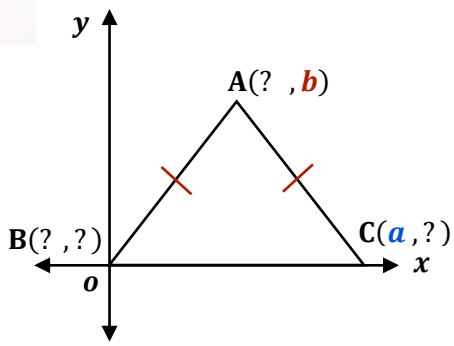
تطابق المثلثات

- المضلعات المتطابقة : يتطابق المضلعان إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وأضلاعهما المتناظرة متطابقة .

الاختصار	المفهوم	مثال
SSS	إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها مثلث آخر ، فإن المثلثين متطابقان .	
SAS	إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر ، فإن المثلثين متطابقان .	
ASA	إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث مع نظائرهما في مثلث آخر ، فإن المثلثين متطابقان .	
AAS	إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين .	

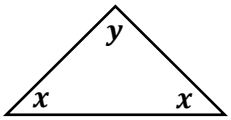
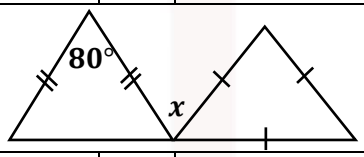
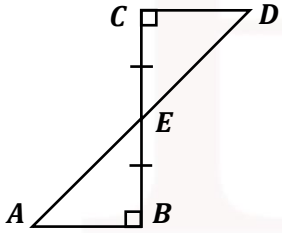
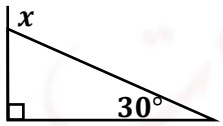
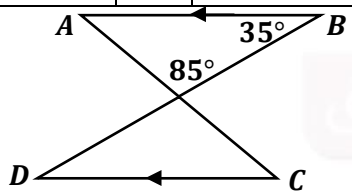
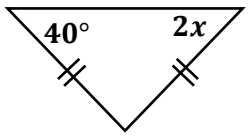
المثلثات والبرهان الإحداثي

إيجاد الإحداثيات المجهولة في ΔABC :

		
$A(0,0)$ ، $B(0,a)$ ، $C(a,0)$	$A(-2a,0)$ ، $B(0,b)$ ، $C(2a,0)$	$A\left(\frac{a}{2},b\right)$ ، $B(0,0)$ ، $C(a,0)$

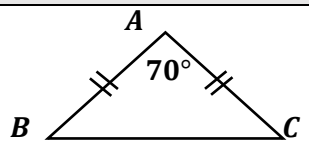
أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	مثلث قياسات زواياه $50°, 50°, 80°$ ، ما نوع هذا المثلث :							
	A	قائم الزاوية	B	منفرج الزاوية	C	متطابق الأضلاع	D	متطابق الضلعين
2	إذا كان قياس زاويتي مثلث $40°, 110°$ ، فأي القياسات التالية لا يمكن أن يكون لزاوية خارجية :							
	A	$160°$	B	$150°$	C	$140°$	D	$70°$
3	إذا كان $x = 2y$ ، فأوجد y : 							
	A	$27°$	B	$30°$	C	$36°$	D	$40°$
4	أوجد قياس الزاوية الخارجية للمثلث المتطابق الأضلاع :							
	A	$30°$	B	$40°$	C	$60°$	D	$120°$
5	ما قيمة x في الشكل المجاور : 							
	A	$60°$	B	$70°$	C	$110°$	D	$180°$
6	في الشكل المجاور النظرية أو المسلمة التي يمكن استخدامها لإثبات أن : $\Delta ABE \cong \Delta DCE$ هي : 							
	A	SAS	B	ASA	C	SSS	D	AAS
7	احسب قياس الزاوية الخارجية في الشكل المجاور : 							
	A	$30°$	B	$60°$	C	$90°$	D	$120°$
8	في الشكل المجاور $m\angle C$ تساوي : 							
	A	$35°$	B	$50°$	C	$60°$	D	$85°$
9	ما قيمة x في الشكل المجاور : 							
	A	$5°$	B	$8°$	C	$10°$	D	$20°$
10	إذا كان قياس زاويتي مثلث $30°, 70°$ ، فإن الزاوية الخارجية لا يمكن أن يكون قياسها :							
	A	$100°$	B	$110°$	C	$120°$	D	$150°$

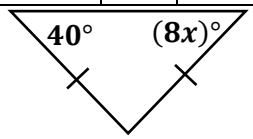
اختر الإجابة الصحيحة :

11 أوجد قياس $\angle B$ علمًا بأن $m\angle A = 70°$ ، $AB \cong AC$:



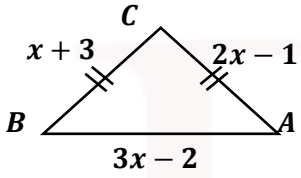
A		B		C		D	
$60°$		$55°$		$40°$		$30°$	

12 في الشكل المجاور ما قيمة x :



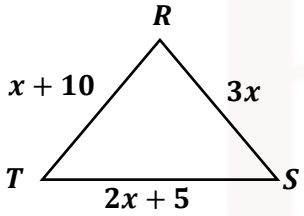
A		B		C		D	
8		6		5		4	

13 في الشكل المجاور ، إذا كان $CB \cong CA$ ، فما طول AB :



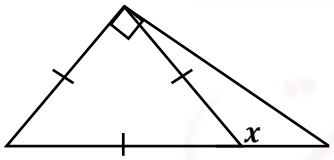
A		B		C		D	
4		5		6		10	

14 في الشكل المجاور ، ΔRST متطابق الأضلاع ، طول الضلع $\overline{RS}$ يساوي :



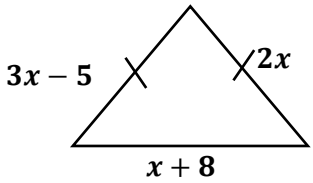
A		B		C		D	
5		10		15		30	

15 بناءً على الشكل المجاور فإن قيمة x :



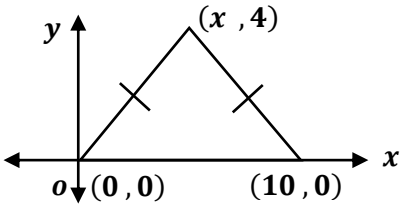
A		B		C		D	
$72°$		$90°$		$120°$		$150°$	

16 ماهي قيم أضلاع المثلث المجاور :



A		B		C		D	
10 , 10 , 13		12 , 12 , 10		10 , 11 , 11		10 , 11 , 12	

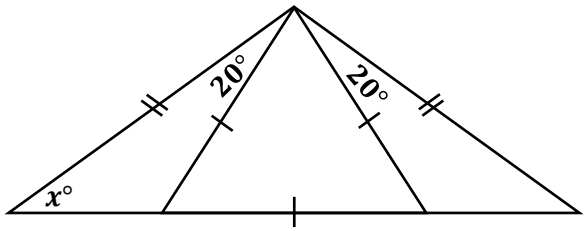
17 أوجد قيمة x :



A		B		C		D	
4		5		8		10	

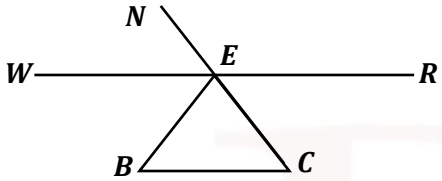
اختر الإجابة الصحيحة :

18 أوجد قيمة x :



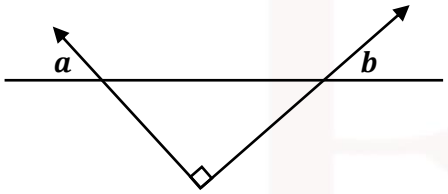
A		B		C		D	
$20°$		$40°$		$60°$		$80°$	

19 أوجد $m\angle NER$ ، إذا علمت أن المثلث متطابق الأضلاع ، وأن $RW \parallel BC$



A		B		C		D	
$30°$		$60°$		$120°$		$180°$	

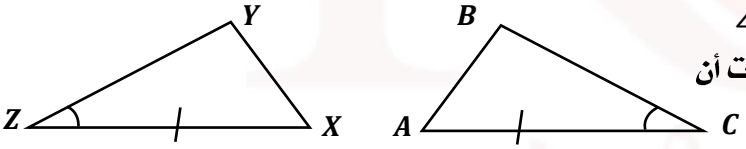
20 أي العبارات التالية تصف العلاقات الصحيحة بين الزاويتين a , b في الشكل المجاور :



A		B		C		D	
$a+b<90°$		$a+b>90°$		$a+b=90°$		$a+b=45°$	

21 في الشكلين المجاورين ، $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ و $\angle Z \cong \angle C$

ما المعلومة الإضافية التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$



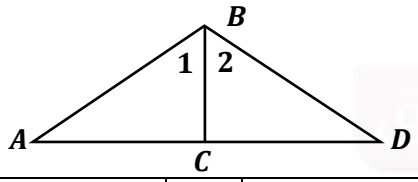
A		B		C		D	
$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$		$\overline{AB} \cong \overline{XY}$		$\overline{BC} \cong \overline{XZ}$		$\overline{XZ} \cong \overline{XY}$	

22 إذا كان $\Delta CBX \cong \Delta SML$ ، فأي عبارة مما يأتي صحيحة :

A		B		C		D	
$\overline{BC} \cong \overline{ML}$		$\angle X \cong \angle S$		$\overline{XC} \cong \overline{ML}$		$\angle XCB \cong \angle LSM$	

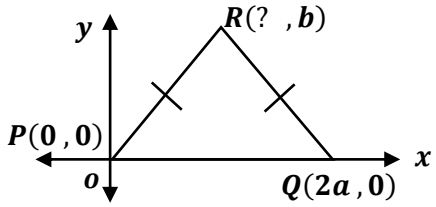
23 في الشكل المجاور ، $\angle 2 \cong \angle 1$ ، $\overline{BC} \perp \overline{AD}$

أي نظرية أو مسلمة مما يأتي يمكن استعمالها لإثبات أن : $\Delta ABC \cong \Delta DBC$



A		B		C		D	
AAS		ASA		SAS		SSS	

24 ما إحداثيات النقطة R في المثلث المجاور :



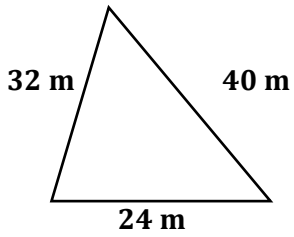
A		B		C		D	
$\left(\frac{a}{2} , b\right)$		(a , b)		$(4a , b)$		$\left(\frac{a}{4} , b\right)$	

25 مثلث يحتوي زاويتين قياسهما $40°$, $30°$ ، أي مما يلي تصلح أن تكون زاوية خارجية :

A		B		C		D	
$150°$		$120°$		$110°$		$100°$	

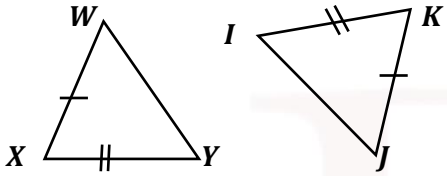
اختر الإجابة الصحيحة :

26 يصنف المثلث المرسوم بحسب أضلاعه بأنه :



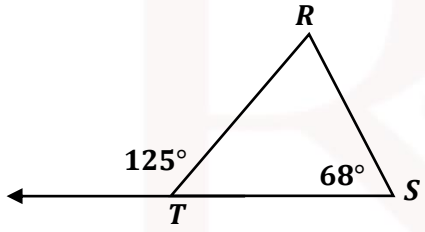
A	متطابق الأضلاع	B	متطابق الضلعين	C	قائم الزاوية	D	مختلف الأضلاع

27 في المثلثين المجاورين ، إذا كان $\overline{WX} \cong \overline{JK}, \overline{YX} \cong \overline{IK}$ و $\angle X \cong \angle K$ ، فأي العبارات الآتية تعبر عن تطابق هذين المثلثين :



A	$\Delta WXY \cong \Delta KIJ$	B	$\Delta WXY \cong \Delta KJI$	C	$\Delta WXY \cong \Delta JKI$	D	$\Delta WXY \cong \Delta IJK$

28 ما قياس الزاوية R في الشكل المجاور :



A	57°	B	59°	C	65°	D	68°

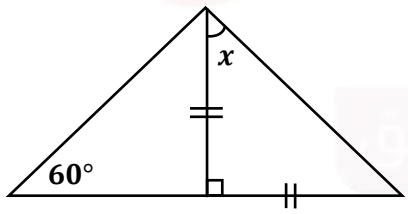
29 افترض أن قياس إحدى زاويتي القاعدة في مثلث متطابق الضلعين يساوي 44° ، فما قياس زاوية رأس المثلث :

A	108°	B	92°	C	56°	D	44°

30 إذا كان قياسا زاويتين في مثلث هما 45° , 92° ، فما نوع هذا المثلث :

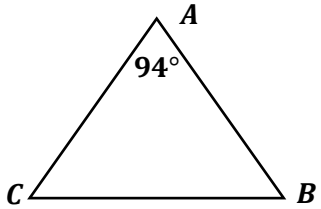
A	منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع	B	حاد الزوايا ومختلف الأضلاع	C	منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين	D	حاد الزوايا ومتطابق الضلعين

31 احسب قيمة x في الشكل المجاور :



A	75°	B	60°	C	45°	D	30°

32 إذا كان ΔABC متطابق الضلعين ، وكان $m\angle A = 94°$ فأي مما يأتي يجب أن تكون صحيحة :



A	$m\angle B = 94°$	B	$m\angle B = 47°$	C	$AB = BC$	D	$AB = AC$

مفاتيح الإجابات

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	B	C	D	C	D	B	B	D	C	A	D
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
B	B	D	A	C	C	B	B	A	C	C	D
				32	31	30	29	28	27	26	25
				D	C	A	B	A	C	D	A

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتقان - تميز

الفصل الرابع

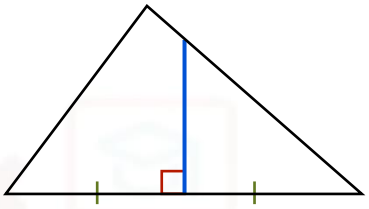
العلاقات في المثلثات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

قطع مستقيمة خاصة في المثلث

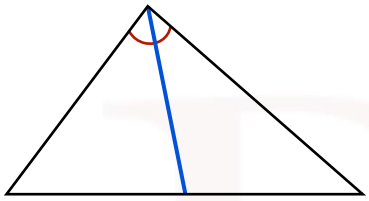
العمود المنصف

- العمود المنصف : يقطع القطعة في منتصفها ويكون عموديًا عليها .



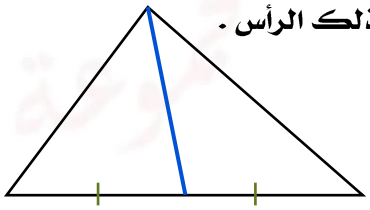
منصف الزاوية

- منصف الزاوية : يقسمها إلى زاويتين متطابقتين .



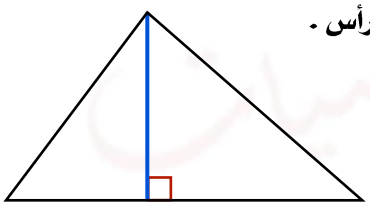
القطعة المتوسطة

- القطعة المتوسطة : قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس .



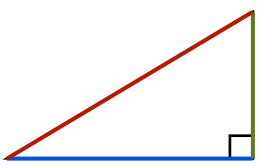
الارتفاع

- الارتفاع : القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل لذلك الرأس .

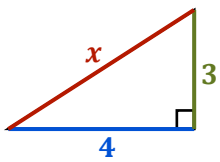


نظرية فيثاغورس

- $(\text{الضلع الثاني})^2 + (\text{الضلع الأول})^2 = (\text{الوتر})^2$



مثال : في الشكل أدناه ، أوجد قيمة x:



$$(x)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$x^2 = 9 + 16$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

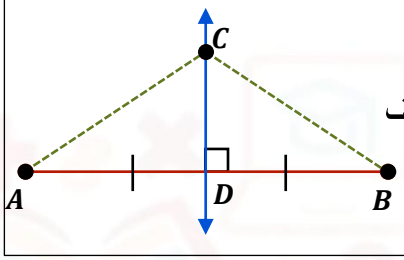
- من ثلاثيات فيثاغورس المشهورة : $(3 , 4 , 5)$ ومضاعفاتها .

المنصفات

العمود المنصف

كل نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة ، والعكس .

مثال :

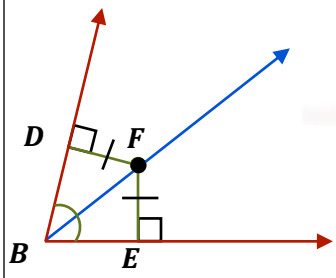


إذا كان CD عمود منصف لـ AB ، فإن $AC = BC$

منصف الزاوية

كل نقطة تقع على منصف زاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعيها ، والعكس .

مثال :

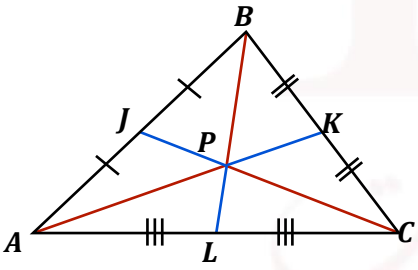


إذا كان BF منصف لـ $\angle DBE$

وكان $FD \perp BD$, $FE \perp BE$

فإن $DF = FE$

مركز المثلث



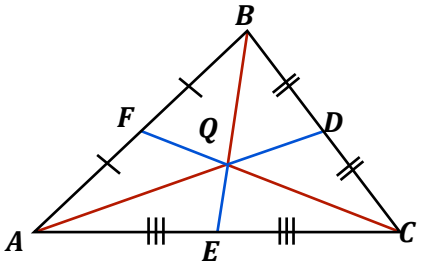
- يبعد مركز المثلث P عن كل رأس من رؤوس المثلث $\frac{2}{3}$ طول القطعة المتوسطة .
- يبعد مركز المثلث P عن كل ضلع من أضلاع المثلث $\frac{1}{3}$ طول القطعة المتوسطة .
- هناك علاقة بين أجزاء القطعة المتوسطة : $JP = \frac{1}{2} PC$ و $PC = 2\,JP$

وهكذا لباقي القطع المتوسطة .

مثال :

في ΔABC ، إذا كان $FC = 15$ فأوجد ما يلي :

FQ , QC



$FQ = \frac{1}{3} FC$

$FQ = \frac{1}{3} (15) = 5$

$QC = \frac{2}{3} FC$

$FQ = \frac{2}{3} (15) = 10$

المتباينة

تعريف المتباينة

- لأي عددين حقيقيين مثل a , b يكون $a > b$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$.

مثال :

إذا كان $3 + 2 = 5$ ، فإن $5 > 3$ و $5 > 2$

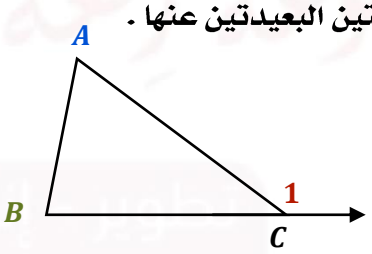
خصائص المتباينة

- لأي ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c

الخاصية	مثال
المقارنة	$a > b$ أو $a = b$ أو $a < b$
التعدي	إذا كان $a > b , b > c$ فإن $a > c$
	إذا كان $a < b , b < c$ فإن $a < c$
الجمع	إذا كان $a > b$ فإن $a + c > b + c$
	إذا كان $a < b$ فإن $a + c < b + c$
الطرح	إذا كان $a > b$ فإن $a - c > b - c$
	إذا كان $a < b$ فإن $a - c < b - c$

متباينة الزاوية الخارجية

- قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها .



$m\angle 1 > m\angle A$

$m\angle 1 > m\angle B$

مثال :

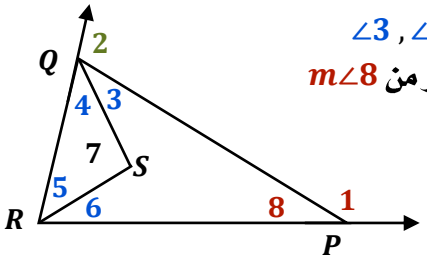
من الشكل المجاور حدد الزوايا التي تحقق الشرط المعطى :

- قياسها أقل من $m\angle 1$

$\angle 3 , \angle 4 , \angle 5 , \angle 6$

- قياسها أكبر من $m\angle 8$

$\angle 2$



متباينة المثلث

- القياسات التي تمثل أطوال أضلاع مثلث :

إذا كان مجموع أقصر طولين أكبر من طول الضلع الثالث .

مثال : هل القياسات تمثل أطوال أضلاع مثلث

$10 , 7 , 5$ ؟

$5 + 7 \; ? \; 10$

ولأن : $12 > 10$ فهي تمثل أضلاع مثلث .

- مدى الضلع الثالث في مثلث إذا علم طولا ضلعين

فيه : الفرق $< x <$ المجموع

مثال : ما مدى الضلع الثالث إذا علمت طولي ضلعين

$4 , 8$:

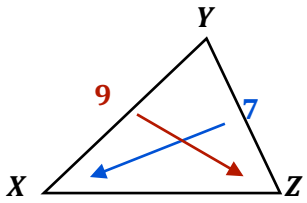
$8 + 4 > x > 8 - 4$

$12 > x > 4$

مدى الضلع الثالث : $(4 , 12)$

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

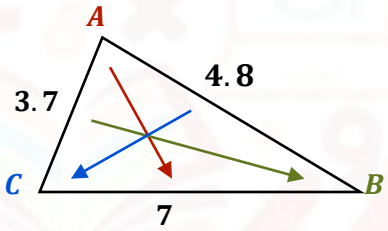
- إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر ، فإن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر والعكس .



بما أن : $XY > YZ$

فإن $m\angle Z > m\angle X$

مثال : اكتب زوايا ΔABC مرتبة من الأصغر إلى الأكبر:



$\angle B , \angle C , \angle A$

البرهان غير المباشر

- حدد النتيجة ، ثم افترض خطأها (أي نفيها) وباستعمال التبرير المنطقي نجد أن الافتراض يؤدي إلى تناقض ، وذلك بسبب فرض أن النتيجة خطأ .

مثال : اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة التالية :

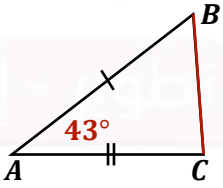
- إذا كان $4x < 24$ ، فإن $x < 6$

الافتراض هو : $x \geq 6$

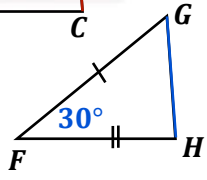
المتباينات في المثلثين

- إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الثاني ، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني والعكس .

مثال : إذا كان $m\angle A > m\angle F$

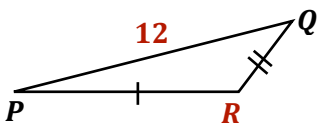


$\overline{AB} \cong \overline{FG} , \overline{AC} \cong \overline{FH}$

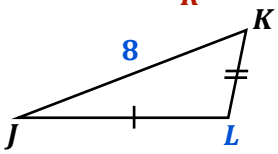


فإن : $BC > GH$

مثال : إذا كان $PQ > JK$



$\overline{PR} \cong \overline{JL} , \overline{QR} \cong \overline{KL}$

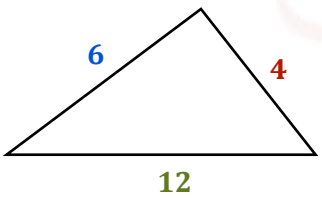


فإن : $m\angle R > m\angle L$

محيط ومساحة المثلث

- محيط المثلث : مجموع أطوال أضلاعه .

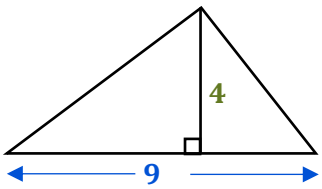
مثال : احسب محيط المثلث :



$= 4 + 6 + 12$
$= 22$

- مساحة المثلث : نصف القاعدة في الارتفاع .

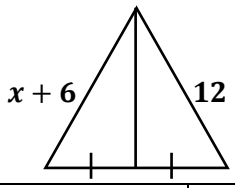
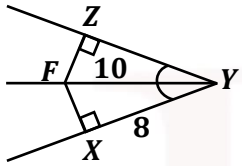
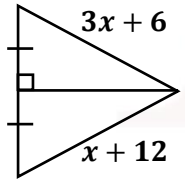
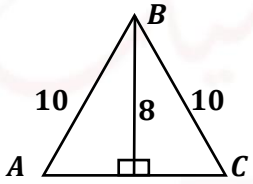
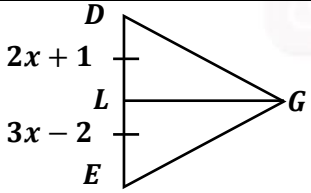
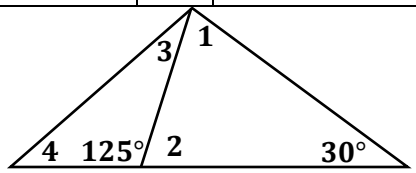
مثال : احسب مساحة المثلث :



$= \frac{1}{2} (9)(4)$
$= 18$

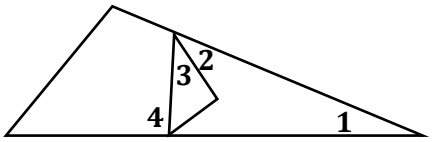
أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	أي الأطوال التالية يصلح أن يمثل طول ضلع مثلث :							
	5 , 3 , 3	A	17 , 5 , 3	B	11 , 4 , 4	C	10 , 6 , 3	D
2	أوجد قيمة x : 							
	3	A	6	B	9	C	12	D
3	في الشكل المجاور ، ما قيمة FZ ، إذا كان $XY = 8$, $YF = 10$: 							
	6	A	8	B	9	C	10	D
4	مثلث متطابق الضلعين طول أحد ضلعيه يساوي 10 cm ، فإن طول ضلعه الثالث يساوي :							
	18	A	20	B	21	C	40	D
5	إذا كان طول ضلعين في مثلث 7cm , 9cm ، فما أصغر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث :							
	2 cm	A	3 cm	B	4 cm	C	9 cm	D
6	ما قيمة x في الشكل المجاور : 							
	3	A	6	B	9	C	12	D
7	أوجد طول AC : 							
	6	A	8	B	10	C	12	D
8	GL قطعة متوسطة في المثلث DGE ، أوجد طول DE : 							
	3	A	7	B	10	C	14	D
9	ما أكبر زاوية مرقمة في الشكل المجاور : 							
	1	A	2	B	3	C	4	D

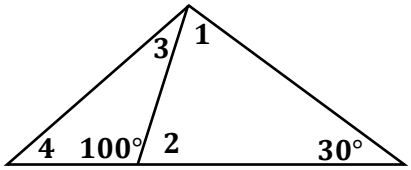
اختر الإجابة الصحيحة :

10 ما هي الزاوية الأكبر :



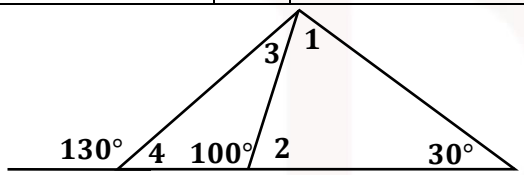
A		B		C		D	
1		2		3		4	

11 ما أكبر زاوية مرقمة في الشكل المجاور :



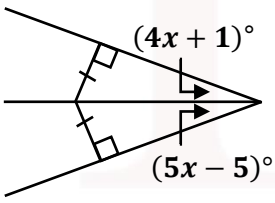
A		B		C		D	
1		2		3		4	

12 في الشكل المجاور ، أي الزوايا أصغر :



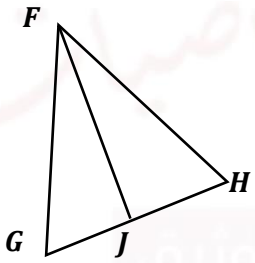
A		B		C		D	
1		2		3		4	

13 احسب قيمة x من الشكل المجاور :



A		B		C		D	
3		4		5		6	

14 في الشكل المجاور ، إذا كان $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$
فأي عبارة مما يأتي صحيحة :



A		B		C		D	
$\overline{FJ}$ ارتفاع لـ ΔFGJ		$\overline{FJ}$ منصف زاوية في ΔFGJ		$\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في ΔFGJ		$\overline{FJ}$ عمود منصف في ΔFGJ	

15 إذا كان طول ضلعين في مثلث 12 , 7 ، فأي مما يأتي لا يمكن أن يكون محيط المثلث :

A		B		C		D	
29		34		37		38	

16 إذا كان طول ضلعين في مثلث 9 m , 5 m ، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث فيه :

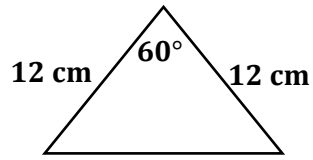
A		B		C		D	
14 m		6 m		5 m		4 m	

17 إذا كان طول ضلعين في مثلث 11 , 5 ، فأي متباينة مما يأتي تمثل مدى طول الضلع الثالث :

A		B		C		D	
$6 < x < 10$		$5 < x < 11$		$6 < x < 16$		$x < 5$ أو $x > 11$	

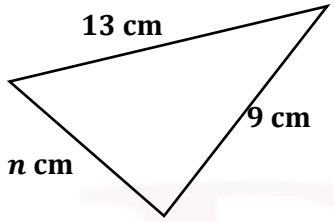
اختر الإجابة الصحيحة :

18 ما محيط المثلث المجاور :



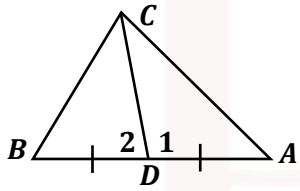
A		B		C		D	
24 cm		34.4 cm		36 cm		104 cm	

19 في الشكل المجاور ، أي الأعداد التالية لا يمكن أن يكون قيمة لـ n :



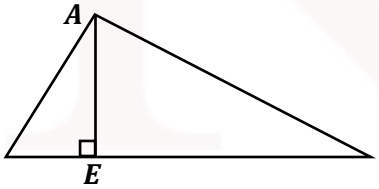
A		B		C		D	
7		10		13		22	

20 إذا كانت $\overline{DC}$ قطعة متوسطة في ΔABC ، وكان $m\angle 1 > m\angle 2$ فأي عبارة مما يأتي غير صحيحة :



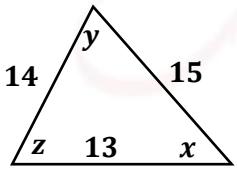
A		B		C		D	
$AD = BD$		$AC > BC$		$m\angle 1 > m\angle B$		$m\angle ADC = m\angle BCD$	

21 ماذا تمثل AE في الشكل المجاور :



A		B		C		D	
منصف الزاوية		عمود منصف لضلع		قطعة متوسطة		ارتفاع	

22 أي الآتي صحيح :



A		B		C		D	
$x > y$		$z < y$		$x > z$		$y > x$	

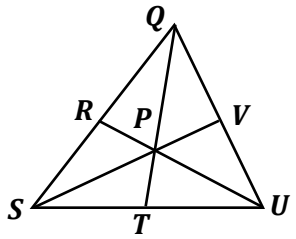
23 مثلث متطابق الضلعين ، طول الضلع 5 ، فأي مما يلي يمكن أن يكون طول الضلع الثالث :

A		B		C		D	
8		10		12		14	

24 النقطة P مركز المثلث QUS

إذا كان $QP = 14$ cm

فما طول QT :



A		B		C		D	
7 cm		12 cm		18 cm		21 cm	

مفاتيح الإجابات											
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	B	D	A	D	D	A	B	A	A	B	A
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
D	A	A	D	B	D	C	C	C	D	C	D

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتقان - تميز

الفصل الخامس

الأشكال الرباعية

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - تونس

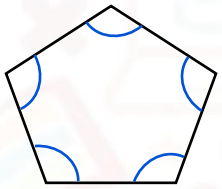
زوايا المضلع

الزوايا الداخلية

- مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب : $S = (n-2)\cdot 180°$ ، n عدد الأضلاع .

مثال : أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للخماسي

$$S = (5-2)\cdot 180°$$
$$= (3)\cdot 180°$$
$$= 540°$$



- قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم:

$$= \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

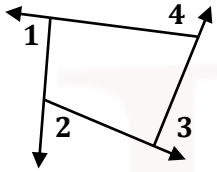
مثال : أوجد قياس الزاوية الداخلية للخماسي المنتظم المحدب :

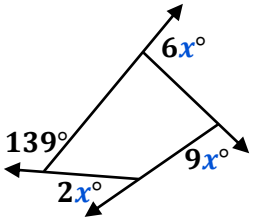
$$= \frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = \frac{(3)\cdot 180°}{5} = \frac{540°}{5}$$
$$= 18°$$

زوايا خارجية

- مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع المحدب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

مثال : $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360°$





مثال : أوجد قيمة x في الشكل :

$$6x + 9x + 2x + 139 = 360°$$
$$17x + 139° = 360°$$
$$17x = 360° - 139°$$
$$17x = 221°$$
$$x = \frac{221°}{17} = 13°$$

- قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم:

$$= \frac{360°}{n}$$

مثال : أوجد قياس الزاوية الخارجية للرباعي المنتظم:

$$= \frac{360°}{4} = 90°$$

عدد الأضلاع

- لإيجاد عدد الأضلاع لمضلع منتظم إذا علم قياس زاوية داخلية :

$$n = \frac{360°}{180° - \text{الزاوية الداخلية}}$$

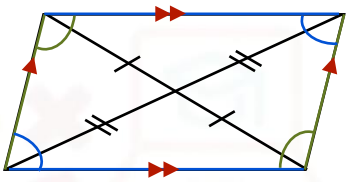
مثال : إذا كان قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم يساوي $144°$ ، فأوجد عدد أضلاعه :

$$n = \frac{360°}{180° - 144°}$$
$$= \frac{360}{36} = 10$$

الأشكال الرباعية

متوازي الأضلاع

- خصائص متوازي الأضلاع :
- كل ضلعين متقابلين متطابقين ومتوازيين .
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان .
- القطران ينصف كل منهما الآخر .



- نقطة تقاطع القطرين :

لإيجاد نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع المعطى إحداثيات رؤوسه نستخدم قانون نقطة المنتصف

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

مثال : أوجد نقطة تقاطع قطري $RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8\,,-2)\,,S(-6\,,7)\,,T(6\,,7)\,,U(4\,,-2)$

نختار أحد القطرين ونطبق عليه $R(-8\,,-2)\,,T(6\,,7)$

$$\left(\frac{-8+6}{2}\,,\frac{-2+7}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{5}{2}\right)=(-1\,,2.5)$$

- المسافة بين نقطتين : $(x_1\,,y_1)\,,(x_2\,,y_2)$

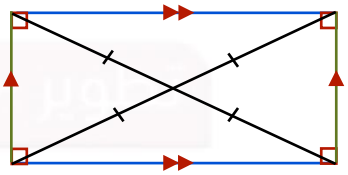
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال : أوجد المسافة بين نقطتين : $(2\,,3)\,,(7\,,1)$

$$=\sqrt{(7-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

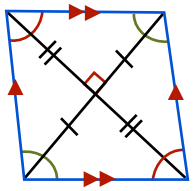
المستطيل

- خصائص المستطيل :
- هو متوازي أضلاع قطراه متطابقان .
- جميع زواياه قائمة .



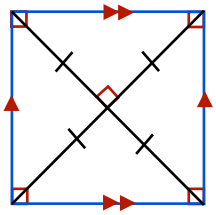
المعين

- خصائص المعين :
- هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة .
- القطران متعامدان وينصفان الزاويتين التي يمر بهما .



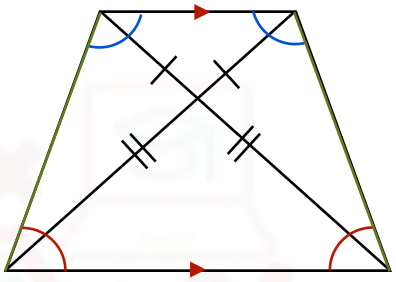
المربع

- خصائص المربع :
- هو متوازي أضلاع ومستطيل ومعين .
- قطراه ينصف كل منهما الآخر ومتطابقان ومتعامدان .

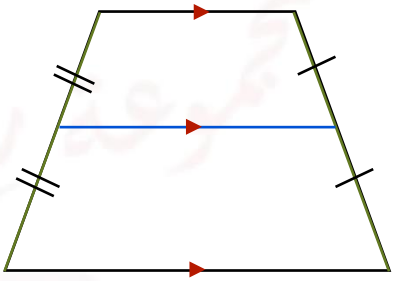


شبه المنحرف

- خصائص شبه المنحرف متطابق الساقين :
- القاعدتان متوازيتان .
- الساقان متطابقان .
- زاويتي القاعدة متطابقتان .
- القطران متطابقان .



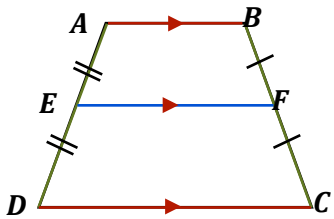
- القطعة المتوسطة لشبه المنحرف :
هي قطعة مستقيمة توازي القاعدتين وتنصف الساقين وطولها يساوي نصف مجموع القاعدتين .



مثال : $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين

وكان $AB = 12$, $DC = 22$

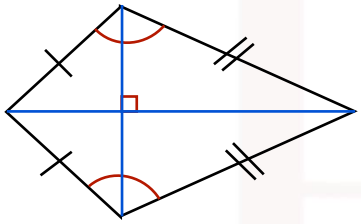
فأوجد EF :



$$EF = \frac{AB + DC}{2} = \frac{12 + 22}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

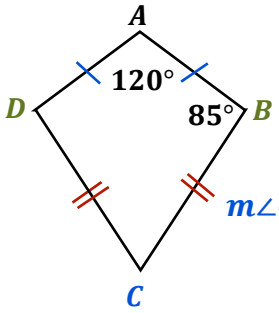
شكل الطائرة الورقية

- خصائص شكل الطائرة الورقية :
- هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة .
- كل ضلعين متقابلين غير متطابقين ولا متوازيين .
- القطران متعامدان .
- يوجد زوج من الزوايا المتقابلة المتطابقة هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين .



مثال : إذا كان $ABCD$ شكل الطائرة الورقية ،

فأوجد $m\angle C$:



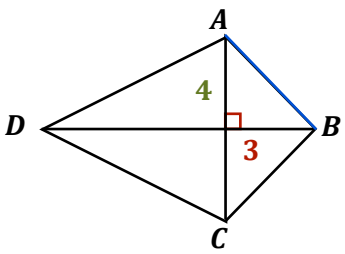
$m\angle D = m\angle B = 85°$

مجموع الزوايا الداخلية للرباعي تساوي $360°$

$$m\angle C = 360° - (120 + 85 + 85)$$
$$= 360° - (290)$$
$$= 70°$$

مثال : إذا كان $ABCD$ شكل الطائرة الورقية

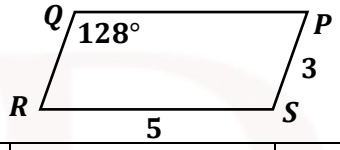
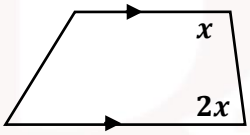
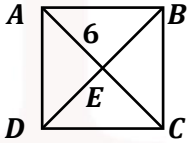
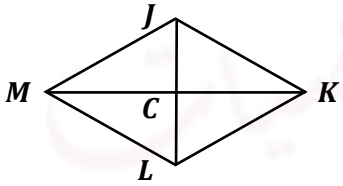
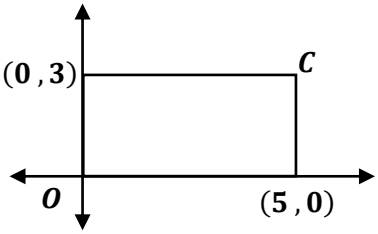
فأوجد AB :



$$AB^2 = (3)^2 + (4)^2$$
$$= 9 + 16$$
$$AB^2 = 25$$
$$AB = \sqrt{25} = 5$$

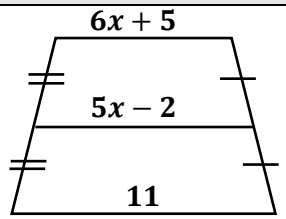
أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	كم عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس زاويته الداخلية $135°$:						
	A	5	B	6	C	7	D	8
2	مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع سداسي :						
	A	$360°$	B	$540°$	C	$720°$	D	$900°$
3	قياس الزاوية الداخلية في المضلع الثماني المنتظم :						
	A	$130°$	B	$135°$	C	$140°$	D	$720°$
4	كم ضلع لمضلع منتظم مجموع زواياه الداخلية $1800°$:						
	A	10	B	11	C	12	D	13
5	من الشكل المجاور $m\angle S$ تساوي : 						
	A	$28°$	B	$52°$	C	$128°$	D	$180°$
6	ما قيمة x في الشكل التالي : 						
	A	$120°$	B	$60°$	C	$40°$	D	$30°$
7	إذا كان الشكل $ABCD$ مربع ، وكان $AE = 6$ ، فأوجد طول BD : 						
	A	3	B	6	C	12	D	24
8	في المعين $JKLM$ ، إذا كان $MK = 24 , JL = 10$ ، أوجد JK : 						
	A	24	B	13	C	10	D	9
9	إذا كانت $A(1,3) , B(0,0) , C(5,-1) , D(6,2)$ هي رؤوس متوازي الأضلاع $ABCD$ ، فما نقطة تقاطع قطريه :						
	A	$(-2,2)$	B	$(3,2)$	C	$(2,1)$	D	$(3,1)$
10	في المستطيل المجاور ، ما هي إحداثيات النقطة C : 						
	A	$(3,5)$	B	$(5,3)$	C	$(3,0)$	D	$(0,5)$
11	إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع مثلي مجموع قياسات زواياه الخارجية ، فما نوع هذا المضلع :						
	A	مربع	B	خماسي	C	سداسي	D	ثماني
12	البعد بين النقطتين $P_1(5,-2) , P_2(1,-5)$ يساوي :						
	A	$\sqrt{10}$	B	5	C	$\sqrt{37}$	D	25

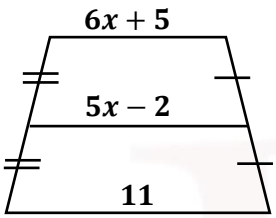
اختر الإجابة الصحيحة :

13 إذا كان الشكل يمثل شبه منحرف ، أوجد قيمة x :



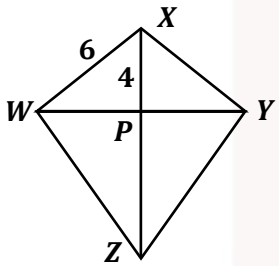
A		B		C		D	
4		5		6		7	

14 أوجد طول القطعة المتوسطة ، إذا كان الشكل شبه منحرف :



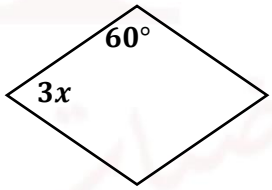
A		B		C		D	
15		16		23		25	

15 إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقية ، فإن :
WP تساوي :



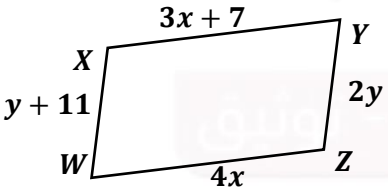
A		B		C		D	
$\sqrt{10}$		$\sqrt{20}$		$\sqrt{30}$		$\sqrt{40}$	

16 إذا كان الشكل معين ، فأوجد x :



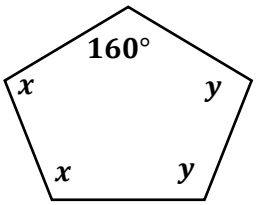
A		B		C		D	
10°		15°		20°		40°	

17 الشكل المجاور متوازي أضلاع تكون x تساوي :



A		B		C		D	
11		7		5.5		4	

18 أوجد قيمة $x + y$:



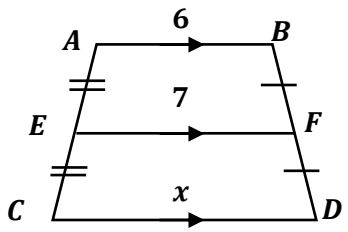
A		B		C		D	
190°		180°		175°		45°	

19 إذا كانت النقاط $D(x,y)$, $C(4,1)$, $B(3,5)$, $A(-2,3)$ ، تمثل رؤوس متوازي الأضلاع $ABCD$ ، فما إحداثيا النقطة D :

A		B		C		D	
$(-3,7)$		$(7,-3)$		$(-1,-1)$		$(-1,3)$	

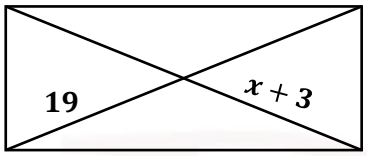
اختر الإجابة الصحيحة :

20 قيمة x في شبه المنحرف المجاور تساوي :



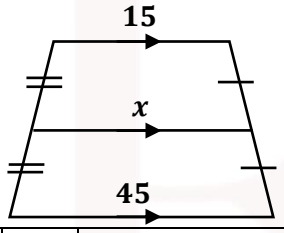
A		B		C		D	
13		11		9		8	

21 ما قيمة x ، علمًا بأن الشكل مستطيل :



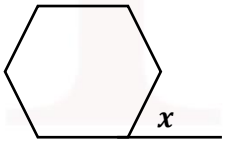
A		B		C		D	
16		17		19		23	

22 ما قيمة x في الشكل المجاور :



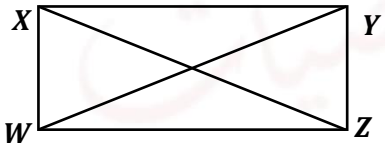
A		B		C		D	
25		30		35		45	

23 إذا كان الشكل التالي يمثل سداسي منتظم ، ما قياس الزاوية x :



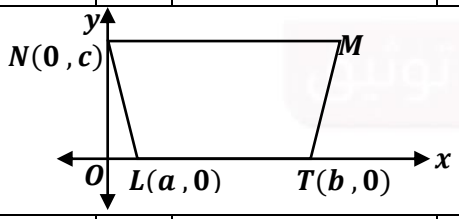
A		B		C		D	
45		60		120		175	

24 في الشكل المجاور ، إذا كان $WXYZ$ مستطيلًا فيه $WZ = 8 , XW = 6$ ، فإن YW تساوي :



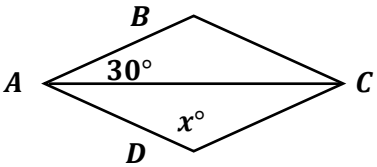
A		B		C		D	
6		10		14		48	

25 في الشكل المجاور شبه منحرف $NMTL$ متطابق الساقين
ما إحداثيات النقطة M :



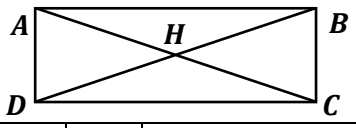
A		B		C		D	
$(a+b\,,c)$		$(c\,,a+b)$		$(b-a\,,c)$		$(c\,,b-a)$	

26 المعين $ABCD$ ، أوجد قيمة x :



A		B		C		D	
20		30		60		120	

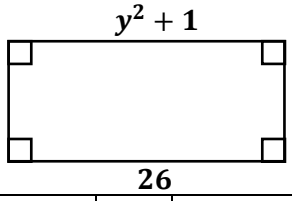
27 من الشكل المجاور ، $HC = 9 , DB = 4x - 2$
ما قيمة x التي تجعل الشكل $ABCD$ مستطيل :



A		B		C		D	
5		6		7		8	

اختر الإجابة الصحيحة :

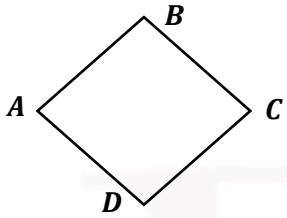
28 قيمة y في المستطيل المجاور تساوي :



A	B	C	D
1	5	$\sqrt{27}$	26

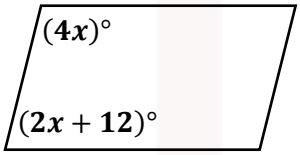
29 $ABCD$ معين فيه ، $AB = 5x - 3 \, , BC = x + 9$

أوجد قيمة x :



A	B	C	D
3	4	5	8

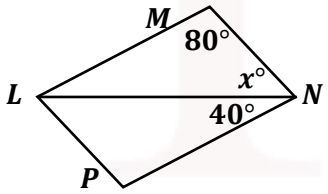
30 ما قيمة x في متوازي الأضلاع المجاور :



A	B	C	D
22	24	26	28

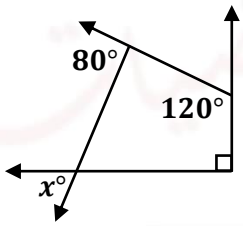
31 في الشكل المجاور ، إذا كانت $LMNP$ متوازي الأضلاع

فإن قيمة x تساوي :



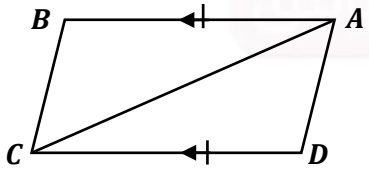
A	B	C	D
40°	50°	60°	100°

32 في الشكل المجاور ، قيمة x تساوي :



A	B	C	D
50°	60°	100°	130°

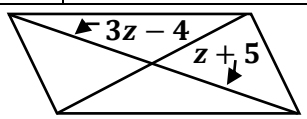
33 أي التالي ليس صحيح بناءً على الرسم المجاور :



A	B	C	D
$AC = CB$	$\Delta BAC \cong \Delta DCA$	$AD = BC$	$AD \parallel BC$

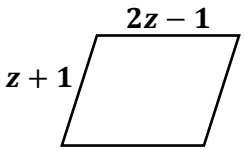
34 الشكل المجاور متوازي أضلاع

تكون z تساوي :



A	B	C	D
3	4.5	5.5	9

35 قيمة z التي تجعل متوازي الأضلاع المجاور معينًا :



A	B	C	D
1	2	3	4

مفاتيح الإجابات											
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	C	B	D	B	C	B	C	C	B	C	D
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
B	B	B	A	D	C	A	B	D	B	C	B
	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
	B	B	A	A	C	D	A	B	A	D	A

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتقان - تميز

الفصل السادس

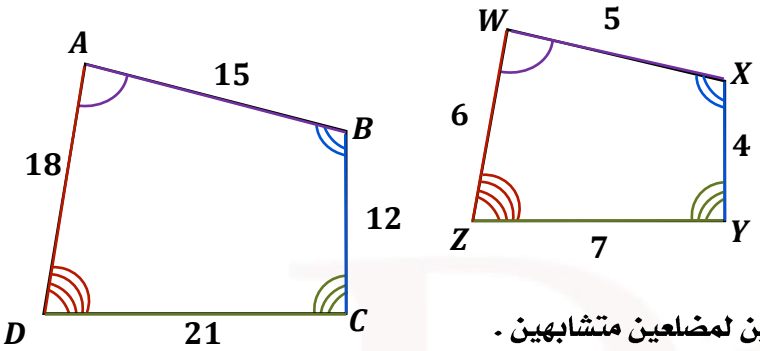
التشابه

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - تنسيق

المضلعات المتشابهة

- المضلعات المتشابهة : لها الشكل نفسه وليس بالضرورة أن يكون لها القياسات نفسها .
- يتشابه المضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة ، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

مثال : $ABCD \sim WXYZ$



- الزوايا المتطابقة :

$\angle A \cong \angle W \, , \angle B \cong \angle X \, , \angle C \cong \angle Y \, , \angle D \cong \angle Z$

- الأضلاع المتناسبة :

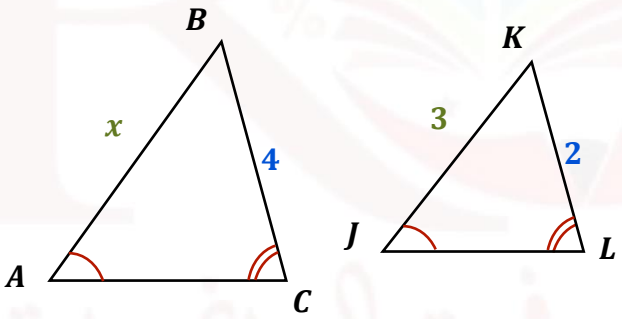
$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{3}{1}$$

- معامل التشابه : هو النسبة بين طولي ضلعين متناظرين لمضلعين متشابهين .

معامل تشابه $WXYZ$ إلى $ABCD$ يساوي $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

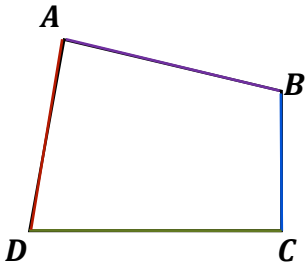
معامل تشابه $ABCD$ إلى $WXYZ$ يساوي $\frac{15}{5} = 3$

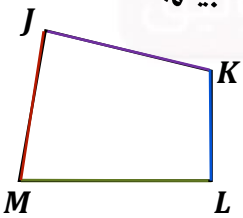
مثال : أوجد قيمة x :



$$\frac{x}{3} = \frac{4}{2}$$
$$2x = 3(4)$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

محيطا المضلعين المتشابهين



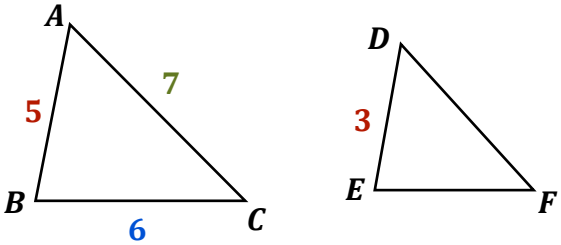


- إذا تشابه مضلعان ، فإن النسبة بين محيطيهما تساوي معامل التشابه بينهما .

مثال : إذا كان $ABCD \sim JKLM$ فإن :

$$\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CD}{LM} = \frac{DA}{MJ} = \frac{AB + BC + CD + DA}{JK + KL + LM + MJ}$$

مثال : أوجد محيط ΔDEF ، إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta DEF$:

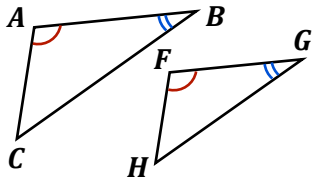
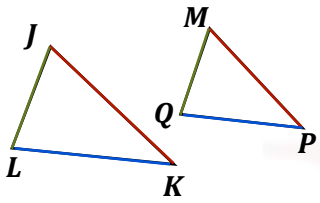
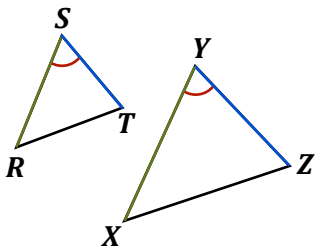


$$\frac{AB}{DE} = \frac{\text{محيط } \Delta ABC}{\text{محيط } \Delta DEF} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{5 + 6 + 7}{x}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{18}{x} \rightarrow 5x = 3(18)$$

$$5x = 54 \rightarrow x = 10.8$$

تشابه المثلثات

التشابه		مثال	
AA	إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر ، فإن المثلثين متشابهان .	إذا كان : $\angle A \cong \angle F \, , \angle B \cong \angle G$ فإن : $\Delta ABC \sim \Delta FGH$	
SSS	إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة ، فإن المثلثين متشابهان .	إذا كان : $\frac{JK}{MP} = \frac{KL}{PQ} = \frac{LJ}{QM}$ فإن : $\Delta JKL \sim \Delta MPQ$	
SAS	إذا كان طولا ضلعين في مثلث ما متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر ، وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متطابقتين ، فإن المثلثين متشابهان .	إذا كان : $\frac{RS}{XY} = \frac{ST}{YZ}$ $\angle S \cong \angle Y$ فإن : $\Delta RST \sim \Delta XYZ$	

مسائل الظل

- لحل هذا النوع من المسائل بفرض العلاقة تربط بين طولي x, y وظل x, y ، يستخدم التناسب كالآتي :

$$\frac{\text{طول ظل } x}{\text{طول ظل } y} = \frac{x \text{ طول}}{y \text{ طول}}$$

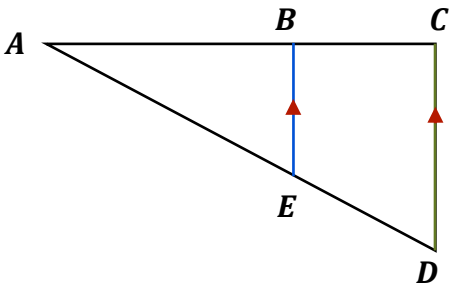
مثال : يقف منصور بجوار بناية ، وعندما كان طول ظله 9 ft ، وكان طول ظل البناية 322.5 ft .
إذا كان طول منصور 6 ft ، فكم قدمًا ارتفاع البناية ؟

$$\frac{\text{طول ظل منصور}}{\text{طول ظل البناية}} = \frac{\text{طول منصور}}{\text{ارتفاع البناية}}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{9}{322.5}$$

$$9x = 6(322.5)$$
$$9x = 1935$$
$$x = 215 \text{ ft}$$

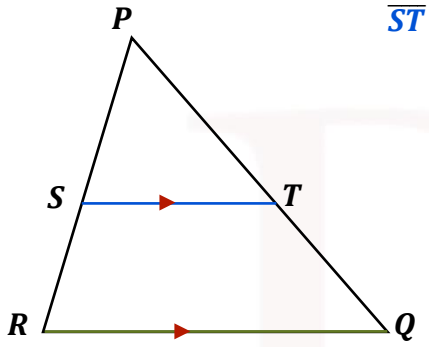
التناسب في المثلث



- إذا وازى مستقيم ضلعًا من أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين ، فإنه يقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة .

مثال : إذا كان $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ ، فإن :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$$

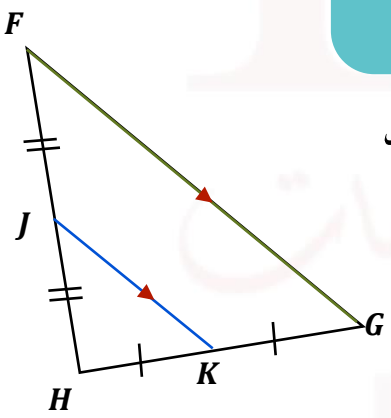


مثال : في ΔPQR ، إذا كان $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}, PT = 7.5, TQ = 3, SR = 2.5$

فأوجد : PS :

$$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$$
$$\frac{x}{2.5} = \frac{7.5}{3}$$
$$3x = (2.5)(7.5)$$
$$3x = 18.75$$
$$x = 6.25$$

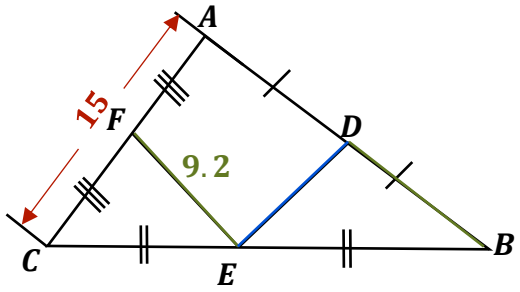
القطعة المنصفة في المثلث



- القطعة المنصفة في المثلث : توازي أحد أضلاعه ، طولها يساوي نصف طول ذلك الضلع .

مثال : إذا كانت J, K نقطتي منتصف $\overline{FH}, \overline{HG}$ على الترتيب ، فإن :

$$\overline{JK} \parallel \overline{FG}, JK = \frac{1}{2} FG$$



مثال : أوجد قيمة ما يلي :

DE, DB

$$DB = FE = 9.2$$

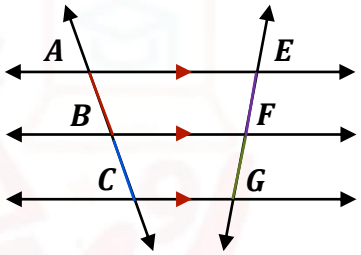
$$DE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}(15) = 7.5$$

الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

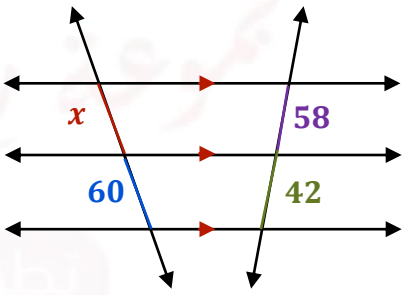
الحالة (1)

- إذا قطع قاطعان ثلاثة مستقيمات متوازية ، أو أكثر فإن أطوال أجزاء القاطعين تكون متناسبة.

مثال : إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$ ، وكان $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{EG}$ قاطعان لها ، فإن : $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$



مثال : أوجد قيمة x :



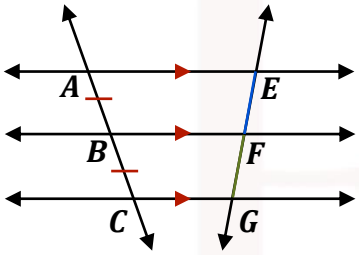
$$\frac{x}{60} = \frac{58}{42}$$

$$42x = 58(60)$$
$$42x = 3480$$
$$x = \frac{3480}{42}$$
$$x \approx 82.9$$

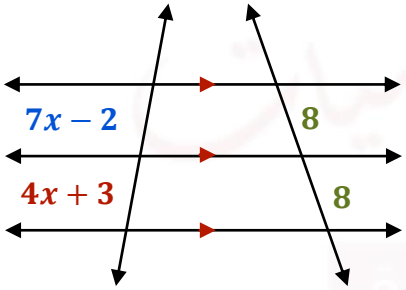
الحالة (2)

- إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية ، أو أكثر وكانت أجزاؤه متطابقة ، فإن أطوال أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة .

مثال : إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$ ، وكان $\overline{AC}, \overline{EG}$ قاطعين لها ، بحيث : $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$

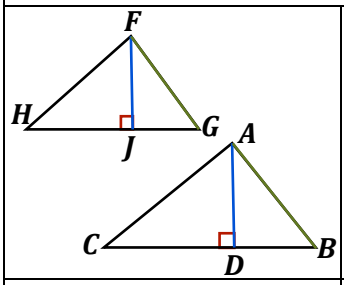
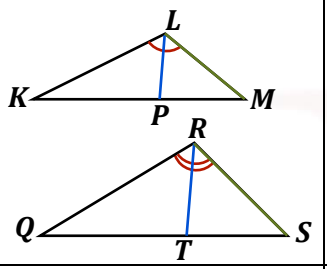
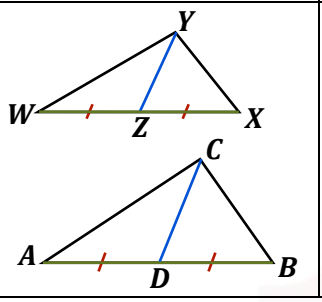


مثال : أوجد قيمة x :

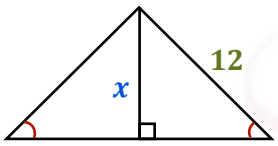


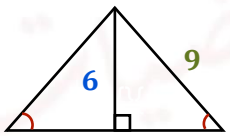
$$7x - 2 = 4x + 3$$
$$7x - 4x = 3 + 2$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}$$
$$x \approx 1.67$$

قطع مستقيمة خاصة في المثلثين المتشابهين

التشابه		مثال	
إذا تشابه مثلثان ، فإن النسبة بين :	طولي كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين طولي كل ضلعين متناظرين .	إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta FGH$ $\overline{AD}$, $\overline{FJ}$ ارتفاعين فإن : $\frac{AD}{FJ} = \frac{AB}{FG}$	
	طولي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرين تساوي النسبة بين طولي كل ضلعين متناظرين .	إذا كان : $\Delta KLM \sim \Delta QRS$ $\overline{LP}$, $\overline{RT}$ قطعتين منصفتين فإن : $\frac{LP}{RT} = \frac{LM}{RS}$	
	طولي كل قطعتين متوسطتين متناظرين تساوي النسبة بين طولي كل ضلعين متناظرين .	إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta WXY$ $\overline{CD}$, $\overline{YZ}$ قطعتين متوسطتين فإن : $\frac{CD}{YZ} = \frac{AB}{WX}$	

مثال : أوجد قيمة x :





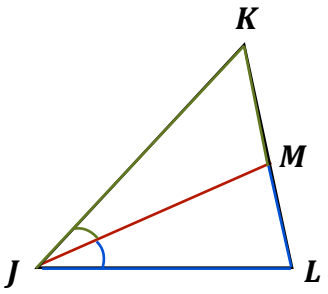
$$\frac{x}{6} = \frac{12}{9}$$

$$9x = 6(12)$$

$$9x = 72$$

$$x = \frac{72}{9} = 8$$

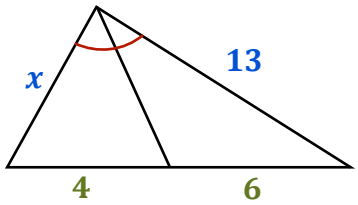
منصف زاوية في مثلث



- منصف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين .

مثال : إذا كانت $\overline{JM}$ منصف زاوية في ΔJKL ، فإن : $\frac{KM}{LM} = \frac{KJ}{LJ}$

مثال : أوجد قيمة x :



$$\frac{x}{13} = \frac{4}{6}$$

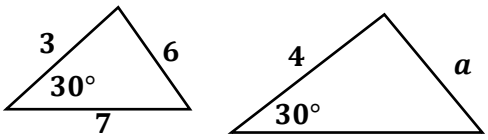
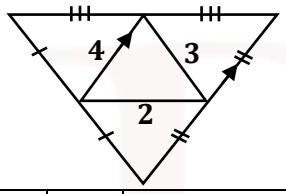
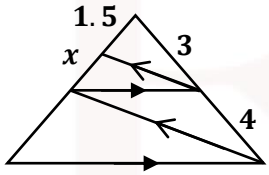
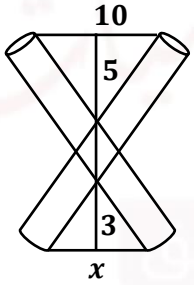
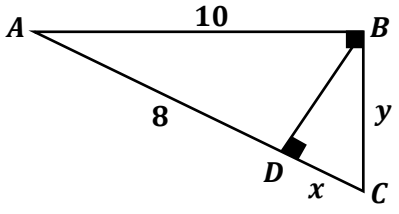
$$6x = 4(13)$$

$$6x = 52$$

$$x = \frac{52}{6} \approx 8.67$$

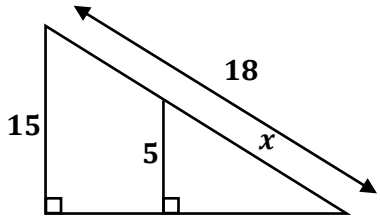
أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	إذا كان طول ظل منارة مسجد 15 m ، ارتفاع السور 2.5 m وطول ظل السور 1.5 m ، فكم يبلغ ارتفاع المنارة :							
	A	9	B	10	C	25	D	40
2	مثلثين متشابهين ، أضلاع المثلث الأكبر 18 , 15 , 9 ، نسبة التشابه بينهم $\frac{2}{3}$ ، فما محيط المثلث الأصغر :							
	A	28	B	26	C	24	D	14
3	في الشكل المجاور مثلثان متشابهان ، ما قيمة a : 							
	A	6	B	7	C	8	D	9
4	احسب محيط المثلث الأكبر : 							
	A	16	B	18	C	20	D	24
5	أوجد x في الشكل المجاور : 							
	A	3.5	B	3	C	2	D	1
6	مثلثان متشابهان محيطيهما 32 cm , 24 cm ، فإذا كان طول ضلع في المثلث الأكبر 8 cm ، فكم سنتيمترًا طول الضلع المناظر له في المثلث الآخر :							
	A	10	B	8	C	7	D	6
7	ما قيمة x في الشكل المجاور : 							
	A	0.5	B	4	C	5	D	6
8	يقف أيمن بجوار عمود إنارة ، إذا كان طول أيمن 5 ft ، وطول ظله 2 ft ، وكان طول ظل العمود في نفس اللحظة 4 ft ، فما ارتفاع عمود الإنارة :							
	A	4 ft	B	6 ft	C	10 ft	D	20 ft
9	ما محيط المثلث ABC المجاور : 							
	A	24	B	30	C	32	D	36

اختر الإجابة الصحيحة :

10 ما قيمة x في الشكل المجاور :

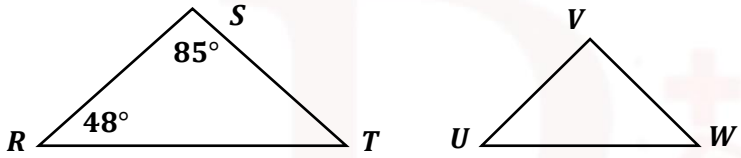


A		B		C		D	
6		12		15		18	

11 المستطيل $ABCD$ يشابه المستطيل $QRST$ ، ومعامل التشابه $ABCD$ إلى $QRST$ يساوي $\frac{2}{3}$ ، فإذا كان $AB = 12$ فإن QR يساوي :

A		B		C		D	
6		18		24		36	

12 من الشكل المجاور : إذا كان $\Delta RST \sim \Delta UVW$ أوجد $m\angle W$

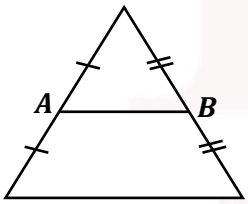


A		B		C		D	
47°		48°		85°		133°	

13 إذا كان $\frac{x-1}{x+1} = \frac{6}{5}$ ، فما قيمة x :

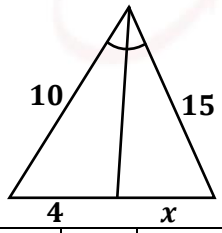
A		B		C		D	
11		1		-1		-11	

14 في الشكل المجاور مثلث متطابق الأضلاع محيطه 30 cm و A , B منتصفي ضلعيه ، كم سنتمترًا طول AB :



A		B		C		D	
5		7.5		10		15	

15 أوجد قيمة x :



A		B		C		D	
4		6		8		المعطيات غير كافية	

16 أي مثلثين مما يأتي ليسا بالضرورة متشابهين :

A		B		C		D	
مثلثان قائما الزاوية في كل منهما زاوية قياسها $30°$		مثلثان قائما الزاوية في كل منهما زاوية قياسها $45°$		مثلثان متطابقا الساقين		مثلثان متطابقا الأضلاع	

17 إذا كان $PQRS \sim JKLM$ ، ومعامل تشابه $PQRS$ إلى $JKLM$ يساوي $3 : 4$ ، وكان $QR = 8$ cm ، فما طول KL :

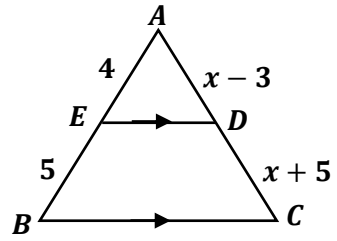
A		B		C		D	
24 cm		$10\frac{2}{3}$ cm		8 cm		6 cm	

18 مستطيلان متشابهان ، إذا كان معامل التشابه بينهما $5 : 3$ ، ومحيط المستطيل الأكبر 65 m ، فما محيط المستطيل الصغير :

A		B		C		D	
29 m		39 m		49 m		59 m	

اختر الإجابة الصحيحة :

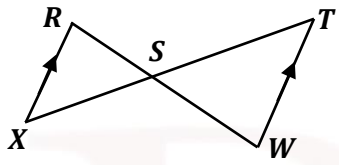
19 ما قيمة x في الشكل المجاور :



40	D	35	C	30	B	25	A

20 في الشكل المجاور :

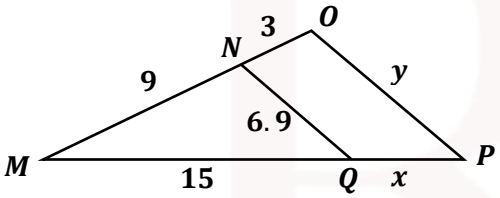
سمّ النظرية أو المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن المثلثين متشابهين



SSA	D	SSS	C	SAS	B	AA	A

21 المثلثان MOP , MNQ ، في الشكل المجاور متشابهان

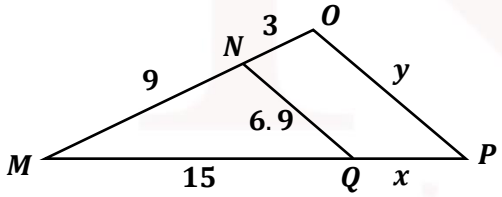
ما قيمة x :



4	D	5	C	10	B	12	A

22 المثلثان MOP , MNQ ، في الشكل المجاور متشابهان

ما قيمة y :



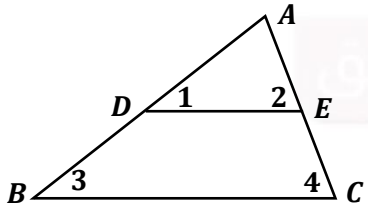
20.7	D	9.2	C	8.4	B	5.2	A

23 إذا كانت المسافة بين الطائف والدمام على خريطة تساوي 98 cm ، وكان مقياس رسم الخريطة 2.5 cm : 30 km ، فما المسافة الحقيقية بينهما :

964 km	D	1031 km	C	1176 km	B	1211 km	A

24 في ΔABC ، $\overline{DE}$ قطعة منصفة

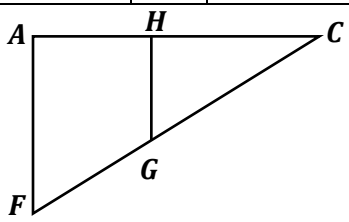
فأي العبارات التالية غير صحيحة :



$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$	D	$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	C	$\Delta ABC \sim \Delta ADE$	B	$\angle 1 \cong \angle 4$	A

25 أي الحقائق الآتية ليست كافية

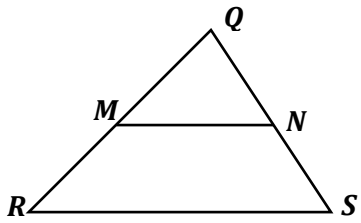
لإثبات أن المثلثين HCG , ACF متشابهان :



$\angle CHG$, $\angle FAH$ قائمتان	D	$\frac{CG}{CF}=\frac{1}{2}$	C	$\frac{AC}{HC}=\frac{FC}{GC}$	B	$\overline{AF} \parallel \overline{HG}$	A

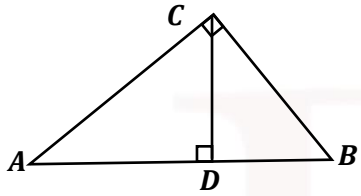
اختر الإجابة الصحيحة :

26 أي مما يأتي لا يكفي لإثبات أن : $\Delta QMN \sim \Delta QRS$



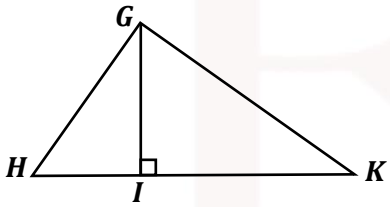
$\frac{QM}{QR}=\frac{QN}{QS}$	D	$\overline{QN} \cong \overline{NS}$	C	$\overline{MN} \parallel \overline{RS}$	B	$\angle QMN \cong \angle QRS$	A

27 في الشكل المجاور ، أي التناسبات التالية غير صحيحة :



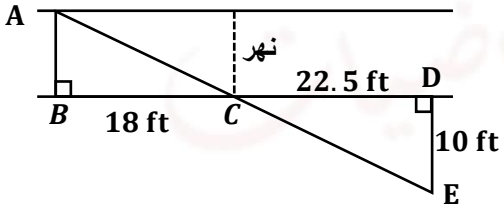
$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{AC}$	D	$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{DB}$	C	$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$	B	$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$	A

28 أي مما يأتي لا يكفي لإثبات أن : $\Delta GIK \sim \Delta HIG$



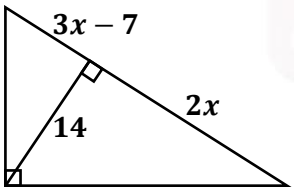
$\angle IGK \cong \angle IHG$	D	$\frac{GH}{GI}=\frac{GK}{IK}$	C	$\frac{HI}{GI}=\frac{GI}{IK}$	B	$\angle GKI \cong \angle HGI$	A

29 يريد عادل أن يقيس عرض نهر صغير
فعين الأطوال المبينة في الشكل المجاور
العرض التقريبي للنهر هو :



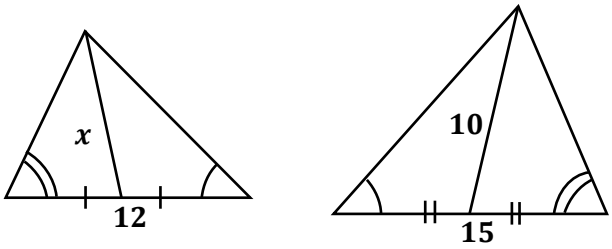
6 ft	D	47 ft	C	8 ft	B	40.5 ft	A

30 أوجد قيمة x في الشكل المجاور :



10	D	8	C	7	B	5	A

31 من الشكل المجاور :
ما قيمة x :



7.5	D	8	C	10	B	12	A

مفاتيح الإجابات

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
A	B	A	B	C	D	D	C	B	C	A	C
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
A	B	C	C	A	C	B	D	C	B	A	D
					31	30	29	28	27	26	25
					C	B	B	C	D	C	C

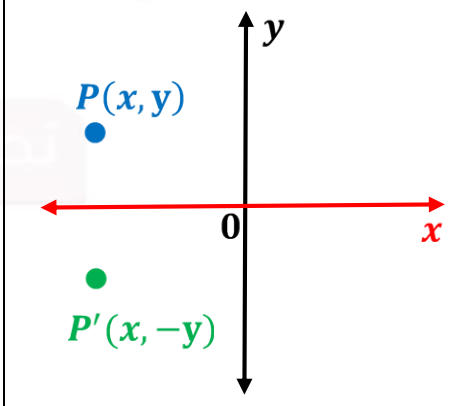
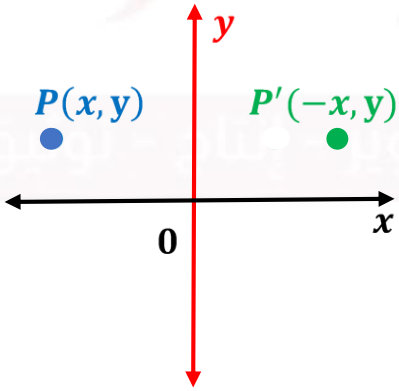
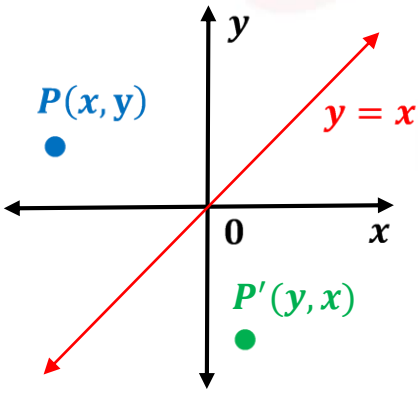
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتقان - تميز

الفصل السابع
التحويلات الهندسية والتماثل

الانعكاس والإزاحة

الانعكاس	الإزاحة أو الانسحاب
تعريف الانعكاس: هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول محور مستقيم يسمى محور الانعكاس. - إذا كانت النقطة واقعة على محور الانعكاس، فان صورته هي النقطة نفسها. - إذا كانت غير واقعة على محور الانعكاس، يكون محور الانعكاس هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطة وصورتها. - الرموز A', A'', A''' مثل أسماء للنقاط الناتجة عن تحويل هندسي أو أكثر للنقطة A.	تعريف الإزاحة (الانسحاب): هي تحويل هندسي ينقل نقاط الشكل جميعها المسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه - تنقل الإزاحة (الانسحاب) كل نقطة الى صورتها مسافة محددة وفي اتجاه محدد (اتجاه الإزاحة). - مقدار الإزاحة يساوي طول القطعة المستقيمة التي تصل النقطة بصورتها

الانعكاس في المستوى الاحداثي

حول المحور x	حول المحور y	حول المستقيم $y = x$
		
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$

الازاحة في المستوى الاحداثي

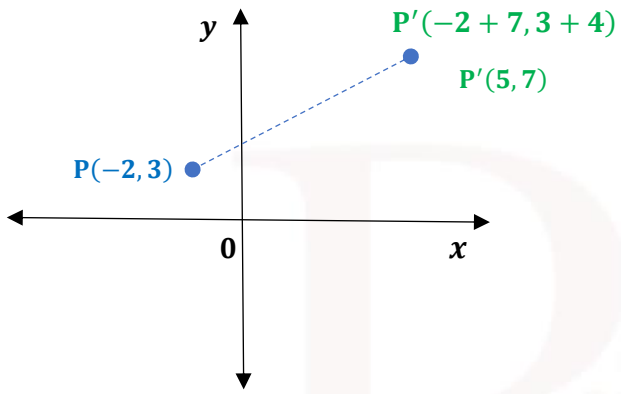
الإزاحة أو الانسحاب

لإزاحة نقطة ما مسافة a وحدة أفقيا، و b وحدة راسياً، اجمع a الى الإحداثي x ، و b الى الإحداثي y

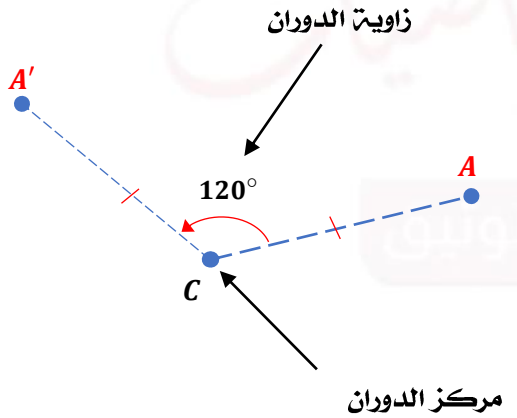
الرمز: $(x, y) \to (x + a, y + b)$

مثال :

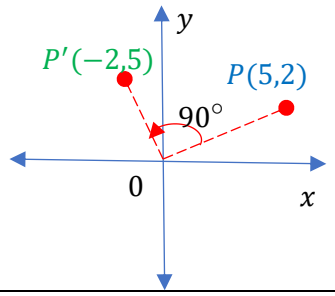
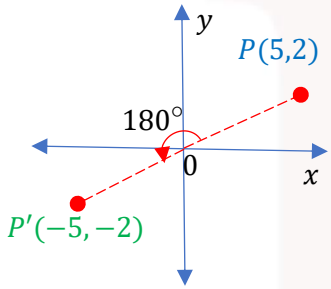
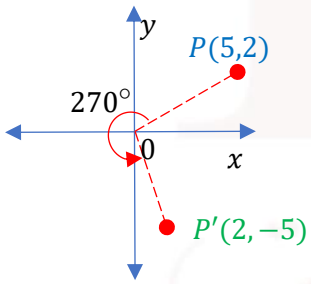
اذا كانت: $a = 7 \ ,b = 4$ ؛ فان صورة النقطة $P(-2, 3)$ الناتجة عن هذه الإزاحة هي $P'(5, 7)$.



الدوران

الدوران	مثال
الدوران حول نقطة ثابتة (تسمى مركز الدوران) بزاوية معينة قياسها x° واتجاه معين، يحول النقطة إلى صورتها بحيث: - إذا كانت النقطة هي مركز الدوران، فإن صورتها هي النقطة نفسها. - إذا كانت النقطة غير مركز الدوران، فإن النقطة الأصلية وصورتها تبعدان المسافة نفسها عن مركز الدوران، والزاوية المتشكلة تسمى زاوية الدوران وقياسها يساوي x° من النقطة ومركز الدوران والصورة.	 A' هي صوة A الناتجة عن دوران بزاوية 120° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول مركز النقطة C.

الدوران في المستوى الإحداثي

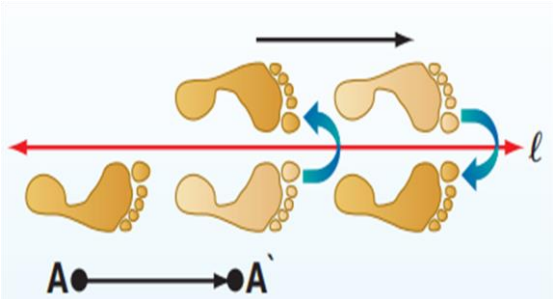
الدوران بزاوية 90°	عند تدوير نقطة بزاوية 90° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1 ، ثم بدل موقعي الإحداثيين x, y. الرموز: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$	
الدوران بزاوية 180°	عند تدوير نقطة بزاوية 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب كلًا من الإحداثيين x, y في -1 الرموز: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$	
الدوران بزاوية 270°	عند تدوير نقطة بزاوية 270° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1 ثم بدل موقعي الإحداثيين x, y . الرموز: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$	

تركيب الإزاحة والانعكاس

تركيب إزاحة انعكاس هو تحويل هندسي مركب ينتج عن إزاحة يليها انعكاس في خط مستقيم موازٍ لخط اتجاه الإزاحة.

مثال:

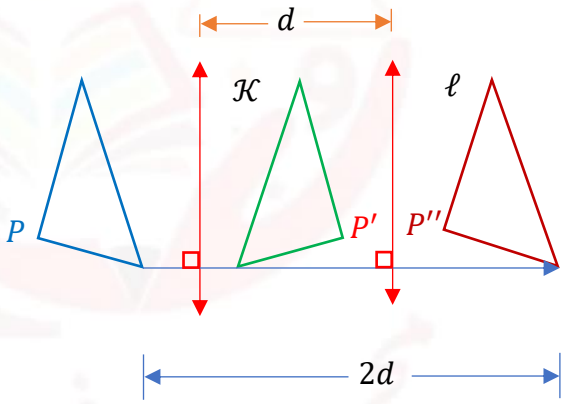
تركيب إزاحة انعكاس المجاور هو تحويل هندسي مركب.
ينقل الشكل في اتجاه الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة $\grave{A}$ مع انعكاس حول المستقيم ℓ.



تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين بأنه إزاحة، ويكون:

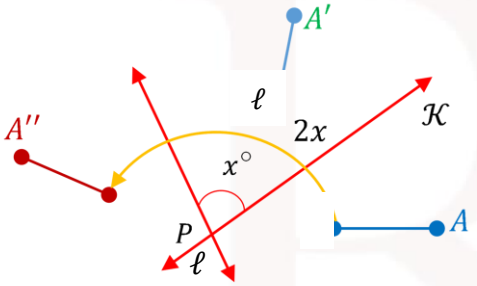
- اتجاهها عموديا على كل من المستقيمين.
- مقدارها يساوي مثلي المسافة بين المستقيمين المتوازيين.



تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين بأنه دوران، ويكون:

- مركزه هو نقطة تقاطع المستقيمين.
- قياس زاويته يساوي مثلي قياس الزاوية التي يشكلها تقاطع هذين المستقيمين.



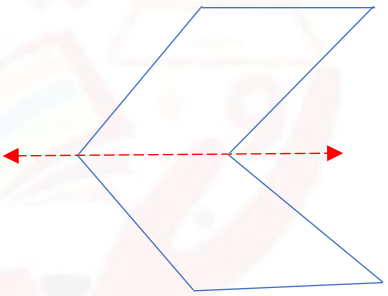
تركيب التحويلات الهندسية

الإزاحة	الدوران
تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين	تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين

التماثل

التماثل حول محور

يكون الشكل الثنائي الأبعاد متماثلا حول محور، إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول مستقيم ما هي الشكل نفسه، ويسمى هذا المستقيم محور تماثل.

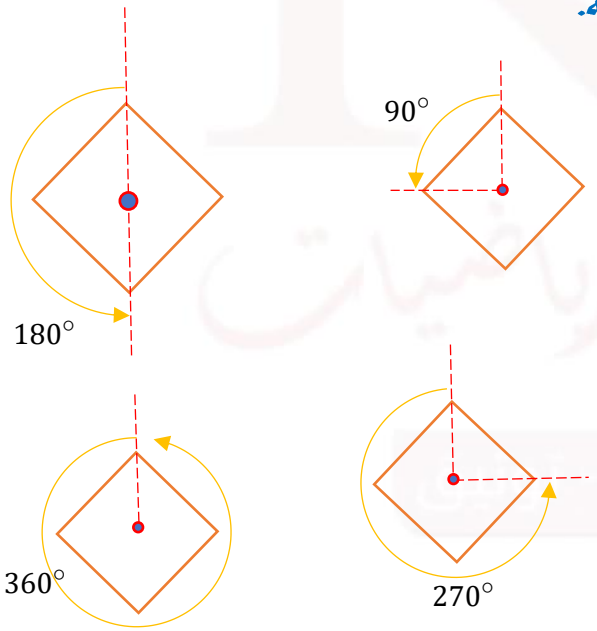


التماثل الدوراني

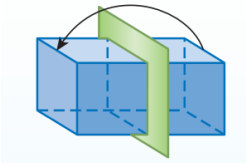
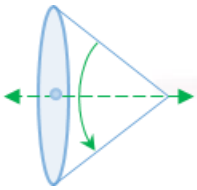
يكون للشكل الثنائي الأبعاد تماثل دوراني (أو تماثل نصف قطري) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين $0°$ و $360°$ حول مركزه هي الشكل نفسه، ويسمى مركز الدوران في هذه الحالة مركز التماثل (أو نقطة التماثل).

أمثلة:

المربع الآتي له تماثل دوراني؛ لأن الدوران بكل من الزوايا $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$ ينتج عنه الشكل نفسه.



التماثل في الاشكال الثلاثية الابعاد

التماثل حول مستوى	يكون الشكل الثلاثي الأبعاد متماثلا حول مستوى، إذا أمكن تقسيمه بهذا المستوى إلى شكلين متطابقين، وفي هذه الحالة يسمى هذا المستوى (مستوى التماثل).	
التماثل حول محور	يكون الشكل الثلاثي الأبعاد متماثلا حول محور، إذا أمكن تدويره حول هذا المحور بزاوية بين $0°$ و $360°$؛ ليصبح كما كان في وضعه الأصلي.	

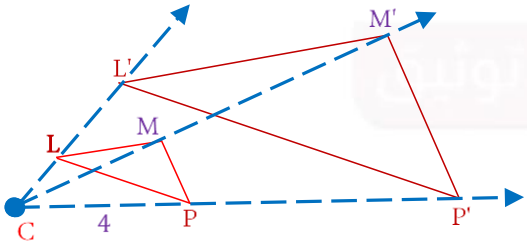
مقدار التماثل يساوي ناتج قسمة $360°$ على رتبة التماثل.

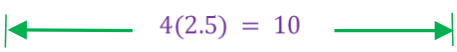
مستوى التماثل: هو المستوى الذي يقسم الشكل إلى نصفين متطابقين تماما، بحيث يكون كل منهما صورة للأخر.

التمدد

التمدد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب k، حيث $k \neq 1$، ينقل النقطة P في شكل ما إلى صورتها P' ، بحيث:

- إذا انطبقت النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها هي النقطة P نفسها.
- إذا لم تنطبق النقطة P على مركز التمدد C، فإن صورتها P' تقع على CP ، ويكون $CP' = k(CP)$.





$\Delta L'M'P'$ هو صورة ΔLMP الناتجة

التمدد الذي مركزه C ومعامله 2.5

التمدد

تصغير

إذا كان معامل التمدد k

$0 < k < 1$

تطابق

إذا كان معامل التمدد k يساوي واحد

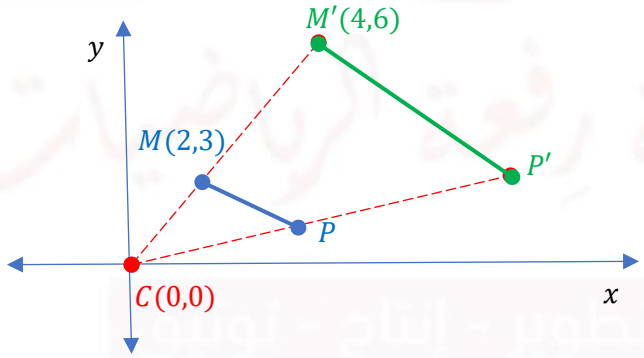
تكبير

إذا كان معامل التمدد k أكبر من الواحد

مثال التمدد في المستوى الاحداثي

لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، اضرب الإحداثيين x , y لكل نقطة في الشكل الأصلي في معامل مقياس التمدد k.

الرمز: $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

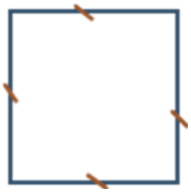


أسئلة وتدريبات

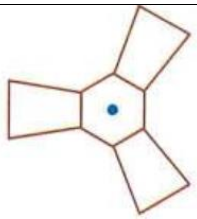
اختر الإجابة الصحيحة :

1	النقطة $(2, 6)$ هي صورة النقطة $(4,5)$ بازاحة مقدارها :							
	A	$(x+2, y-4)$	B	$(x-2, y+3)$	C	$(x-9, y+5)$	D	$(x+2, y-3)$
2	عند تدوير النقطة $(3,4)$ بزاوية $270°$ عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل ينتج النقطة							
	A	$(4,3)$	B	$(-4,3)$	C	$(4,-3)$	D	$(-4,-3)$
3	صورة النقطة $(3,5)$ بالدوران بزاوية $90°$ عكس عقارب الساعة ؟							
	A	$(-5,3)$	B	$(5,-3)$	C	$(-5,-3)$	D	$(-3,-5)$
4	ما صورة النقاط $(1,5)$ بالانعكاس حول محور x ؟							
	A	$(1,-5)$	B	$(-1,-5)$	C	$(5,1)$	D	$(-1,5)$
5	إذا كانت صورة النقاط $A(3,5)$ هي $A'(5,3)$ فإن الانعكاس المستخدم يكون حول.....							
	A	نقطة الأصل	B	المحور x	C	المحور y	D	المستقيم $y = x$
6	مقدار التماثل الدوراني لمضلع ثماني منتظم حول مركزه يساوي							
	A	$45°$	B	$80°$	C	$120°$	D	$125°$
7	أي مما يلي ليس من تحويلات التطابق؟							
	A	التمدد	B	الإزاحة	C	الدوران	D	الانعكاس
8	ما صورة النقطة $(-3, 2)$ تحت تأثير الإزاحة $(x-3, y+4)$ ؟							
	A	$(-1,1)$	B	$(-6,6)$	C	$(5,-7)$	D	$(1,1)$
9	صورة النقطة $(2,3)$ بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3 تكون							
	A	$(6,9)$	B	$(5,7)$	C	$(3,9)$	D	$(2,3)$

اختر الإجابة الصحيحة :

10	عند إزاحة النقطة $(2,6)$ وحدتين لليسار وثلاث وحدات للأسفل فإن النقطة الناتجة هي:							
	A	$(-2,-6)$	B	$(0,3)$	C	$(4,3)$	D	$(0,-3)$
11	معادلة الدائرة $(x-3)^2+(y+1)^2=0$ حدث لمركزها انعكاس حول نقطة $x=y$ ثم دوران بزاوية 180° عكس عقارب الساعة فما هو مركزها الجديد							
	A	$(-3,-1)$	B	$(-1,3)$	C	$(1,-3)$	D	$(-3,-1)$
12	صورة النقطة $(2,3)$ بالانعكاس حول المحور y هي							
	A	$(-2,3)$	B	$(2,-3)$	C	$(3,2)$	D	$(-2,-3)$
13	النقطة $(3,4)$ هي صورة النقطة $(-4,3)$ عن طريق							
	A	انعكاس حول محور x	B	دوران بزاوية 90°	C	انعكاس حول محور y	D	دوران بزاوية 270°
14	ما صورة النقطة $A(4,1)$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم $x=y$							
	A	$(1,4)$	B	$(-1,4)$	C	$(-4,-1)$	D	$(-1,-4)$
15	عدد محاور تماثل الشكل المجاور يساوي ..							
	A	0	B	1	C	2	D	3
16	في الشكل المجاور؛ مقدار التماثل الدوراني تساوي .. 							
	A	60°	B	90°	C	120°	D	360°
17	رتبة التماثل الدوراني لمضلع سداسي منتظم تساوي							
	A	5	B	6	C	7	D	60°

اختر الإجابة الصحيحة :

18	ما مقدرا التماثل الدوراني للشكل المجاور؟							
	A	$45°$	B	$90°$	C	$120°$	D	$360°$
19	أجري تحويل هندسي مركب من انعكاس و إزاحة للنقطة $E(5,7)$ فكانت صورتها $E'(-5,9)$، فما هذا التحويل؟							
	A	انعكاس حول المحور y وإزاحة مقدارها وحدتين إلى الأعلى			C	انعكاس حول المحور x وإزاحة مقدارها وحدتين إلى الاسفل		
	B	انعكاس حول المحور x وإزاحة مقدارها وحدتين إلى الأعلى			D	انعكاس حول المحور y وإزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار		
20	عُكس مثلث حول مستقيمين أفقيين متوازيين المسافة بينهما $4\ cm$. أي مما يأتي يُعد أفضل وصف للتحويل الهندسي الناتج؟							
	A	إزاحة بمقدار $8cm$ الى اليمين			C	إزاحة بمقدار $4cm$ الى اليمين		
	B	إزاحة بمقدار $8cm$ الى الأعلى			D	إزاحة بمقدار $4cm$ الى الأعلى		
21	نتج من تركيب انعكاسين متعاقبين حول مستقيمين متقاطعين دوران بزاوية قياسها $80°$ ما قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين المتقاطعين؟							
	A	$160°$	B	$80°$	C	$40°$	D	$20°$
22	ما مقدرا التماثل الدوراني للشكل المجاور؟ 							
	A	$60°$	B	$72°$	C	$120°$	D	$360°$
23	ما مقدرا التماثل الدوراني لمضلع منتظم حول مركزه له رتبة تماثل دوراني تساوي 5							
	A	$60°$	B	$72°$	C	$120°$	D	$360°$
24	إذا كانت $\grave{AB}$ هي صورة AB بتمدد معامله k و كان $AB = 4\ , \grave{AB} = 6$ فإن معامل التمدد k يساوي							
	A	$\frac{2}{3}$	B	$\frac{3}{2}$	C	4	D	6

مفاتيح الإجابات

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	A	A	A	A	D	A	A	C	D
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
B	A	B	B	B	B	A	B	A	C
						24	23	22	21
						B	B	C	C

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توزيع

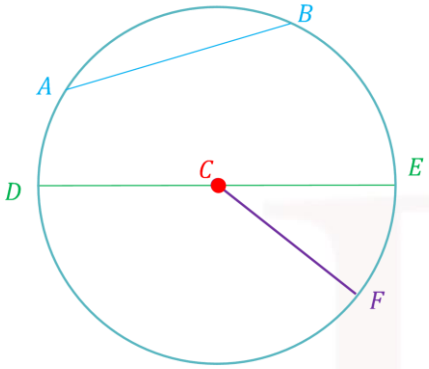
الفصل الثامن

الدائرة

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - تونس

الدائرة ومحيطها

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

نصف القطر	هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها على المركز والطرف الآخر على الدائرة. أمثلة: $\overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}$: أنصاف أقطار في $\odot C$.	
الوتر	هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة. أمثلة: $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ وتران في $\odot C$.	
القطر	هو وتر يمر بمركز الدائرة، ويتكون من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحدة. مثال: $\overline{DE}$ قطر في $\odot C$، ويتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفي القطرين $\overline{CD}, \overline{CE}$ الواقعين على استقامة واحدة.	

العلاقة بين القطر ونصف القطر

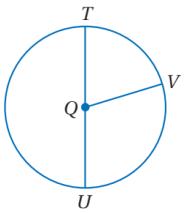
إذا كان نصف قطر الدائر r وقطرها d فإن

صيغة نصف القطر

$r = \frac{d}{2}$ أو $r = \frac{1}{2}\, d$

صيغة القطر $d = 2r$

مثال: في الشكل المقابل



إذا كان $TU = 14$

فأوجد نصف قطر الدائرة $\odot Q$

$r = \frac{1}{2}\, d \Rightarrow r = \frac{1}{2} \times 14 = 7$

محيط الدائرة

إذا كان قطر الدائرة يساوي d ، أو نصف قطرها يساوي r ،

فإن محيطها C يساوي حاصل ضرب القطر في π، أو مثلي

نصف القطر في π.

الرموز: $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مثال:

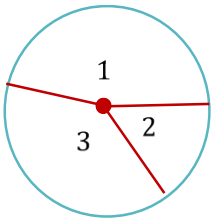
قطر إطار دراجة يساوي $26\ in$. أوجد محيطها

$C = \pi d \Rightarrow C = 26\,\pi$

قياس الزوايا والأقواس

مجموع قياسات الزوايا المركزية

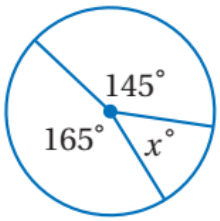
مجموع الزوايا المركزية $= 360°$



$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$

مثال :

أوجد قيمة $x°$ في الشكل المجاور



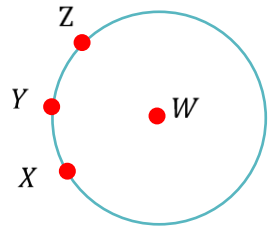
$x° + 145° + 165° = 360°$

$x = 360° - 145° - 165°$

$x = 50°$

مسلمة جمع الأقواس

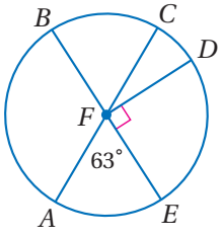
القوس المكون من قوسين متجاورين قياسه يساوي حاصل جمع قياسهما



$m\widehat{XZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$

مثال :

في الشكل المجاور أوجد $m\widehat{AD}$



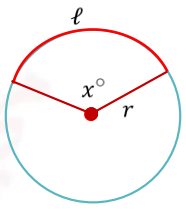
$m\widehat{AD} = m\widehat{AE} + m\widehat{ED}$

$= m\angle AFE + m\angle EFD$

$= 63° + 90° = 153°$

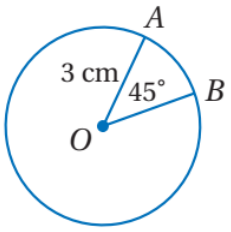
طول القوس

$$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$$



مثال :

أوجد طول القوس $\widehat{AB}$ في الشكل المقابل



$$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$$

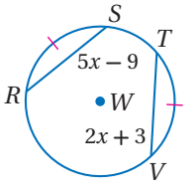
$$\ell = \frac{45°}{360°} \cdot 2\pi(3) = \frac{3}{4}\ \pi = 2.36$$

الأقواس والأوتار

الأقواس و الأوتار المتطابقة

في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين يكون القوسان الأصغران متطابقين إذا فقط و إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقان

مثال : في الدائرة $W \odot$



إذا كان $\widehat{TV} \cong \widehat{RS}$ ، فأوجد RS

$\widehat{TV} \cong \widehat{RS} \Leftrightarrow \overline{TV} \cong \overline{RS} \Leftrightarrow TV = RS$

$TV = RS \Rightarrow 2x + 3 = 5x - 9 \Rightarrow x = 4$

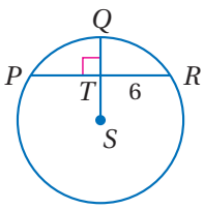
$\Rightarrow RS = 5(4) - 9 = 11$

تنصيف الأقواس و الأوتار

إذا كان قطر أو نصف قطر الدائرة عمودياً على وتر فيها فإنه ينصف ذلك الوتر و ينصف قوسه و العكس صحيح

مثال : في الدائرة $S \odot$ أوجد PR

بما أن $\overline{QS}$ عمودي على الوتر PR فإنه ينصفه

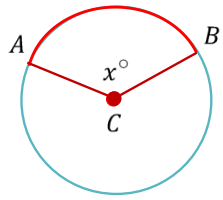
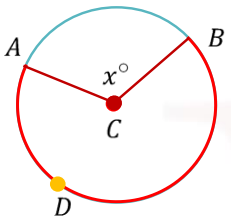
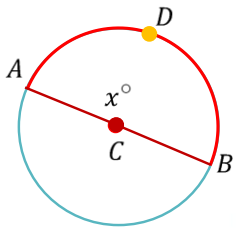


$TR = PT$

$PR = PT + TR$

$= 2\,TR = 2(6) = 12$

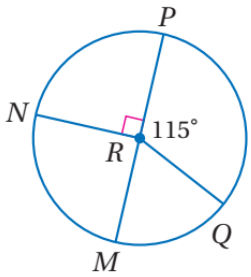
قياس الزوايا والأقواس

القوس	قياسه	
القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة	يقل قياس القوس الأصغر عن 180°، ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x^\circ$	
القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يزيد قياس القوس الأكبر على 180°، ويساوي 360°، مطروحا منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\widehat{ADB} = 360^\circ - m\widehat{AB}$ $= 360^\circ - x^\circ$	
نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.	قياس نصف الدائرة يساوي 180° $m\widehat{ADB} = 180^\circ$	

مثال :

$\overline{MP}$ قطر في الدائرة $\odot R$ حدد ما إذا كان كل قوس من الأقواس التالية قوساً أكبر أم أصغر أو نصف دائرة ثم أوجد قياسه

1) $\widehat{PQ}$ 2) $\widehat{MNP}$ 3) $\widehat{MNQ}$



1) $\widehat{PQ}$ قوس أصغر لأن قياسه أقل من 180°

$m\widehat{PQ} = m\angle PRQ = 115^\circ$

2) $\widehat{MNP}$ نصف دائرة لأن قياسه يساوي 180°

$m\widehat{MNP} = m\angle MRP = 180^\circ$

3) $\widehat{MNQ}$ قوس أكبر لأن قياسه أكبر من 180°

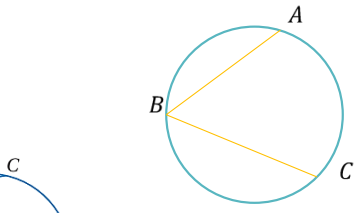
$m\widehat{MNQ} = m\angle MRP + m\angle PRQ = 180^\circ + 115^\circ = 295^\circ$

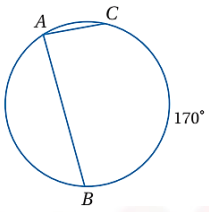
الزوايا والدائرة

قياس الزاوية المحيطية

يساوي نصف قياس القوس المقابل لها

$$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$$





مثال : أوجد $m\angle A$

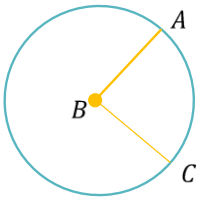
في الدائرة المقابلة

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}(170°) = 85°$$

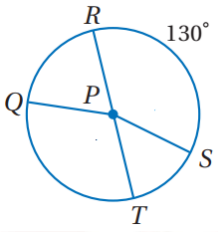
قياس الزاوية المركزية

يساوي قياس القوس المقابل لها

$$m\angle ABC = m\overset{\frown}{AC}$$



مثال : من الشكل المقابل



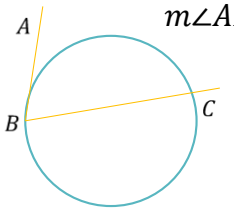
أوجد $m\angle RPS$

$$m\angle RPS = m\overset{\frown}{RS} = 130°$$

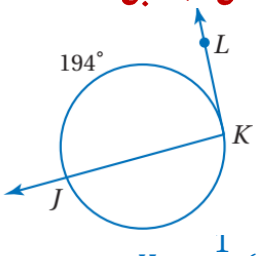
قياس زاوية تقاطع مماس وقاطع

يساوي نصف قياس القوس المقابل لها

$$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$$



مثال: من الشكل المقابل

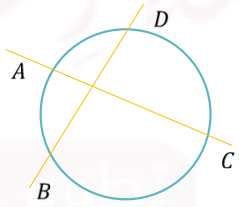


أوجد $m\angle K$

$$m\angle K = \frac{1}{2}(194°) = 97°$$

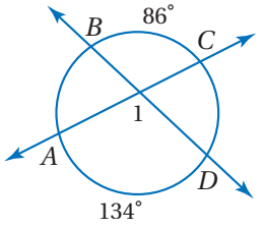
قياس زاوية تقاطع قاطعين داخل الدائرة = نصف قياس حاصل جمع القوس المقابل لها والمقابل للزاوية المقابلة لها بالرأس

$$m\angle AED = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{AD})$$



E

مثال من الشكل المقابل



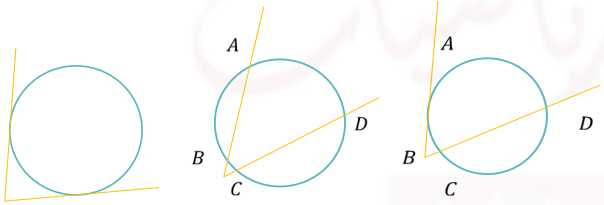
أوجد $m\angle 1$

$$m\angle 1 = \frac{1}{2}(86° + 134°)$$

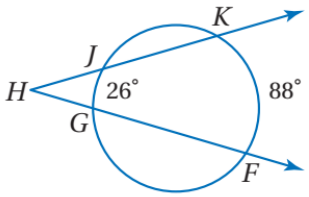
$$m\angle 1 = 110°$$

قياس زاوية تقاطع قاطعين أو قاطع ومماس أو مماسين خارج الدائرة = نصف حاصل طرح قياس القوسين المقابلين لها

$$m\angle ABC = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AD} - m\overset{\frown}{BC})$$



مثال



من الشكل المقابل

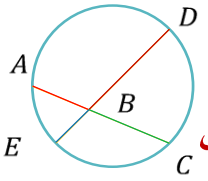
أوجد $m\angle H$

$$m\angle H = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{KF} - m\overset{\frown}{JG}) = \frac{1}{2}(88° - 26°) = 31°$$

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

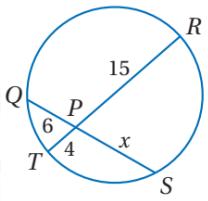
نظرية قطع الوتر

إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الثاني.



$$AB \cdot BC = DB \cdot BE$$

مثال : أوجد قيمة $x°$ في الشكل المقابل



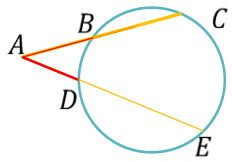
$$TP \cdot PR = QP \cdot PS$$

$$4 \cdot 15 = 6 \cdot x$$

$$6x = 60 \implies x = 10$$

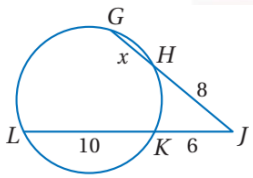
نظرية القاطع

إذا رسم قاطعان لدائرة من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.



$$AC \cdot AB = AE \cdot AD$$

مثال : أوجد قيمة $x°$ في الشكل المقابل

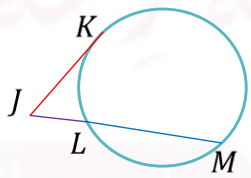


$$JK \cdot JL = JH \cdot JG$$

$$6(6 + 10) = 8(8 + x)$$

$$8x = 32 \implies x = 4$$

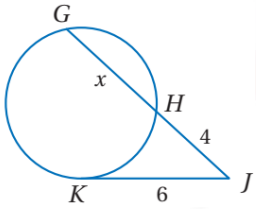
إذا رسم مماس وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.



$$Jk^2 = JL \cdot JM$$

مثال :

أوجد قيمة $x°$ في الشكل المقابل



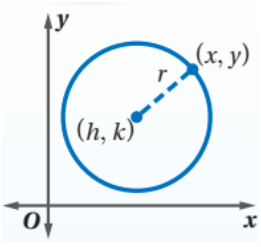
$$Jk^2 = JH \cdot JG$$

$$6^2 = 4(4 + x)$$

$$9 = 4 + x \implies x = 5$$

الصورة القياسية لمعادلة دائرة مركزها (h, k) و نصف قطرها r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



مثال :

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-2, 3)$ و نصف قطرها 5

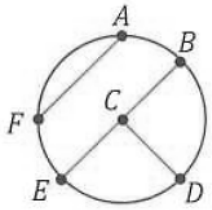
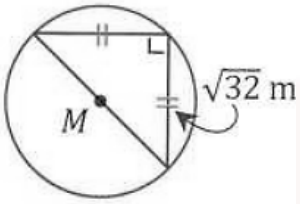
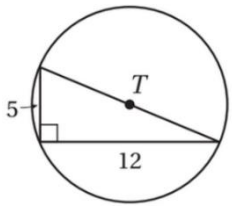
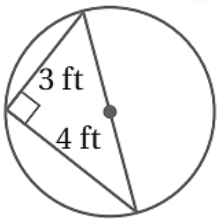
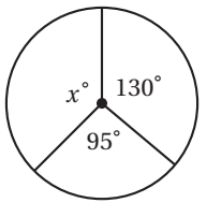
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

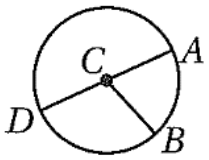
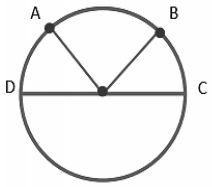
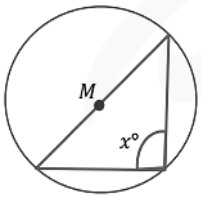
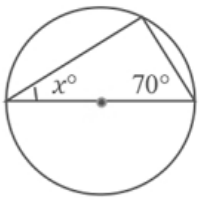
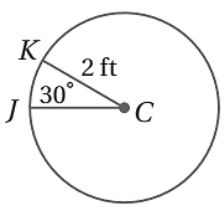
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

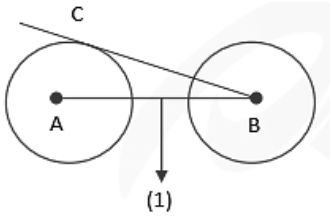
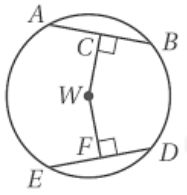
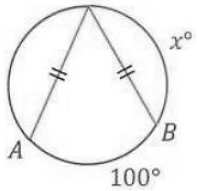
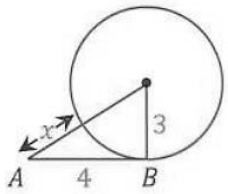
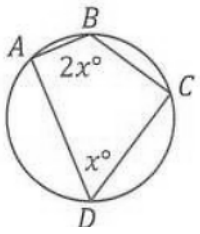
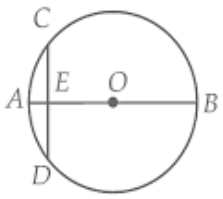
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

أسئلة وتدريبات

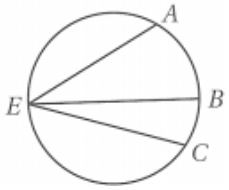
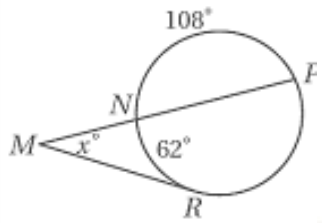
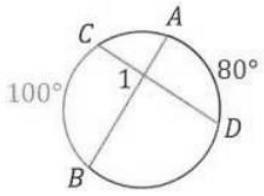
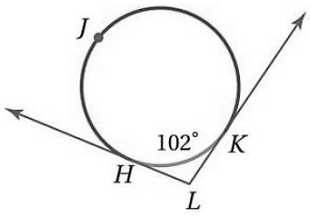
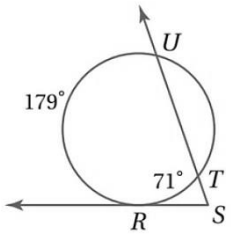
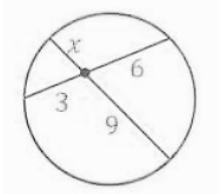
اختر الإجابة الصحيحة :

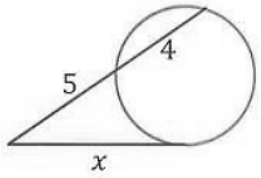
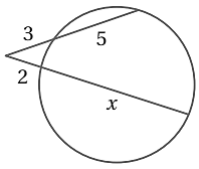
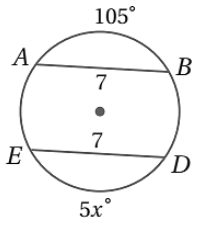
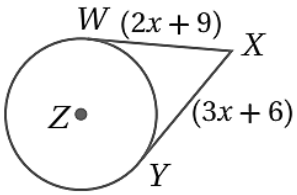
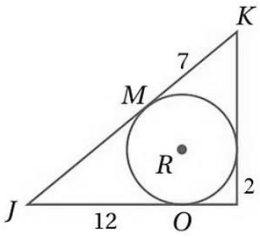
1	في الشكل المجاور القطر هو القطعة المستقيمة ..... 						
	A	$\overline{FA}$	B	$\overline{CE}$	C	$\overline{CD}$	D	$\overline{EB}$
2	محيط الدائرة في الشكل المجاور تساوي 						
	A	8π	B	16π	C	32π	D	64π
3	في الشكل المقابل نصف قطر الدائرة ⊙ T يساوي 						
	A	13	B	12	C	6.5	D	5
4	دائرة محيطها 24π نصف قطرها يساوي						
	A	24	B	12	C	6	D	4
5	محيط الدائرة في الشكل المجاور 						
	A	2.5π	B	5π	C	7π	D	25π
6	في الشكل المجاور قيمة x تساوي 						
	A	120°	B	135°	C	145°	D	160°

اختر الإجابة الصحيحة :								
7	في الدائرة C إذا كان $m\widehat{AB} = 72°$ فإن $m\angle ACB$ يساوي 							
	180°	D	144°	C	108°	B	72°	A
8	في الشكل المجاور إذا كان $m\widehat{AB} = 2m\widehat{BC}$ ، $m\widehat{BC} = m\widehat{AD}$ فإن $m\widehat{AD}$ تساوي 							
	120°	D	90°	C	60°	B	45°	A
9	في الشكل المقابل إذا كان M مركز الدائرة فإن $x°$ يساوي 							
	180°	D	90°	C	60°	B	45°	A
10	في الشكل المقابل قيمة $x°$ يساوي 							
	80°	D	60°	C	40°	B	20°	A
11	في الشكل المقابل قيمة $x°$ يساوي							
	120°°	D	100°	C	50°	B	25°	A
12	في الشكل المقابل طول القوس $\widehat{JK}$ يساوي 							
	π	D	$\frac{2}{3}\pi$	C	$\frac{1}{2}\pi$	B	$\frac{1}{3}\pi$	A

اختر الإجابة الصحيحة :							
13	طول قطر الدائرة A هو 12 و BC مماساً للدائرة A و طوله يساوي تقريبا 8 و المسافة بين الدائرتين تساوي 1 فإن طول قطر الدائرة B يساوي 	A	3	B	4	C	6	D	15
14	في الشكل المجاور إذا كان $CW = WF$, $ED = 30$ فإن DF تساوي 	A	60	B	45	C	30	D	15
15	في الشكل المقابل إذا كان $m\widehat{AB} = 100°$ مركز الدائرة فإن $x°$ يساوي 	A	50°	B	100°	C	130°	D	260°
16	في الشكل المقابل قيمة $x°$ يساوي 	A	2	B	3	C	4	D	5
17	في الشكل المقابل قيمة $m\angle B$ يساوي 	A	30°	B	60°	C	120°	D	180°
18	في $\odot O$, $\overline{AB}$ قطر عمودي على الوتر $\overline{CD}$ و يقطعه في النقطة E إذا كان $AE = 2 , OB = 10$ فما طول $\overline{CD}$ ؟ 	A	4	B	6	C	8	D	12

اختر الإجابة الصحيحة :

19	في الشكل المقابل إذا كان $m\widehat{AC} = 160°$ ، $m\angle BEC = 38°$ فأوجد $m\angle AEB$ 	A	42°	B	61°	C	80°	D	84°
20	في الشكل المقابل إذا كان $m\widehat{NP} = 108°$ ، $m\widehat{NR} = 62°$ فإن $x°$ يساوي 	A	46°	B	64°	C	85°	D	128°
21	في الشكل المقابل إذا كان $m\widehat{BC} = 100°$ ، $m\widehat{AD} = 80°$ $m\angle 1$ يساوي 	A	10°	B	20°	C	90°	D	180°
22	في الشكل المقابل $m\angle L$ يساوي 	A	78°	B	102°	C	156°	D	258°
23	في الشكل المقابل قيمة $m\angle S$ يساوي 	A	54°	B	108°	C	125°	D	250°
24	في الشكل المقابل قيمة x يساوي 	A	2	B	6	C	9	D	18

اختر الإجابة الصحيحة :							
25	في الشكل المجاور قيمة x تساوي 						
	A	63	B	20	C	9	D	$3\sqrt{5}$
26	في الشكل المقابل x يساوي 						
	A	7.5	B	10	C	12	D	15
27	في الشكل المقابل x يساوي 						
	A	21	B	35	C	105	D	125
28	في الشكل المقابل $\overline{XY}$, $\overline{XW}$ مماسان للدائرة Z فإن قيمة x يساوي 						
	A	1	B	3	C	6	D	12
29	في الشكل المقابل محيط ΔJKL يساوي 						
	A	9	B	14	C	21	D	42
30	مركز الدائرة التي معادلتها $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ هو :						
	A	$(-2,1)$	B	$(1,-2)$	C	$(-1,2)$	D	$(2,-1)$

مفاتيح الإجابات									
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
A	C	A	A	B	B	B	C	A	D
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
B	A	D	C	A	C	D	C	A	B
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
D	D	B	A	B	D	A	A	A	C

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتقان - تميز

رياضيات

ثاني ثانوي

الفصل الأول

الدوال والمتباينات

الدوال والمتباينات

الأعداد الحقيقة

تضمن الإعداد الحقيقة مجموعات مختلفة من الأعداد منها: -

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125\ , -\frac{7}{8}$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159000$ $1.73205\ldots\ldots\ , \sqrt{3}$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23{,}8$
W	الأعداد الكلية	$2{,}0{,}57, \sqrt{36}$
N	الأعداد الطبيعية	$3{,}17{,}6{,}86$

مثال

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:-

a) -32 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z) ، مجموعة الأعداد النسبية (Q) ، مجموعة الأعداد الحقيقة (R) .

b) $\sqrt{50}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I) ، مجموعة الأعداد الحقيقة (R).

c) $-\frac{4}{9}$ مجموعة الأعداد النسبية (Q)،

خصائص الأعداد الحقيقة

يلخص الجدول الآتي بعض خصائص الأعداد الحقيقة

لأي أعداد حقيقية a, b, c فإن:-

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$
التجمعية	$(a+b)+c = (a+b)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a.1 = a = 1.a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a.\frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a}.a$ $a \neq 0$
الانغلاق	$(a+b)$ عدد حقيقي	$(a.b)$ عدد حقيقي
التوزيع	$a(b+c) = ab + ac, (b+c)a = ba + ca$	

مثال

ما الخاصية الموضحة في كل مما يأتي:-

a) $(6 \cdot 8) \cdot 5 = 6(8 \cdot 5)$ الخاصية التجمعية $(\cdot)$

b) $7(9-5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$ خاصية التوزيع

c) $84 + 16 = 16 + 84$ الخاصية التبديلية $(+)$

d) $(12+5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6$ خاصية التوزيع

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

a) -7 النظير الجمعي = 7 ، النظير الضربي = $-\frac{1}{7}$

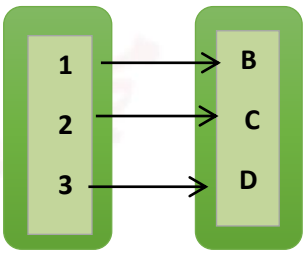
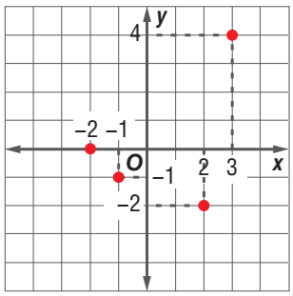
b) $\frac{4}{9}$ النظير الجمعي = $-\frac{4}{9}$ ، النظير الضربي = $\frac{9}{4}$

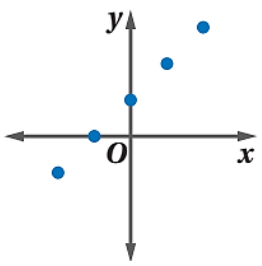
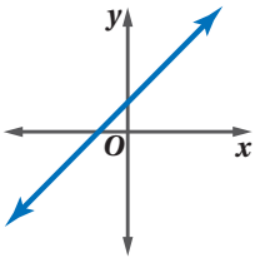
c) $\sqrt{5}$ النظير الجمعي = $-\sqrt{5}$ ، النظير الضربي = $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

تبسيط العبارة الجبرية	مثال
يمكن باستعمال خصائص الأعداد الحقيقة لتبسيط العبارات الجبرية:	**بسط العبارة:** $3\,(2q\ +\ r)\ +\ 5\,(4q\ -\ 7r)$ خاصية التوزيع $3(2q\ +\ r)\ +5(4q-7r)\ =\ 3(2q)\ +\ 3(r)\ +\ 5(4q)\ -5(7r)$ أضرب $=\ 6q\ +\ 3r+\ 20q\ -35r$ الخاصية التبديلية للجمع $=\ 6q\ +\ 20q\ +3r-35r$ خاصية التوزيع $=(6+\ 20)q\ +(3-35)r$ بسط $=26q-32r$

العلاقات والدوال

الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى

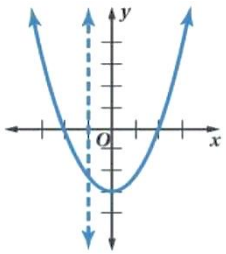
الدالة المتباينة	مثال
هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى، وهذا يعني أنه لا يمكن أن يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى. 	**حدد مجال كل علاقة فيما يأتي و مداها، وبين ما إذا كانت دالة أم لا، و إذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟**  المجال= $\{-2,-1,2,3\}$ المدى= $\{-2,-1,0,4\}$ هذه العلاقة دالة، لأنه كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى، وهي متباينة ، لأنه كل عنصر من المدى ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال.

العلاقة المنفصلة	العلاقة المتصلة
العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر المنفردة، وتمثل بيانياً بنقاط منفصلة، حيث أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة. 	هي العلاقة التي يكون مجالها فترة جزئية من الأعداد الحقيقية، وأمكن تمثيلها بيانياً بمستقيم أو بمنحى متصل. 

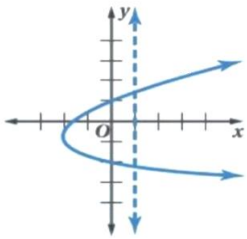
اختبار الخط الرأسي

يمكن استعمال اختبار الخط الرأسي مع كل من العلاقات المتصلة والمنفصلة لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.



إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة فالعلاقة ليست دالة.

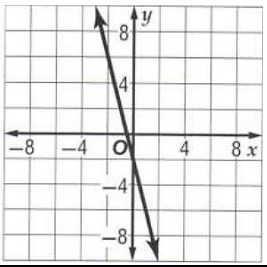


معادلات العلاقات والدوال

هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة . ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من خلال تمثيلها البياني.

مثال

مثل المعادلة $y = -4x - 2$ بيانياً، ثم بين إذا كانت تمثل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا ؟ و هل هي منفصلة أم متصلة؟



x	y
0	-2
1	-6
-1	2

هي دالة , متباينة , متصلة

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلاً من y ، ويقرأ f لـ x ؛ حيث f هو اسم الدالة وليس متغيراً مضروباً في x .

مثال

إذا كان $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$ ، فأوجد قيمة ما يلي:_

a) $f(-2)$

$f(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2) + 7 = -13$

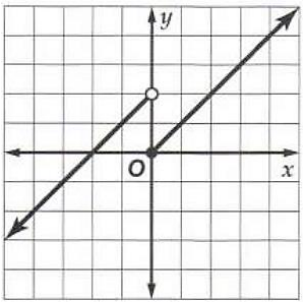
الدالة المتعددة التعريف

الدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر وعند تمثيل الدالة متعددة التعريف بيانياً توضع دائرة صغيرة مظللة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظللة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

مثال

مثل الدالة $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ بيانياً.

ثم حدد كلاً من مجالها ومداها.

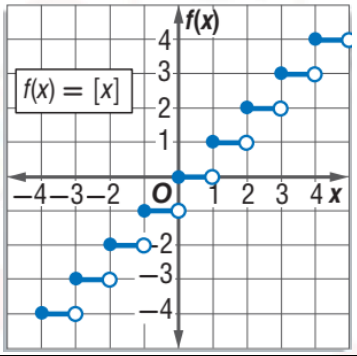
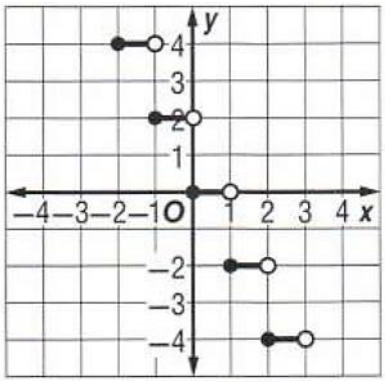
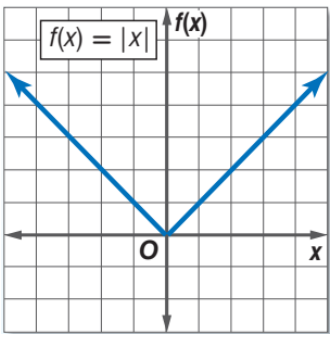
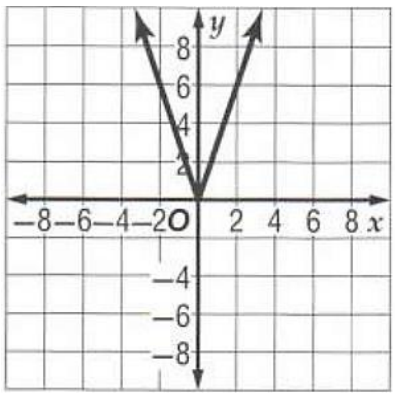


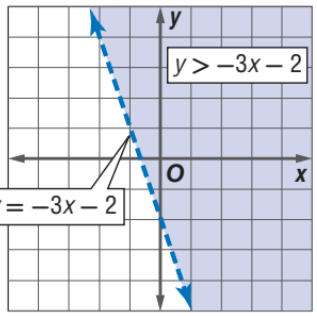
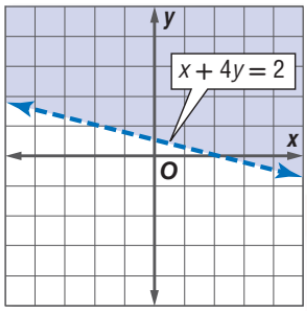
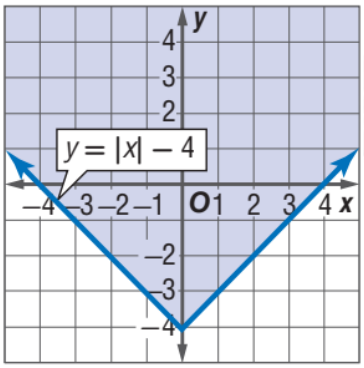
الخطوة (١) $f(x) = x + 2$

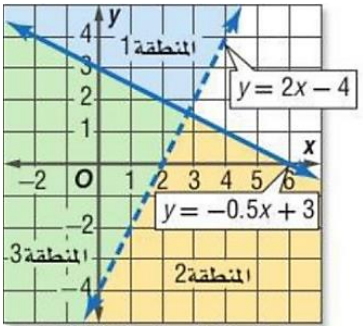
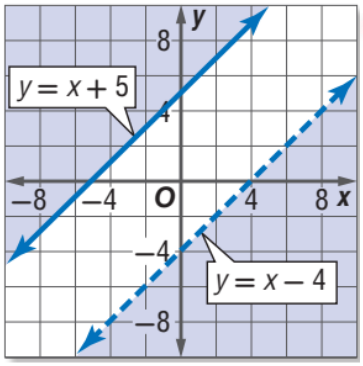
$f(0) = 0 + 2 = 2$ بما أن العدد 0 لا يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(0,2)$

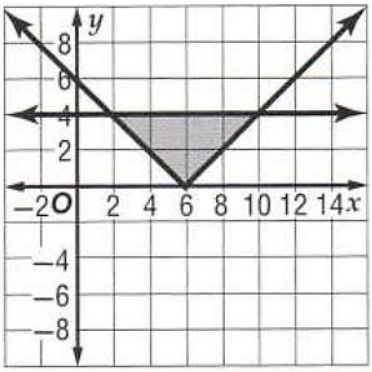
الخطوة (٢) $f(x) = x$

$F(0) = 0$ بما أن العدد 0 يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة مظللة عند النقطة $(0,0)$ بما أن الدالة معرفة عند جميع قيم x ، لذا فالمجال : جميع الاعداد الحقيقة. قيم $f(x)$ للأزواج المرتبة في التمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقة الأقل من 0 وجميع الأعداد الحقيقة الأكبر من أو تساوي 0 ، فالمدى : جميع الأعداد الحقيقية.

دالة أكبر عدد صحيح	مثال
الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [x]$ وتعرف على النحو التالي: $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \end{cases}$ **شكل التمثيل البياني:** قطع مستقيمة أفقية. **المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقة **المدى:** مجموعة الأعداد الصحيحة **المقطعان:** $f(x) = 0$ حيث $x = 0, 0 \le x < 1$ 	مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد كلا من مجالها ومداها $g(x) = -2[x]$ **المجال:** جميع الأعداد الحقيقة **المدى:** جميع الأعداد الزوجية 
دالة القيمة المطلقة	**مثال**
الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \lvert x \rvert$ وتعرف على النحو الآتي: $f(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ **شكل التمثيل البياني:** على شكل حرف V **المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية **المدى:** مجموعة الأعداد الحقيقة غير السالبة **المقطعان:** $x = 0, f(x) = 0$ **ولا يمكن أن تكون** $f(x) < 0$ 	مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد كلا من مجالها ومداها: $g(x) = \lvert -3x \rvert$ **المجال:** جميع الأعداد الحقيقة **المدى:** $\{g(x) \mid g(x) \ge 0\}$ 

تمثيل المتباينات الخطية بيانياً	مثال
تشبه المتباينة الخطية المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلاً من رمز المساواة، فمثلاً، $y > 3x - 2$ هي متباينة خطية $y > -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها. 	**مثل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانياً** **الخطوة (١): مثل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$. وبما أن رمز المتباينة هو $>$ فإن الحد سيكون متقطعاً.** **الخطوة (٢): اختبر النقطة (0,0) والتي لا تقع على حد المتباينة.** المتباينة الأصلية $x + 4y > 2$ $(x, y)=(0,0)$ $0 + 4(0) > 2$ $0 > 2$ ✗ ظلل المنطقة التي لا تحتوي (0,0). **تحقق:** يبين التمثيل البياني أن النقطة (0,3) تقع في منطقة الحل. المتباينة الأصلية $x + 4y > 2$ $(x, y)=(0,3)$ $0 + 4(3) > 2$ $12 > 2$ ✓ 
تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانياً	**مثال**
تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية، مثل بيانياً معادلة القيمة المطلقة المرتبطة، وبعد ذلك حدد المتباينة متقطعاً، أو متصلاً، ثم حدد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.	**مثل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانياً.** مثل المعادلة المترابطة $y = |x| - 4$ وبما أن المتباينة تحتوي على إشارة $\geq$ ، فإن الحد يكون متصلاً. والآن اختبر النقطة (0,0). المتباينة الأصلية $y \geq |x| - 4$ $(x, y)=(0,0)$ $0 \geq |0| - 4$ $0 \geq -4$ √ **ظلل المنطقة التي تحتوي على النقطة (0,0)** 

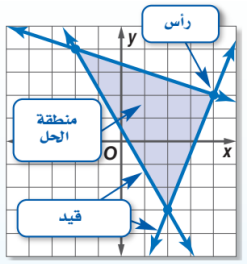
نظام المتباينات الخطية	مثال مناطق الحل المتقاطعة
لحل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام. الخطوة (١) مثل كل متباينة في النظام بيانياً الخطوة (٢) حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.	حل النظام الآتي بيانياً: $y > 2x - 4$ $y \leq -0 \cdot 5x + 3$  بتمثيل المتباينتين نجد حل المتباينة $y > 2x - 4$ المنطقتان: 1,3 حل المتباينة $y \leq -0.5x + 3$ المنطقتان: 2,3 المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين، وعليه فتكون هي منطقة حل النظام.
يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين ، وعليه فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.	**مثال مناطق الحل غير المتقاطعة** حل النظام الآتي بيانياً: $y \geq x + 5$ $y < x - 4$  بتمثيل المتباينتين بيانياً، نجد أن منطقتي الحل لا تتقاطعان، وبالتالي لا توجد نقاط مشتركة بينهما، ولذا فليس للنظام حل ومجموعة الحل هي $\emptyset$.

إيجاد رؤوس منطقة الحل	مثال
ينتج أحياناً عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للمنطقة(الحدود).	أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي: $y \le 4$, $y \ge \lvert 6 - x \rvert$  الخطوة(١): مثل كل متباينة بيانياً. الخطوة(١): من التمثيل البياني يمكنك إيجاد إحداثيات رؤوس المثلث الذي يمثل منطقة الحل المشتركة و هي : $(10, 4)$, $(6, 0)$, $(2, 4)$

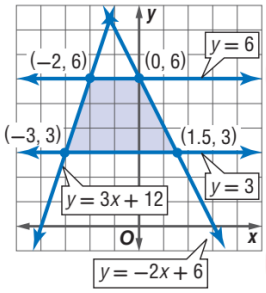
البرمجة الخطية

هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانياً، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى_ إن وجدت_ للدالة ذات الصلة دائماً عند أحد رؤوس منطقة الحل.

إذا كانت منطقة الحل **محدودة** (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة تظهر دائماً عند رؤوس منطقة الحل.

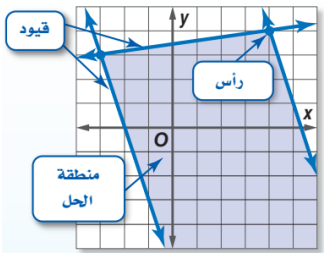


اعتماداً على التمثيل البياني المقابل أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة $f(x, y) = 4x - 2y$

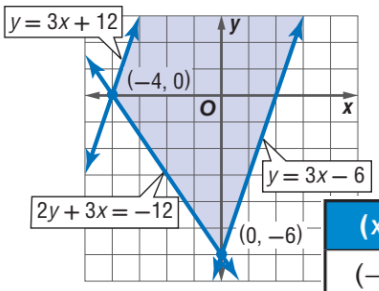


(x, y)	4x − 2y	f(x, y)	
(−3, 3)	4(−3) − 2(3)	−18	
(1.5, 3)	4(1.5) − 2(3)	0	← قيمة عظمى
(0, 6)	4(0) − 2(6)	−12	
(−2, 6)	4(−2) − 2(6)	−20	← قيمة صغرى

إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة** ، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

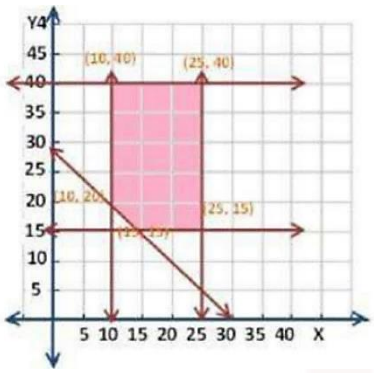


اعتماداً على التمثيل البياني المقابل أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة $f(x, y) = 9x - 6y$



(x, y)	9x − 6y	f(x, y)
(−4, 0)	9(−4) − 6(0)	−36
(0, −6)	9(0) − 6(−6)	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة (0,-6) و لا توجد قيمة صغرى للدالة، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي وتعطي القيمة -48 للدالة وهي أقل من 36-.

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل	مثال
يُسمى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح الحل الأمثل، ويمكنك على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية. الخطوة(1): حدد المتغيرات. الخطوة(2): اكتب نظام متباينات خطية يمثل المسألة. الخطوة(3): مثل نظام المتباينات بيانياً. الخطوة(4): جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. الخطوة(5): اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى. الخطوة(6): عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة. الخطوة(7): اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقاً لما هو مطلوب في المسألة.	تصوغ أسماء من 10 إلى 25 عقداً، ومن 15 إلى 40 سواراً شهرياً. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالاً. وأجرة صياغة السوار 30 ريالاً، وصاغت في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود و الأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليها صياغتها لتحصل على أكبر أجر؟ نفرض عدد العقود x عدد الأساور y  $f(x,y) = 5x + 3y$ $10 \le x \le 25$ $15 \le y \le 40$ $x + y \ge 30$ نمثل المتباينات بيانياً ثم نوجد قيم دالة الأجر عند رؤوس منطقة الحل $f(10,40) = 5(10) + 3(40) = 170$ $f(25,40) = 5(25) + 3(40) = 245$ $f(25,15) = 5(25) + 3(15) = 170$ $f(10,20) = 5(10) + 3(20) = 110$ $f(15,15) = 5(15) + 3(15) = 120$ الإجابة المطلوبة: 25 عقداً، و40 سواراً.

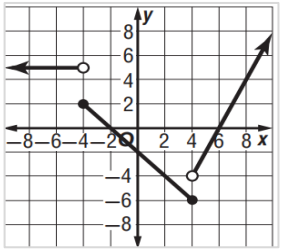
أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	ما العدد الذي ينتمي إلى مجموعة الأعداد غير النسبية؟							
	A	2	B	$\sqrt{7}$	C	$\frac{22}{7}$	D	$0,\overline{45}$
2	الخاصية المستخدمة في العبارة الرياضية $5(x+y)=5x+5y$							
	A	الإبدال	B	التجميع	C	التوزيع	D	الانغلاق
3	النظير الضربي للعدد -0.6							
	A	0.6	B	$-\frac{3}{5}$	C	$\frac{5}{3}$	D	$-\frac{5}{3}$
4	إذا كانت $f(x)=4x^2-8$ فإن $f(x-1)$ تساوي.....							
	A	$4x^2-8x-4$	B	$4x^2-2x-9$	C	$-2x-94x^2$	D	$-94x^2$
5	الخاصية المستخدمة في العبارة الرياضية $3x-y=-y+3x$							
	A	الإبدال	B	التجميع	C	التوزيع	D	الانغلاق
6	العدد المختلف بين الأعداد التالية :							
	A	$\sqrt{81}$	B	$\sqrt{76}$	C	$\sqrt{35}$	D	$\sqrt{21}$
7	إذا كانت $f(x)=2x^3+3x^2-5x+11$ فما قيمة $f(2)-f(0)$ ؟							
	A	11	B	12	C	18	D	29
8	إذا كانت $f(x)=ax^4+bx^2+x+5$ حيث a , b عددين حقيقيين وكان $f(3)=2$ فإن $f(-3)$ يساوي							
	A	-4	B	-2	C	2	D	4
9	إذا كانت $f(x)=[x]$ فإن $f(-4.6)$ يساوي							
	A	-5	B	-4	C	4	D	4.6
10	أي الدوال التالية مداها : $\{f(x)\|f(x)\geq 0\}$							
	A	$f(x)=[x]$	B	$f(x)=\|x\|$	C	$f(x)=-\|x\|$	D	$f(x)=[x]+1$
11	مجال الدالة $f(x)=\|x-3\|+4$ يساوي :							
	A	$(3,\infty)$	B	$[3,\infty)$	C	$[4,\infty)$	D	R
12	مدى الدالة $f(x)=\|x-2\|+3$							
	A	$[3,\infty)$	B	$[-2,\infty)$	C	$[2,\infty)$	D	R

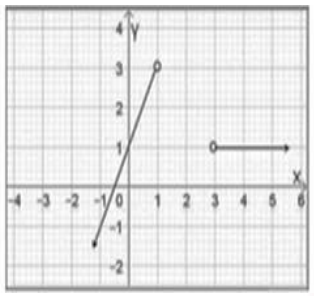
اختر الإجابة الصحيحة :

13 في الشكل أدناه ما هو مدى الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيا؟



A	$\{y\|6 \geq y > -6\}$	B	$\{y\|y \geq -6\}$	C	$\{y\|y \leq 6\}$	D	R

14 قاعدة الدالة الممثلة في الشكل المقابل هي

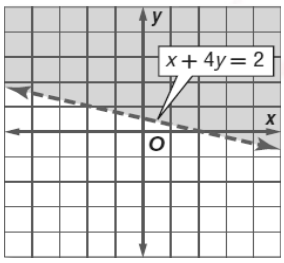


A	$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$	C	$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 1 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$
B	$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$	D	$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 1 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$

15 أي الدوال التالية يكون فيها $f\left(-\frac{1}{4}\right) \neq -1$

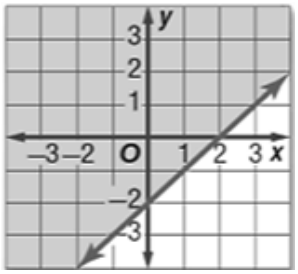
A	$f(x) = 4x$	B	$f(x) = [x]$	C	$f(x) = [4x]$	D	$\|f(x) = \|4x\|$

16 أي المتباينات الخطية تمثل بالشكل المقابل



A	$x + 4y > 2$	B	$x + 4y < 2$	C	$x + 4y \leq 2$	D	$x + 4y \geq 2$

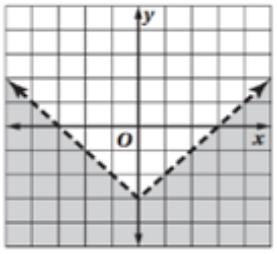
17 أي المتباينات الخطية تمثل بالشكل المقابل



A	$x - y \geq 2$	B	$x - y \leq 2$	C	$x - y > 2$	D	$x - y < 2$

اختر الإجابة الصحيحة :

18 أي المتباينات ممثلة بالشكل المقابل

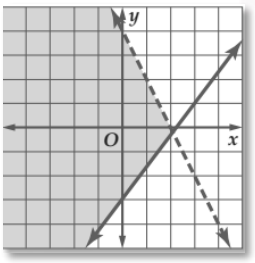


A	$y \leq \lvert x\rvert - 3$	B	$y \geq \lvert x\rvert - 3$	C	$y < \lvert x\rvert - 3$	D	$y > \lvert x\rvert - 3$

19 إي نقطة تقع في منطقة حل المتباينة $x - 2y \leq 2$

A	$(2\ ,\ -1)$	B	$(2\ ,\ 1)$	C	$(0\ ,\ -2)$	D	$(3\ ,\ 0)$

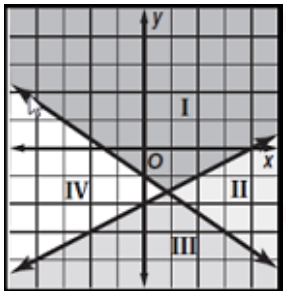
20 حل النظام الممثل بيانياً بالشكل المجاور هو :



A	$y \leq \frac{3}{2}x - 3$ $y > 4 - 2x$	B	$y < \frac{3}{2}x - 3$ $y \leq 4 - 2x$	C	$y \geq \frac{3}{2}x - 3$ $y < 4 - 2x$	D	$y > \frac{3}{2}x - 3$ $y \leq 4 - 2x$

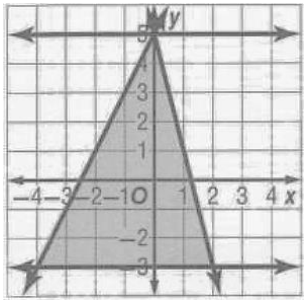
21 اعتماداً على الشكل المقابل منطقة حل النظام

$$y \leq -\frac{2}{3}x - 1 \quad , \quad y \leq \frac{1}{2}x - 2$$



A	المنطقة I	B	المنطقة II	C	المنطقة III	D	المنطقة IV

22 القيمة العظمى للدالة $f(x,y) = 4x - 3y$ في المنطقة الموضحة بالرسم هي



A	-15	B	-7	C	15	D	17

مفاتيح الإجابات

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	A	A	C	A	A	A	D	C	B
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
C	B	C	B	A	D	C	B	A	D
								22	21
								D	C

مجموعة رفعة الرياضيات

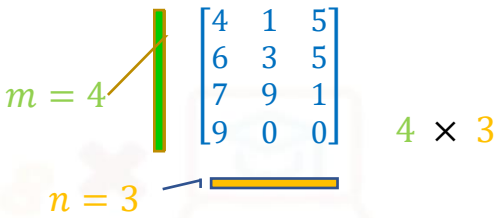
الفصل الثاني

المصفوفات

مجموعة رفعة الرياضيات

المصفوفات

المصفوفة: هي ترتيب على شكل مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين [ ].

رتبة المصفوفة	مثال
إذا كان عدد صفوف المصفوفة n وعدد أعمدتها m فإن رتبة المصفوفة $n \times m$  • تسمى المتغيرات أو الأعداد المرتبة داخل المصفوفة بعناصر أو قيم المصفوفة. • يُرمز للمصفوفة بحرف كبير وعادةً يكون تحته خط، مثلاً $\underline{A}$, $\underline{B}$ • يُرمز لعنصر في المصفوفة بحرف صغير مع تحديد موقعه.	ما رتبة المصفوفة التالية؟ وما قيمة العنصر a_{13}؟ $\underline{A} = \begin{bmatrix}7 & 3x & 5\\k & 12 & 0\end{bmatrix}$ } صفان 3 أعمدة بالتالي فإن: • رتبة المصفوفة $\underline{A}$ هي 2×3 وتكتب $\underline{A}_{2\times3}$ • العنصر a_{13} هو العنصر في المصفوفة $\underline{A}$ الموجود في الصف رقم 1 والعمود رقم 3، فإن قيمته هي 5. $a_{13} = 5$

أنواع خاصة من المصفوفات

مصفوفة صف	مصفوفة عمود	مصفوفة مربعة	المصفوفة الصفرية
• تحتوي صفاً واحد $[8 \quad -5 \quad 2 \quad 4]$	• تحتوي عمود واحد $\begin{bmatrix}5\\1\\3\end{bmatrix}$	• عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة $\begin{bmatrix}6 & -5\\2 & 3\end{bmatrix}$	• جميع عناصرها أصفار $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

شروط تساوي المصفوفات

١. تساوي الرتبة

٢. تطابق العناصر المتناظرة

$$\begin{bmatrix}5 & 9\\2 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 9\\2 & 7\end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات

الجمع والطرح	مثال
• يمكن جمع أو طرح المصفوفات اذا كانت لها نفس الرتبة. • جمع العناصر المتناظرة. • طرح العناصر المتناظرة • إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، $\underline{B}=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}$ فإن: $\underline{A}+\underline{B}=\begin{bmatrix}a+e & b+f\\ c+g & d+h\end{bmatrix}$ $\underline{A}-\underline{B}=\begin{bmatrix}a-e & b-f\\ c-g & d-h\end{bmatrix}$	• اوجد ناتج عملية الطرح فيما يلي: $\begin{bmatrix}7 & 3 & 5\\ 1 & 12 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 6 & 4\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3 & 1\\ -1 & 10 & -5\end{bmatrix}$ • اوجد ناتج عملية الجمع فيما يلي: $\begin{bmatrix}7 & 3 & 5\\ 1 & 12 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$ اجراء عملية الجمع في هذا المثال غير ممكنة، وذلك لأن الرتبة ليست نفسها في المصفوفتين.
الضرب في ثابت	**مثال**
• ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في العدد الثابت. • إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ وكان k عدد ثابت، فإن $k.\underline{A}=k\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{bmatrix}$	اذا كانت $T=\begin{bmatrix}8 & 0 & 3 & -2\\ -1 & -4 & -2 & 9\\ 3 & 6 & 5 & 5\end{bmatrix}$ فأوجد $-4T$ $-4T=-4\begin{bmatrix}8 & 0 & 3 & -2\\ -1 & -4 & -2 & 9\\ 3 & 6 & 5 & 5\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}-32 & 0 & -12 & 8\\ 4 & 16 & 8 & -36\\ -12 & -24 & -20 & -20\end{bmatrix}$
الضرب	**مثال**
• شرط ضرب مصفوفتين هو ان تكون عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية. • في عملية الضرب يتم ضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج. • إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}$ • $\underline{A}.\underline{B}=\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}$ $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{AB}$ $m\times r$ $\quad r\times t$ $\quad m\times t$ متساويان رتبة AB	إذا كان $\underline{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\underline{B}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ فأوجد $\underline{A}.\underline{B}$ $\underline{A}.\underline{B}=\begin{bmatrix}(3\times 2)+(4\times 1) & (3\times 2)+(4\times 2)\\ (1\times 2)+(0\times 1) & (1\times 2)+(0\times 2)\end{bmatrix}$ $\underline{A}.\underline{B}=\begin{bmatrix}(6)+(4) & (6)+(8)\\ (2)+(0) & (2)+(0)\end{bmatrix}$ $\underline{A}.\underline{B}=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

المحددات

محددة الدرجة الثانية	مثال
هي محددة لمصفوفة من الرتبة 2×2 رمزها: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الاخر.	أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي: a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - 8(-4)$ تعريف محددة الدرجة الثانية $= 45 + 32$ بسط $= 77$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6)$ تعريف محددة الدرجة الثانية $= 0 - 24$ بسط $= -24$

محددة الدرجة الثالثة	مثال
هي محددة لمصفوفة من الرتبة 3×3 رمزها: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ حساب محددة المصفوفة 3×3 باستعمال قاعدة الأقطار 1. اعادة كتابة العمودين الأول والثاني على يمين المحددة 2. ايجاد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم نجمع. 3. ايجاد حاصل ضرب عناصر القطر الاخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم نجمع. 4. طرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 لإيجاد قيمة المحدد. الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2 $a.\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$	أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محددة المصفوفة 2×2 أولاً: باستعمال قاعدة الأقطار: الخطوة ١: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة. $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 & 4 & -8 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 9 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ الخطوة ٢: جد حاصل ضرب عناصر الأقطار و موازياتها. $4(2)(9) = 72$ $\quad -4(2)(3) = -24$ $-8(6)(-4) = 192$ $\quad 5(6)(4) = 120$ $3(-3)(5) = -45$ $\quad 9(-3)(-8) = 216$ الخطوة ٣: اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة. $72 + 192 + (-45) = 219$ $\quad -24 + 120 + 216 = 312$ الخطوة ٤: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول. $219 - 312 = -93$ فتكون قيمة المحددة هي ٩٣ - ثانيا: باستعمال محددة المصفوفة 2×2 $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$ $4 \times (-12) + 8 \times (-3) + 3 \times (-7) = -93$

ايجاد النظير الضربي للمصفوفات

النظير الضربي للمصفوفة من النوع ٢ × ٢.	مثال
النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1}=\frac{1}{\lvert\underline{A}\rvert}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ وذلك إذا كانت $\lvert\underline{A}\rvert \neq 0$. خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ من الرتبة 2×2 . ١. إيجاد محدد المصفوفة $\lvert\underline{A}\rvert$ ويجب ألا يكون مساويا للصفر. - فإذا كان $\lvert\underline{A}\rvert=0$ فإنه ليس للمصفوفة نظير ضربي - وإذا كان $\lvert\underline{A}\rvert\neq 0$ فإنه للمصفوفة نظيرا ضربيا $\lvert\underline{A}\rvert=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$ ٢. نوجد النظير الضربي ويساوي $\frac{1}{\lvert A\rvert}$ مضروب في المصفوفة الناتجة عن تبديل موضعي عناصر القطر الأساسي وتغيير إشارة القطر الاخر. $A^{-1}=\frac{1}{\lvert A\rvert}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$	أوجد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{B}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ $\lvert\underline{B}\rvert=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=4\times 3-(-1)\times 2$ $=12+2=12$ $\underline{B}^{-1}=\frac{1}{\lvert\underline{B}\rvert}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{12}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

حل نظام معادلتين خطيتين

قاعدة كرامر	المعادلات المصفوفية
١. لابد أن تكون المعادلات على الصورة القياسية $ax + by = n$ $cx + dy = m$ ٢. نوجد محدد مصفوفة المعاملات $\|C\| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ٣. لإيجاد x نستبدل معاملات x في مصفوفة المعاملات بالحد الثابت ونقسم على محدد مصفوفة المعاملات $x = \frac{\begin{vmatrix} n & b \\ m & d \end{vmatrix}}{\|c\|}$ ٤. لإيجاد y نستبدل معاملات y في مصفوفة المعاملات بالحد الثابت ونقسم على محدد مصفوفة المعاملات $y = \frac{\begin{vmatrix} a & n \\ c & m \end{vmatrix}}{\|c\|}$	١- لابد أن تكون المعادلات على الصورة القياسية $ax + by = n$ $cx + dy = m$ ٢- كتابة المعادلات المصفوفية للنظام $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ ٣- حل النظام $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\underline{A}\|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1 إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ، فإن $\underline{A}^{-1}$ تساوي :

A	$\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

2 ما قيمة C التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix}2 & 8\\ -3 & C\end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؟

A	-12	B	10	C	12	D	24

3 المصفوفتين $\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ و $\underline{B}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

فإن $2\underline{A}-\underline{B}=$ .....

A	$\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 1 & 12\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}0 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & -12\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 12\end{bmatrix}$

4 ما قيمة x التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix}2x & 6\\ x-1 & 4\end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؟

A	1	B	3	C	5	D	-3

5 العنصر a_{23} في المصفوفة التالية $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 9\\ 5 & 7 & 0\end{bmatrix}$ هو .....

A	0	B	5	C	7	D	9

6 ما رتبة المصفوفة التالية $\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 5\\ 2 & 5 & 5 & 5\\ 3 & 6 & 5 & 5\end{bmatrix}$

A	3×4	B	4×3	C	3×2	D	4×2

7 قيمة x إذا لم يكن للمصفوفة $\begin{bmatrix}x+1 & x\\ -2 & 8\end{bmatrix}$ نظير ضربي

A	$-\frac{4}{5}$	B	$\frac{4}{5}$	C	2	D	3

8 إذا كانت المصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ فإن $\underline{A}^{-1}$ تساوي .....

A	$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

9 إذا كانت المصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix}k & -2\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ فما قيمة k التي تجعل المصفوفة $\underline{A}$ ليس لها نظير ضربي؟

A	3	B	-4	C	1	D	-9

اختر الإجابة الصحيحة :

10 إذا كان $\underline{B}=\begin{bmatrix}0 & -5\\ 1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ و $\underline{A}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 8 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ فأي من العمليات الاتية على $\underline{B}$ ، $\underline{A}$ يكون ناتجها؟

$\begin{bmatrix}5 & 11\\ 6 & -5\\ 10 & -4\end{bmatrix}$

A	$\underline{A}+2\underline{B}$	B	$\underline{A}-2\underline{B}$	C	$2\underline{A}+\underline{B}$	D	$2\underline{A}-\underline{B}$

11 إذا كان لا يوجد للمصفوفة $\begin{bmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{bmatrix}$ نظير ضربي، فاوجد x^2+y^2؟

A	2	B	4	C	0	D	1

12 إذا كان $\underline{A}=\begin{bmatrix}2x & 6\\ 3 & 10\end{bmatrix}$

فأوجد قيمة x علما بأن $|\underline{A}|=42$

A	3	B	5	C	6	D	8

13 $\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 5\end{bmatrix}$ ، $\underline{B}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$=

اوجد $2\underline{A}-\underline{B}$

A	$\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 11 & 12\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}5 & -1\\ 11 & 12\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}5 & -1\\ 12 & 11\end{bmatrix}$

14 ناتج جمع المصفوفتين $\begin{bmatrix}10 & -4\\ 1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ يساوي .....

A	$\begin{bmatrix}18 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}10 & -9\\ 1 & -2\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}10 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}10 & 9\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

15 ناتج $2\begin{bmatrix}3 & 5\\ -6 & 0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}9 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ يساوي .....

A	$\begin{bmatrix}42 & 6\\ -4 & 12\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}27 & -5\\ 12 & 0\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}10 & 9\\ 1 & -2\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}42 & -4\\ 6 & 12\end{bmatrix}$

اختر الإجابة الصحيحة :

16 إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

فإن $A\times A$ يساوي .....

A	$\begin{bmatrix}5 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}4 & -4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

17 ناتج جمع المصفوفتين؟

$$\begin{bmatrix}24\\ -6\\ -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

A	غير معرف	B	$\begin{bmatrix}27 & -8 & 2\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}27\\ -8\\ 2\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}27 & -8\end{bmatrix}$

18 احسب محددة المصفوفة $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 10\end{bmatrix}$

A	24	B	-12	C	38	D	42

19 ما هو النظير الضربي للمصفوفة التالية؟

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

A	$\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}0.5 & 1.5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

20 ناتج جمع المصفوفتين .....

$2\begin{bmatrix}8 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & -4\end{bmatrix}$ يساوي .....

A	$\begin{bmatrix}6 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}14 & 14\\ -1 & 8\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}10 & -9\\ 1 & -2\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}10 & 9\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

21 ناتج طرح المصفوفتين .....

$2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ يساي

A	$\begin{bmatrix}5 & 5\\ 3 & 5\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 6 & 4\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}1 & 3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

اختر الإجابة الصحيحة :							
22	مساحة مثلث إحداثيات رؤوسه $A(0,0), B(-2,8), C(4,12)$ تساوي.....						
	A	56	B	28	C	20	D	14
23	إذا كان $\underline{A}.\underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة 3×2 وكان k عددا حقيقيا، فأي مما يلي غير معرف؟						
	A	$\underline{A}+\underline{B}$	B	$K\underline{A}$	C	$\underline{A}-\underline{B}$	D	$\underline{A}\cdot\underline{B}$
24	ناتج $\begin{bmatrix}8 & 5\\0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -4\end{bmatrix}$						
	A	$\begin{bmatrix}10 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}10 & 9\\1 & -2\end{bmatrix}$	C	$\begin{bmatrix}10 & 1\\1 & 6\end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix}10 & 9\\1 & -2\end{bmatrix}$
25	العنصر في المصفوفة الذي يقع في الصف الثالث والعمود الرابع						
	A	a_3	B	a_{34}	C	a_4	D	a_{43}
26	ما النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}$						
	A	$0.5\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}$	B	$0.5\begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 2\end{bmatrix}$	C	$0.5\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{bmatrix}$	D	$0.5\begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & -2\end{bmatrix}$
27	ناتج $[2 \quad -3].\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$						
	A	$\begin{bmatrix}2\\-15\end{bmatrix}$	B	$[2 \quad -15]$	C	$[-31]$	D	$[-01]$
28	قيمة محدد المصفوفة $\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\-\sin x & \cos x\end{bmatrix}$						
	A	0	B	1	C	$\sin x$	D	$\cos x$
29	في المصفوفة $A=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\2 & 6 & 4\end{bmatrix}$ يكون a_{23}						
	A	4	B	6	C	7	D	10

اختر الإجابة الصحيحة :

30 قيمة المحدد $\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 4\\3 & 1 & 6\end{bmatrix}$ تساوي

A	B	C	D
0	10	15	20

31 إذا كانت المصفوفة $\underline{x}$ من النوع 3×2 وكانت المصفوفة $\underline{y}$ من النوع 4×3 فما رتبة المصفوفة $\underline{x} . \underline{y}$

A	B	C	D
2×4	3×4	4×3	3×2

32 قيمة x التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix}x & 3\\4 & 6\end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي هي: .....

A	B	C	D
4	3	2	1

33 اوجد x

$$A = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0\\0 & x\end{bmatrix}$$

A	B	C	D
1	2	3	5

34 اذا كان $\underline{A}_{2\times3}$ ، $\underline{A} . \underline{B}_{2\times5}$ فإن رتبة المصفوفة $\underline{B}$ تساوي.....

A	B	C	D
2×3	2×5	5×3	3×5

35 ناتج ضرب المصفوفتين $\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix} . [1 \quad 2]$

A	B	C	D
$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$	$[0 \quad 3]$	$[0 \quad -3]$

36 اذا كانت $\begin{bmatrix}0 & 2x+1\\y-1 & 25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1 & 4\\3 & 10\end{bmatrix}$ فما قيمة $x + y$

A	B	C	D
24	18	15	10

مفاتيح الإجابات									
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	B	C	A	A	D	D	D	A	B
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
B	C	D	A	D	A	A	B	A	C
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
A	A	B	D	C	B	A	D	B	D
				36	35	34	33	32	31
				C	C	D	A	A	A

الفصل الثالث

كثيرات الحدود ودوالها

حساب قوى العدد i (i^n)

<table>
<tr><td colspan="6">الطريقة الأولى</td></tr>
<tr><td colspan="3">n عدد زوجي</td><td colspan="3">n عدد فردي</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">نجزئ الأس</td><td colspan="2" rowspan="2">$(i^2)^{\frac{n}{2}}$</td><td colspan="2">$i^{n-1}\cdot i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\left((i^2)^{\frac{n-1}{2}}\cdot i\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">نعوض عن
$(i^2=-1)$</td><td colspan="2">$(-1)^{\frac{n}{2}}$</td><td colspan="2">$\left((-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot i\right)$</td></tr>
<tr><td>إذا كان $\frac{n}{2}$ زوجيا</td><td>إذا كان $\frac{n}{2}$ فرديا</td><td>إذا كان $\frac{n-1}{2}$ زوجيا</td><td>إذا كان $\frac{n-1}{2}$ فرديا</td></tr>
<tr><td>$i^n=1$</td><td>$i^n=-1$</td><td>$i^n=i$</td><td>$i^n=-i$</td></tr>
<tr><td colspan="6">الطريقة الثانية</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">نقسم n على 4</td><td>إذا كان باقي القسمة صفر</td><td>إذا كان باقي القسمة1</td><td>إذا كان باقي القسمة 2</td><td>إذا كان باقي القسمة 3</td></tr>
<tr><td>$i^n=1$</td><td>$i^n=i$</td><td>$i^n=-1$</td><td>$i^n=-i$</td></tr>
</table>

الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة		
الجمع والطرح	نجمع حقيقي مع حقيقي وتخيلي مع تخيلي وكذلك الطرح بالمثل	**مثال** $(-2+5i)+(1-7i)=$ $=(-2+1)+(5i-7i)=-1-2i$
الضرب	توزيع وفك أقواس عند ظهور i^2 نعوض عنها بـ -1 ثم نجمع حقيقي مع حقيقي وتخيلي مع تخيلي	**مثال** $(-2+5i)\cdot(1-7i)=(-2\times 1)+(-2\times -7i)$ $+(5i\times 1)+(5i\times -7i)$ $=-2+14i+5i-35i^2$ $=(-2+35)+(14+5)i$ $=33+19i \quad , i^2=-1$
القسمة	نضرب في مرافق المقام في البسط ضرب عددين مركبين فك أقواس وفي المقام $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$ تبسيط ثم نجمع حقيقي مع حقيق وتخيلي مع تخيلي نكتب الناتج على الصورة $a+bi$	**مثال** $\frac{3+4i}{2-3i}=\frac{3+4i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}$ $=\frac{6+9i+8i+12\,i^2}{2^2-(3i)^2}$ $=\frac{6+9i+8i-12}{4+9} \quad , \quad i^2=-1$ $=\frac{-6+17i}{13}=-\frac{6}{13}+\frac{17}{13}\,i$
العمليات على الأعداد التخيلية البحتة $\sqrt{-1}=i \quad , \quad \sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i \quad ,$		
نضرب المتشابه $ai\cdot bi=ab\cdot i^2=-ab$ **مثال** $3i\cdot 4i=12\cdot i^2=-12$		$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}\,i\cdot\sqrt{b}\,i=\sqrt{ab}\cdot i^2=-\sqrt{ab}$ **مثال** $\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-15}=\sqrt{6}\,i\cdot\sqrt{15}\,i=\sqrt{6\times 15}\cdot i^2$ $=-\sqrt{90}=-3\sqrt{10}$

القانون العام والمميز

<table>
<tr><th colspan="5">استخدام القانون العام لحل المعادلات التربيعية</th></tr>
<tr><td>وضع المعادلة بالصورة القياسية</td><td colspan="4">$ax^2+bx+c=0$</td></tr>
<tr><td>تحديد المعاملات</td><td colspan="4">a معامل x^2 و b معامل x و c الثابت (الحد الثابت)</td></tr>
<tr><td>كتابة القانون العام ثم التعويض في المعاملات</td><td colspan="4">$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="4">نوجد المميز : b^2-4ac</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b^2-4ac>0$
موجب</td><td>$b^2-4ac=0$</td><td>$b^2-4ac<0$
سالب</td></tr>
<tr><td colspan="2">للمعادلة جذران حقيقيان</td><td rowspan="2">للمعادلة جذر حقيقي مكرر مرتين</td><td rowspan="2">للمعادلة جذران مركبان مترافقان</td></tr>
<tr><td>نسبيان إذا كان المميز مربعاً كاملاً</td><td>غير نسبيان إذا كان المميز ليس مربعاً كاملاً</td></tr>
</table>

مثال :باستخدام القانون العام حل المعادلة

$$x^2-6x=-10$$

$$x^2-6x+10=0 \quad , \quad a=1, b=-6, c\ 10$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times10}}{2\times1}=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{4}\,i}{2}=\frac{6\pm2i}{2}$$

الجذر الأول:

$$\frac{6+2i}{2}=\frac{6}{2}+\frac{2i}{2}=3+i$$

الجذر الثاني:

$$\frac{6-2i}{2}=\frac{6}{2}-\frac{2i}{2}=3-i$$

العمليات على كثيرات الحدود

كثيرات الحدود لا تدخل المتغير تحت جذر ولا في المقام، أي أن جميع الأسس أعداد صحيحة موجبة.	
تبسيط عبارات تتضمن وحيدة حد وضربها وقسمتها	مثال
1 . عملية ضرب والأساس نفسه تجمع الأسس	$(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^6) = (2\times -7)x^{-3+5}y^{3+6} = -14x^2y^9$
2 . عملية قسمة والأساس نفسه تطرح الأسس	$\frac{15c^5d^7}{3c^2d^3} = \frac{15}{3}c^{5-2}d^{7-3} = 5c^3d^4$
3 . قوى مرفوعة لقوى نضرب القوتين	$(x^2)^3 = x^{2\times 3} = x^6$
4 . قوة ناتج الضرب أو القسمة نوزع الأس	$(-2x^3y^2)^5 = (-2)^5x^{3\times 5}y^{2\times 5} = -32x^{15}y^{10}$
5 . الأس السالب نتخلص منه بإيجاد المقلوب	$\frac{1}{d^{-5}} = d^5$

جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها		
		مثال
الجمع	نجمع الحدود المتشابهة	$(x^2+8x-2)+(2x^2-x-10)$ $=(x^2+2x^2)+(8x-x)+(-2-10)$ $=3x^2+7x-12$
الطرح	نطرح الحدود المتشابهة	$(4x^2-5x+6)-(2x^2+3x-1)$ $=(4x^2-2x^2)+(-5x-3x)+(6+1)$ $=2x^2-8x+7$
الضرب	نفك الأقواس فنضرب المعاملات ونجمع أسس المتغيرات	$3x(2x^2-4x+6) = 3x(2x^2)+3x(-4x)+3x(6)$ $=6x^3-12x^2+18x$

تحليل كثيرات الحدود

	حدين	ثلاثة حدود		أربعة حدود
الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	مربع كامل	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	تجميع مناسب للحدود
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b2$	تحليل مقدار ثلاثي $x^2 + bx + c = 0$ يوجد حالتان إذا كان الحد الثابت c موجباً نبحث عد عددين حاصل ضربهما c و حاصل جمعهما b و إشارة العددين هي نفس إشارة الحد الأوسط أما إذا كان الحد الثابت c سالباً نبحث عد عددين حاصل ضربهما c و حاصل طرحهما b و إشارة العددين مختلفة و إشارة الأكبر هي إشارة الأوسط $ax^2 + bx + c = 0$ و في هذه الحالة نبحث عن عددين حاصل ضربهما الحد الثابت بحيث عند ضرب الأطراف و الأوسط للتحليل و جمعهم نحصل على الحد الأوسط و تطبق قاعدة الإشارات كالسابق		إخراج العامل المشترك الأكبر
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b2$			إخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

نظريتا الباقي والعوامل

إيجاد قيمة دالة باستعمال التعويض التركيبي

باستخدام القسمة التركيبية قيمة دالة عند العدد r تساوي باقي قسمة الدالة على $x-r$ نكتب معاملات $f(x)$ مع مراعاة ترتيب القوى وحفظ الخانة بالصفر في حالة عدم وجود الأس التالي ونضع العدد المطلوب حساب قيمة الدالة عنده في الصندوق r

وبإجراء القسمة يكون

باقي القسمة $= f(x)$

مثال

إذا كان $f(x)=3x^4-2x^3+5x+2$

فأوجد $f(x)$ باستعمال التعويض التركيبي.

4	3	−2	0	5	2
		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

باقي القسمة $= f(x)=662$

استعمال التعويض التركيبي لتحديد ما إذا كانت ثنائية حد عاملاً من عوامل كثيرة حدود

نحد ما إذا كان $(x-r)$ عاملا بإجراء عملية القسمة ولابد أن يكون باقي القسمة يساوي صفر. لإيجاد باقي العوامل نحلل ناتج القسمة من الخطوة السابقة.

مثال

حدد ما إذا كان $x-5$ عاملا من عوامل كثيرة الحدود

$p(x)=x^3-7x^2+7x+15$

أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

يكون $x-5$ عاملا إذا كان

$p(5)=0$

5	1	−7	7	15
		5	−10	−15
	1	−2	−3	0

$p(5)=0$ لذلك $x-5$ عاملا

لإيجاد باقي العوامل نحلل ناتج القسمة من الخطوة السابقة.

ناتج القسمة $= x^2-2x-3$

$=(x+1)(x-3)$

عوامل كثيرة الحدود هي:

$(x-5),(x+1),(x-3)$

الجذور والأصفار

تحديد أصفار كثيرة الحدود وأنواعها

١. عدد جذور (أصفار) كثيرة الحدود يساوي درجتها أي أكبر أس فيها.
٢. لإيجاد الجذور نساوي الدالة بالصفر ثم نحل المعادلة حسب نوعها.

مثال

حل المعادلة التالية واذكر عدد جذورها، ونوعها:

$$x^3 + 25x = 0$$

بما أن المعادلة من الدرجة الثانية فلها ثلاثة جذور

$$x^3 + 25x = 0$$
$$x(x^2 + 25) = 0$$
$$x = 0$$
$$x^2 + 25 = 0$$
$$x^2 = -25$$
$$x = \mp\sqrt{-25} = \mp 5i$$

كتابة كثيرة حدود بأقل درجة بمعرفة أصفارها

١. من السؤال معطاه جذور أو أصفار كثيرة الحدود لكل جذر نوجد العامل حيث

العامل $= x -$ **الجذر**

$x - r$ عامل $\Rightarrow$ r جذر

٢. إذا كان أحد جذور كثيرة الحدود عدد مركب فإن مرافقه أيضا جذر لها.

$a + ib$ **جذر** $\Rightarrow (x - (a + ib))$ **عامل**

$a - ib$ **جذر** $\Rightarrow (x - (a - ib))$ **عامل**

٣. نضرب العوامل لإيجاد كثيرة الحدود.

مثال:

اكتبي عوامل كثيرة الحدود التي جذورها

$-1\ ,\ 5-i$

العوامل هي:

$$(x + 1), (x - (5 - i)), (x - (5 + i))$$

تحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والتخيلية لكثيرة الحدود

1 . عدد الأصفار n (درجة كثيرة الحدود)

2 . لتحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة نحدد عدد مرات تغير إشارة $f(x)$ ثم نطرح منه 2 حتى نصل للعدد 1 أو 0.

3 . لتحديد عدد الأصفار الحقيقية السالبة نوجد $f(-x)$ وذلك بعكس إشارة معاملات الحدود فردية الدرجة ثم نحدد عدد مرات تغير إشارة $f(-x)$ ثم نطرح منه 2 حتى نصل للعدد 1 أو 0.

4 . لتحديد عدد الاصفار التخيلية نعمل جدول نوجد فيه كل الاحتمالات الممكنة لعدد الاصفار الحقيقية ثم نطرح مجموع عدد الاصفار الحقيقية من n (درجة كثيرة الحدود).

مثال :

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة و السالبة و التخيلية للدالة

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$$

١) عدد الأصفار = 6

٢) تغيرت إشارة $f(x)$ 4 مرات

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة = 4 , 2 , 0

٣) تغيرت إشارة $f(-x)$ مرتين

$$f(-x) = x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x^2 + 8x + 5$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة = 2 , 0

٤) نوجد الأصفار التخيلية كما في الجدول

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية
4	2	6−6=0
	0	6−4=2
2	2	6−4=2
	0	6−2=4
0	2	6−2=4
	0	6−0=6

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

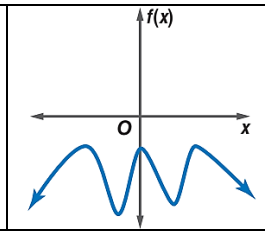
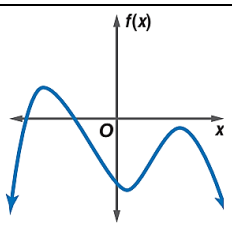
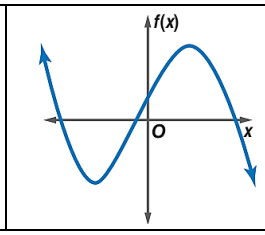
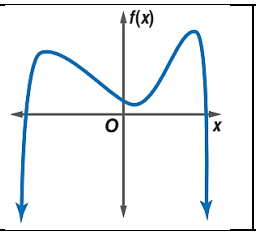
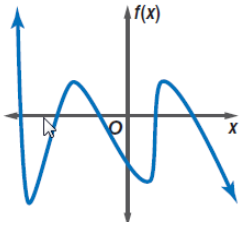
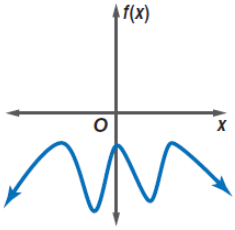
1	أبسط ناتج المقدار التالي $\frac{3i}{2i-4}$							
	A	$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}i$	B	$\frac{3}{4}-\frac{3}{2}i$	C	$\frac{3}{10}-\frac{3i}{5}$	D	$\frac{-3}{10}+\frac{3}{5}i$
2	$i^{100}=\cdots$							
	A	1	B	-1	C	i	D	$-i$
3	أي التالي أحد عوامل كثيرة الحدود أدناه $f(x)=x^3-7x^2+4x+12$							
	A	$x-1$	B	$x-2$	C	$x+3$	D	$x+2$
4	إذا كان $x^4-8=0$ فما عدد الجذور التخيلية؟							
	A	0	B	2	C	3	D	4
5	إذا كان $x-2$ عاملا لكثيرة الحدود $f(x)=x^3-kx^2+kx+4$ فما قيمة k ؟							
	A	-6	B	$\frac{2}{3}$	C	2	D	6
6	$x=\cdots ?$, $x^2+4=0$							
	A	± 2	B	$\pm 2i$	C	-9	D	**ليس لها حل**
7	ما هي حلول المعادلة $m^2+4m+5=0$؟							
	A	$-2-i,-2+i$	B	$2-i,2+i$	C	$0,4$	D	$i+2$
8	i^5 تساوي							
	A	1	B	-1	C	i	D	$-i$
9	$x^2-6x=-10$ للمعادلة السابقة							
	A	جذر حقيقي واحد	B	جذران حقيقيان نسبيان	C	جذران حقيقيان غير نسبيان	D	جذران مركبان مترافقان
10	$\sqrt{-36}$ تساوي							
	A	6	B	-6	C	$6i$	D	$-6i$

اختر الإجابة الصحيحة :

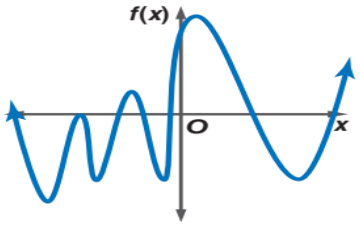
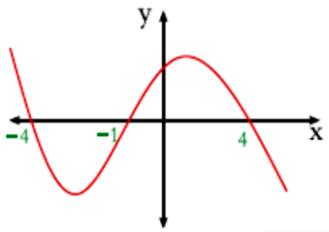
11	اوجد قيمة التي تجعلان المعادلة صحيحة $15-28\,i=3x+4y\,i$							
	A	$x=5\ ,y=7$	B	$x=5\ ,y=-7$	C	$x=15\ ,y=28$	D	$x=15\ ,y=-28$
12	أبسط ناتج للمقدار $\frac{2a^2b^2}{6ba^5}$							
	A	$3a^7b^4$	B	$3a^7b^2$	C	$\frac{b}{3a^3}$	D	$4\frac{b^5}{a^6}$
13	أي العبارات التالية تمثل كثيرة حدود :							
	A	$\frac{x}{y}+3x^2$	B	$x^{-3}+2x+6$	C	$\sqrt{x}+x^2+2$	D	$\frac{1}{2}x^2y^6+3$
14	أي مما يلي ليس عاملا من عوامل x^3+3x^2+2x؟							
	A	$x-1$	B	$x+2$	C	x	D	$x+1$
15	$(2i+3i^2)^2=\cdots$							
	A	$5-12i$	B	$5-10i$	C	$12-5i$	D	$7-12i$
16	$(2-6i)(2+6i)=\cdots$							
	A	24	B	30	C	36	D	40
17	تبسيط العبارة الجبرية $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$ هو							
	A	$\frac{-9x^2}{y^3}$	B	$\frac{-14x^2}{y^3}$	C	$\frac{-14x^2}{y}$	D	$\frac{-14x}{y^3}$
18	$(4-3i)(3+2i)=\cdots$							
	A	$12-6i$	B	$18+i$	C	$18-i$	D	$7-i$
19	بسط العبارة $\frac{(i-1)}{2i}$							
	A	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	B	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	C	$\frac{1}{2}i$	D	$-\frac{1}{2}i$
20	قيمة المميز للمعادلة التالية: $x^2-8x=0$؟							
	A	-64	B	-8	C	8	D	64

اختر الإجابة الصحيحة :								
21	بسط المقدار $\frac{y^5z^3}{2x^6y^3z^3}$							
	A	$\frac{y^2}{2x^6}$	B	$\frac{1}{2x^6y^2}$	C	$\frac{y^5z^3}{2x^6y^3z^3}$	D	$\frac{y^5}{2x^6}$
22	$(x^3+2x^2-5x-6) \div (x-2) = \cdots$							
	A	x^2+4x-3	B	x^2+4x+3	C	x^2-4x-3	D	x^2-4x+3
23	أي مما يلي ليس عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $p(x)=x^3-x^2-2x$ ؟							
	A	x	B	$x-1$	C	$x+1$	D	$x-2$
24	أحد عوامل كثيرة الحدود التالية $f(x)=x^3-7x^2+7x+15$							
	A	$x+5$	B	$x+3$	C	$x+2$	D	$x+1$
25	ناتج ضرب $2i \cdot 5i$ يساوي							
	A	10	B	-10	C	$10\,i$	D	$-10\,i$
26	اوجد قيمة التي تجعلان المعادلة صحيحة $(5+4i)-(x+y)i=-1-3\,i$							
	A	$x=6\ ,y=7$	B	$x=4\ ,y=5$	C	$x=5\ ,y=4$	D	$x=4\ ,y=7$
27	أي من وحيدات الحد التالية درجتها تساوي درجة وحيدة الحد $7n^3m^2$							
	A	$7nm$	B	$2n^5m$	C	$3nm^4$	D	$5n^3m$
28	العبارة $5x^2+2y-3x-2y$ في أبسط صورة							
	A	0	B	$4y$	C	$10x^2+4y$	D	$5x^2-3x$
29	ما ابسط صورة للعبارة: $\frac{4x^2y^2}{5xy^2} \div \frac{2y}{10xy}$							
	A	$\frac{4}{5}x$	B	$\frac{4x^2}{y}$	C	$4x^2$	D	$4x^2y^5$
30	المعامل الرئيس لكثيرة الحدود $2x^3-3x^4-x$ يساوي							
	A	-3	B	2	C	4	D	12
31	أيَ كثيرات الحدود التالية كثيرة حدود أولية؟؟							
	A	$2x+4$	B	x^2-y^2	C	$3x-7$	D	$3x^2-7x$

اختر الإجابة الصحيحة :

32	التمثيل البياني للدالة التي لها 3 أصفار حقيقة هو							
	A		B		C		D	
33	اوجد أصفار الدالة $x^3 - x = 0$							
	A	$x = -1, 0, 1$	B	$x = 0, 1$	C	$x = -1, 0, 2$	D	$x = -2, -1, 0$
34	الدالة الممثلة بالشكل المقابل 							
	A	زوجية الدرجة و لها 5 اصفار	B	فردية الدرجة و لها 5 اصفار	C	زوجية الدرجة و لها 4 اصفار	D	فردية الدرجة و لها 6 اصفار
35	الدالة الممثلة بالشكل المقابل 							
	A	زوجية الدرجة و لها 3 اصفار	B	فردية الدرجة و لها 3 اصفار	C	زوجية الدرجة و ليس لها اصفار حقيقية	D	فردية الدرجة و ليس لها اصفار حقيقية
36	ناتج i^{39} حيث $i = \sqrt{-1}$							
	A	1	B	-1	C	i	D	$-i$
37	كثيرة حدود أصفارها العددان $(1 + 2i)$ و -1 إن أقل درجة ممكنة لها ...							
	A	الأولى	B	الثانية	C	الثالثة	D	الرابعة
38	الدالة كثيرة الحدود التي درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها اعداداً صحيحة والعددان $-5, 3i$ من أصفارها هي:							
	A	$f(x) = x^3 + 5x^2 + 45$	C	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x + 45$				
	B	$f(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 45$	D	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 45$				

اختر الإجابة الصحيحة :

39	تحليل كثيرة الحدود $4a^3b^2 - 8ab$ لأبسط صورة							
	A	$4ab(a^2b - 2)$	B	$2ab(2a^2b - 4)$	C	$2ab(2a^2b + 4)$	D	$ab(4a^2b - 8)$
40	كم صفر حقيقي للدالة كثيرة الحدود الممثلة بالشكل 							
	A	5	B	6	C	7	D	8
41	ماباقي قسمة $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ على $x - 1$							
	A	-1	B	0	C	1	D	4
42	أي مما يلي لا يعد عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ المجاورة؟ 							
	A	$x + 4$	B	$x + 1$	C	$x - 1$	D	$x - 4$
43	كم صفر حقيقي سالب للدالة $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$							
	A	0	B	1	C	2	D	3
44	ما طول مستطيل مساحته $(3x^2 + 2x - 8)$ وعرضه $(x + 2)$							
	A	$3x - 2$	B	$3x + 2$	C	$3x - 4$	D	$3x + 4$
45	حسب النظرية الأساسية في الجبر فإن عدد الجذور المركبة لكثيرة الحدود $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 5x + 1$ يساوي ..							
	A	2	B	3	C	4	D	5

مفاتيح الإجابات									
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	D	C	A	B	D	B	B	A	C
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
D	A	C	B	D	A	A	D	C	B
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
A	C	D	C	A	B	D	B	B	A
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
D	A	B	C	D	C	B	A	C	C
					45	44	43	42	41
					D	C	B	C	A

الفصل الرابع

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

العمليات على الدوال

جمع الدوال وطرحها

$$(f+g)(x) = f(x) + g_{(x)}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g_{(x)}$$

- تجمع وتطرح الحدود المتشابهة.
- المجال يساوي تقاطع مجال الدالتين

ضرب الدوال وقسمتها

الضرب	القسمة
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , g(x) \neq 0$
• فك أقواس وتوزيع. • المجال تقاطع المجالين	• قسمة كثيرات حدود. • المجال يساوي تقاطع المجالين مع استبعاد أصفار المقام

تركيب دالتين

$$fog(x) = f[g(x)]$$

أزواج مرتبة	قاعدة معطاه
مثال $f(x) = \{(6,1),(2,7)\}$ $g_{(x)} = \{(5,6),(3,2)\}$ $fog(x) = f[g(x)]$ $= \{(5,1),(3,7)\}$	**مثال** $f(x) = 3x$ $g(x) = x + 1$ $fog(x) = f[g(x)]$ $= f(x+1)$ $= 3(x+1)$ $= 3x + 3$

العلاقات و الدوال العكسية

العلاقة العكسية

لإيجاد العلاقة العكسية نبدل احداثيات الأزواج المرتبة

$(a,b) \rightarrow (b,a)$

مثال :

أوجد العلاقة العكسية للدالة

$f(x) = \{(1,2),(3,-1)\}$

$f^{-1}(x) = \{(2,1),(-1,3)\}$

الدالة العكسية

لإيجاد الدالة العكسية نتبع الخطوات التالية:

١- نضع $f(x) = y$

٢- نبدل بين كلٍ من x و y

٣- نحل المعادلة بالنسبة لـ y

٤- نضع $y = f^{-1}(x)$ إذا كانت العلاقة دالة

مثال :

أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x + 3$

1) $y = 2x + 3$

2) $x = 2y + 3$

3) $x - 3 = 2y \Rightarrow y = \dfrac{x-3}{2}$

4) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

مجال و مدى دالة الجذر التربيعي $y = a\sqrt{mx+b} + c$

المجال		المدى			
في البسط	في المقام	$c = 0$		$c \neq 0$	
معرفة بشرط:	معرفة بشرط:	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
ما تحت الجذر $\geq$ صفر	ما تحت الجذر $>$ صفر	$y \geq 0$	$y \leq 0$	$y \geq c$	$y \leq c$

مثال :

أوجد مجال و مدى الدالة

$f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

المجال : الدالة معرفة بشرط $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

المدى : $y \geq 1$ لأن $a = 1 > 0$, $c = +1$

دوال و متباينات الجذر التربيعي

تمثيل دالة الجذر التربيعي

١. نحدد مجال الدالة بشرط ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر.

٢. نكون جدول بفرض قيم تبدأ بصفر الجذر ثم قيم أكبر منه.

٣. نعوض في الدالة المطلوب تمثيلها لإيجاد قيم y

ثم نرسم النقاط في المستوى.

مثال : مثلي الدالة $y = \sqrt{x-2} + 5$

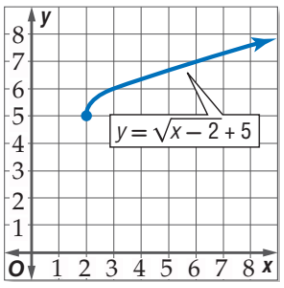
١- الدالة معرفة بشرط $x - 2 \geq 0$

لذلك مجال الدالة $x \geq 2$

٢-

x	2	3	6	11
y	5	6	7	8

٣- نمثل النقاط في المستوى



تمثيل متباينة الجذر التربيعي

نكتب المعادلة المرتبطة بالمتباينة المعطاة

١. نمثل دالة الجذر التربيعي بالخطوات المستخدمة عند تمثيل الدالة الجذرية.

٢. نرسم الدالة متصلة إذا وجدت علامة المساواة في المتباينة ومتقطعة إذا لم يوجد علامة المساواة.

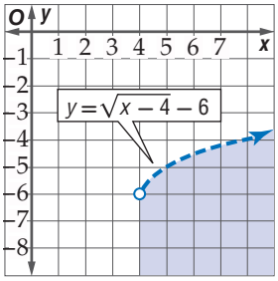
٣. نختبر منطقة الحل بأي نقطة في مجال الدالة ولا تقع على المنحنى أو نظلل حسب إشارة المتباينة إذا كانت أكبر نظلل أعلى المنحنى وإذا كانت أصغر نظلل أسفل المنحنى بشرط أن يكون معامل y موجباً .

مثال : مثلي الدالة $y < \sqrt{x-4} - 6$

١- نمثل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$

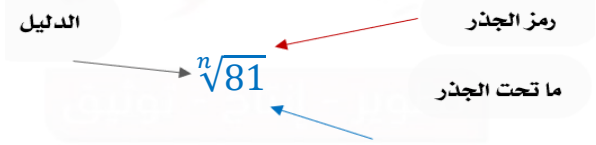
x	4	5	8	9
y	−6	−5	−4	−3.8

٢- نظلل المنطقة أسفل الحد و ضمن المجال



الجذر النوني

$$a^n = b \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}$$



الجذر النوني الحقيقي

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[n]{a}$
n عدد زوجي		n عدد زوجي
$\emptyset$		$\pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
n عدد فردي		n عدد فردي
$\sqrt[3]{-8} = -2$		$\sqrt[3]{8} = 2$

تبسيط الجذور

١. حلل العدد إلى عوامله الأولية.

٢. اكتب العدد على صورة أسية.

٣. اقسم الأس على دليل الجذر.

- إذا كان دليل الجذر عددا زوجيا وأس ما تحت الجذر عدد زوجيا، وكان أس الناتج عدد فرديا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج للتأكد من أن الجواب ليس سالبا أي $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.
- إذا كان n عددا فرديا فهنالك فقط جذر حقيقي واحد و بناءً على ذلك فلا يوجد جذر رئيس، ولا حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة.

مثال : بسط ما يلي :

1) $\sqrt[3]{-27\,a^{15}b^{12}} = \sqrt[3]{-3^3\,a^{15}b^{12}}$
$= -3a^5b^4$

2) $\sqrt[4]{81\,a^8b^{12}} = \sqrt[4]{3^4\,a^8b^{12}}$
$= 3a^2|b^3|$

الأسس النسبية

١- التحويل من الصورة الجذرية الى الأسية والعكس

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

$$b^{\frac{x}{y}} = \left(\sqrt[y]{b}\right)^{x}$$

٢- تبسيط الأسس النسبية باستخدام قوانين الأسس السابق لنا دراستها ولابد لنصل لأبسط صورة أن يكون الاس في المقام عدد صحيحا وأن تكون الأسس موجبة ودليل الجذر أصغر ما يمكن

مثال : بسط العبارة $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \left((3^6)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$$

العمليات على العبارات الجبرية

١- ضرب الجذور $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

٢- قسمة الجذور

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

٣- إنطاق المقام

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$

٤- جمع العبارات الجذرية وطرحها:

نبسط الجذور ثم نجمع أو نطرح معاملات الجذور المتشابهة

مثال : بسط العبارة

$$\sqrt[4]{\frac{x^4}{y^3}} = \frac{\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{y^3}} = \frac{\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{y^3}}\times\frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{y}} = \frac{x\sqrt[4]{y}}{|y|}$$

حل معادلة الجذر التربيعي ومتباينة الجذر التربيعي

حل معادلة الجذر التربيعي

١- نجعل الجذر في طرف وحده.

٢- نرفع طرفي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر للتخلص من الجذر.

٣- نحل معادلة كثيرة الحدود الناتجة ثم نتحقق من صحة الحل

مثال : حل المعادلة $\sqrt{2x+9} - 2 = 5$

$$\sqrt{2x+9} = 5+2$$

$$\sqrt{2x+9} = 7$$

$$2x+9 = 49$$

$$2x = 49-9 \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20$$

التحقق :

$$\sqrt{2(20)+9} - 2 = \sqrt{49} - 2 = 7 - 2 = 5$$

حل متباينة الجذر التربيعي

١- نحدد مجال الدالة الجذرية

٢- نحل المتباينة الجذرية بنفس طريقة حل المعادلة الجذرية.

٣- نحدد منطقة الحل على خط الأعداد اعتمادا على الخطوتين السابقتين.

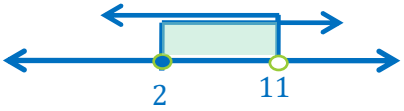
مثال : حل المتباينة $\sqrt{x-2} - 1 < 2$

الدالة معرفة بشرط $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$$\sqrt{x-2} - 1 < 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} < 2+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-2} < 3 \Rightarrow x-2 < 9$$

$$\Rightarrow x < 11$$



حل المتباينة $2 \leq x < 11$ **أو** $[2, 11)$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	إذا كان $f(x)=x^2+5x-2, g(x)=3x-2$ فإن $(f+g)(x)$ تساوي							
	A	x^2+8x-4	B	x^2+4x-4	C	x^2-8x-4	D	x^2+8x
2	إذا كان $f(x)=5x^2-x+2, g(x)=x-1$ فان $(f-g)(x)$تساوي							
	A	$5x^2-2x+1$	B	$5x^2-2x+3$	C	$5x^2+2x+3$	D	$5x^2+2x+1$
3	إذا كان $f(x)=x^2+x$, $g(x)=9x$ فان $(f\cdot g)(x)$ تساوي							
	A	$9x^2+9x$	B	$9x^3+9x$	C	$9x^3+9$	D	$9x^3+9x^2$
4	إذا كان $f=\{(2,5),(6,10)\}, g=\{(10,13),(5,8)\}$ فإن $g\circ f$ تساوي							
	A	$\{(5,8),(10,13)\}$	B	$\{(2,8),(10,13)\}$	C	$\{(2,8),(6,13)\}$	D	$\{(5,8),(6,10)\}$
5	إذا كانت $f(x)=2x-3$, $g(x)=2x$ فما قيمة $[fog](2)$							
	A	-5	B	1	C	2	D	5
6	اذا كان $f(x)=3x+1$, $g(x)=5-x^2$ فإن $[fog](3)=\cdots$							
	A	-17	B	-11	C	11	D	14
7	اذا كان $f(x)=x$, $[fog)]=3x$ اوجد $g(x)$؟							
	A	$\sqrt{3x}$	B	$3x$	C	$3x+4$	D	$\frac{1}{3x}$
8	إذا كان $f(x)=3x-7$ فإن $f^{-1}(x)$ تساوي							
	A	$3x+7$	B	$-3x+7$	C	$\frac{x+7}{3}$	D	$\frac{x-7}{3}$
9	إذا كان $f(x)=\frac{x-3}{5}$ فإن $f^{-1}(x)=\cdots$.							
	A	$3x+5$	B	$5x+3$	C	$\frac{x-3}{5}$	D	$\frac{5}{x-3}$
10	إذا كانت $g(x)=x-3$ و $f(x)=x^2+1$ فما قيمة x التي تجعل $[g\circ f](x)=[f\circ g](x)$							
	A	0	B	1	C	2	D	3
11	الدالة العكسية لـ $f(x)=\sqrt{x+3}$ هي...							
	A	$f^{-1}(x)=x^2+3$	B	$f^{-1}(x)=x^2-3$	C	$f^{-1}(x)=x^3-3$	D	$f^{-1}(x)=2x-3$
12	مجال الدالة $f(x)=\sqrt{x-5}$ هو....							
	A	$x\geq 0$	B	$x\geq 5$	C	$x\leq 5$	D	R

اختر الإجابة الصحيحة:

13 مدى الدالة $f(x) = -2\sqrt{x-5}$ هو....

A	B	C	D
$f(x) \geq 0$	$f(x) \geq 5$	$f(x) \leq 0$	$f(x) \leq -2$

14 مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x-5} - 3$ هو....

A	B	C	D
$x \geq 0$	$x \geq -3$	$x \leq -3$	$x \geq 5$

15 مدى الدالة $f(x) = \sqrt{x-5} - 3$ هو....

A	B	C	D
$f(x) \geq 0$	$f(x) \geq -3$	$f(x) \leq -3$	$f(x) \geq 5$

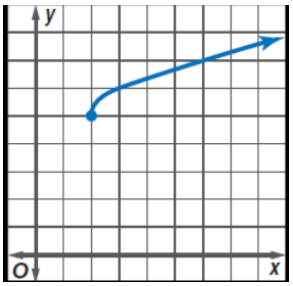
16 إذا كان $f(x) = \sqrt{x-4}$ فإن مجال $f^{-1}(x)$ يساوي

A	B	C	D
$R - \{\pm 2\}$	$R - \{\pm 4\}$	$[0, \infty)$	R

17 ما مدى الدالة : $f(x) = 2\sqrt{x^2} + 3$ ؟

A	B	C	D
$[-3, \infty)$	$[0, \infty)$	$[2, \infty)$	$[3, \infty)$

18 الشكل المقابل يمثل أي من الدوال الاتية



A	B	C	D
$y = \sqrt{x+2} + 5$	$y = \sqrt{x+2} - 5$	$y = \sqrt{x-2} - 5$	$y = \sqrt{x-2} + 5$

19 تبسيط العبارة

$$\frac{2}{\sqrt{6}-2}$$

هو ...

A	B	C	D
$\sqrt{6} - 2$	$\sqrt{6} + 2$	$\sqrt{6}$	4

20 الصورة الجذرية للعبارة $a^{\frac{2}{3}}$ هي ...

A	B	C	D
$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{a^3}$	$\sqrt[5]{a}$

21 الصورة الاسية للعبارة $\sqrt[7]{x^5}$

A	B	C	D
$x^{\frac{7}{5}}$	$x^{\frac{5}{7}}$	$x^{\frac{1}{5}}$	$x^{\frac{1}{7}}$

22 ماابسط صورة للمقدار $\sqrt{36a^4b^{16}}$

A	B	C	D
$18a^2b^4$	$18a^2b^8$	$6a^2b^4$	$6a^2b^8$

23 تبسيط المقدار $\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$ .....

A	B	C	D
$2\|x-3\|$	$4\|x-3\|^3$	$2\|x-3\|^3$	$2(x-3)^3$

اختر الإجابة الصحيحة :

24 ناتج العبارة $5 \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} \ldots$

A	5	B	25	C	125	D	625

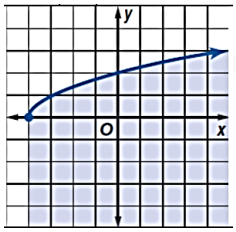
25 حل المتباينة $\sqrt{2x-1} > 3$ هو ....

A	$x > 5$	B	$x > 2$	C	$x < 5$	D	$x < 2$

26 حل المعادلة $\sqrt{x+1} = 2$

A	$x = -3$	B	$x = 1$	C	$x = 3$	D	$x = 5$

27 أي من المتباينات التالية تمثل الشكل المقابل



A	$y \geq \sqrt{x+4}$	B	$y \leq \sqrt{x+4}$	C	$y \geq \sqrt{x-4}$	D	$y \leq \sqrt{x-4}$

28 $\sqrt{\sqrt{81}} = \cdots$

A	$\sqrt{81}$	B	$\sqrt[3]{81}$	C	9	D	3

29 $\sqrt[4]{\sqrt{256}} = \cdots$

A	15	B	4	C	3	D	2

30 أبسط قيمة للمقدار $\sqrt[4]{16x^4y^8}$

A	$4\|x\|y^2$	B	$2\|x\|y^2$	C	$4x^2y^4$	D	$2xy^2$

31 حل المعادلة $\sqrt{x-1} + 3 = 6$

A	$x = 3$	B	$x = 4$	C	$x = 10$	D	$x = 28$

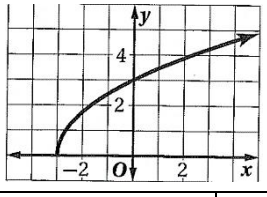
32 ما قيمة المقدار : $\sqrt[7]{x^{14}y^7}$ ؟

A	x^7y	B	$(xy)^7$	C	$(xy)^3$	D	x^2y

33 ناتج : $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$

A	$7\sqrt{58}$	B	$23\sqrt{2}$	C	$7\sqrt{2}$	D	$3\sqrt{2}$

34 مجال و مدى الدالة الممثلة في الشكل المقابل على الترتيب :



A	$x > -3\ , y > 0$	B	$x > -3\ , y < 0$	C	$x \geq -3\ , y \geq 0$	D	$x \geq -3\ , y > 0$

مفاتيح الإجابات									
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	B	C	B	B	D	C	D	B	A
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
A	B	D	D	C	B	D	C	B	B
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
B	D	D	B	C	A	C	C	D	B
						34	33	32	31
						C	B	D	C

الفصل الخامس

العلاقات والدوال النسبية

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

العبارة النسبية

• العبارة النسبية تكون غير معرفة عند القيم التي تجعل المقام مساوياً للصفر .

مثال : العبارة النسبية $\frac{x+1}{x-3}$ غير معرفة

عندما: $x-3=0 \Rightarrow x=3$

• تبسيط العبارة النسبية

لتبسيط العبارة النسبية نحلل كلاً من البسط والمقام ثم نختصر العوامل المشتركة بينهما

مثال :

$$\frac{6x^2y}{4x} \bullet \frac{8y^2x}{3xy}$$

$$= \frac{2 \bullet 3 \bullet x \bullet x \bullet y}{2 \bullet 2 \bullet x} \bullet \frac{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet y \bullet y \bullet x}{3 \bullet x \bullet y}$$

$$= 4xy^2$$

ايجاد $L.C.M$ " المضاعف المشترك الأصغر "

• لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر $L.C.M$ لعددين أو كثيرتي حدود نحلل كل منهما إلى عوامل ثم نضرب العوامل التي لها الأس الأكبر .

مثال :

$$50x^8y^3, 12x^2y$$

$$50x^8y^3 = 2 \bullet 5^2 \bullet x^8 \bullet y^3$$

$$12x^2y = 2^2 \bullet 3 \bullet x^2 \bullet y$$

$$L.C.M = 5^2 \bullet 2^2 \bullet 3 \bullet x^8 \bullet y^3$$

$$= 300x^8y^3$$

العمليات على العبارات النسبية

ضرب العبارات النسبية

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{a \bullet c}{b \bullet d}$$

مثال :

$$\frac{3x}{2y} \bullet \frac{2x}{y^2} = \frac{6x^2}{2y^3} = \frac{3x^2}{y^3}$$

قسمة العبارات النسبية

• نضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه .

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال :

$$\frac{4x^2}{5y} \div \frac{y^3}{2x^2} = \frac{4x^2}{5y} \times \frac{2x^2}{y^3} = \frac{8x^4}{5y^4}$$

جمع وطرح العبارات النسبية

• نوجد $L.C.M$ للمقامات .

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

مثال :

$$\frac{2}{x} \pm \frac{3}{y} = \frac{2y \pm 3x}{xy}$$

الكسر المركب

• نكتب الكسر على صورة قسمة عبارتين .

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

مثال :

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{y}} = \frac{1}{x} \div \frac{3}{y} = \frac{1}{x} \times \frac{y}{3} = \frac{y}{3x}$$

دالة المقلوب

• الدالة الأم $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $x\neq 0$

• المجال مجموعة الأعداد الحقيقية عدا 0

• المدى مجموعة الأعداد الحقيقية عدا 0

• الصورة العامة $f(x)=\frac{a}{x-h}+k$

• تكون غير معرفة عندما $x=h$

• خط التقارب الرأسي $x=h$

• خط التقارب الأفقي $y=k$

• مثال :

$$f(x)=\frac{4}{x-3}-2$$

• المجال $\{x\,|\,x\neq 3\}$

• المدى $\{y\,|\,y\neq -2\}$

• خط التقارب الرأسي $x=3$

• خط التقارب الأفقي $y=-2$

الدالة النسبية

• الصورة العامة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ ، $b(x)\neq 0$

• حيث $a(x), b(x)$ لايوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد .

• المجال $b(x)\neq 0$

• خط التقارب الرأسي $b(x)=0$

• نقطة الانفصال نقطة عندها فجوة في التمثيل البياني لبعض الدوال النسبية وتكون الدالة غير معرفة عند تلك النقطة .

مثال :

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}$$

المجال : $R-\{3\}$

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}=(x+2)$$

• نقطة الإنفصال عند النقطة $(3,5)$

• خط التقارب الرأسي $x=3$

• يوجد للدالة خط تقارب أفقي واحد على الأكثر

• اذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي

مثال :

$$f(x)=\frac{x^2-2}{x-5}$$

• اذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي المستقيم $y=0$

مثال :

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2+5}$$

• اذا كانت درجة $a(x)$ تساوي $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي المستقيم

$$y=\frac{\text{المعامل الرئيسي } a(x)}{\text{المعامل الرئيسي } b(x)}$$

مثال :

$$f(x)=\frac{3x^2-2}{4x^2+1}$$

خط التقارب الأفقي $y=\frac{3}{4}$

دوال التغير

التغير الطردي

تتغير y تغيراً طردياً مع x اذا وجد عدد $k \neq 0$

حيث أن $y = kx$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

مثال :

اذا كانت y تتغير تغيراً طردياً مع x وكانت

$y = 15$ عندما $x = -5$ فما قيمة y عندما

$x = 7$

$$\frac{15}{-5} = \frac{y_2}{7} \Rightarrow -5y_2 = 105$$

$$y_2 = -21$$

التغير العكسي

تتغير y تغيراً عكسياً مع x اذا وجد عدد

$k \neq 0$

حيث أن $xy = k$

$$x_1y_1 = x_2y_2$$

مثال :

اذا كانت x تتغير تغيراً عكسياً مع y وكانت

$x = 24$ عندما $y = 4$ فما قيمة x عندما

$y = 12$

$$24 \times 4 = x\,(12)$$

$$\Rightarrow 96 = 12x$$

$$x = 8$$

التغير المشترك

تتغير y تغيراً مشتركاً مع xz اذا وجد عدد

$k \neq 0$

حيث أن $y = kxz$

$$\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$$

مثال :

اذا كانت r تتغير تغيراً مشتركاً مع t, v

وكانت $r = 70$ عندما $v = 10, t = 4$ فما

قيمة r عندما $v = 2, t = 8$

$$\frac{70}{4 \times 10} = \frac{r}{2 \times 8}$$

$$\Rightarrow \frac{70}{40} = \frac{r}{16}$$

$$40r = 1120, r = 28$$

التغير المركب

تتغير y تغيراً طردياً مع x وعكسياً مع z

$$\frac{y_1z_1}{x_1} = \frac{y_2z_2}{x_2}$$

مثال :

اذا كانت p تتغير طردياً مع r وعكسياً t

وكانت $p = 4$ عندما $t = 20$ و $r = 2$ فما

قيمة t عندما $p = -5, r = 10$ ؟

$$\frac{4 \times 20}{2} = \frac{t \times (-5)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{80}{2} = \frac{-5t}{10}$$

$$-10t = 800, t = -80$$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	المقدار $\frac{2a^2b^2}{6ab^5}$ يساوي :							
	A	$3a^7b^4$	B	$\frac{a}{3b^3}$	C	$\frac{5b^5}{a^6}$	D	$3a^7b^2$
2	$L.C.M$ للمقدارين $20x^3y^5$ و $4x^2y^6$							
	A	$20x^3y^6$	B	$20x^2y^5$	C	$20x^2y^6$	D	$20x^5y^{11}$
3	ماقيمة x التي تجعل العبارة $\frac{x-3}{x^2+4x-21} \div \frac{x^2-25}{x-5}$ غير معرفة :							
	A	$\{3,-5,5,-7\}$	B	$\{-5,7\}$	C	$\{5,-7\}$	D	$\{3,-5,5,7\}$
4	للدالة $f(x)=\frac{x-3}{2x-5}$ خط تقارب رأسي :							
	A	$x=\frac{5}{2}$	B	$x\neq\frac{2}{5}$	C	$x=3$	D	$x=\frac{2}{5}$
5	اذا كانت y تتغير طردياً مع x حيث $y=24$ عندما $x=8$ فما قيمة x عندما $y=48$:							
	A	3	B	4	C	16	D	18
6	اذا كانت x تتغير تغيراً عكسياً مع y وكانت $x=-12$ عندما $y=2$ فما قيمة y عندما $x=6$:							
	A	4	B	1	C	-1	D	-4
7	اذا كانت $\frac{x-1}{x+1}=\frac{6}{5}$ فما قيمة x :							
	A	11	B	1	C	-11	D	-1
8	تبسيط العبارة التالية $\frac{(a^2-b^2)}{3b}\times\frac{9b^2}{a-b}$							
	A	a^2b^3	B	$3b(a+b)$	C	(a^2-b^2)	D	$27a^4$
9	العبارة $y^{-1}(y^3+y)$ في أبسط صورة تساوي :							
	A	$3y-1$	B	$y-4$	C	y^2+1	D	y^2-y
10	ما أبسط صورة للمقدار $\frac{x(x^2+3x-18)}{(x+3)(x-4)} \div \frac{x(x+6)}{x+3}$:							
	A	$\frac{x-3}{x-4}$	B	$\frac{x+3}{x-4}$	C	$\frac{x-3}{x+4}$	D	$\frac{x+3}{x+4}$

اختر الإجابة الصحيحة :

11 أي من الدوال الاتيه لها خط تقارب رأسي عند $x = 2$ وخط تقارب أفقي عند $y = 6$:

A	$f(x) = \frac{(2x+4)(3x+6)}{x^2-4}$	B	$f(x) = \frac{6x+1}{(x+2)(x-2)}$	C	$f(x) = \frac{6x^3+x-2}{(x+2)(x-4)}$	D	$f(x) = \frac{(2x+4)(3x+6)}{x^2+4}$

12 ما العلاقة بين x و y :

x	y
10	6
12	5
30	2
60	1

A	طردية	B	عكسية	C	ثابتة	D	تربيعية

13 ماهي نقطة انفصال الدالة $\frac{x^2+x-6}{x+3}$:

A	$(-3,5)$	B	$(-3,-5)$	C	$(3,-5)$	D	$(3,5)$

14 ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$:

A	0	B	$2x^2$	C	$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$	D	$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

15 اذا كان $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{1}{3}$ فما قيمة y :

A	-1	B	3	C	$+1$	D	$+2$

16 تتغير m طردياً مع n وعكسياً مع z التعبير الصحيح لهذه العلاقة حيث k عدد ، $k \neq 0$:

A	$mn = kz$	B	$z = \frac{kn}{m}$	C	$n = \frac{k}{mz}$	D	$kx = \frac{z}{x}$

17 المعادلة التالية في أبسط صورة $\frac{2a^3}{25b} \div \frac{26}{10a^3}$:

A	$\frac{2a^6}{62b}$	B	$\frac{2a^6}{65b}$	C	$\frac{26}{125b}$	D	$\frac{5a^6}{65}$

18 اذا كانت x تتغير عكسياً مع y وكانت قيمة $x = 24$ عندما $y = 4$ ، فما قيمة x عندما $y = 12$:

A	8	B	-8	C	72	D	2

19 أبسط صورة للعبارة $\frac{4x^2y^2}{5xy^2} \div \frac{2y}{10xy}$:

A	$\frac{4}{5}x$	B	$\frac{4x^2}{y}$	C	$4x^2$	D	$4x^2y^5$

20 المقدار $\frac{5a^3}{2b} \div \frac{25b^2}{4a^3}$ يساوي :

A	$\frac{2a^9}{5b^3}$	B	$\frac{2a^6}{5b^3}$	C	$\frac{9a^2}{5b}$	D	$\frac{125b}{8}$

اختر الإجابة الصحيحة :

21 العبارة $\frac{x}{(x-1)(x+2)}$ تكون غير معرفة عندما x تساوي :

A	$2,1$	B	$2, -1$	C	$5,2, -1$	D	$-2,1$

22 ماقيمة x التي تجعل العبارة $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$ غير معرفة :

A	$x=4$	B	$x=-2$	C	$x=2$	D	$x=-4$

23 مجال الدالة $f(x)=\frac{3x+4}{5-x}$ هو :

A	R	B	$R-\{-2\}$	C	$R-\{5\}$	D	$R-\{-5\}$

24 للدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ نقطة انفصال عند :

A	$x=-2$	B	$x=2$	C	$x=4$	D	$x=0$

25 للدالة $f(x)=\frac{x+3}{x^2-2}$ خط تقارب أفقي هو :

A	$y=2$	B	$y=0$	C	$y=1$	D	$y=\frac{-3}{2}$

26 اذا كانت r تتغير تغيراً مشتركاً مع t, v وكانت $r=70$ عندما $t=4، v=10$ فإن قيمة r عندما $t=8, v=2$ تساوي :

A	10	B	28	C	40	D	50

27 ما قيمة x في التناسب $\frac{2x-1}{3}=\frac{3x+4}{5}$:

A	12	B	17	C	20	D	25

28 للدالة $f(x)=\frac{2x^2}{3x^2-2}$ خط تقارب أفقي :

A	$x=\frac{2}{3}$	B	$y=0$	C	$y=-1$	D	$y=\frac{2}{3}$

29 في الجدول اذا كانت العلاقة بين x و y طردية فما قيمة a :

a	5	x
18	15	y

A	5	B	6	C	8	D	15

30 العبارة $\frac{7}{ab}-\frac{5}{b}$ في أبسط صورة تساوي :

A	$\frac{2}{ab}$	B	$\frac{7-5a}{a}$	C	$\frac{7-5a}{ab}$	D	$\frac{2}{ab}$

اختر الإجابة الصحيحة :

31 تبسيط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}}$ هو :

A	$\dfrac{1}{y}$	B	$\dfrac{y-1}{y+1}$	C	$\dfrac{y+1}{y-1}$	D	1

32 تبسيط العبارة $\dfrac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x-3}{x}}$ هو :

A	$\dfrac{2x+1}{x-3}$	B	$\dfrac{2x+1}{x}$	C	$\dfrac{x-3}{x}$	D	$\dfrac{x-3}{2x+1}$

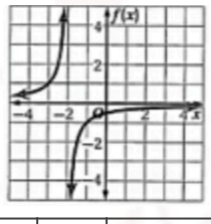
33 قيمة x التي تحقق المعادلة $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{x}$ هي :

A	$\dfrac{1}{4}$	B	$\dfrac{1}{2}$	C	1	D	2

34 حل المتباينة $4-\dfrac{1}{b}<\dfrac{3}{b}$ هي :

A	$b>0$	B	$b>1$ أو $b<0$	C	$0<b<1$	D	$b<1$

35 حدد الدالة الممثلة بيانياً في الشكل المقابل :



A	$y=\dfrac{1}{x}-3$	B	$y=\dfrac{1}{x-3}$	C	$y=\dfrac{1}{x}+2$	D	$y=\dfrac{-1}{x+2}$

مفاتيح الإجابات

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
A	C	B	C	D	C	A	A	A	B
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
B	C	A	B	B	A	A	B	B	A
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
C	B	D	B	B	B	B	C	B	D
					35	34	33	32	31
					D	C	D	A	C

الفصل السادس

المتتابعات والمتسلسلات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

المتتابعات

المتتابعة الحسابية

• في المتتابعة الحسابية يكون الفرق ثابت ويسمى الفرق الثابت أساس المتتابعة ويرمز للأساس d

• لإيجاد الحد الذي يليه في المتتابعة الحسابية نضيف الأساس d.

مثال :

$5 \quad -6 \quad -17 \quad -28 \quad -39$

$-11 \quad -11 \quad -11 \quad -11$

المتتابعة الهندسية

• في المتتابعة الهندسية تكون النسبة ثابتة وتسمى النسبة الثابته أساس المتتابعة ويرمز للأساس r

• لإيجاد الحد الذي يليه في المتتابعة الهندسية نضرب في الأساس r.

مثال :

$-2 \quad 6 \quad -18 \quad 54 \quad -162$

$\frac{6}{-2}=\frac{-18}{6}=\frac{54}{-18} = (-3)$

النسب متساوية

الحد التالي $54(-3) = -162$

المتسلسلات الحسابية

الحد النوني

• لإيجاد الحد النوني نستخدم القانون

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

a_1 الحد الأول ، n عدد الحدود ، d أساس المتتابعة ، a_n الحد الأخير

مثال :

أوجد الحد الثلاثون في المتتابعة الحسابية

$9,16,23,30,.....$

$a_1 = 9 \qquad d = 16 - 9 = 7$

$n = 30$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_{30} = 9 + (30-1) \times 7$

$a_{30} = 212$

المجموع

• لإيجاد المجموع نستخدم القانون

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة

$2 + 4 + 6 + ... + 100$

$a_1 = 2 \qquad a_n = 100$

$n = 50$

$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$s_n = \frac{50}{2}(2 + 100)$

$s_n = 2550$

المتسلسلات الهندسية المنتهية

الحد النوني

• لإيجاد الحد النوني نستخدم القانون

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال :

أوجد الحد العاشر في المتتابعة الهندسية $\frac{1}{2},1,2,4,.....$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad r = \frac{2}{1} = 2$$

$$n = 10$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2} \times (2)^{10-1}$$

$$a_{10} = 256$$

المجموع

• لإيجاد المجموع نستخدم القانون

$$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

مثال :

في المتتابعة الهندسية $2,6,18,.....$ اوجد S_5 .

$$a_1 = 2 \qquad r = \frac{6}{2} = 3$$

$$n = 5$$

$$s_n = \frac{2(1-3^5)}{1-3}$$

$$S_5 = 242$$

المتسلسلات الهندسية الغير المنتهية

تقاربية

• تكون تقاربية

اذا كان الأساس $|r| < 1$ ومجموعها

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

مثال : أوجد المجموع في $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

$$r = \frac{3}{4} < 1 \text{ تقاربية}$$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = \frac{12}{1-\frac{3}{4}} \Rightarrow S = 48$$

ملاحظة

• يمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل كسر عشري دوري إلى كسر اعتيادي

مثال :

$$0.\overline{2} = 0.2 + 0.02 + 0.002 + \ldots$$

$$a_1 = 0.2, r = 0.1 \text{ ، }$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.2}{1-0.1} = \frac{2}{9}$$

تباعدية

• تكون تباعدية

اذا كان الأساس $|r| \geq 1$

وليس لها مجموع

مثال : أوجد المجموع في $\sum_{k=1}^{\infty} 12\,(4)^{k-1}$

$$r = 4 > 1$$

تباعدية

ليس لها مجموع

إيجاد المفكوك

مثلث باسكال

- هو إيجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$.
- عدد حدود المفكوك $(a+b)^n$ هو $n+1$
- الحد الأول هو $a^n b^0$ أي a^n .
- الحد التالي ينقص أس a بمقدار 1 ويزيد أس b مقدار 1.
- لإيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$ نستخدم مثلث باسكال .

$(a+b)^0$					1				0
$(a+b)^1$				1		1			1
$(a+b)^2$			1		2		1		2
$(a+b)^3$		1		3		3		1	3
$(a+b)^4$	1		4		6		4		1	4

مثال :

$$(a+b)^4 =$$
$$a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4$$

نظرية ذات الحدين

- نستخدم القانون

$$(a+b)^n =$$
$${}_nC_0a^nb^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + {}_nC_na^0b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k} b^k$$

مثال :

أوجد مفكوك $(x+y)^6$

$$= {}_6C_0x^6y^0 + {}_6C_1x^5y^1 + {}_6C_2x^4y^2 + {}_6C_3x^3y^3$$
$$+ {}_6C_4x^2y^4 + {}_6C_5x^1y^5 + {}_6C_6x^0y^6$$
$$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3$$
$$+ 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

ايجاد قيمة حد معين في المفكوك

- ايجاد قيمة حد معين في المفكوك

$(a+b)^n$

نستخدم القانون

$$t_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

$k =$ (رتبة الحد المطلوب -1) ، n أس

مثال :

أوجد الحد الخامس في مفكوك

$(a+b)^7$

$k = 5-1 = 4, n = 7$

$$t_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

$$= \frac{7!}{4!(7-4)!} a^{7-4} b^4$$
$$= 35a^3b^4$$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1 أوجد الحد الرابع في مفكوك $(2x-1)^4$:

A		B		C		D	
$8x$		$-8x$		$36x$		$-32x$	

2 اذا كان عدد زوار مهرجان الرياض الربيعي لعام ١٤٣٣ في اليوم الأول 40 الف زائر وأخذ العدد يتزايد بمقدار ثابت (d) كل يوم عن السابق له وكانت مدة المهرجان 10 يوماً وفي نهاية المدة أصبح مجموع الزائرين 490000 الف زائر فكم عدد زوار المهرجان اليوم السابع؟

A		B		C		D	
56000		54000		52000		50000	

3 $\sum_{k=1}^{10}(2k+1)$ تساوي :

A		B		C		D	
180		120		90		10	

4 أكمل المتتابعة $14,7,0-7,\ldots..$

A		B		C		D	
14		-14		12		-10	

5 أوجد قيمة a في المتتابعة الحسابية $8,3,a,-7$:

A		B		C		D	
5		2		-2		-4	

6 المتتابعة التالية $3,6,12,\ldots..$ تمثل :

A		B		C		D	
متتابعة هندسية أساسها 3		متتابعة حسابية أساسها 2		متتابعة هندسية أساسها 4		متتابعة هندسية أساسها 2	

7 أساس المتتابعة الهندسية $12,36,108,324,\ldots.$:

A		B		C		D	
12		2		3		6	

8 الحد التالي في النمط $2,5,11,23,\ldots$:

A		B		C		D	
37		43		47		53	

9 ماقيمة $\sum_{k=3}^{17}(2k-1)$:

A		B		C		D	
266		323		285		361	

10 أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التاليه $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{k-2}$

A		B		C		D	
$\frac{9}{2}$		$\frac{34}{8}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{16}$	

اختر الإجابة الصحيحة :

11 متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى 26 ، مجموع حدودها الثلاثة التالية 702 ماأساسها ؟

A	B	C	D
27	3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}$

12 اذا كانت قيمة السهم عند الإكتتاب لإحدى الشركات 90 ريال وبعد ثلاثة أشهر من تاريخ الإكتتاب اصبحت قيمة السهم 96 ريال فإذا افترضنا ان قيمة السهم على شكل متتابعة حسابية شهرية فإن القيمة المتوقعة للسهم بالريال بعد سبعة أشهر من تاريخ الإكتتاب :

A	B	C	D
100	102	104	106

13 في المتتابعة الهندسية .....4,8,16,32 الأساس يساوي :

A	B	C	D
$\frac{1}{8}$	4	2	8

14 متتابعة حسابية حدها العاشر يساوي 15 وحدها الأول يساوي -3 ، ما أساسها ؟

A	B	C	D
2	3	4	5

15 الوسطان الهندسيان في المتتابعة الهندسية 1,...,...,27 هما :

A	B	C	D
$-3,-9$	$3,-9$	3,9	9,18

16 مانوع المتتالية .....$-3,-6,-9,-12$:

A	B	C	D
حسابية وأساسها -3	حسابية وأساسها 3	هندسية وأساسها -2	هندسية وأساسها 2

17 ما رتبة الحد الذي قيمته 7 في المتتابعة .....43,39,35 :

A	B	C	D
8	9	10	7

18 ماهو الحد النوني للمتسلسلة ...3,7,11,15 :

A	B	C	D
$5n-2$	$4n-1$	$2n+1$	$3n+1$

19 متتابعة حسابية أساسها 4 وعدد حدودها 15 ، والحد الأول -3 ، أوجد مجموعها :

A	B	C	D
240	750	375	405

20 متتابعة حسابية فيها $a_5 = 22$ ، $a_2 = 13$ ، فما قيمة a_{13} :

A	B	C	D
44	46	48	50

اختر الإجابة الصحيحة :

21 متسلسلة هندسية $4a^3, 4a^2, 4a, 4 + \ldots$ مالذي يجعل قيمة a متقاربة ؟

A	$\frac{5}{2}$	B	$\frac{6}{3}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{5}{4}$

22 الاعداد ادناه متتابعة مشهورة في الرياضيات (متتابعة فيبو ناشي) مالحد التالي في المتتابعة : $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$

A	36	B	34	C	31	D	29

23 مامجموع أول 50 عدداً فرديا في الأعداد الطبيعية :

A	625	B	2500	C	2499	D	2401

24 العبارة $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ تكافئ..

A	$\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$	B	$\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$	C	$\sum_{k=1}^{3} k^{k}$	D	$\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

25 عدد حدود المتسلسلة $\sum_{k=5}^{12} (3k + 7)$ يساوي

A	7	B	8	C	9	D	10

26 مضلع رباعي زواياه متتابعة حسابية ، اذا كانت أصغر زاوية له هي 45° فما هي أكبر زاوية له :

A	180	B	135	C	105	D	90

27 عند فك ذات الحدين $(a + b)^9$ ، فإن عدد الحدود الناتجة سيكون :

A	9	B	10	C	11	D	12

28 الحد الثالث في مفكوك $(x + y)^3$:

A	x^2y	B	$3x^2y$	C	$3xy^2$	D	xy^2

29 أي المتسلسلات التالية مجموعها يساوي واحد :

A	$\sum_{k=1}^{2} (\frac{1}{2})^k$	B	$\sum_{k=1}^{\infty} 1$	C	$\sum_{k=1}^{\infty} (2)^{-k}$	D	$\sum_{k=1}^{10} (3k - 1)$

30 قيمة المقدار $0.\overline{15}$ يساوي :

A	$\frac{3}{20}$	B	$\frac{3}{18}$	C	$\frac{5}{99}$	D	$\frac{5}{33}$

اختر الإجابة الصحيحة :							
31	مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول 27 وأساسها $\frac{2}{3}$ هو :						
	A	81	B	65	C	34	D	18
32	اذا كان الحد الأول في المتسلسلة الهندسية 5 وأساسها 2 ومجموعها 1275 فما عدد حدودها :						
	A	5	B	6	C	7	D	8
33	مجموع حدود المتسلسة $\sum_{k=1}^{12}(3k+9)$:						
	A	45	B	78	C	342	D	410
34	تشكل قياسات زوايا مثلث متتابعة حسابية اذا كان قياس الزاوية الصغرى 36° فما قياس الزاويا الكبرى:						
	A	75°	B	84°	C	90°	D	97°
35	مجموع المتسلسلة $\sum_{k=1}^{11}3(4)^{k-1}$ يساوي :						
	A	$4^{11}-1$	B	$4^{10}-1$	C	$4^{11}+1$	D	$4^{10}-1$

مجموعة رفعة الرياضيات

مفاتيح الإجابات

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
A	C	C	C	D	C	B	B	C	B
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
B	C	B	C	A	C	A	C	C	B
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
D	C	C	B	B	B	A	B	B	C
					35	34	33	32	31
					A	B	C	D	A

الفصل السابع

الاحتمالات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مبدأ العد

• التجربة العشوائية : إجراء نعرف مسبقاً جميع نواتجه الممكنة

• فضاء العينة لتجربة عشوائية : مجموعة جميع النواتج .

• مبدأ العد : يساوي حاصل ضرب عدد النواتج الممكنة .

مثال : أراد أحمد شراء ثوب فكانت الخيارات لديه أن يشتري الثوب ثلاثة ألوان ، و 4 أشكال و طولين ، فكم خياراً لأحمد ؟

$3 \times 4 \times 2 = 24$ خياراً

• الحادثة : مجموعة جزئية من فضاء العينة.

• احتمال الحادثة :

$$p(A) = \frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

• لأي حادثة عشوائية A

$$0 \le p(A) \le 1$$

مثال : ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة ما احتمال ظهور عدد زوجي ؟

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

الاحتمال باستعمال التباديل (الترتيب مهم)

تباديل خطية

• تباديل n من العناصر مأخوذه كلها

$n!$.

مثال : أوجد عدد طرق تكوين عدد مكون من 3 أرقام من الأرقام 5,6,7,8 اذا لم يسمح بتكرار الرقم المستخدم ؟

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

• تباديل n من العناصر مأخوذ منها r من العناصر

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

طريقة أخرى لحساب التباديل

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

مثال : شركة مكونة من 10 أعضاء يُراد اختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سر فما هو عدد طرق الأختيار ؟

$_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

• تباديل مع التكرار

$$\frac{n!}{r_1! \bullet r_2! \dots \bullet r_k!}$$

.

مثال : أذا اختير تبديل من الأحرف أ ، ص ، ل ، أ ، ن ، ح فما احتمال الحصول على كلمة الحصان ؟

عدد النواتج الممكنة

$$= \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

عدد نواتج الحادثة = 1

$$\text{الإحتمال} = \frac{1}{360}$$

تباديل دائرية

• لها مرجعية ثابته

$n!$

.

مثال : ماعدد الترتيبات التي يجلس بها 4 أشخاص في حلقة دائرية حيث أكبرهم يجلس بجانب الباب ؟

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

•ليس لها مرجعية ثابته

$(n-1)!$

مثال: أربعة اشخاص جالسين حول طاولة دائرية كم طرق التبديل بينهم ؟

$(4-1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

الاحتمال باستعمال التوافيق (الترتيب غير مهم)

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \bullet$$

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$$

مثال : ما عدد طرق اختيار 3 طلاب من 7 طلاب لتمثيل المدرسة في مسابقة؟

$$_7C_3 = \frac{_7P_3}{3!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$$

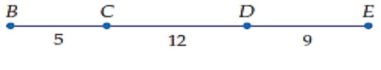
الإحتمال الهندسي

احتمال الطول

• احتمال الطول :

$$P = \frac{\text{طول القطعة المطلوبة}}{\text{الطول الكلي}}$$

مثال : اذا اختيرت نقطة A عشوائياً على $\overline{BE}$ في الشكل أوجد $P(A \in \overline{CD})$؟



$$P(A \in \overline{CD}) = \frac{12}{5+12+9}$$

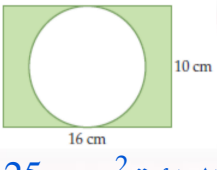
$$= \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

احتمال المساحة

• احتمال المساحة :

$$P = \frac{\text{المساحة المطلوبة}}{\text{المساحة الكلية}}$$

مثال : اذا اختيرت نقطة عشوائياً داخل المستطيل في الشكل أدناه فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



مساحة الدائرة $r^2\pi = 25\pi cm^2$

مساحة المستطيل

$l.w = 10\times16 = 160cm^2$

مساحة المنطقة المظللة =

مساحة المستطيل - مساحة الدائرة

$= 160 - 25\pi = 81.5cm^2$

(وقوع النقطة في المنطقة المظللة P)

$$\frac{\text{المساحة المظللة}}{\text{المساحة الكلية}}$$

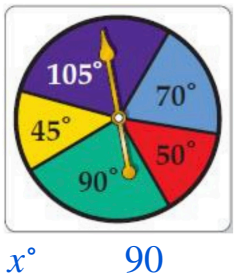
$$= \frac{81.5}{160} = 51\ \%$$

القطاع الدائري

•الإحتمال في القطاع الدائري:

$$P = \frac{x^\circ}{360^\circ}$$

مثال : استخدم القرص ذا المؤشر الدوار كما في الشكل و أوجد احتمال استقرار المؤشر على اللون الأخضر ؟



$$\frac{x^\circ}{360^\circ} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$$

الحوادث المركبة

الحادثتان المستقلتان

• تكون A, B حادثتان مستقلتان اذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر على حدوث B ويتم تمييزها باستخدام اداة الربط " و" (السحب بإرجاع)

•ولإيجاد الإحتمال نستخدم القانون

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

مثال :

عند إلقاء قطعة نقد ورمي مكعب مرقم مرة واحدة ما احتمال ظهور الشعار والعدد 4 ؟

الحادثتان مستقلتان ،

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

الحادثتان الغير مستقلتان

• تكون A, B حادثتان غير مستقلتان اذا كان احتمال حدوث A يؤثر على حدوث B ويتم تمييزها باستخدام اداة الربط " و" (السحب بدون إرجاع)

•ولإيجاد الإحتمال نستخدم القانون

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

مثال :

في تجربة سحب كرتين متتاليتن عشوائياً بدون إرجاع من حقيبة بها 3 كرات خضراء و4 كرات زرقاء ، ماإحتمال اختيار كرة زرقاء مرتين ؟

الحادثتان غير مستقلتان ،

$$P(A \cap B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

الإحتمال المشروط

• الإحتمال المشروط لـB اذا وقع A

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

مثال :

تم توزيع 10 طلاب على فريقين ليلعبوا كرة قدم ولتشكيل الفرقين يتم سحب بطاقات مرقمه من 1 – 10 عشوائياً

A الفريق الذين يسحبون الاعداد الزوجية

B الفريق الذين يسحبون الأعداد الزوجية

ما احتمال أن يكون محمود من الفريق A قد سحب العدد 7؟

احتمال مشروط

A تمثل سحب عدد فردي

عدد النواتج 5

B تمثل حادثة سحب العدد 7

$$P(B/A) = \frac{1}{5} = 20\,\%$$

الحادثتان المتنافيتان

• الحادثتان المتنافيتان هما الحادثتان التي لايوجد بينهما نواتج مشتركه ويتم تميزها بأداة الربط " أو "

•ولإيجاد الإحتمال نستخدم القانون

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال :

كيس يحتوي على 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء و كرة واحدة زرقاء سحبت من الكيس كرة واحدة

فما احتمال كونها زرقاء أو حمراء ؟

الحادثتان متنافيتان ،

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

الحوادث المتممة

• هو احتمال عدم وقوع حادثة

•ولإيجاد الإحتمال نستخدم القانون

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال :

اذا كان احتمال إصابة هدف معين $\frac{2}{7}$ فأوجد احتمال عدم اصابته ؟

$$P(A') = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

الحادثتان الغير متنافيتان

• الحادثتان الغير متنافيتان هما الحادثتان التي يوجد بينهما نواتج مشتركه ويتم تميزها بأداة الربط " أو "

• ولإيجاد الإحتمال نستخدم القانون

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال :

يبين الجدول عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية اذا اختير أحد الطلاب عشوائياً أوجد أحتمال أن يكون من الصف الأول ثانوي أو يلعب كرة قدم ؟

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

$$P(A \cup B) = \frac{14}{50} + \frac{20}{50} - \frac{5}{50} = 58\,\%$$

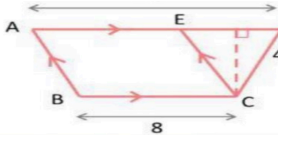
أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1 — اذا كانت نسبة هطول المطر $75\ \%$ فكم نسبة عدم هطوله :

A	B	C	D
$0.25\ \%$	$25\ \%$	$15\ \%$	$75\ \%$

2 — في الشكل المجاور اذا اخترت نقطة عشوائية داخل شبه المنحرف $ABCD$ فما احتمال ان تقع داخل متوازي الأضلاع



A	B	C	D
$80\ \%$	$60\ \%$	$20\ \%$	$40\ \%$

3 — يوجد كلمة سر لقفل مكون من 3 خانات للأعداد من 0 إلى 9 بدون تكرار ما عدد النواتج الممكنة لكلمة السر؟

A	B	C	D
720	648	504	448

4 — محل يملك 5 أنواع من أحمر الشفاة ، كم ترتيب يمكن أن يرتبها بشكل دائري:

A	B	C	D
25	24	120	5

5 — ماهو فضاء العينة لسحب بطاقتين مع الإرجاع مرقمة من واحد إلى ثمانية :

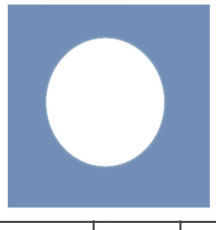
A	B	C	D
64	32	34	16

6 — شخص لديه 3 جيوب في قميصه و 4 قطع من النقود ، كم طريقة ممكن أن يضع القطع في جميع جيوبه :

A	B	C	D
81	12	4	9

7 — مساحة المربع $9cm^2$ ومساحة الدائرة $3cm^2$

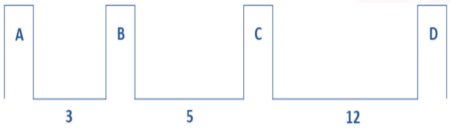
ما احتمال أن تظهر نقطة على المنطقة المظللة :



A	B	C	D
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$

8 — في أحد القصور أردت وضع طاولة طعام بين الأعمده

ما احتمال أن يتم وضع طاولة الطعام بين العمودين D و B :



A	B	C	D
$60\ \%$	$45\ \%$	$85\ \%$	$75\ \%$

9 — مكعب مرقم من 1 إلى 6 رُمي أول تسع مرات كانت كل الحوادث ظهور عدد زوجي ما احتمال ظهور عدد فردي في المرة العاشرة :

A	B	C	D
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$

10 — لديك 6 كرات خضراء و 5 كرات صفراء و وتم سحب4 كرات عشوائياً ما احتمال ان تكون 3 كرات خضراء و كرة واحدة صفراء :

A	B	C	D
$\frac{4}{11}$	$\frac{11}{33}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{4}{33}$

اختر الإجابة الصحيحة :

11 بكم طريقة يمكن التبديل بين أربعة أشخاص يجلسون حول طاولة دائرية؟

A	B	C	D
24	12	4	6

12 في القرص ذو المؤشر الدوار المقسم إلى 16 قطاعاً متطابقاً و مرقماً بالأعداد من 1 إلى 16 ما احتمال استقرار المؤشر على عدد فردي إذا علم أنه استقر على عدد أكبر من 3 ؟

A	B	C	D
$\frac{13}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{6}{13}$

13 صندوق يحتوي كرتين حمراء وثلاث كرت زرقاء فإذا سُحبت زرقاء بدون إرجاع فما احتمال سحب كرة زرقاء ثانية:

A	B	C	D
0.3	0.5	0.7	0.8

14 صندوق يحتوي على 4 كرات صفراء و 5 حمراء فإذا سُحبت كرتان على التوالي دون إرجاع فما احتمال أن تكون الكرة الثانية صفراء إذا كانت الكرة الأولى حمراء ؟

A	B	C	D
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

15 6 أعضاء ما احتمال أن يقع مقدم العرض بجانب العرض وهم في طاولة دائرية:

A	B	C	D
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{25}$

16 3 كرات صفراء و 5 سوداء و 7 كرات حمراء فما احتمال سحب كرة صفراء علماً بأنه لن يتم ظهور كرة حمراء :

A	B	C	D
1	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{15}$

17 لو كان هناك 5 أشخاص على طاولة دائرية فكم طريقة يتم جلوسهم جميعاً عليها :

A	B	C	D
24	120	5	60

18 ماهو احتمال ظهور شعار عند رمي قطعة نقود وظهور عدد زوجي عند رمي نرد ؟

A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

19 في زيارة لمعرض سيارات وجدنا كما هو بالشكل
ما عدد الخيارات الممكنة لشراء سيارة واحدة من هذا المعرض ؟

أنواع السيارات	3	الألوان	4	الفئات	2

A	B	C	D
7	12	9	24

20 يحتوي كيس على 5 كرات حمراء وكرتين زرقاوين و 4 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء اذا سحب من الكيس كرتان على التوالي من دون إرجاع فما احتمال سحب كرتين بيضاويين :

A	B	C	D
$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{33}$

اختر الإجابة الصحيحة :

21 ماهو عدد عناصر فضاء العينة في تجربة إلقاء قطعة نقد ومكعب مرقم معاً؟

A	B	C	D
6	12	8	18

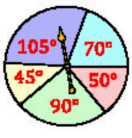
22 مكعب مرقم من 1 إلى 6 ألقي مرتين ما احتمال ظهور وجهين مجموعهما 8 :

A	B	C	D
$\frac{5}{36}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{30}$

23 اذا تم اختيار تبديل عشوائي للأحرف " ا ، م ، ل ، م ، ا ، د " فما احتمال ان تكون " الدمام " :

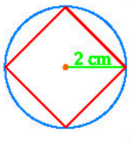
A	B	C	D
$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

24 ما احتمال استقرار المؤشر في الشكل المجاور على اللون الأخضر ؟



A	B	C	D
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

25 اذا اختيرت نقطة داخل الدائرة المجاورة فإن احتمال أن تقع داخل المربع يساوي :



A	B	C	D
$\frac{2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

26 ما احتمال أن تنجب عائلة صبياً في ثلاث مرات ولادة متتالية :

A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

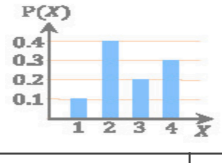
27 عند رمي مكعبين مرقمين في الوقت نفسه فإن إحتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما مع كون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين 9 يساوي :

A	B	C	D
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

28 ماقيمة x حيث ${}_8P_3 = x({}_7P_2)$ ؟

A	B	C	D
8	7	6	5

29 يبين التظليل بالأعمدة في الشكل عدد الايام الممطره X ما احتمال أن يكون عدد الايام الممطرة 4 أيام أو 3 أيام :



A	B	C	D
0.3	0.5	0.7	0.8

30 تم اختيار شخصين عشوائياً من بين 10 أشخاص ما احتمال اختيار طارق أولاً ثم سليم ثانياً :

A	B	C	D
$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{90}$

اختر الإجابة الصحيحة :

31 سُحبت عينتان عشوائياً واحدة تلو الأخرى دون إرجاع من صندوق يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة فإذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A و 3 عينات من فصيلة الدم B و 6 عينات من فصيلة الدم AB و 5 عينات من فصيلة الدم O فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB :

A	$\frac{1}{51}$	B	$\frac{1}{9}$	C	$\frac{5}{51}$	D	$\frac{1}{3}$

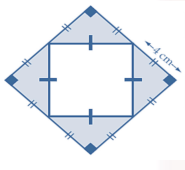
32 اذا كانت A, B حادثتان متنافيتان في فضاء العينة لتجربةٍ عشوائية ، وكان $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B)=\frac{1}{2}$ فما قيمة $P(A \cup B)$: :

A	0	B	$\frac{2}{5}$	C	$\frac{5}{6}$	D	$\frac{1}{6}$

33 كم عدداً مكون من ثلاث أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 2,6,1 دون تكرار الرقم أكثر من مرة:

A	3	B	6	C	12	D	27

34 اذا اختيرت نقطة عشوائية في الشكل المجاور فما احتمال وقوعها في المنطقة المظللة :



A	0.0625	B	0.125	C	0.25	D	0.5

35 يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات :

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A	0.075	B	0.35	C	0.5	D	0.65

36 تضم جماعات الأنشطة في إحدى مدارس الثانوية 10 طلاب من الصف الأول الثانوي و 8 طلاب من الصف الثاني ثانوي و 9 طلاب من الصف الثالث ثانوي حيث يمارس كل طالب نشاطاً معيناً على النحو الآتي : يمارس 4 طلاب من الأول ثانوي النشاط العلمي و 6 النشاط الثقافي و يمارس طالبان من الصف الثاني ثانوي النشاط العلمي و 5 النشاط الثقافي علماً بأن كل نشاط يضم 9 طلاب اذا اختير طالب واحد عشوائياً فما احتمال أن يكون من طلاب الصف الثاني ثانوي أو يمارس النشاط العلمي :

A	$\frac{1}{5}$	B	$\frac{4}{18}$	C	$\frac{5}{9}$	D	$\frac{2}{3}$

37 رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات واختيرت نقطة عشوائية داخل مربع ما احتمال ان تقع أيضاً داخل الدائرة :

A	$\frac{1}{9}$	B	$\frac{\pi}{9}$	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{9}{\pi}$

38 لدى رباب أربعة أحرف بلاستيكية أ، ف، ح ، ت ، اذا اختيرت تبديلاً عشوائياً فما احتمال ان تكون الكلمة فاتح :

A	$\frac{3}{50}$	B	$\frac{1}{24}$	C	$\frac{1}{12}$	D	$\frac{1}{4}$

اختر الإجابة الصحيحة :

39 يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء ، اذا كان لديه أربعة اصدقاء فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم :

A	4	B	6	C	8	D	9

40 يقف رجلان وولدان في صف واحد فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف اذا اصطفوا بشكل عشوائي :

A	$\frac{1}{24}$	B	$\frac{1}{12}$	C	$\frac{1}{6}$	D	$\frac{1}{2}$

41 ألقي مكعب مرقم 9 مرات متتالية فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات اذا ألقي المكعب نفسه للمرة العاشرة فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي :

A	1	B	$\frac{9}{10}$	C	$\frac{1}{6}$	D	$\frac{1}{10}$

42 تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 عشوائياً حيث :

- تشكل الطالبات اللاتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
- تشكل الطالبات اللاتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني .

اذا كانت ليلى من الفريق الثاني فما احتمال أنها سحبت العدد 2 :

A	$\frac{1}{8}$	B	$\frac{1}{4}$	C	$\frac{3}{8}$	D	$\frac{1}{2}$

43 يوجد في مركز للغات 18 طالباً يتعلمون اللغة الإنجليزية و 14 يتعلمون اللغة الفرنسية و 16 الألمانية ويوجد 8 طلاب يتعلمون اللغة الإنجليزية فقط و 7 يتعلمون الألمانية فقط ، و 3 يتعلمون الإنجليزية والفرنسية فقط ، و 4 طلاب يتعلمون اللغات الثلاثة معاً ، إذا ا ختير أحد الطلاب عشوائياً فما احتمال أن يتعلم الإنجليزيه أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية:

A	$\frac{9}{16}$	B	$\frac{2}{5}$	C	$\frac{5}{18}$	D	$\frac{7}{12}$

44 يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكونة من 7 رموز بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكونة من أحرف اسمه والرموز الأربعة التالية مكونة من ارقام العدد 1986 والتي هي سنة ميلاده ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة :

A	72	B	144	C	288	D	576

مفاتيح الإجابات

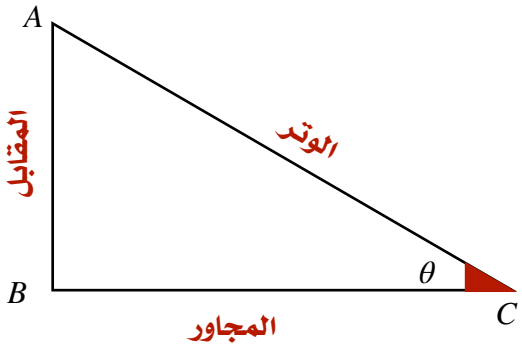
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	D	C	D	B	A	B	A	A	B
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
B	D	B	A	C	A	B	B	D	D
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
D	B	A	D	D	A	A	A	A	B
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
C	B	B	B	C	D	D	B	C	C
						44	43	42	41
						B	A	B	C

الفصل الثامن

حساب المثلثات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال المثلثية في المثلث القائم الزوايا

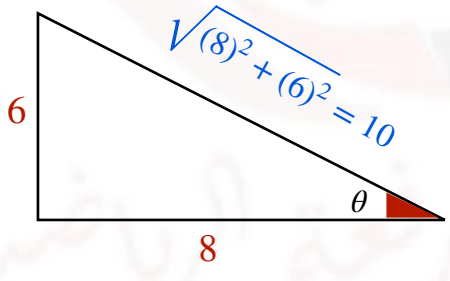
$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$		$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$
$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$		$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$
$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$		$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

دوال المقلوب

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

مثال

في المثلث أدناه فيه طول ضلعين فيه (6,8) أوجد الدوال المثلثية للزاوية θ

$\sin\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$		$\csc\theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$
$\cos\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$		$\sec\theta = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$
$\tan\theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$		$\cot\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الدالة	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

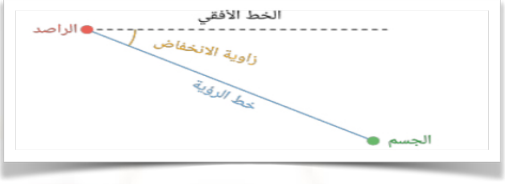
معكوس النسب المثلثية

$\sin^{-1}x = \theta$
$\cos^{-1}x = \theta$
$\tan^{-1}x = \theta$

زوايا الارتفاع و زوايا الانخفاض

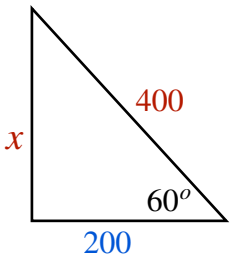
• زوايا الإرتفاع : هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أعلى الأفقي .

• زوايا الإنخفاض : هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أسفل الأفقي .



مثال :

من نقطة تبعد $200m$ عن قاعدة برج ، وجد أن زاوية ارتفاعه 60^o ، ما ارتفاع البرج ؟



$$sin60^o = \frac{x}{400}$$

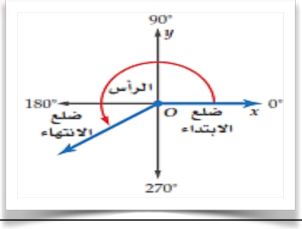
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{400}$$

$$x = 200\sqrt{3}$$

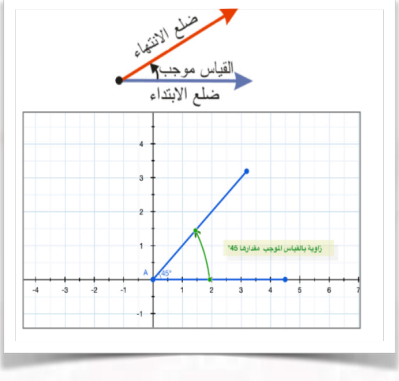
الزوايا وقياساتها

الوضع القياسي للزوايا

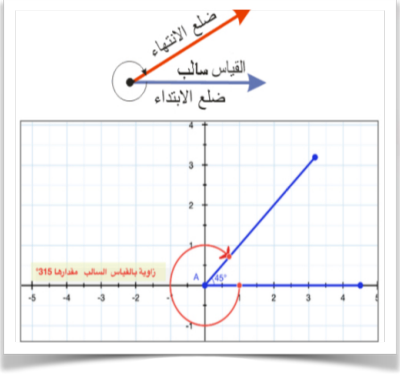
• الوضع القياسي للزاوية اذا كان رأسها نقطة الأصل و أحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب لمحور x.



القياس الموجب



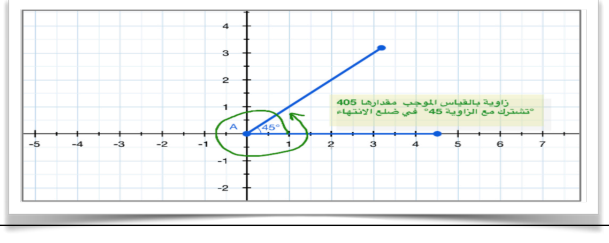
القياس السالب



• عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها :

$-315°, 405°, 45°$.

• يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات $360°$



مثال :

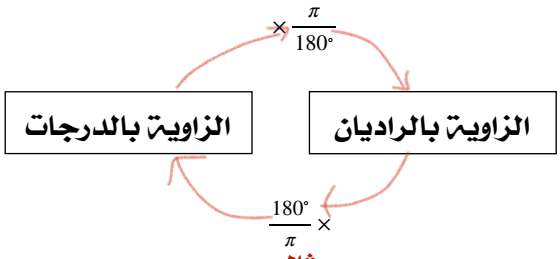
أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والآخر سالب مشتركين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة :

$130°$

القياس الموجب : $130° + 360° = 490°$

القياس السالب : $130° - 360° = -230°$

تحويل الزوايا من الدرجات الى الراديان والعكس

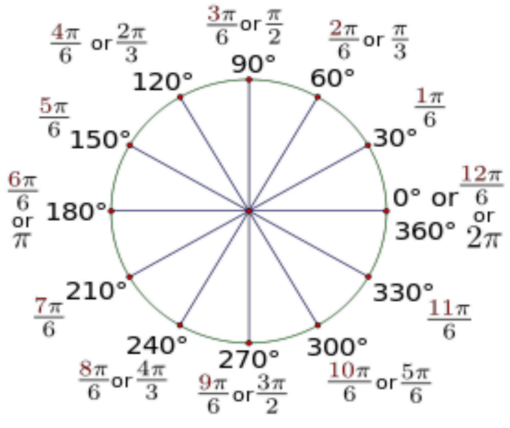


مثال :

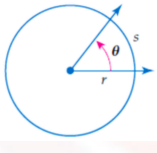
حول كل من الزوايا التالية : $30^\circ, \frac{\pi}{2}$

$$30^\circ = 30^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$$



طول القوس

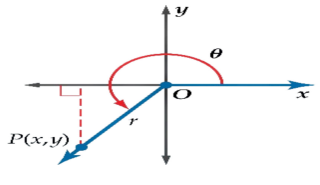
θ بالدرجات		θ بالراديان
$S = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$		$S = r \times \theta$

الدوال المثلثية للزوايا

• يمكن ايجاد قيم الدوال المثلثية لزوايا قياساتها تزيد على 90° أو تقل عن 0°.

من خلال احداثيات النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الإنتهاء لزاوية في وضع قياسي مقدارها θ

x المجاور ، y المقابل ، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



$sin\theta = \frac{y}{r}$	$cos\theta = \frac{x}{r}$	$tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$
$csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$	$sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$	$cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

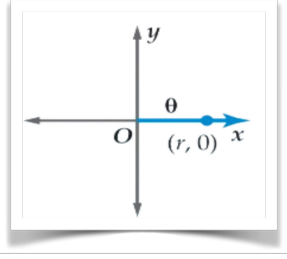
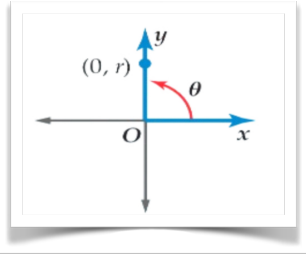
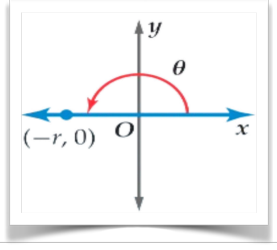
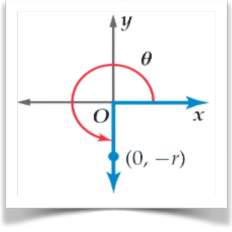
مثال : اذا كان ضلع الإنتهاء للزاوية θ يمر بالنقطة $(-3, -4)$ فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ ؟

$$x = -3, y = -4$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$sin\theta = \frac{-4}{5}$	$cos\theta = \frac{-3}{5}$	$tan\theta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$
$csc\theta = \frac{5}{-4}$	$sec\theta = \frac{5}{-3}$	$cot\theta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

الزوايا الربعية $(0°,90°,180°,270°,360°)$

$\theta = 0°$ $\theta = 0rad$	$\theta = 90°$ $\theta = \frac{\pi}{2}\ rad$	$\theta = 180°$ $\theta = \pi\ rad$	$\theta = 270°$ $\theta = \frac{3\pi}{2}\ rad$
			

قيم الدوال المثلثية للزوايا الربعية

الدالة / θ	$90°$	$180°$	$270°$	$360° = 0°$
$sin\theta$	1	0	-1	0
$cos\theta$	0	-1	0	1
$tan\theta$	غير معرف	0	غير معرف	0

الزوايا المرجعية

في الربع الأول

$\theta = \theta'$

$70°$ ترجع إلى $70°$

الدوال المثلثية كلها موجبة

في الربع الثاني

$\theta' = 180° - \theta$

$\theta' = \pi - \theta$

$120°$ ترجع إلى $60°$

$sin\theta, csc\theta$ موجبتان بينما بقية الدوال سالبة

$sin150° = sin30°$

في الربع الثالث

$\theta' = \theta - 180°$

$\theta' = \theta - \pi$

$220°$ ترجع إلى $40°$

$cot\theta, tan\theta$ موجبتان بينما بقية الدوال سالبة

$cot240° = cot60°$

في الربع الرابع

$\theta' = 360° - \theta$

$\theta' = 2\pi - \theta$

$330°$ ترجع إلى $30°$

$cos\theta, sec\theta$ موجبتان بينما بقية الدوال سالبة

$csc290° = -csc70°$

مثال : اوجد الزوايا المرجعية لكل مما يلي :

$\theta = 135°$

تقع في الربع الثاني

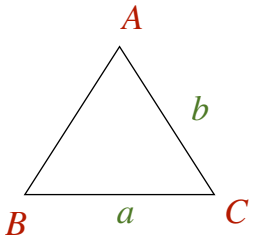
$\theta' = 180° - 135° = 45°$

$\theta = \frac{5\pi}{3}$

تقع في الربع الرابع

$\theta' = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

مساحة المثلث

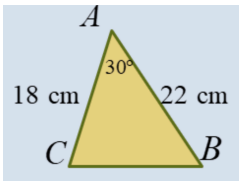


• مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$K = \frac{1}{2}a\,.\,b\,.\,sinC$$

مثال :

أوجد مساحة المثلث في الشكل المجاور؟



$$K = \frac{1}{2} \times (18) \times (22) \times (sin30)$$

$$K = 99km$$

قانون الجيوب وجيوب التمام

قانون الجيوب

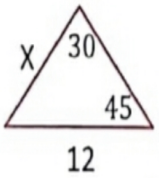
• يستخدم قانون الجيوب اذا عُلِم طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما أو اذا عُلم قياس زاويتين وضلع

نستخدم القانون

$$\frac{sinA}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{sinC}{c}$$

مثال :

أوجد قيمة x في الشكل المجاور ؟



بما أن المعطيات زاويتين وضلع

نستخدم قانون الجيوب

$$\frac{x}{sin45^\circ} = \frac{12}{sin30^\circ}$$

$$x = \frac{12 \times sin45}{sin30}$$

$$x = \frac{12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 12\sqrt{2}$$

قانون جيوب التمام

• يستخدم قانون جيوب التمام اذا عُلِم طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما أو اذا عُلم قياس أطوال الأضلاع الثلاثة

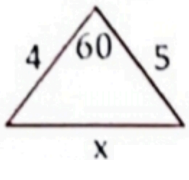
نستخدم القانون

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$$

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

مثال:

من الشكل المجاور أوجد



طول الضلع x؟

بما أن المعطيات ضلعين وزاوية محصورة بينهما

نستخدم قانون جيوب التمام

$$x = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5cos60}$$

$$x = \sqrt{16 + 25 - 20} = \sqrt{21}$$

الدوال الدائرية

دائرة الوحدة

• في دائرة الوحدة المركز $(0,0)$ نصف القطر $r = 1$ ، الزاوية θ في الوضع القياسي $P(x,y)$ نقطة تقع على تقاطع ضلع الإنتهاء مع دائرة الوحدة

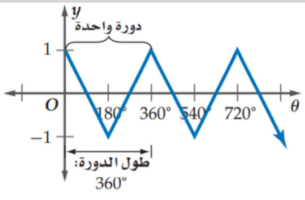
$$P(x,y) = P(cos\theta, sin\theta)$$

مثال:

اذا كان ضلع الإنتهاء للزاوية θ المرسومه في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في $P(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

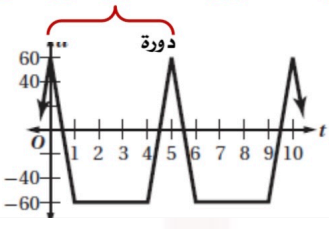
$$cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, sin\theta = -\frac{1}{2}$$

طول الدورة

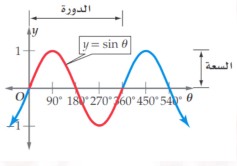
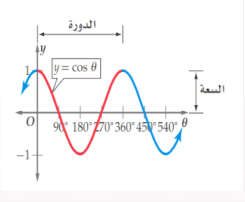
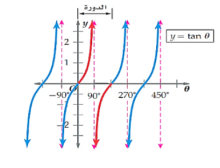


مثال:

دالة دورية تتكرر بنمط معين طول الدورة : 5



التمثيل البياني و طول الدورة والسعة للدوال المثلثية

الدالة الأم	المجال	المدى	التمثيل البياني	السعة	طول الدورة
$sin\theta$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$		السعة للدالة $y = asinb\theta$ والدالة $y = acosb\theta$ $\lvert a \rvert$	طول الدورة للدالة $y = asinb\theta$ والدالة $y = acosb\theta$ $\frac{360°}{\lvert b \rvert}$
$cos\theta$					
$tan\theta$	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180°n, n \in z\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية		السعة للدالة $y = atanb\theta$ غير معرفة	طول الدورة للدالة $y = atanb\theta$ $\frac{180°}{\lvert b \rvert}$

مثال : أوجد السعة وطول الدورة $y = 5sin\frac{2}{3}\theta$

طول الدورة : $\frac{360}{\frac{2}{3}} = 360 \times \frac{3}{2} = 540$

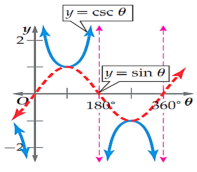
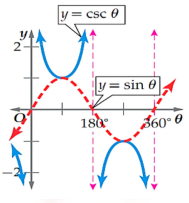
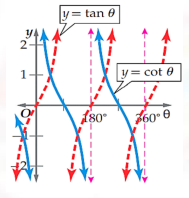
السعة $= 5$

مثال : أوجد السعة وطول الدورة $y = 2tan\frac{1}{2}\theta$

طول الدورة : $\frac{180}{\frac{1}{2}} = 180 \times \frac{2}{1} = 360$

السعة غير معرفة

التمثيل البياني و طول الدورة والسعة للدوال المثلثية

الدالة الأم	المجال	المدى	التمثيل البياني	السعة	طول الدورة	
$csc\theta$	$\{\theta \mid \theta \neq 180° \, n, n \in z\}$	$\{y \mid 1 \leq y \cup y \leq -1\}$		غير معرفة	طول الدورة للدالة $y = acscb\theta$ والدالة $y = asec\theta$ $\frac{360°}{\lvert b \rvert}$	مثال : أوجد السعة وطول الدورة $y = csc\frac{3}{4}\theta$ طول الدورة : $\frac{360}{\frac{3}{4}} = 360 \times \frac{4}{3}$ $= 480$ السعة غير معرفة
$sec\theta$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180° \, n, n \in z\}$					
$cot\theta$	$\{\theta \mid \theta \neq 180° \, n, n \in z\}$	مجموعة الأعداد الحقيقة			طول الدورة للدالة $acotb\theta$ $\frac{180°}{\lvert b \rvert}$	

الدوال المثلثية العكسية

رمز الدالة	المجال	المثال
$sin^{-1}(x)$	$\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$	$sin^{-1}(\frac{1}{2}) = 30°$
$cos^{-1}(x)$		$cos^{-1}(-1) = 180°$
$tan^{-1}(x)$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$tan^{-1}(\sqrt{3} = 60°$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1) $sint = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، فما قيمة $sect$ علماً بأن $(\frac{\pi}{2} < t < \pi)$:

A		B		C		D	
-2		2		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-2\sqrt{3}$	

2) أي زاويتين تكون قيمة $sin\theta, tan\theta$ تساوي الصفر ؟

A		B		C		D	
90,180		360,270		90,270		360,180	

3) $cos\theta = \frac{12}{13}$ فإن $sin\theta = ...$ ؟

A		B		C		D	
$\frac{5}{13}$		$\frac{13}{5}$		$\frac{12}{5}$		$\frac{5}{12}$	

4) أي من الزوايا التالية يكون الجيب والظل لها سالبين :

A		B		C		D	
65°		310°		210°		256°	

5) اذا كانت $270 < \theta < 360$ و $cos\theta = \frac{1}{2}$ أوجد $sin\theta$:

A		B		C		D	
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$	

6) الدورة الكاملة تعادل بالراديان :

A		B		C		D	
π		2π		400°		180°	

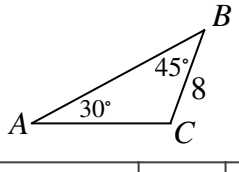
7) أوجد السعة وطول الدورة على الترتيب $4sin5\theta$ ؟

A		B		C		D	
5,180		4,72		4,50		3,90	

8) اذا كان $sinA = \frac{5\sqrt{3}}{10}$ فإن قيمة الزاوية $A = ...$ ؟

A		B		C		D	
60°		20°		45°		90°	

9) ما طول $\overline{AC}$ في الشكل المجاور :



A		B		C		D	
4		8		9		$8\sqrt{2}$	

10) في أي ربع تكون قيمة $sin\theta, cos\theta$ سالبتين ؟

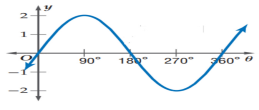
A		B		C		D	
الأول		الثاني		الثالث		الرابع	

اختر الإجابة الصحيحة :

11 يطير صقر علي إرتفاع $100m$ فرصد أرنب على الأرض بزاوية انخفاض 30° فأوجد بعد الصقر عن الأرنب ؟

A	120	B	200	C	180	D	100

12 مالدالة الممثلة في الشكل المجاور ؟

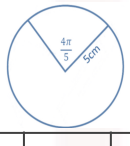


A	$y = 4cos\theta$	B	$y = 4sin\theta$	C	$y = 2sin\theta$	D	$y = 2cos\theta$

13 أي الزوايا الاتيه تعتبر مثالاً مضاداً للعبارة $sin\theta + cos\theta = 1$ ؟

A	0°	B	180°	C	90°	D	360°

14 طول القوس في الشكل المجاور للزاوية بوحدة cm ؟



A	2π	B	3π	C	4π	D	5π

15 طولا الضلعين القائمين في مثلث $\frac{2x-2}{x-1}$ و $\frac{x-1}{x-5}$ ومساحته 5 فما قيمة x ؟ :

A	1	B	6	C	$\frac{23}{3}$	D	$\frac{26}{4}$

16 أي الدوال المثلثية الاتية سعتها 3 وطول دورتها 72° ؟

A	$y = 5cos3\theta$	B	$y = 3cos5\theta$	C	$y = 5sin3\theta$	D	$y = 3tan5\theta$

17 قيمة $sin^{-1}(cos72^\circ)$ تساوي :

A	72°	B	18°	C	38°	D	108°

18 اذا كان $sin^{-1}(cosx) = \frac{\pi}{6}$ فما قيمة x ؟

A	$\frac{\pi}{6}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{\pi}{3}$	D	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

19 المقدار $\frac{sin\theta}{tan\theta}$ يكون سالباً في الربعين :

A	الأول والثاني	B	الثاني والثالث	C	الثالث والرابع	D	الأول والرابع

20 ما المثال المضاد للدالة التالية $sin\theta - cos\theta = 1$ ؟

A	0	B	180	C	90	D	-270

اختر الإجابة الصحيحة :

21 اذا كانت $270^\circ < \theta < 360^\circ$ و $cos\theta = \frac{1}{3}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $sin\theta$ تساوي :

A	B	C	D
$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

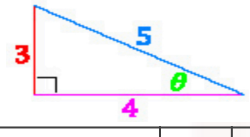
22 أي من الزوايا الاتيه تشترك مع الزاوية 420 في ضلع الانتهاء ؟

A	B	C	D
30°	45°	60°	120°

23 اذا كانت الزاوية $m\angle\theta = 300^\circ$ فإن قياس زاويتها المرجعية θ' تساوي ؟

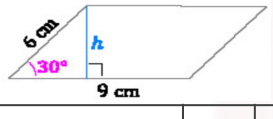
A	B	C	D
15°	30°	60°	45°

24 من الشكل المجاور قيمة $sec\theta - tan\theta$ تساوي ؟



A	B	C	D
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	2

25 متوازي أضلاع طول قاعدته $9cm$ وضلعه المائل $6cm$ وقياس أحدى زوايا قاعدته 30° فما مساحته ؟



A	B	C	D
108	54	36	27

26 $cos120^\circ$ تساوي :

A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$

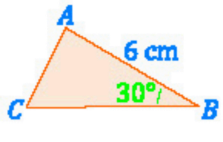
27 $m\angle B$ الحادة في الشكل المجاور تساوي ؟

A	B	C	D
15°	30°	45°	60°

28 طول الدورة للدالة $f(x) = kcoskx$ يساوي $\frac{\pi}{2}$ فإن سعتها تساوي ؟

A	B	C	D
1	2	4	8

29 من الشكل المجاور اذا كانت مساحة المثلث تساوي $15cm^2$ فإن طول $\overline{CB}$ يساوي ؟



A	B	C	D
$14cm$	$8cm$	$10cm$	$6cm$

30 الزاوية $\frac{3\pi}{2}$ بالقياس الستيني تساوي ؟

A	B	C	D
90°	180°	270°	360°

اختر الإجابة الصحيحة :

31 أي من الزوايا الآتية تحقق $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

A	990°	B	1080°	C	1830°	D	1215°

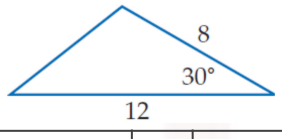
32 افترض ان θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos\theta > 0$ في أي ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ :

A	الربع الأول أو الثاني	B	الربع الأول أو الثالث	C	الربع الثاني أو الثالث	D	الربع الأول أو الرابع

33 من نقطة تبعد $200m$ من قاعدة برج وجد أن زاويه ارتفاعه 60° ما ارتفاع البرج:

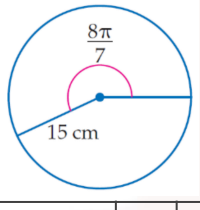
A	$100m$	B	$200\sqrt{2}m$	C	$200\sqrt{3}m$	D	$400m$

34 من الشكل المجاور مساحة المثلث تساوي :



A	48	B	96	C	41.6	D	24

35 ما طول القوس المقابل $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة مقرباً إلى اقرب جزء من عشرة :



A	$4.2cm$	B	$17.1cm$	C	$53.9cm$	D	$2638.9cm$

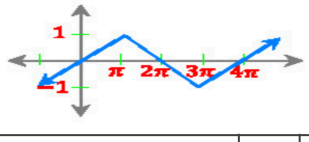
36 الزاوية 30° بالقياس الدائري تساوي :

A	$\frac{\pi}{6}$	B	$\frac{\pi}{3}$	C	$\frac{2\pi}{3}$	D	π

37 اذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي بالنقطة $(-3,4)$ فإن $\cos\theta$ تساوي :

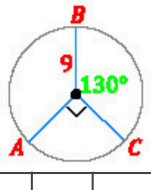
A	$\frac{-4}{5}$	B	$\frac{-3}{5}$	C	$\frac{3}{5}$	D	$\frac{4}{5}$

38 طول الدورة في الدالة المجاورة :

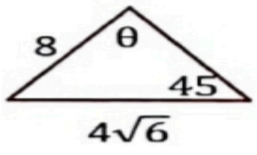


A	π	B	2π	C	3π	D	4π

39 من الشكل المجاور طول القوس AB يساوي :



A	7π	B	9π	C	12π	D	13π

اختر الإجابة الصحيحة :								
قيمة θ في الشكل المجاور : 								40
90°	D	45°	C	30°	B	60°	A	

مفاتيح الإجابات									
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	D	A	B	B	A	B	A	D	A
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
A	B	C	B	B	B	C	B	C	B
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
C	C	C	C	B	D	B	C	C	B
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
A	A	D	B	A	C	D	C	D	C

رياضيات

ثالث ثانوي

الفصل الأول

تحليل الدوال

وصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

الخاصية المميزة

• تستعمل الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها ويقرأ بالرمز "|" حيث ، والرمز ∈ ينتمي إلى أو عنصر في .

مثال :

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

الفترات الحقيقية

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a,b]$	$x \ge a$	$[a,\infty)$
$a < x < b$	(a,b)	$x \le a$	$(-\infty,a]$
$a \le x < b$	$[a,b)$	$x > a$	(a,∞)
$a < x \le b$	$(a,b]$	$x < a$	$(-\infty,a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty,\infty)$

تحديد العلاقات التي تمثل دوال

من المعادلة

• بحل المعادلة إذا كانت كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y

مثال :

$$3y + 6x = 18$$
$$3y = 18 - 6x$$
$$y = \frac{18 - 6x}{3}$$
$$y = 6 - 2x$$

دالة لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y

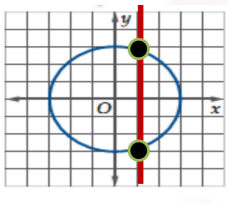
من الجدول

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

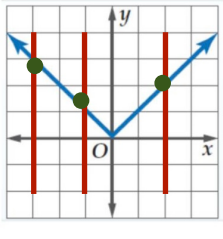
علاقة وليست دالة

لأن العنصر 5 من x ارتبط بعنصرين من y

اختبار الخط الرأسي

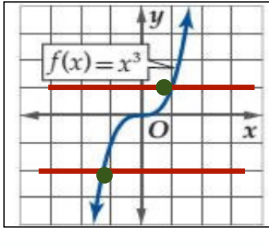


علاقة وليست دالة



دالة

الدالة المتباينة

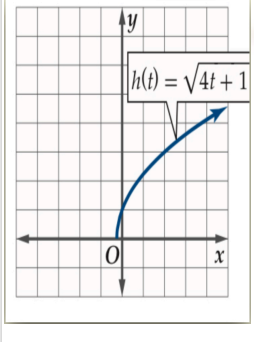
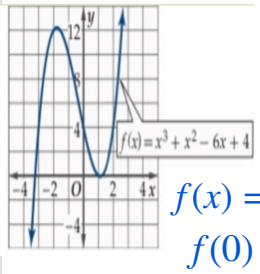


• تكون الدالة متباينه أن يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى وأن يرتبط كل عنصر في المدى بعنصر واحد فقط في المجال وبيانياً : باختبار الخط الأفقي وهو أن يقطع الخط الأفقي الدالة بنقطه واحدة فقط .

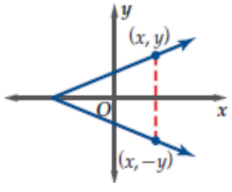
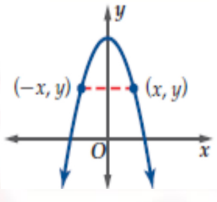
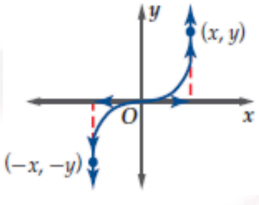
تحديد مجال الدالة

الدالة	المجال	مثال
كثيرة الحدود	• كثيرة الحدود معرفة لكل $x \in R$ ومجالها R	$x^2 + 2x - 6 = 0$
الدالة الجذرية	• إذا كان الجذر في البسط معرفة بشرط ≥ 0 ماتحت الجذر • إذا كان الجذر في المقام معرفة بشرط > 0 ماتحت الجذر	$g(x) = \frac{\sqrt{2x-10}}{5}$ $2x - 10 \geq 0$ $x \geq 5$ $D_g = [5,\infty)$ $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$ $2x + 6 > 0$ $x > -3$ $D_g = (-3,\infty)$
الدالة الكسرية	• الدالة النسبية معرفة بشرط المقام $\neq 0$	$f(x) = \frac{5x-2}{x^2+7x+12}$ $x^2 + 7x + 12 = 0$ $(x+3)(x+4) = 0$ $D_f = R - \{-3, -4\}$

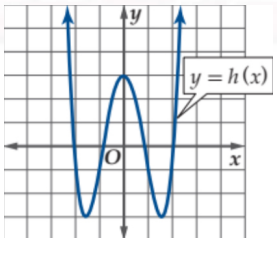
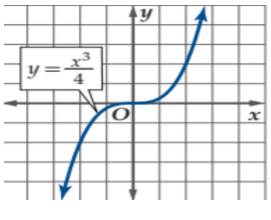
المقاطع مع المحورين

المقاطع مع المحورين	بيانياً وجبرياً	مثال
مع المحور x = أصفار الدالة	• بيانياً : نقاط التقاطع مع محور x . • جبرياً : نحل المعادلة $f(x) = 0$	 بيانياً : -0.2 جبرياً : $h(t) = \sqrt{4t+1}$ $4t + 1 = 0$ $t = -\frac{1}{4}$
مع المحور y	• بيانياً : نقاط التقاطع مع محور y . • جبرياً : نوجد $f(0)$	 بيانياً : 4 جبرياً : $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 4$ $f(0) = 0 + 0 - 0 + 4$ $= 4$

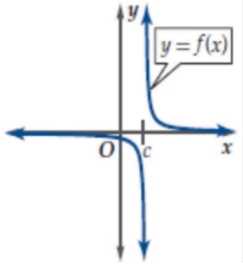
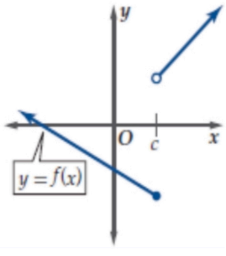
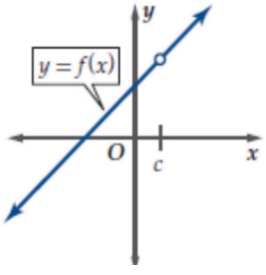
اختبار التماثل

التماثل	بيانياً	جبرياً
حول محور x	$(x,y) \to (x,-y)$ 	اذا كان تعويض $(-y)$ مكان (y) يعطي معادلة متكافئة مثال : $x = y^2 - 3$ $x = (-y)^2 - 3$ $x = y^2 - 3$
حول محور y	$(x,y) \to (-x,y)$ 	اذا كان تعويض $(-x)$ مكان (x) يعطي معادلة متكافئة مثال : $y = -x^2 + 6$ $y = -(-x)^2 + 6$ $y = -x^2 + 6$
حول نقطة الأصل	$(x,y) \to (-x,-y)$ 	اذا كان تعويض $(-y)$ مكان (y) و $(-x)$ مكان (x) يعطي معادلة متكافئة مثال : $x^2 + y^2 = 25$ $(-x)^2 + (-y)^2 = 25$ $x^2 + y^2 = 25$

الدالة

الدالة	بيانياً وجبرياً	مثال	ملاحظات
زوجية	تكون زوجيه لكل x في مجال f فإن $f(-x) = f(x)$ ، والمنحنى متماثل حول محور y 	$f(x) = \frac{2}{x^2}$ $f(-x) = \frac{2}{(-x)^2}$ $f(-x) = \frac{2}{x^2} = f(x)$	في دوال كثيرات الحدود اذا كانت جميع قوى المتغير زوجيه فالدالة زوجية واذا كانت جميع قوى المتغير فردية بشرط عدم وجود حد ثابت فالدالة فردية دالة القيمة المطلقة وجيب التمام زوجية دالة الجيب والظل دالة فردية
فردية	تكون فردية لكل x في مجال f فإن $f(-x) = -f(x)$ ، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل 	$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$ $h(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x)$ $h(-x) = -(x^5 - 2x^3 + x) = -h(x)$	

أنواع عدم الإتصال

عدم اتصال غير قابل للإزالة		عدم اتصال قابل للإزالة
• لانهائي	• قفزي	• عدم اتصال نقطي
		

الإتصال وأنواع عدم الإتصال

معرفة عند العدد c أي $f(c)=a$ موجودة		غير معرفة عند العدد c أي $f(c)$ غير موجودة		
نحسب النهاية $lim_{x\to c}f(x)$		نحسب النهاية $lim_{x\to c}f(x)$		
موجودة		غير موجودة	موجودة	غير موجودة
$lim_{x\to c}f(x)=a$	$lim_{x\to c}f(x)\neq a$	$lim_{x\to c^+}f(x)\neq lim_{x\to c^-}f(x)$	عدم اتصال نقطي	$lim_{x\to c}f(x)=\pm\infty$	$lim_{x\to c^+}f(x)\neq lim_{x\to c^-}f(x)$
متصله عند c	عدم اتصال نقطي	عدم اتصال قفزي		عدم اتصال لانهائي	عدم اتصال قفزي

مثال:

حدد ما اذا كانت الدالة متصلة وحدد نوع الإتصال

$$x=2, f(x)=\begin{cases}5x+4, x>2\\ 2-x, x\leq 2\end{cases}$$

الدالة معرفة عند $x=2$

1) $f(2)=2-2=0$

2) $lim_{x\to 2^+}f(x)=lim_{x\to 2^+}(5x+4)=14$

$lim_{x\to 2^-}f(x)=lim_{x\to 2^-}(2-x)=0$

$lim_{x\to 2^+}f(x)\neq lim_{x\to 2^-}f(x)$

$lim_{x\to 2}f(x)$ غير موجودة

نوع عدم الاتصال قفزي

مثال:

حدد ما اذا كانت الدالة متصلة وحدد نوع الإتصال

$$x=0, f(x)=\frac{1}{x^2}$$

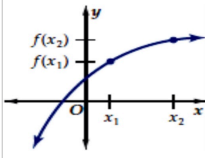
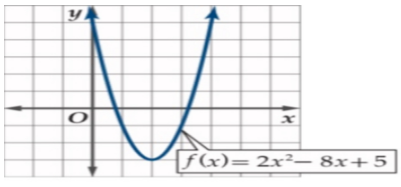
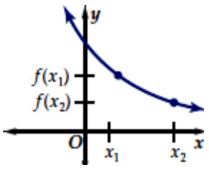
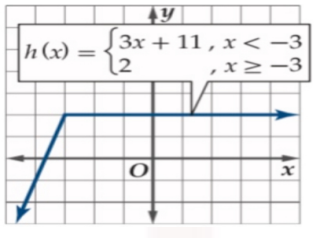
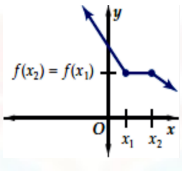
1) الدالة غير معرفة عند $x=0$

اذن غير متصلة عند $x=0$

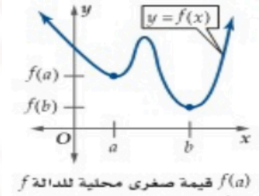
2) $lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{0}=\infty$

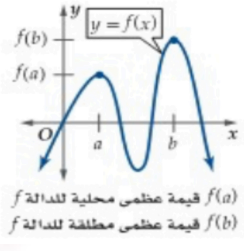
نوع عدم الاتصال لا نهائي

خصائص الدالة

الدالة وخصائصها	مثال
• تكون الدالة متزايدة على فترة ما اذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$ 	 يتبين من الرسم البياني أن الدالة $f(x)$ متناقصة في الفترة $(-\infty,2)$ ومتزايده في الفترة $(2,\infty)$
• تكون الدالة متناقصة على فترة ما إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$ 	 يتبين من الرسم البياني أن الدالة $h(x)$ متزايده في الفترة $(-\infty,-3)$ وثابته في الفترة $(-3,\infty)$
• تكون الدالة ثابتة على فترة ما إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) = f(x_2)$ 	

القيم القصوى والمحلية والمطلقة للدالة





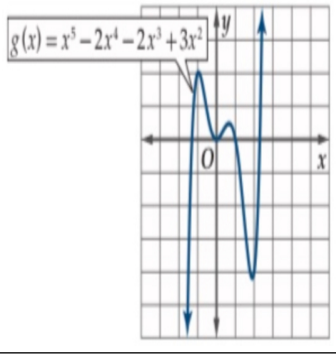
• عندما يتغير سلوك الدالة إلى التناقص أو التزايد فإنها تكون في منحنى الدالة قمة أو قاع .

• النقطة عند القمة أو القاع تسمى نقطة حرجة.

• قيمة الدالة عند القمة أو القاع تسمى قيمة قصوى. في الرسم في الأعلى القمة الأعلى تسمى عظمى مطلقة بينما بقية القمم تسمى عظمى محلية والعكس.

مثال

الدالة لها قيمة عظمى محلية عند $x = -1, x = 0.5$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 0, x = 2$ ولايوجد قيمة عظمى وصغرى مطلقة.



متوسط معدل التغير للدالة

• متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بالنقطتين . (وتطبق على السرعة المتوسطة)

• متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ يمكن إيجاده بالقانون :

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال:

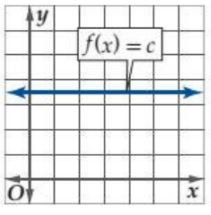
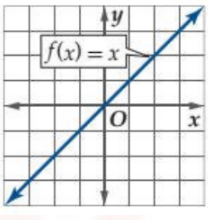
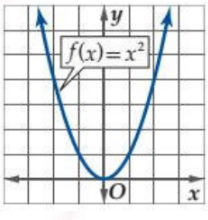
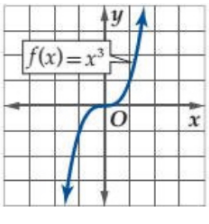
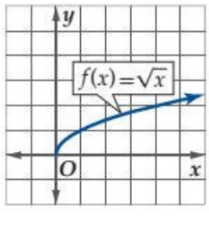
أوجد متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = 2x$ في الفترة $[3,5]$

$$m_{sec} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$$

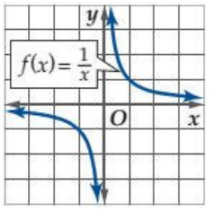
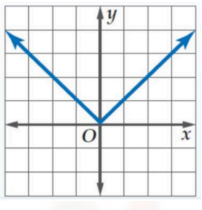
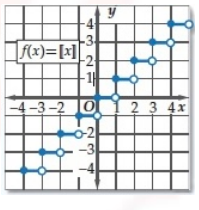
$$= \frac{10 - 6}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

الدوال الرئيسية الأم

الدالة	الشكل	المجال	المدى	المقطع	التماثل	الاتصال	فترات التزايد والتناقص	سلوك طرفي التمثيل
الدالة الثابتة $f(x)=c$		R $(-\infty,\infty)$	$\{c\}$	محور y عند $(0,c)$	حول محور y دالة زوجية	متصلة على المجال R	ثابتة في الفترة $(-\infty,\infty)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=c$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=c$
الدالة المحايدة $f(x)=x$		R $(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	المحورين x,y عند $(0,0)$	حول نقطة الأصل دالة فردية	متصلة على المجال R	متزايدة في الفترة $(-\infty,\infty)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
الدالة التربيعية $f(x)=x^2$		R $(-\infty,\infty)$	$[0,\infty)$	المحورين x,y عند $(0,0)$	حول محور y دالة زوجية	متصلة على المجال R	متناقصة في الفترة $(-\infty,0)$ ومتزايدة في الفترة $(0,\infty)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
الدالة التكعيبية $f(x)=x^3$		R $(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	المحورين x,y عند $(0,0)$	حول نقطة الأصل دالة فردية	متصلة على المجال R	متزايدة في الفترة $(-\infty,\infty)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
دالة الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$ $x\geq 0$		$[0,\infty)$	$[0,\infty)$	المحورين x,y عند $(0,0)$	غير متماثل لا زوجية ولا فردية	متصلة على المجال	متزايدة في الفترة $(0,\infty)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

الدوال الرئيسية الأم

الدالة	الشكل	المجال	المدى	المقطع	التماثل	الاتصال	فترات التزايد والتناقص	سلوك طرفي التمثيل
دالة المقلوب $f(x)=\frac{1}{x}$ $x\neq 0$		$R-\{0\}$	$R-\{0\}$	لايقطع أياً من المحورين	حول نقطة الأصل دالة فردية	عدم اتصال لانهائي عند $x=0$	متناقصة في الفترة $(-\infty,0)$ متناقصة في الفترة $(0,\infty)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
دالة القيمة المطلقة $f(x)=\lvert x\rvert$		R $(-\infty,\infty)$	$[0,\infty)$	المحورين x,y عند $(0,0)$	حول محور y دالة زوجية	متصلة على المجال R	متناقصة في الفترة $(-\infty,0)$ ومتزايدة في الفترة $(0,\infty)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
دالة أكبر عدد صحيح $f(x)=[x]$		R $(-\infty,\infty)$	Z	المحورين x,y عند $(0,0)$	غير متماثل لا زوجية ولا فردية	غير متصلة عدم اتصال قفزي	متزايدة في الفترة $(-\infty,\infty)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

دراسة سلوك طرفي التمثيل البياني

كثيرة حدود

•من الرسم نحدد السلوك

إذا كان اتجاه السهم إلى أعلى ∞

وإذا كان اتجاه السهم إلى أسفل

$-\infty$

كسرية

• درجة البسط < من درجة المقام

$=\infty$

• درجة البسط > من درجة المقام

$=0$

• درجة البسط = درجة المقام

$$=\frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$$

مثال:

$g(x)=\frac{3x^3+5}{x+4}$

سلوك طرفي التمثيل البياني يؤول إلى ∞

$f(x)=\frac{2x^2+3}{3x^2+1}$

سلوك اطرفي التمثيل البياني يؤول إلى $\frac{2}{3}$

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسية الأم

تحويلات قياسية تغير مواقع المنحنى فقط ولا يتغير أبعاده أو شكله

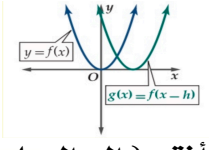
الإزاحة

• أفقي (إلى اليمين)

$f(x-k)$

مثال : $f(x)=(x-4)^2$

إزاحة 4 وحدات لليمين

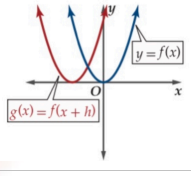


• أفقي (إلى اليسار)

$f(x+k)$

مثال : $f(x)=(x+3)^2$

إزاحة 3 وحدات لليسار

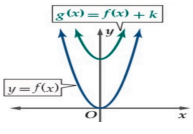


• رأسي (إلى الأعلى)

$f(x)+k$

مثال : $f(x)=x^2+3$

إزاحة 3 وحدات للأعلى

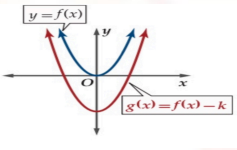


• رأسي (إلى الأسفل)

$f(x)-k$

مثال : $f(x)=x^2-5$

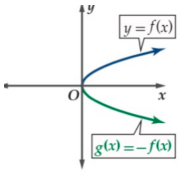
إزاحة 5 وحدات الأسفل



الإنعكاس

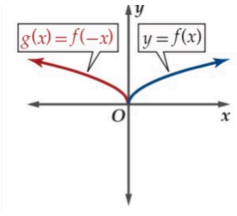
• حول محور x

$g(x)=-f(x)$



• حول محور y

$g(x)=f(-x)$



مثال:

$$g(x)=-\frac{1}{x+4}$$

حدث لها انعكاس حول محور x وانسحاب 4 وحدات لليسار

تحويلات غير قياسية هي تحويلات تغير شكل المنحنى

التمدد

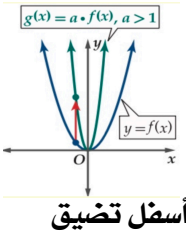
• رأسي $af(x)$

اتجاه للأعلى توسع

$a>1$

مثال : $f(x)=3x^2$

اتجاه التوسع



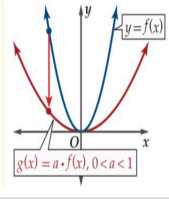
اتجاه التوسع

اتجاه للأسفل تضيق

$0<a<1$

مثال : $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

اتجاه التضيق



اتجاه التضيق

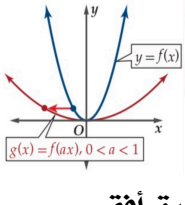
• أفقي $f(ax)$

توسع أفقي

$0<a<1$

مثال : $f(x)=(\frac{1}{3}x)^2$

اتجاه التوسع



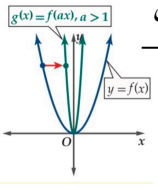
اتجاه التوسع

تضيق أفقي

$a>1$

مثال : $f(x)=(2x)^2$

اتجاه التضيق

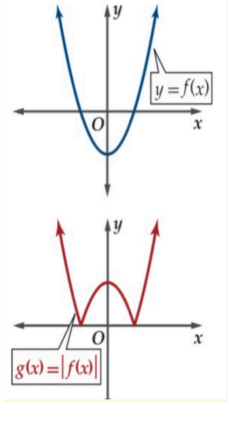


اتجاه التضيق

القيمة المطلقة

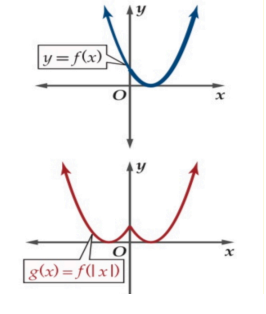
$g(x)=|f(x)|$

• يغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت محور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول محور x



$g(x)=f(|x|)$

• يغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة الموجود يسار المحور y ويضع مكانه صورة الجزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول محور y



تحديد المدى

الدالة التربيعية	الجذور الزوجية	الدوال النسبية
• $f(x)=ax^2+bx+c$ اذا كانت $a<0$ يكون المدى $(-\infty, f(\frac{-b}{2a}]$ واذا كانت $a>0$ يكون المدى $[f(\frac{-b}{2a}), \infty)$ • $f(x)=ax^2+c$ اذا كانت $a<0$ يكون المدى $(-\infty, c]$ واذا كانت $a>0$ يكون المدى $[c, \infty)$ مثال: $f(x)=2x^2+8x+2$ المدى $[f(\frac{-8}{4}), \infty)$ $[f(-2), \infty)$ $[-6,\infty)$	• $f(x)=a\sqrt{mx+b}+c$ اذا كانت $c=0$ و $a<0$ فإن المدى $(-\infty,0]$ واذا كانت $c=0$ و $a>0$ فإن المدى $[0,\infty)$ اذا كانت $c\neq 0$ وكانت $a<0$ فإن المدى $(-\infty, c]$ واذا كانت $c\neq 0$ وكانت $a>0$ فإن المدى $[c, \infty)$ مثال: $f(x)=-2\sqrt{3x+5}+7$ المدى $(-\infty,7]$	• اذا كان المقام من الدرجة الأولى والبسط من الدرجة الصفرية فإن المدى $R-\{0\}$ • اذا كان البسط والمقام من الدرجة الأولى فإن المدى $R-\{$ الخط التقارب الأفقي $\}$ مثال: $f(x)=\frac{5}{x+4}$ المدى $R-\{0\}$

مجال العمليات على الدوال

مجال العمليات على الدوال

مجال $(f+g)(x)$ = مجال $f(x)$ ∩ مجال $g(x)$

مجال $(f-g)(x)$ = مجال $f(x)$ ∩ مجال $g(x)$

مجال $(f.g)(x)$ = مجال $f(x)$ ∩ مجال $g(x)$

مجال $(\frac{f}{g})(x)$ = مجال $f(x)$ ∩ مجال $g(x)$ − أصفار المقام

مثال:

$f(x)=x^2-6x-8$ ، $g(x)=\sqrt{x}$

أوجد كل من الدوال الاتيه ثم حدد مجالها :

الحل :

مجال $f(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومجال $g(x)$ هو $[0,\infty)$

$(f.g)(x)=x^2\sqrt{x}-6x\sqrt{x}-8\sqrt{x}$

المجال : $[0,\infty)$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^2-6x-8}{\sqrt{x}}$

المجال : $(0,\infty)$

$(f+g)(x)=x^2-6x-8+\sqrt{x}$

المجال : $[0,\infty)$

$(f-g)(x)=x^2-6x-8-\sqrt{x}$

المجال : $[0,\infty)$

تركيب الدالتين

تركيب الدوال : يعني دمج دالتين ، وهذا الدمج لا ينتج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة وهو يعني ايجاد قيمة دالة عند دالة أخرى .

تركيب دالتين : يُعرف تركيب الدالتين f و g على النحو التالي :

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g حيث تطبق الدالة g أولاً ثم الدالة f

مثال:

اذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x - 4$

فأوجد $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ ، $[f \circ g](2)$

الحل :

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1) - 4$$
$$= x^2 - 3$$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f(x - 4)$$
$$= (x - 4)^2 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 16 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 17$$

$$[f \circ g](2)$$
$$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$$
$$= (2)^2 - 8(2) + 17$$
$$= 5$$

مجال دالة التركيب

أولاً نوجد مجال كلاً من الدالتين g و f اذا كان مجال الدالتين g و f يساوي R فإن مجال $f \circ g$ أيضاً R

اذا كان مجال الدالتين g أو f لايساوي R نوجد مجال $f \circ g$ قبل التبسيط .

مثال:

حدد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضروريه ثم أوجد $f \circ g$ فيما يلي :

$$g(x) = x^2 + x \quad ، \quad f(x) = \frac{5}{x}$$

مجال $f(x)$ هو $R - \{0\}$

مجال $g(x)$ هو R

نوجد التركيب

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f(x^2 + x)$$
$$= \frac{5}{x^2 + x}$$

نوجد مجال $f \circ g$

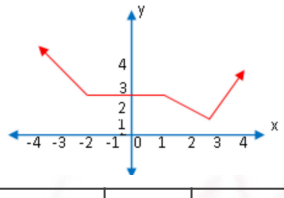
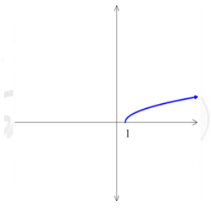
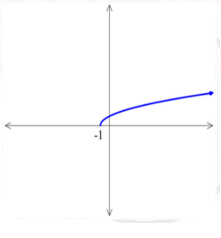
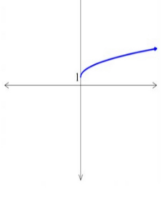
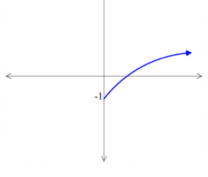
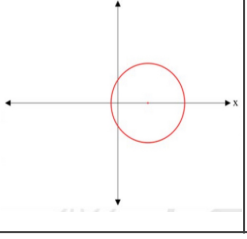
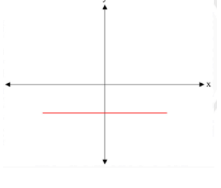
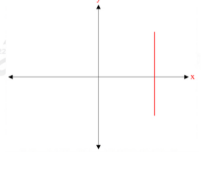
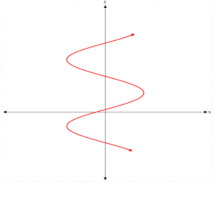
الدالة كسرية إذن المقام $\neq 0$

$$x^2 + x \neq 0$$
$$x(x + 1) \neq 0$$
$$x \neq 0$$
$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \neq -1, x \in R\}$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	اذا كانت $f(x)=4x^2-8$ فإن $f(x-1)$ تساوي :							
	A	$4x^2-8x-4$	B	$4x^2-2x-9$	C	$4x^2-8x-12$	D	$4x^2-9$
2	ماهي إزاحة الدالة $f(x)=\frac{1}{x+4}$:							
	A	4 وحدات لليسار	B	4 وحدات لليمين	C	وحدتان للأعلى	D	وحدتان للأسفل
3	مدى الدالة $f(x)=\lvert x-2\rvert+3$ هو :							
	A	$(0,\infty)$	B	$[3,\infty)$	C	$(2,\infty)$	D	$(1,\infty)$
4	أي مما يلي يمثل مجال للدالة $f(x)=\sqrt{2x-6}$:							
	A	$[6,\infty)$	B	$[3,\infty)$	C	$[0,\infty)$	D	$(-\infty,\infty)$
5	مجال الدالة $f(x)=\frac{3x+4}{5-x}$:							
	A	R	B	$R-\{2\}$	C	$R-\{5\}$	D	$R-\{-5\}$
6	ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة $f(x)$: 							
	A	$(3,\infty)$	B	$(-\infty,-2)$	C	$(1,3)$	D	$(1,\infty)$
7	التمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt{x+1}$ هو :							
	A		B		C		D	
8	حدد الرسم البياني الذي يمثل دالة :							
	A		B		C		D	

اختر الإجابة الصحيحة :

9 حدد مجال الدالة $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

$(-3,3)$	D	$[-3,3]$	C	$(-9,9)$	B	$[-9,9]$	A

10 ما قيمة b التي تجعل الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-bx+4}{x-4}$ متصله عند $x=4$ بعد إعادة تعريفها :

2	D	5	C	6	B	8	A

11 مدى الدالة $f(x)=\sqrt{x-5}$ هو :

$\mathbb{R}^- \cup \{0\}$	D	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	C	$\mathbb{R}^-$	B	$\mathbb{R}^+$	A

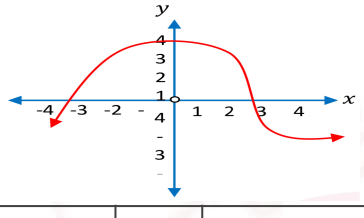
12 ومامدى الدالة $f(x)=x^2+1$ اذا كان مجالها $-2<x<3$:

$1<f(x)<10$	D	$5<f(x)<10$	C	$5<f(x)<9$	B	$1<f(x)<9$	A

13 مجال الدالة $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2-5x}$:

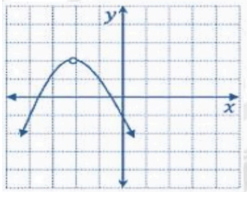
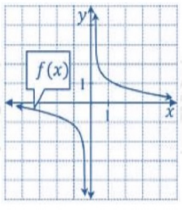
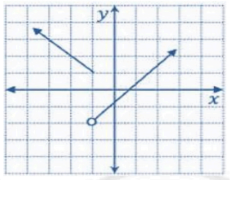
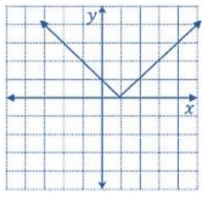
$\{x \mid x \neq 0, x \neq 5, x \in R\}$	D	$\{x \mid x \neq 5, x \in R\}$	C	$\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$	B	$\{x \mid x \in R\}$	A

14 أوجد صفر الدالة بين الـ 2 و 5 :

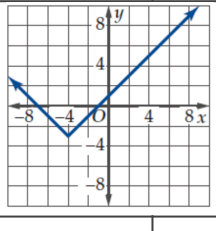


3	D	-4	C	4	B	6	A

15 الدالة التي تمثل عدم اتصال لا نهائي :

	D		C		B		A

16 أي الدوال الاتيه يمثلها التمثيل البياني المجاور :



$f(x)=\lvert x+4\rvert+3$	D	$f(x)=\lvert x-4\rvert$	C	$f(x)=\lvert x+4\rvert-3$	B	$f(x)=\lvert x-4\rvert-3$	A

اختر الإجابة الصحيحة :

17 أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x)=\sqrt{x+2}$ في الفترة $[2,7]$:

A	5	B	-5	C	$-\frac{1}{5}$	D	$\frac{1}{5}$

18 ما الدالة الزوجية من الدوال الآتية :

A	$f(x)=cosx$	B	$f(x)=sinx$	C	$f(x)=tanx$	D	$f(x)=cscx$

19 اي من الآتي دالة فردية :

A	$f(x)=x^7$	B	$f(x)=\lvert x^5\rvert$	C	$f(x)=\sqrt{x+3}$	D	$f(x)=x^2+3$

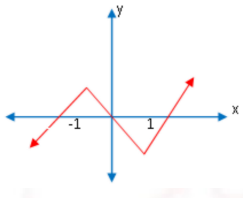
20 مدى الدالة $f(x)=2\sqrt{x^2}+3$:

A	$[3,\infty)$	B	$(2,\infty)$	C	$(-3,\infty)$	D	$[-3,2]$

21 الدالة $f(x)=x^3+5x^2-x$:

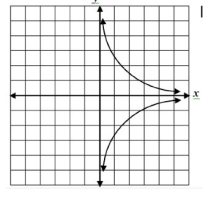
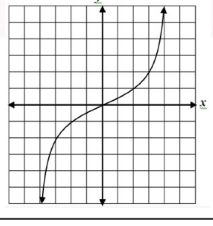
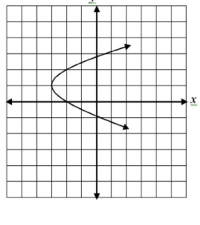
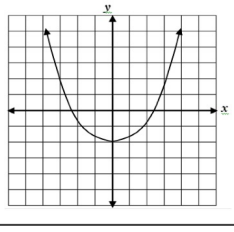
A	فردية وزوجية معاً	B	ليست فرديه ولا زوجية	C	زوجية	D	فردية

22 حدد الفترة التي تتناقص فيها الدالة المرسومة :

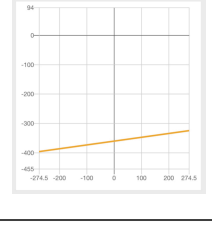
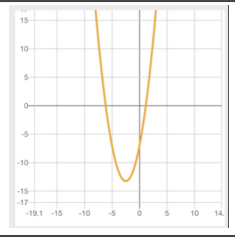
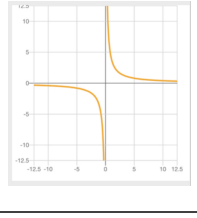
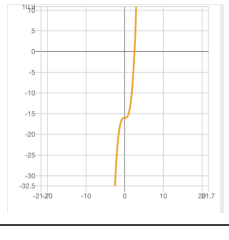


A	$(-\infty,-1)$	B	$(1,\infty)$	C	$(-1,1)$	D	$(-\infty,0)$

23 المنحنى المتماثل حول نقطة الأصل في المنحنيات التاليه هو :

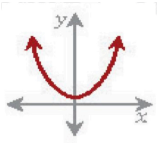
A		B		C		D	

24 الدالة التي ليس لها معكوس :

A		B		C		D	

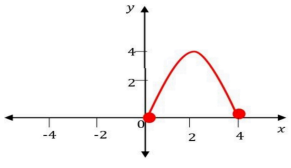
اختر الإجابة الصحيحة :

25 مانوع الدالة في الشكل المجاور :



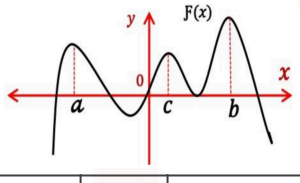
A	B	C	D
زوجية	ليست زوجية ولا فردية	فردية	فردية وزوجية

26 ما مدى الدالة في الشكل المجاور :



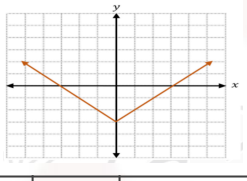
A	B	C	D
$(0,4)$	$(0,4]$	$[0,4]$	$(-4,4)-\{0\}$

27 في الشكل المجاور تكون $f(c)$ في الفترة (a,b) قيمة :



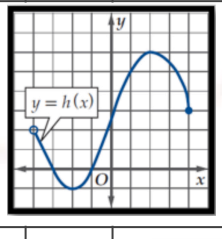
A	B	C	D
صغرى مطلقة	صغرى محلية	عظمى مطلقة	عظمى محلية

28 ما لدالة الرئيسة الأم للدالة الموضحة في الشكل المجاور :



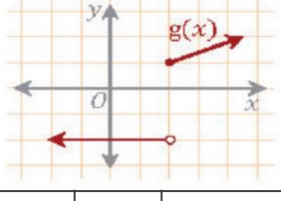
A	B	C	D
$y=\|x\|+3$	$y=\|x\|$	$y=\|x-3\|$	$y=\|x\|-3$

29 ما مجال الدلة $f(x)$ في التمثيل البياني المجاور :



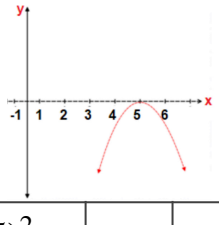
A	B	C	D
$[-4,4]$	$(-4,4)$	$(-4,4]$	$(-1,3)$

30 ما نوع عدم الاتصال في التمثيل البياني المجاور :



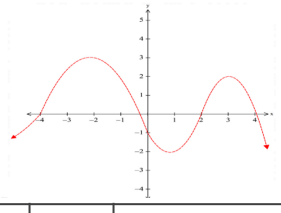
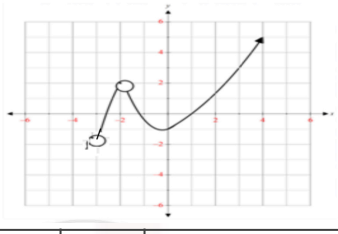
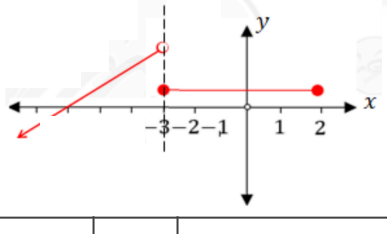
A	B	C	D
لا نهائي	قفزي	قابل للإزالة	انفصالي

31 في الشكل المجاور اذا كانت $f(x)=x^2$ هي الدالة الرئيسية الأم للدالة $g(x)$ فإن معادلة $g(x)$ هي :



A	B	C	D
$(x+5)^2$	$-(x+5)$	$(x-5)^2$	$-(x-5)^2$

اختر الإجابة الصحيحة :

32	مجال الدالة $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+6x+9}$:							
	A	$\{x \mid x \neq -3, x \in R\}$	B	$\{x \mid x \neq 5, x \in R\}$	C	$\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$	D	$\{x \mid x \neq 2, x \in R\}$
33	الدالة الممثلة في الرسم البياني الاتي لها قيمة عظمى مطلقة عندما x تساوي : 							
	A	-2	B	-1	C	1	D	3
34	في الشكل المجاور مجال الدالة هو : 							
	A	$(-3,-2)\cup(-2,\infty)$	B	$(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$	C	$(-3,-1)\cup(-1,\infty)$	D	$(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$
35	ان الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+x$ دالة :							
	A	فردية	B	زوجية	C	ليست زوجية ولا فردية	D	فردية وزوجية معاً
36	حدد نوع الاتصال في الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x-8}$ عند $x=8$:							
	A	لا نهائي	B	قفزي	C	قابل للإزالة	D	غير محدد
37	اذا كانت $f(x)=\begin{cases}4x, 0\le x\le 15\\ 60, 15<x<24\\ -6x+15, 24\le x\le 40\end{cases}$ فإن $f(5)$ تساوي :							
	A	60	B	20	C	15	D	-20
38	حدد مجال الدالة في الشكل المجاور : 							
	A	$(-\infty,-3)\cup[-3,-2]$	B	R	C	$(-\infty,0)$	D	R^+
39	أي الخيارات يجعل الدالة التالية غير متصلة $f(x)=\dfrac{x^2}{x-49}$:							
	A	$x=0$	B	$x=7$	C	$x=49$	D	$x=-49$

اختر الإجابة الصحيحة :

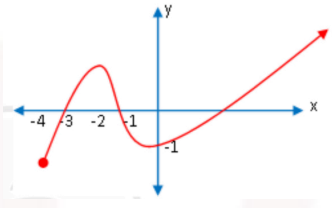
40 أي العلاقات الآتية متماثله حول محور x :

A	$-x^2-yx=2$	B	$x^3y=8$	C	$y=\|x\|$	D	$-y^2=-4x$

41 اذا كانت $f(x)=\begin{cases}4x, 0\le x\le 15\\ 60, 15<x<24\\ -x+15, 24\le x\le 40\end{cases}$ فإن $f(25)$ تساوي :

A	10	B	5	C	-10	D	-15

42 في الشكل المجاور مجال الدالة هو :



A	$[-3,\infty)$	B	$[-4,\infty)$	C	$[-3,-2)\cup(-2,\infty)$	D	$(-4,\infty)$

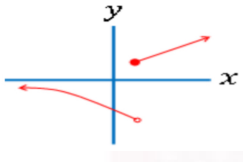
43 اذا كانت $f(x)=2x^2+5x+3$ فعند أي نقطة تقطع الدالة المحور y :

A	$(0,3)$	B	$(3,0)$	C	$(0,2)$	D	$(0,-3)$

44 تكتب المجموعة الاتية $-5\le x<-2$ باستخدام رمز الفترة :

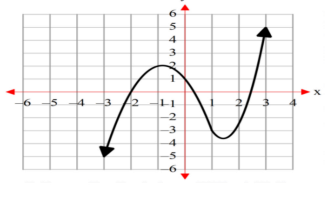
A	$[-5,-2)$	B	$(-5,-2]$	C	$(-5,-2)$	D	$[-5,-2]$

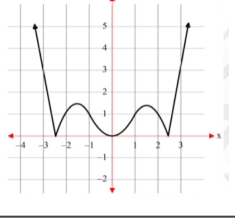
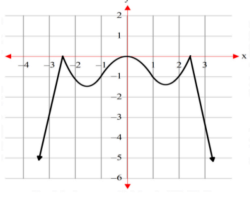
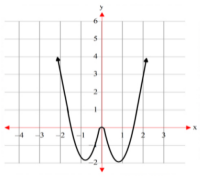
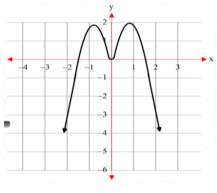
45 التمثيل البياني المجاور يمثل دالة غير متصلة
مانوع عدم الاتصال :



A	لانهائي	B	قابل للإزالة	C	قفزي	D	غير ذلك

46 اذا كانت $f(x)$ هي الدالة الممثلة بالمنحنى المجاور
فإن منحنى الدالة $g(x)=\|f(x)\|$ هو :



A		B		C		D	

اختر الإجابة الصحيحة :

47 الدالة x دالة $f(x) = x^5 + 3x^3 - x$:

A	B	C	D
فردية	ليست فردية ولا زوجية	زوجية	فردية وزوجية

48 اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على R وكان لها قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x = 3$ وقيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = -2$ ، فأي التالي صحيح :

A	B	C	D
$lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	يوجد صفر للدالة في الفترة $[-2,3]$	القيمة العظمى > القيمة الصغرى	الدالة زوجية

49 أوجد متوسط معدل التغير للدالة $x^2 - 4x + 6$ في الفترة $[0,6]$:

A	B	C	D
6	24	2	10

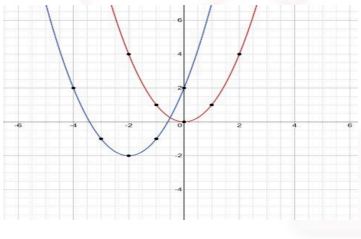
50 اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[-2,10]$ ومتزايدة في $(-2,3) \cup (7,10)$ ومتناقصة في $(3,7)$ فإن $f(x)$ لها قيمة عظمى محلية عند $x = \ldots\ldots$:

A	B	C	D
3	7	10	-2

51 اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a, x \geq 2 \\ x + 5, x < 2 \end{cases}$ فما قيمة الثابت a التي تجعل الدالة متصلة عند $x = 2$:

A	B	C	D
-1	1	-2	-1

52 اذا كانت الدالة $f(x)$ هي الدالة الأم لـ $g(x)$ وكانت $f(x) = x^2$ فإن $g(x)$ تساوي :



A	B	C	D
$x^2 + 2$	$x^2 - 2$	$x^2 + 4x + 2$	$x^2 - 4x + 2$

53 المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$ فإن السرعة المتوسطة من الفترة 0 إلى 2 ثانية :

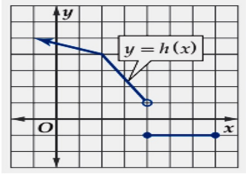
A	B	C	D
64	32	0	-32

54 الدالة الرئيسية الأم للدالة $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$:

A	B	C	D
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \frac{1}{x}$

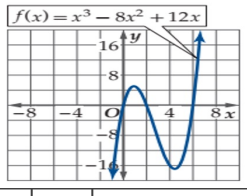
اختر الإجابة الصحيحة :

55 اعتماداً على الشكل المقابل $h(4)$ تساوي :



A	-1	B	1	C	4	D	غير معرفة

56 أصفار الدالة الممثلة في الشكل المقابل :

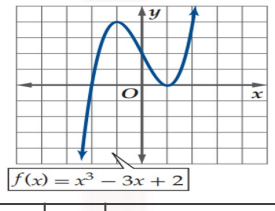


A	0,1,5	B	0,2,6	C	0,8, − 8	D	لايوجد

57 أصفار الدالة $f(x) = -\frac{2}{3}x - 12$ هي :

A	-18	B	-12	C	12	D	18

58 المقطع y للدالة الممثلة في الشكل المقابل :

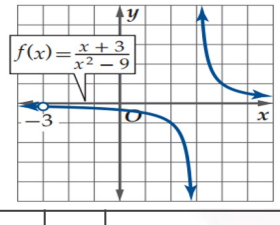


A	-2	B	0	C	1	D	2

59 اذا كان منحنى $g(x)$ ينتج من منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ بانسحاب وحدتين لليسار ثم انعكاس حول محور x ثم انسحاب ثلاث وحدات إلى الأسفل فأي مما يلي يمثل الدالة $g(x)$:

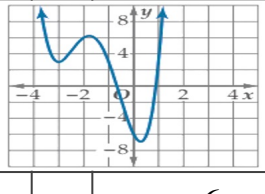
A	$g(x) = \sqrt{-x+2} - 3$	B	$g(x) = -\sqrt{x+2} - 3$	C	$g(x) = -\sqrt{x-2} + 3$	D	$g(x) = \sqrt{x+2} - 3$

60 التمثيل البياني في الدالة المقابلة يمثل دالة :



A	متصلة عند $x = 3$	B	غير متصلة عند $x = 3$ عدم اتصال قفزي	C	غير متصلة عند $x = 3$ عدم اتصال قابل للإزالة	D	غير متصلة عند $x = 3$ عدم اتصال لا نهائي

61 القيمة الصغرى المطلقة للدالة الممثلة بالشكل المجاور :



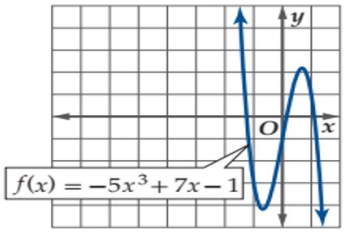
A	-7	B	3	C	6	D	غير موجوده

62 أي من الدوال التالية لها عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 2$:

A	$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$	B	$f(x) = \frac{x^2+4}{x-2}$	C	$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$	D	$f(x) = \sqrt{x-2}$

اختر الإجابة الصحيحة :

63 أي مما يلي يصف سلوك طرفي التمثيل البياني :



A	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	B	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	C	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	D	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

64 اذا كانت $f(x) = x^2 + x \quad g(x) = 9x$ فإن $(f+g)(x)$ يساوي :

A	$x^2 + 10x$	B	$x^2 + 8x$	C	$x^3 + 10x$	D	$x^2 + 9x$

65 اذا كانت $f(x) = x^2 + x \quad g(x) = 9x$ فإن $(f.g)x$ يساوي :

A	$9x^2 + 9x$	B	$9x^3 + 9x$	C	$9x^3 + 9$	D	$9x^3 + 9x^2$

66 اذا كانت $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = x^2 + 4$ فإن مجال $(\frac{f}{g})(x)$:

A	$(-\infty,0]$	B	$(-\infty,\infty)$	C	$[0,\infty)$	D	$(0,\infty)$

67 اذا كانت $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = x^2 + 4$ فإن مجال $(f-g)(x)$ هو :

A	$(-\infty,0]$	B	$(-\infty,\infty)$	C	$[0,\infty)$	D	$[0,\infty)$

مفاتيح الإجابات

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	C	B	B	A	C	B	B	A	A
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
A	A	A	D	B	C	D	D	D	C
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
B	C	B	D	C	A	B	B	C	B
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
D	C	A	B	A	A	A	A	A	D
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
A	C	B	A	A	C	A	A	B	C
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
D	B	D	A	B	A	D	B	C	A
			67	66	65	64	63	62	61
			C	D	D	A	B	A	A

الفصل الثاني

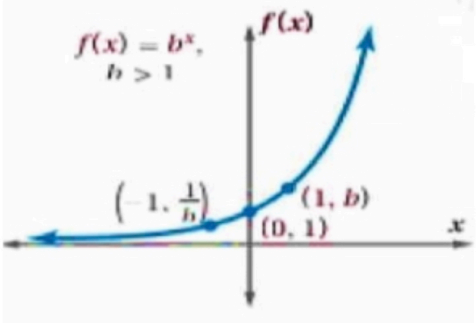
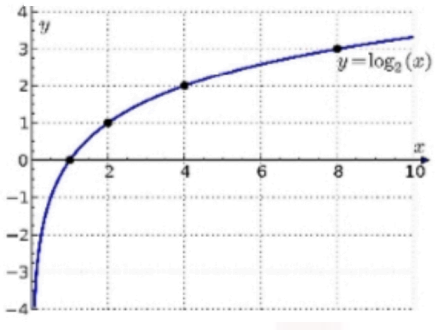
العلاقات والدوال

الأسية واللوغاريتمية

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

- الدالة اللوغاريتمية : هي دالة تكتب على الصورة $f(x) = log_b x$ حيث $b \neq 1$
- الدالة الأسية : هي دالة تكتب على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0 ، b > 0 ، b \neq 1$

خصائص الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

المقارنة	الدالة الأسية	الدالة اللوغاريتمية
الدالة الرئيسية الأم	$y = b^x$	$log_b x = y$
التمثيل البياني	$y = 2^x$ 	$log_b x = y$ 
المجال	R	R^+
المدى	R^+	R
خط التقارب	محور x	محور y
مقطع المحور	$y = 1$	$x = 1$
خصائص منحنى الدالة	$f(x) = b^x$ النمو الأسي $b > 1$: متصل، متباين، متزايد الاضمحلال الأسي $0 < b < 1$: متصل، متباين، متناقص	$f(x) = log_b x$ $b > 1$: متصل، متباين، متزايد $0 < b < 1$: متصل، متباين، متناقص

مجال ومدى الدالة الأسية واللوغاريتمية

الدالة الأسية	الدالة اللوغاريتمية
$f(x)=ab^{(cx+h)}+k$ مجالها دائماً R	$f(x)=a\log(cx+h)+k$ المدى دائماً R
المدى $k\neq 0$: $a<0$ → $(-\infty,k)$؛ $a>0$ → (k,∞) $k=0$: $a<0$ → $(-\infty,0)$؛ $a>0$ → $(0,\infty)$	المجال $h\neq 0$: $a<0$ → $(-\infty,-\frac{h}{c})$؛ $a>0$ → $(-\frac{h}{c},\infty)$ $h=0$: $c<0$ → $(-\infty,0)$؛ $c>0$ → $(0,\infty)$
مثال: $f(x)=2^{x+3}-5$ المجال : R المدى : $(-5,\infty)$	مثال: $f(x)=\frac{1}{4}\log(x+1)-5$ المجال : $(-1,\infty)$ المدى : R

تطبيقات الدالة الأسية

دالة النمو الأسي

• تستخدم لحساب الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية

$A(t)=a(1+r)^t$

حيث a القيمة الابتدائية

r النسبة المئوية للنمو

t الفترة الزمنية

مثال :

يتوقع أن يزداد أنفاق عائلة بما نسبته 8.5 % سنوياً اذا كان انفاق العائلة عام 1430هو 80000فاوجد معادلة أسية تمثل انفاق العائلة منذ عام 1430 ؟

$y=80000(1+0.085)^t$

$y=80000(1.085)^t$

دالة الاضمحلال الأسي

• تستخدم لحساب النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية

$A(t)=a(1-r)^t$

حيث a القيمة الابتدائية

r النسبة المئوية للاضمحلال

t الفترة الزمنية

مثال :

يحتوي كوب من الشاي على $68mg$من الكافايين نسبته 12.5 % أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافايين في جسم شخص بعد شربه كوب من الشاي ثم قدر كمية الكافايين في جسمه بعد ساعتين من شربه ؟

$A(2)=68(1-0.125)^t$

$A(2)=68(0.875)^2=52.06mg$

الربح المركب

• هو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر أو رأس المال مضاف اليه أي ارباح سابقة

$A=P(1+\frac{r}{n})^{nt}$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة

Pالمبلغ الأصلي ، n عدد مرات إضافة الربح الى رأس المال

مثال :

استثمر علي مبلغ 10000ريال في مشروع تجاري متوقع ربح سنوي نسبته 12 % حيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهرياً ، ما المبلغ الكلي بعد 5سنوات؟

$A=10000(1+\frac{0.12}{24})^{24\times 5}$

$A=181939.67$

حل المعادلات الأسية والمتباينات الأسية

المعادلات الأسية	المتباينات الأسية
• المعادلة الأسية : هي المعادلة التي تظهر فيها المتغيرات في مواقع الأسس . • اذا كان $b>0 ، b\neq 1$ فإن $b^x=b^y$ اذا وفقط اذا كان $x=y$ • للتذكير $a^0=1 ، a^{-1}=\frac{1}{a}$ في كثير من الأسئلة تكون الطريقة الأسهل للحل هي تجربة الخيارات	• المتباينة الأسية : تظهر فيها المتغيرات في مواقع الأسس. $b>1$: $b^x>b^y \Leftrightarrow x>y$ $0<b<1$: $b^x>b^y \Leftrightarrow x<y$ • للتذكير : عند الضرب بعدد سالب أو القسمة عليه تنعكس إشارة التباين ($>$ يصبح $<$ و $<$ يصبح $>$).
مثال: $2^x=32$ $2^x=2^5 \Rightarrow x=5$	مثال: $2^x>2^5 \Rightarrow x>5$ $(\frac{1}{2})^x>(\frac{1}{2})^3 \Rightarrow x<3$

التحويل من الصورة اللوغاريتمية الى الصورة الأسية والعكس

الصورة اللوغاريتمية

• $log_b x=y$ لتحويلها على الصورة الأسية تكون $b^y=x$

مثال :

$log_4 16=2$

الصورة الأسية : $4^2=16$

الصورة الأسية

• $b^y=x$ لتحويلها على الصورة اللوغاريتمية تكون $log_b x=y$

مثال :

$4^3=64$

الصورة اللوغاريتمية : $log_4 64=3$

اللوغاريتمات العشرية

اللوغاريتم العشري

- عند كتابة اللوغاريتم دون أساس فإن ذلك يعني ان الاساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$

مثال :

$\log 8$ تعني : $\log_{10} 8$

صيغة تغيير الأساس

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

مثال :

$$\log_6 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6}$$

خصائص اللوغاريتمات

اذا كانت x, y, b أعداد حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

الخاصية	الصيغة	مثال
خاصية التساوي	$\log_b x = \log_b y$ اذا واذا فقط اذا كانت $x = y$	$\log_8 6a^3b$ الصيغة المطولة : $= \log_8 6 + \log_8 a^3 + \log_8 b$ $= \log_8 6 + 3\log_8 a + \log_8 b$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	
خاصية القسمة	$\log_b x^m = m\log_b x$	$-5\log_2(x+1) + 3\log_2(6x)$ الصيغة المختصره $= \log_2(x+1)^{-5} + \log_2(6x)^3$ $= \log_2(\frac{216x^3}{(x+1)^5})$
خاصية لوغاريتم القوة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	

خصائص اللوغاريتمات الأساسية

الخاصية	مثال
$log_b b = 1$	$log_7 7 = 1$
$log_b 1 = 0$	$log_5 1 = 0$
$log_b b^x = x$	$log_2 2^4 = 4$
$b^{log_b x} = x, x > 0$	$3^{log_3 5} = 5$

المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

عبارة لوغاريتمية واحدة	أكثر من عبارة لوغاريتمية		المتباينات اللوغاريتمية
	عبارتين لوغاريتمتين متساويتين	مجموع لوغاريتمين أو حاصل طرحهما نستخدم خصائص اللوغاريتمات	
$log_b x = a$	من خاصية التساوي $log_b x = log_b y \Leftrightarrow x = y$	مثال : $log_6 x + log_6(x+5) = log_6 36$	خاصية التباين 1 : ليكن $x > 0, b > 1$ فإنه :
نحولها للصورة الأسية ثم نحل المعادلة الاسية	مثال : $log_3(x^2 - 15) = log_3 2x$	$log_6 x(x+5) = log_6 36$	اذا كان $log_b x > y$ فإن $x > b^y$
مثال :	$x^2 - 15 = 2x$	$x(x+5) = 36$	اذا كان $log_b x < y$ فإن $0 < x < b^y$
اوجد قيمة $log_3 81$	$x^2 - 2x - 15 = 0$	$x^2 + 5x = 36$	خاصية التباين 2 :
$log_3 81 = y$	$(x-5)(x+3) = 0$	$x^2 + 5x - 36 = 0$	اذا كان $b > 1$
$3^y = 81$	$x = 5, x = -3$	$(x+9)(x-4) = 0$	فإن $log_b x > log_b y$ اذا واذا فقط اذا كان $x > y$
$3^y = 3^4$	الحل الصحيح $x = 5$	$x = -9, x = 4$	مثال :
$y = 4$	لأن اللوغاريتمات لايمكن أن تكون سالبة	الحل الصحيح $x = 4$	حل المتباينة $log_4 x \geq 2$
$log_3 81 = 4$		لأن اللوغاريتمات لايمكن أن تكون سالبة	$x \geq 4^2$
			$x \geq 16$
			$[16, \infty)$
ملاحظه : عند حل المعادلة اللوغاريتمية لابد من التحقق من الحل بالتعويض أو تحديد المجال والتأكد من وجود الحل في مجال الدالة			

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	اذا كانت $log_x 81 = 2$ فإن x تساوي :						
	A	9	B	81	C	27	D	3
2	اذا كانت $f(x) = 2x^n - 16$ أوجد قيمة n التي تجعل $f(2) = 0$:						
	A	3	B	4	C	2	D	5
3	اذا كانت $3^{x+7} = 9^{x+2}$ فما قيمة x :						
	A	2	B	3	C	4	D	5
4	اذا كانت $log_x(32) = 5$ فما قيمة x :						
	A	1	B	2	C	5	D	32
5	الصورة الأسية $5^3 = 125$ تكافئ :						
	A	$log_5 125 = 3$	B	$3log_5 = 125$	C	$log_5 3 = 125$	D	$log_2 125 = 5$
6	ما حل المتباينة $2^{x+2} > \frac{1}{64}$:						
	A	$x > -8$	B	$x > 8$	C	$x < -8$	D	$x > -4$
7	حول الصورة اللوغاريتمية التالية إلى أسية $log_x y = k$:						
	A	$x^k = y$	B	$y^x = k$	C	$k^x = y$	D	$k^y = x$
8	ماقيمة $log_2 5 + log_2 4 = \ldots$:						
	A	$log_2 20$	B	$log_4 20$	C	$log_2 \frac{5}{4}$	D	$log_4 \frac{5}{4}$
9	ماقيمة $log_{125} 5$:						
	A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{2}$	C	3	D	2
10	ما قيمة x فيما يلي $3^{x-1} = 27$:						
	A	5	B	4	C	3	D	2

اختر الإجابة الصحيحة :

11	الصورة الأسية للمتباينة $log_2 x \geq 3$:							
	A	$x \geq 3^2$	B	$x \leq 3^2$	C	$x \geq 2^3$	D	$x \leq 2^3$
12	أوجد قيمة x فيما يلي $2^{6x-3} = 8^{-3}$:							
	A	-1	B	4	C	1	D	21
13	أوجد قيمة x فيما يلي $6^{(4x-2)} = 36$:							
	A	5	B	4	C	6	D	1
14	اوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $1 + 2log_2(x+1) = 5$:							
	A	3	B	-3	C	1	D	2
15	ما قيمة المقدار $log_{27}81 = \ldots .$:							
	A	$\frac{1}{8}$	B	$\frac{4}{3}$	C	$\frac{5}{36}$	D	$\frac{1}{3}$
16	ماقيمة $log_2\frac{1}{32}$:							
	A	5	B	-5	C	$\frac{1}{5}$	D	$-\frac{1}{5}$
17	ما قيمة المقدار $log_4 64$:							
	A	4	B	16	C	3	D	9
18	ما قيمة المقدار $log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{216}$:							
	A	1	B	2	C	3	D	6
19	ماقيمة المقدار $log_3 13 - log_3 5$:							
	A	$log_5 13$	B	$log_3\frac{13}{5}$	C	$log_{13}5$	D	$\frac{13}{5}$
20	اذا كان $log_3 9^{2-x} = 0$ فما قيمة x :							
	A	1	B	2	C	-1	D	-2

اختر الإجابة الصحيحة :

21	المقدار $2log_5x - log_5(2x-5)$ يساوي :							
	A	$log_5\frac{5}{2x-5}$	B	$log_5\frac{2x-5}{x^2}$	C	$log_5\frac{x^2}{2x-5}$	D	$log_5\frac{x}{2x+5}$
22	عين مجال الدالة $f(x) = log\sqrt{x^2-4}$:							
	A	$\{x \mid x \in R-[-2,2]\}$	B	$\{x \mid x \in R-(-2,2)\}$	C	$\{x \mid x \in R-[-2,2)\}$	D	$\{x \mid x \in R-(-2,2]\}$
23	ماقيمة $log_{1000}10$:							
	A	3	B	$\frac{1}{3}$	C	$-\frac{1}{3}$	D	-3
24	منحنى الدالة الأسية $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ يقطع المحور y في النقطة :							
	A	(0,0)	B	(0,1)	C	(1,0)	D	(1,1)
25	ما لمقطع y للدالة اللوغاريتمية $f(x) = log_2(x+1)+3$:							
	A	3	B	2	C	1	D	0
26	مدى الدالة $f(x) = log_3x$:							
	A	R	B	$[3,\infty)$	C	R^+	D	W
27	قيمة العبارة $log_2(log_2x^{24}) - log_2(log_2x^3)$:							
	A	2	B	3	C	4	D	8
28	ما قيمة x التي تحقق المتباينة $(9)^{x-2} > (\frac{1}{27})^x$:							
	A	$x < -2$	B	$x > 3$	C	$x > \frac{4}{5}$	D	$x < \frac{4}{5}$
29	اذا كانت $f(x) = logx$ بحيث $1 \le x \le 10$ فإن :							
	A	$1 \le f(x) \le 10$	B	$0 \le f(x) \le 1$	C	$0 \le f(x) \le 10$	D	$10 \le f(x) \le 100$
30	ماقيمة x التي تحقق المعادلة $\frac{2}{-4^{1-x}} = -2$:							
	A	2	B	1	C	-1	D	-2

اختر الإجابة الصحيحة :

31 ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1}+7=8$:

A	2	B	1	C	4	D	5

32 ما قيمة x التي تحقق المتباينة $(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{8}<0$:

A	$x<-8$	B	$x<-3$	C	$x>\frac{1}{2}$	D	$x>3$

33 ما الصورة الأسية المكافئة للعبارة اللوغاريتمية $log100=2$ ::

A	$100=10^2$	B	$100=2^{10}$	C	$10=100^2$	D	$2=10^{100}$

34 قيمة العبارة اللوغاريتمية $3log_3(9)-log_5\frac{1}{25}$:

A	12	B	10	C	8	D	4

35 أي مما يلي يمثل حلاً للمعادلة $log_4x-log_4(x-1)=\frac{1}{2}$:

A	$-\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{2}$	C	-2	D	2

مفاتيح الإجابات

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	A	A	A	A	A	B	B	A	A
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
B	B	C	C	B	B	A	D	A	C
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
B	B	C	B	A	A	B	B	A	C
					35	34	33	32	31
					D	C	A	D	B

الفصل الثالث

المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطابقات الأساسية

المتطابقات النسبية	مثال
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$	بسط العبارة : $\tan\theta\ \cos^2\theta$ $\tan\theta\ \cos^2\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ \cos^2\theta = \sin\theta\ \cos\theta$
متطابقات المقلوب	**مثال**
$sec\,\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$, $\cos\theta = \frac{1}{sec\,\theta}$, $\sec\theta \neq 0$ $csc\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$, $\sin\theta = \frac{1}{csc\,\theta}$, $\csc\theta \neq 0$ $cot\,\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\theta \neq 0$, $\tan\theta = \frac{1}{cot\,\theta}$, $cot\,\theta \neq 0$	بسط العبارة : $\frac{\sin\theta\ csc\,\theta}{\cot\theta}$ $\frac{\sin\theta\ csc\,\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta\ \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\tan\theta}} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} = 1 \times \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta$
متطابقات فيثاغورس	**مثال**
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $90° \leq \theta \leq 180°$ فأوجد $\cos\theta$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ $\Rightarrow \cos^2\theta + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ لأن $90° \leq \theta \leq 180°$
متطابقات الزاويتين المتممتين	**مثال**
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$	بسط العبارة : $sec\,\theta\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $sec\,\theta\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sec\,\theta\ \cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} \times \cos\theta = 1$
متطابقات الدوال الزوجية و الدوال الفردية	**مثال**
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$	بسط العبارة : $\frac{cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ $\frac{cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{cos\,\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين و الفرق بينهما

متطابقات المجموع	مثال
$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة الدقيقة لـ : $\sin 75°$ $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$ $= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
متطابقات الفرق	**مثال**
$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	أوجد القيمة الدقيقة للعبارة : $\cos 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18°$ $\cos 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18° = \cos(78° - 18°)$ $= \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية و نصفها

متطابقات المضاعفات	مثال
$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	إذا كان $270° \le \theta \le 360°$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد كل من 1) $\cos 2\theta$, 2) $\sin\frac{\theta}{2}$ 1) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{9}{25}\right) - 1 = \frac{18}{25} - 1 = \frac{-7}{25}$
متطابقات الأنصاف	θ في الربع الرابع لذلك $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني 2) $\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ $\sin\dfrac{\theta}{2} = +\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}} = +\sqrt{\dfrac{\frac{2}{5}}{2}} = +\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
$\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ $\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ $\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$, $\cos\theta \neq -1$	

حل المعادلات المثلثية

تحل المعادلات المثلثية بنفس طرق حل المعادلات الجبرية
لحل المعادلات المثلثية نضعها على احد الصور التالية :
$\sin\theta = a$, $\cos\theta = a$, $\tan\theta = a$

خلاف ذلك نحدد الربع الموجودة فيه الزاوية θ بتحديد إشارة الدالة المثلثية

إذا كانت الزاوية في الربع الأول الحل هو θ

إذا كانت الزاوية في الربع الثاني الحل هو $180° - \theta$

إذا كانت الزاوية في الربع الثالث الحل هو $180° + \theta$

إذا كانت الزاوية في الربع الرابع الحل هو $360° - \theta$

$\sin\theta = a$ أو $\cos\theta = a$
حيث $a = -1, 0, 1$

الناتج زاوية ربعية
$\theta = 0°, 90°, 180°, 270°, 360°$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة:

1	إذا كانت $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ ، $180° \le \theta \le 270°$ ، فإن $\sec\theta =$							
	A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	C	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	D	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
2	إذا كانت $\cos\theta = \frac{1}{3}$ حيث $270° < \theta < 360°$ فإن $\sin\theta =$							
	A	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	B	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	D	$\frac{8}{9}$
3	إذا كانت $\sec\theta = \frac{13}{12}$ ، $0° < \theta < 90°$ ، فإن $\sin\theta =$							
	A	$\frac{5}{13}$	B	$\frac{13}{5}$	C	$\frac{5}{12}$	D	$\frac{12}{5}$
4	إذا كانت $\cot\theta = 3$ حيث $0° < \theta < 90°$ فإن $\tan\theta =$							
	A	3	B	$\frac{1}{3}$	C	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	D	$\frac{3\sqrt{10}}{10}$
5	$\frac{\sec x}{\csc x} = \cdots$							
	A	$\tan x$	B	$\cot x$	C	$\sec x$	D	1
6	$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$ تكون سالبة في الربعين							
	A	الأول و الثاني	B	الثاني و الثالث	C	الثالث و الرابع	D	الرابع و الأول
7	أي مما يلي يكافئ العبارة : $\frac{\cos\theta \ \csc\theta}{\tan\theta}$ ؟							
	A	$\sin\theta$	B	$\tan^2\theta$	C	$\sec^2\theta$	D	$\cot^2\theta$
8	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = \cdots$							
	A	-1	B	0	C	0.5	D	1
9	تبسيط العبارة : $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$ هو							
	A	$\csc\theta$	B	$\cot\theta$	C	$\tan\theta$	D	$\sec\theta$
10	أي مما يلي يكافئ العبارة : $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$ ؟							
	A	$\csc\theta$	B	$\cos\theta$	C	$\tan\theta$	D	$\sec\theta$

اختر الإجابة الصحيحة :							
11	تبسيط العبارة: $(1-sin\theta)(1+sin\theta)$ هو						
	A	$cos^2\theta$	B	$sin^2\theta$	C	$tan^2\theta$	D	$sec^2\theta$
12	إذا كانت $csc^2\theta - cot^2\theta =$						
	A	-1	B	1	C	$tan\,\theta$	D	$cot\,\theta$
13	أي مما يلي يكافئ العبارة : $tan^2\theta\,(cot^2\theta - cos^2\theta)$ ؟						
	A	$sin^2\theta$	B	$cos^2\theta$	C	$tan^2\theta$	D	$cot^2\theta$
14	أي مما يأتي لا يكافئ $cos\theta$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$						
	A	$cot\theta\,sin\theta$	B	$tan\theta\,csc\theta$	C	$\frac{1-sin^2\theta}{cos\theta}$	D	$\frac{cos\theta}{cos^2\theta+sin^2\theta}$
15	أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{tan^2\theta+1}{tan^2\theta}$ ؟						
	A	$tan^2\,\theta$	B	$cos^2\,\theta$	C	$sin^2\,\theta$	D	$csc^2\,\theta$
16	$sec\theta\,tan^2\theta\, + \,sec\theta = \cdots$						
	A	$sec^3\theta$	B	$csc^3\theta$	C	$tan\,\theta$	D	$cot\,\theta$
17	$sin\theta\,cos\theta\,tan\theta\, + \,cos^2\,\theta\, = \cdots$						
	A	-1	B	1	C	$cos\theta$	D	$tan^2\theta$
18	القيمة الدقيقة لـ $sin15°$						
	A	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$	C	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	D	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
19	قيمة العبارة $sin\,15°\;cos45° + cos15°\,sin45°$ تساوي						
	A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	D	$-\frac{1}{2}$
20	ما القيمة الدقيقة لـ $cos\,45°\;cos15° + sin45°\,sin15°$ ؟						
	A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	B	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	C	$\frac{1}{2}$	D	1
21	ما القيمة الدقيقة للعبارة : $sin(60\,° + \theta)\,cos\theta - cos\,(60\,° + \theta)sin\theta$ ؟						
	A	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$	C	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	D	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

اختر الإجابة الصحيحة :							
22	قيمة θ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $sin^{-1}(cos\theta) = \frac{\pi}{6}$ هي						
	A	$\frac{\pi}{3}$	B	$\frac{\pi}{6}$	C	$\frac{\pi}{4}$	D	$\frac{5\pi}{12}$
23	قيمة $Sin^{-1}(cos72°)$ تساوي						
	A	$72°$	B	$18°$	C	$38°$	D	$108°$
24	إذا كان : $sinx = \cos 50°$ فإن $x = \cdots$						
	A	$10°$	B	$40°$	C	$50°$	D	$90°$
25	اذا كانت $\cos\theta = \frac{3}{5}$ حيث $270^\circ < \theta < 360^\circ$ فإن قيمة $\cos 2\theta$ الدقيقة تساوي						
	A	$-\frac{24}{7}$	B	$-\frac{7}{25}$	C	$\frac{7}{25}$	D	$-\frac{24}{25}$
26	إذا كان : $sin\theta = \frac{3}{5}$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإن : $sin2\theta =$.....						
	A	$-\frac{24}{7}$	B	$-\frac{7}{25}$	C	$\frac{7}{25}$	D	$-\frac{24}{25}$
27	إذا كان : $tan\theta = -2$ حيث $270° < \theta < 360°$ فإن : .... $cos2\theta = \cdots$						
	A	$-\frac{4}{3}$	B	$\frac{3}{5}$	C	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	D	$-\frac{3}{5}$
28	اذا كانت $\cos\theta = \frac{3}{5}$ حيث $270^\circ < \theta < 360^\circ$ فإن قيمة $\cos\frac{\theta}{2}$ الدقيقة تساوي						
	A	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	B	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	C	$2\frac{\sqrt{5}}{5}$	D	$-2\frac{\sqrt{5}}{5}$
29	إذا كانت $\cos\theta = \frac{1}{2}$ حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$ الدقيقة تساوي						
	A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	B	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{1}{4}$
30	إذا كان : $tan\theta = 2$ حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فإن : $tan2\theta = \cdots$						
	A	1	B	$\frac{3}{4}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D	$-\frac{4}{3}$
31	قيمة $\cos^4\theta - sin^4\theta$ هي						
	A	$sin2\theta$	B	$cos2\theta$	C	$cos\theta$	D	$cot\theta$

اختر الإجابة الصحيحة :								
32	$(sin\theta + cos\theta)^2 =$							
	A	$1 + sin2\theta$	B	$1 + cos2\theta$	C	$cos^2\theta + sin^2\theta$	D	$cos^2\theta - sin^2\theta$
33	قيمة $sin15°\ cos15°$ تساوي							
	A	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	B	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	C	$\frac{\sqrt{3}-2}{4}$	D	$\frac{1}{4}$
34	إذا كان $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ حيث أن $0° < \theta < 90°$ فإن $\sin2\theta$ تساوي							
	A	$\frac{3}{4}$	B	$\frac{8}{25}$	C	$\frac{24}{25}$	D	$\frac{5}{7}$
35	$1 - 2\sin^2\frac{\pi}{6} = \cdots$							
	A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D	0
36	أي الآتي يمثل المثال المضاد للعبارة : $sin\theta - cos\theta = 1$ ؟							
	A	0°	B	90°	C	180°	D	450°
37	حل المعادلة $cos\theta = 2$ حيث $0° \le \theta \le 360°$ هو							
	A	0°	B	90°	C	180°	D	لا يوجد حل
38	حل المعادلة $sin\theta = \frac{1}{2}$ حيث $0° \le \theta \le 360°$ هو							
	A	30°, 150°	B	30°, 120°	C	30°, 45°	D	60°, 120°
39	حل المعادلة $tan\theta = -1$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$							
	A	$\frac{7\pi}{4}$	B	$\frac{3\pi}{2}$	C	$\frac{5\pi}{4}$	D	$\frac{\pi}{4}$
40	إذا كان : $sec\theta + 2 = 0$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإن : $\theta = \cdots$							
	A	60°	B	90°	C	120°	D	240°
41	حل المعادلة $3\cos^2\theta - 4\cos\theta = 0$ حيث $0° < \theta \le 180°$							
	A	30°	B	90°	C	30° , 330°	D	لا يوجد حل
42	حل المعادلة $sin2\theta = cos\theta$ حيث $0° < \theta < 180°$ هو							
	A	30°	B	30° , 120°	C	30° , 90°	D	30° , 90° , 150°

مفاتيح الإجابات

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	B	A	D	C	D	D	B	A	B	A	B	D
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
D	B	B	B	A	D	A	A	C	B	A	D	B
39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27
A	A	D	A	A	C	D	A	B	D	C	D	D
										42	41	40
										D	B	C

مجموعة رفعة الرياضيات

الفصل الرابع

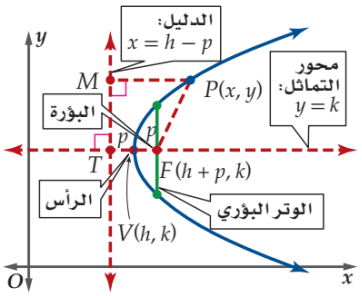
القطوع المخروطية

القطع المكافئ

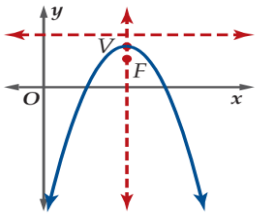
القطع المكافئ :

هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة هي البؤرة و مستقيم ثابت هو الدليل .

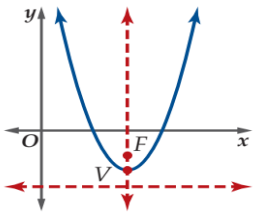
- في معادلة القطع المكافئ يكون التربيع لأحد المتغيرين فقط
- تعتمد صفات القطع المكافئ على الحد الخالي من التربيع
- المسافة من الرأس إلى البؤرة تساوي المسافة من الرأس إلى الدليل تساوي c



القطع المكافئ المفتوح رأسياً



$c < 0$



$c > 0$

معادلته $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

- **الرأس** $(h\,,k)$
- **البؤرة** $(h\,,k+c)$
- **الدليل** $y = k - c$
- **محور التماثل** $x = h$
- **طول الوتر البؤري** $|4c|$

مثال

حدد صفات القطع الذي معادلته $(x-3)^2 = 12(y-7)$

الصورة القياسية : $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

$h = 3 \;,\; k = 7 \;,\; 4c = 12 \implies c = 3$

الاتجاه : مفتوح رأسيا الى أعلى

الرأس : $(h\,,\,k) = (3\,,\,7)$

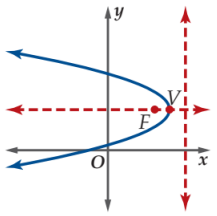
البؤرة : $(h\,,\,k+c) = (3\,,\,7+3) = (3\,,\,10)$

الدليل : $y = k - c \longrightarrow y = 7 - 3 \longrightarrow y = 4$

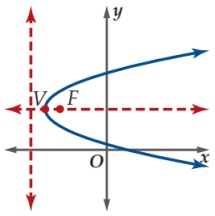
محور التماثل : $x = h \longrightarrow x = 3$

طول الوتر البؤري: $|4c| = 12$

القطع المكافئ المفتوح أفقياً



$c < 0$



$c > 0$

معادلته $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

- **الرأس** $(h\,,k)$
- **البؤرة** $(h+c\,,k)$
- **الدليل** $x = h - c$
- **محور التماثل** $y = k$
- **طول الوتر البؤري** $|4c|$

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة :

البؤرة $(-3\,,-2)$ **الرأس** $(1\,,-2)$

بما أن الرأس و البؤرة مشتركان بالإحداثي y **فإن المنحنى مفتوح افقيا**

الرأس $(h\,,\,k) = (1\,,\,-2)$

$\longrightarrow h = 1 \;,\; k = -2$

البؤرة $(h+c\,,\,k) = (-3\,,\,-2)$

$h + c = -3 \longrightarrow 1 + c = -3 \longrightarrow c = -4$

وبما أن c **سالبة فالمنحنى مفتوح لليسار**

معادلة القطع :

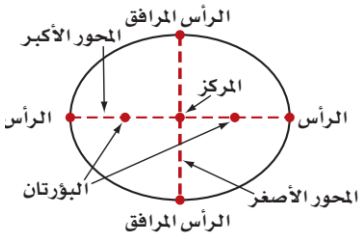
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$

$(y+2)^2 = -16\,(x-1)$

القطع الناقص

القطع الناقص :

هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً . و تسمى هاتان النقطتان البؤرتان .

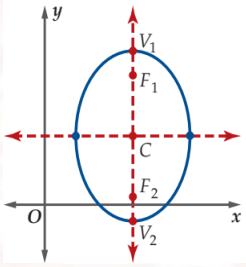


- في معادلة القطع الناقص يكون التربيع لكلا المتغيرين .
- تعتمد صفات القطع الناقص على المتغير الذي له المقام الأكبر $(a > b)$
- البعد بين كل رأس و المركز تساوي a البعد بين كل بؤرة و المركز تساوي c .
  البعد بين كل رأس مرافق و المركز تساوي b

القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسياً	مثال

معادلته $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

- المركز $(h\,,k)$
- البؤرتان $(h\,,k\pm c)$
- الرأسان $(h\,,k\pm a)$
- الرأسان المرافقان $(h\pm b\,,k)$
- معادلة المحور الأكبر $x=h$ و طوله $2a$



المحور الأصغر $y=k$ و طوله $2b$

- العلاقة بين $a\,,b\,,c$ هي $c^2=a^2-b^2$
- طول البعد البؤري $2c$

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$$

الصورة القياسية : $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

الاتجاه : المحور الأكبر رأسي

$h=-2\,,\ k=0\ ,\ a^2=49\longrightarrow a=7\ ,b^2=9\longrightarrow \mathrm{b}=3$

$,c=\sqrt{a^2-b^2}\longrightarrow c=\sqrt{49-9}\longrightarrow \mathrm{c}=6.3$

المركز: $(h\,,\ k)=(-2\,,\ 0)$

البؤرتان: $(h\,,\ k\pm c)=(-2\,,\ 0\pm 6.3)=(-2\,,\pm 6.3)$

الرأسان: $(h\,,\ k\pm a)=(-2\,,\ 0\pm 7)=(-2\,,\pm 7)$

الرأسان المرافقان:

$(h\pm b\,,k)=(-2\pm 3\,,0)\ \ \rightarrow\ (1\,,\ 0)(-5\,,\ 0)$

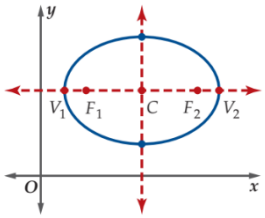
المحور الأكبر : $x=h\longrightarrow x=-2$

المحور الأصغر: $y=k\longrightarrow y=0$

القطع الناقص الذي محوره الأكبر أفقياً	مثال

معادلته $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

- المركز $(h\,,k)$
- البؤرتان $(h\pm c,k)$
- الرأسان $(h\pm a,k)$
- الرأسان المرافقان $(h\,,k\pm b)$
- معادلة المحور الأكبر $y=k$ و طوله $2a$



المحور الأصغر $x=h$ طوله $2b$

- العلاقة بين $a\,,b\,,c$ هي $c^2=a^2-b^2$

طول البعد البؤري $2c$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة

الرأسان $(4\,,3),\ (4,-9)$ ، **وطول المحور الأصغر** 8 **وحدات .**

بما أن أحداثي x متساويان للرأسين فالمحور الأكبر رأسي .

المركز هو نقطة المنتصف بين الرأسين

$$(h\,,\ k)=\left(\frac{4+4}{2}\ ,\ \frac{3-9}{2}\ \right)=(4\,,-3)$$

طول المحور الأصغر 8 وحدات $\quad 2b=8\longrightarrow b=4$

المسافة بين المركز و أي من الرأسين

$$a=\sqrt{(4-4)^2+(3+3)^2}\ \longrightarrow a=6$$

معادلة القطع

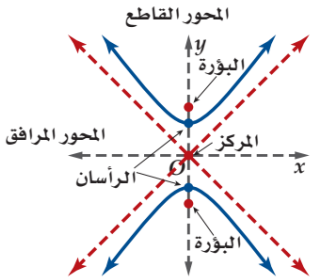
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1\rightarrow\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$$

القطع الزائد

القطع الزائد:

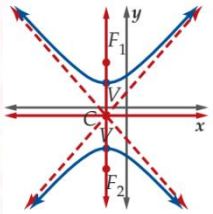
هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي القيمة المطلقة للفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتين يساوي مقداراً ثابتاً . و تسمى هاتان النقطتان البؤرتان .

- في معادلة القطع الزائد يكون التربيع لكلا المتغيرين .
- تعتمد صفات القطع الزائد على الحد الذي له الإشارة الموجبة
- البعد بين كل رأس و المركز تساوي a البعد بين كل بؤرة و المركز تساوي c.



القطع الزائدالذي محوره القاطع رأسياً	مثال

معادلته $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$



- المركز $(h\,,k)$
- البؤرتان $(h\,,k\pm c)$
- الرأسان $(h\,,k\pm a)$
- معادلة المحور القاطع $x=h$ و طوله $2a$
- معادلة المحور المرافق $y=k$ و طوله $2b$
- العلاقة بين $a\,,b\,,c$ هي $c^2=a^2+b^2$
- طول البعد البؤري $2c$
- معادلة خطوط التقارب $(y-k)=\pm\dfrac{a}{b}(x-h)$

حدد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$$

الصورة القياسية : $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

$h=0\,,\ k=0\,,a^2=9\longrightarrow a=3\,,b^2=16\longrightarrow b=4$

$c=\sqrt{a^2+b^2}\longrightarrow c=\sqrt{9+16}\longrightarrow c=5$

الاتجاه : رأسي

المركز: $(h\,,\ k)=(0\,,\ 0)$

البؤرتان : $(h\,,\ k\pm c)=(0\,,\ 0\pm 5)\rightarrow (0\,,5),(0,-5)$

الرأسان : $(h\,,\ k\pm a)=(0\,,\ 0\pm 3)\rightarrow (0\,,2),(\,0\,,-2)$

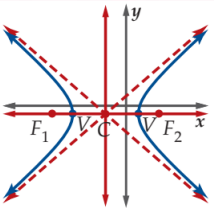
المحور القاطع : $x=h\longrightarrow x=0$

المحور المرافق: $y=k\longrightarrow y=0$

خطا التقارب : $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)\longrightarrow y=\pm\frac{3}{4}x$

القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقياً	مثال

معادلته $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



- المركز $(h\,,k)$
- البؤرتان $(h\pm c,k)$
- الرأسان $(h\pm a,k)$
- معادلة المحور القاطع $y=k$ و طوله $2a$
- معادلة المحور المرافق $x=h$ طوله $2b$
- العلاقة بين $a\,,b\,,c$ هي $c^2=a^2+b^2$
- طول البعد البؤري $2c$
- معادلة خطوط التقارب $(y-k)=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة

الرأسان $(-1\,,3)$ $(-1,\ 9)$ **وطول المحور المرافق** 10**وحدات**

بما أن إحداثي x **متساويان فإن المحور القاطع رأسي**

إذا الصورة القياسية للقطع :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

المركز نقطة المنتصف بين الرأسين

$$(h\,,\ k)=\left(\frac{-1-1}{2}\,,\ \frac{9+3}{2}\right)=(-1\,,6)$$

من الرأسان : $a=\frac{9-3}{2}\rightarrow a=3$

من طول المحور المرافق $2b=10\rightarrow b=5$

معادلة القطع

$$\frac{(y-6)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{25}=1$$

الاختلاف المركزي

الاختلاف المركزي	مثال
الاختلاف المركزي يعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$ يتم إيجاد قيمة a من معادلة القطع و قيمة c من علاقة a , b , c حسب نوع القطع و يلاحظ أن: • $e = 0$ إذا كان الشكل دائرة • $e = 1$ إذا كان الشكل قطع مكافئ • $0 < e < 1$ إذا كان الشكل قطع ناقص • $e > 1$ إذا كان الشكل قطع زائد	حدد الاختلاف المركزي للقطع المعطاة معادلته $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$ بما أن المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً فإن $c = \sqrt{a^2 - b^2} \longrightarrow c = \sqrt{72 - 54} \longrightarrow c = \sqrt{18}$ $a^2 = 72 \longrightarrow a = \sqrt{72}$ $e = \frac{c}{a} \longrightarrow e = \sqrt{\frac{18}{72}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ * الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع قيمته دائما بين 0 و 1

تحديد أنواع القطوع المخروطية

باستخدام المميز	مثال
إذا كانت المعادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ فإذا كان : • $B^2 - 4AC = 0$ فالمعادلة تمثل قطع مكافئ • $B^2 - 4AC > 0$ فالمعادلة تمثل قطع زائداً • $B^2 - 4AC < 0 \ , B = 0 , A = C$ فالمعادلة تمثل دائرة • $A \neq C$ أو $B \neq 0 \ , B^2 - 4AC < 0$ فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً	حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة التالية : $y^2 - 6x^2 + 4xy + 16x + 24 = 0$ $A = -6 \ , B = 4 , C = 1$ $B^2 - 4AC = (4)^2 - 4 \times -6 \times 1 = 16 + 24 = 40 > 0$ فالمعادلة تمثل قطع زائداً
باستخدام المعاملات	**مثال**
إذا كانت المعادلة على الصورة $Ax^2 + By^2 + C\,x + Dy + E = 0$ (خالية من الحد xy) فإذا كان : • $B = 0$ أو $A = 0$ فالمعادلة تمثل قطع مكافئ • $A = B$ فالمعادلة تمثل دائرة • $A \cdot B < 0$ فالمعادلة تمثل قطع زائداً • $A \cdot B > 0 , \ A \neq B$ فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً	حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة التالية : $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$ المعادلة خالية من الحد xy $A = 4 \ , B = 1$ $A \cdot B = 4 \times 1 = 4 > 0 \ , A \neq B$ فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً

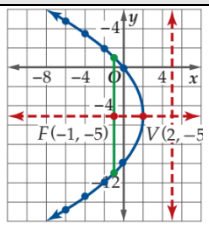
أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1	رأس القطع المكافئ الي معادلته $(x-4)^2=8(y+3)$ هو							
	A	$(4,-3)$	B	$(-4,3)$	C	$(4,-1)$	D	$(6,-3)$
2	بؤرة القطع المكافئ الي معادلته $(x-4)^2=8(y+3)$ هي							
	A	$(4,-3)$	B	$(-4,3)$	C	$(4,-1)$	D	$(6,-3)$
3	معادلة دليل القطع المكافئ الي معادلته $(x-4)^2=8(y+3)$ هي							
	A	$x=4$	B	$x=6$	C	$y=-3$	D	$y=-5$
4	معادلة محور تماثل القطع المكافئ الي معادلته $(x-4)^2=8(y+3)$ هي							
	A	$x=4$	B	$x=6$	C	$y=-4$	D	$y=-5$
5	طول الوتر البؤري للقطع المكافئ الذي معادلته $(y-5)^2=8(x-3)$ يساوي							
	A	6 وحدات	B	5وحدات	C	8 وحدات	D	10 وحدات
6	في القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=40x$ معادلة الدليل هي							
	A	$x=-10$	B	$x=10$	C	$y=-10$	D	$y=10$
7	اتجاه القطع المكافئ الذي بؤرته $(3,5)$ ودليله $y=1$ يكون نحو							
	A	اليمين	B	اليسار	C	الأعلى	D	الأسفل
8	إذا كانت هناك بوابة مقوسه بشكل قطع مكافئ معادلته : $x^2=144y$ ، وكان معلق في بؤرتها مصباح فكم يبعد المصباح عن البوابة ؟							
	A	144	B	72	C	36	D	12
9	معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-2،4)$ وبؤرته $(-2،7)$ هي							
	A	$(x+2)^2=-12(y-4)$	C	$(y-4)^2=12(x+2)$				
	B	$(x+2)^2=12(y-4)$	D	$(y-4)^2=-12(x+2)$				
10	معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(4,0)$ ومعادلة دليله $x=-2$ هي							
	A	$y^2=-12(x-1)$	C	$y^2=-12(x+1)$				
	B	$y^2=12(x-1)$	D	$(y-1)^2=12x$				
11	معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(4,-1)$ ومعادلة دليله $x=6$ هي							
	A	$(y+1)^2=-8(x-4)$	C	$(y+1)^2=8(x-4)$				
	B	$(x-1)^2=-8(y-4)$	D	$(y-1)^2=-8(x-4)$				

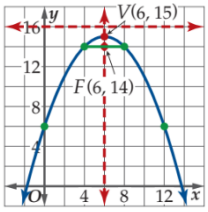
اختر الإجابة الصحيحة:

12 الشكل المقابل يمثل قطعاً مكافئاً معادلة دليله



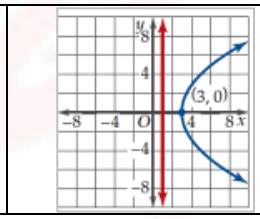
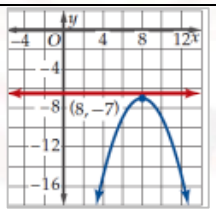
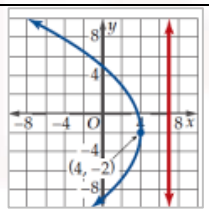
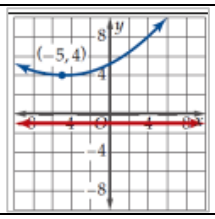
A	$x = 5$	B	$x = -5$	C	$y = 5$	D	$y = -5$

13 الشكل المقابل يمثل قطعاً مكافئاً معادلته



A	$(x-6)^2 = -4(y-15)$	C	$(x-6)^2 = 4(y-15)$
B	$(x+6)^2 = -4(y+15)$	D	$(y-6)^2 = -4(x-15)$

14 أي القطوع المكافئة الممثلة بيانياً أدناه فيه بعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر ؟

A		B		C		D	

15 أي قطع من القطوع الناقصة التالية مركزه النقطة $(3\ ,1)$ ؟

A	$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$	C	$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{6} = 1$
B	$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$	D	$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$

16 بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته : $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ هما النقطتان: ... ؟

A	$(-4\ ,1)\ ,(0\ ,1)$	B	$(0\ ,\ 1)\ ,(4\ ,1)$	C	$(1\ ,4)\ ,(1\ ,0)$	D	$(0\ ,-1)\ ,(4\ ,-1)$

17 في القطع الناقص $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$ طول المحور الأصغر يساوي .....

A	3 وحدات	B	5 وحدات	C	6 وحدات	D	12 وحدات

18 في القطع الناقص $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ طول المحور الأكبر يساوي .....

A	3 وحدات	B	4 وحدات	C	6 وحدات	D	8 وحدات

اختر الإجابة الصحيحة:

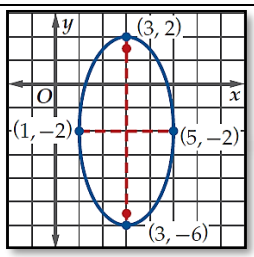
19 في القطع الناقص $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ البعد بين المركز و البؤرة يساوي .....

A	5 وحدات	B	6 وحدات	C	$\sqrt{7}$ وحدات	D	11 وحدات

20 في القطع الناقص الذي رأساه $(-2,8)$, $(5,8)$ يكون طول المحور الأكبر يساوي .....

A	3 وحدات	B	4 وحدات	C	5 وحدات	D	7 وحدات

21 من الشكل المقابل يكون طول المحور الاصغر يساوي .....



A	وحدتان	B	3 وحدات	C	4 وحدات	D	6 وحدات

22 معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل و طولا محوريه 8 , 10 وحدات و محورة الأكبر ينطبق على محور x تكون.....

A	$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$	B	$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$	C	$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$	D	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

23 ما معادلة القطع الناقصة الذي فيه الرأسان $(-3,13)$, $(-3,-7)$ و البؤرتان $(-3,11)$, $(-3,-5)$ ؟

A	$\frac{(x+3)^2}{10}+\frac{(y+3)^2}{6}=1$	C	$\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{100}=1$				
B	$\frac{(x+3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$	D	$\frac{(x-1)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{36}=1$				

24 في القطع الناقص $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ معادلة محوره الأكبر تساوي .....

A	$y=0$	B	$y=5$	C	$x=3$	D	$x=4$

25 قيمة k في القطع الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{k}=1$ الذي أحد بؤرتيه $(0,3)$ تساوي .....

A	1	B	7	C	13	D	25

26 القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ تكون بؤرتاه تساوي .....

A	$(\pm 3,0)$	B	$(\pm 9,0)$	C	$(0,\pm 3)$	D	$(0,\pm 9)$

اختر الإجابة الصحيحة :

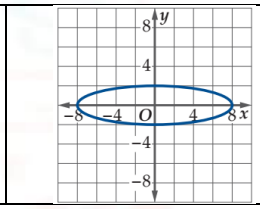
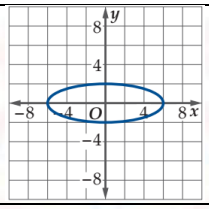
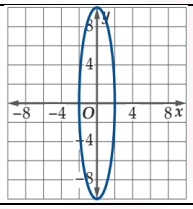
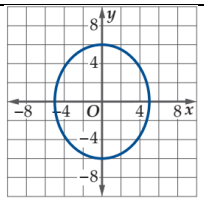
27 أي مما يلي هو معامل اختلاف مركزي للقطع الناقص ؟

A	0	B	$\frac{1}{4}$	C	1	D	$\frac{9}{5}$

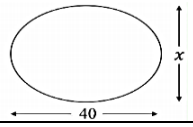
28 معامل الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$ يساوي.....

A	$\frac{4}{5}$	B	$\frac{3}{5}$	C	$\frac{5}{4}$	D	$\frac{5}{3}$

29 أي قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي ؟

A		B		C		D	

30 يوضح الشكل المجاور شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.5 أوجد قيمة x .



A	$10\sqrt{3}$	B	$20\sqrt{3}$	C	$3\sqrt{10}$	D	$3\sqrt{20}$

31 في القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ، طول المحور القاطع يساوي.....

A	3 وحدات	B	4 وحدات	C	7 وحدات	D	8 وحدات

32 مركز القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$ هو .....

A	$(2,1)$	B	$(2,-1)$	C	$(-2,-1)$	D	$(-2,1)$

33 أي القطوع الزائدة التالية طول محوره المرافق 10 وحدات ؟

A	$\frac{y^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{25}=1$	C	$\frac{y^2}{25}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$
B	$\frac{y^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{10}=1$	D	$\frac{y^2}{10}-\frac{(x-1)^2}{5}=1$

34 للقطع الزائد $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$ البعد بين المركز والرأس يساوي .....

A	وحدتان	B	4 وحدات	C	8 وحدات	D	16وحدة

اختر الإجابة الصحيحة :

35 معادلة المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$

A	$x=1$	B	$x=-1$	C	$y=2$	D	$y=-2$

36 معادلة خطي التقارب في القطع الزائد التالي : $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{16}=1$ هما .....

A	$y-1=\pm\frac{3}{4}(x+2)$	C	$y-1=\pm\frac{16}{9}(x+2)$
B	$y-1=\pm\frac{9}{16}(x+2)$	D	$y-1=\pm\frac{4}{3}(x+2)$

37 معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(2,-4)$ وأحد بؤرتيه $(7,-4)$ ، وطول محوره القاطع 8 وحدات هي

A	$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{16}=1$	C	$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{9}=1$
B	$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$	D	$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

38 معادلة القطع الزائد الذي رأساه $(2,-1)$ ، $(2,1)$ وخطا التقارب $y-2=\pm 2x$ هي

A	$x^2-\frac{(y-2)^2}{4}=1$	C	$x^2-\frac{(y+2)^2}{4}=1$
B	$\frac{x^2}{4}-(y-2)^2=1$	D	$x^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

39 معادلة القطع الزائد الذي فيه الرأسان $(0,-2),(0,2)$ وطول المحور المرافق 12 وحدة

A	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$	B	$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$	C	$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$	D	$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$

40 معامل الاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{7}=1$ يساوي.....

A	$\frac{4}{3}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{2}{5}$	D	$\frac{1}{10}$

41 حدد نوع القطع المخروطي الذي معادلته: $4x^2+y^2-3xy+4x-5y-8=0$

A	مكافئ	B	ناقص	C	زائد	D	دائرة

اختر الإجابة الصحيحة :								
42	المعادلة : $x^2-3y^2-4x-6y+4=0$ تمثل معادلة							
	A	قطع مكافئ	B	قطع ناقص	C	قطع زائد	D	دائرة
43	ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2+cy^2+2x-2y-18=0$ دائرة ؟							
	A	-8	B	-4	C	4	D	8
44	حدد نوع القطع المخروطي الذي معادلته: $4x^2+y^2-4xy+4x-5y-8=0$							
	A	مكافئ	B	ناقص	C	زائد	D	دائرة
45	حدد نوع القطع المخروطي الذي معادلته: $4x^2+y^2-5xy+4x-5y-8=0$							
	A	مكافئ	B	ناقص	C	زائد	D	دائرة

مفاتيح الإجابات

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
A	A	A	B	B	C	C	A	C	A	D	C	A
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
A	D	A	B	D	C	D	C	D	C	B	D	D
39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27
A	A	C	A	C	A	A	B	D	B	C	B	B
							45	44	43	42	41	40
							C	A	C	C	B	A

مجموعة رفعة الرياضيات

الفصل الخامس

المتجهات

الكمية المتجهة و الكمية القياسية

- **الكمية القياسية** : كمية عددية لها مقدار فقط .
- **الكمية المتجهة** : كمية لها مقدار و اتجاه

مثال :

حددي الكميات القياسية و الكميات المتجهة في كل مما يلي :

1) قطعت سيارة مسافة $20\ km/h$

كمية قياسية لها قيمة $20\ km/h$ و ليس لها اتجاه

2) يسير شخص بسرعة $75\ m/min$ في اتجاه الغرب

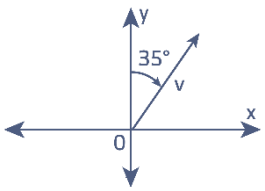
كمية متجهة لها قيمة $75\ m/min$ و لها اتجاه للغرب

تحديد اتجاه متجه

- **اتجاه أفقي** : نبدأ بقياس الزاوية من محور السينات الموجبة بعكس عقارب الساعة
- **اتجاه ربعي** : نبدأ بقياس الزاوية من الخط الراسي(N أوS) باتجاه الشرق أو الغرب .
- **اتجاه حقيقي** : نبدأ بقياس الزاوية من الشمال N باتجاه مع عقارب الساعة ويعطى قياس الزاوية بثلاثة أرقام .

مثال :

في الشكل المجاور :



الاتجاه الربعي للمتجه هو

$N\ 35°\ E$

الاتجاه الحقيقي للمتجه هو $035°$

الاتجاه مع الأفقي للمتجه هو $55°$

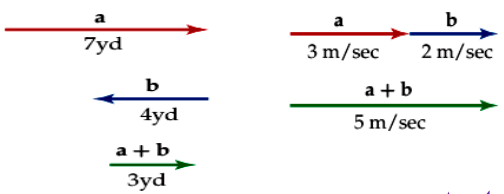
إيجاد محصلة متجهين

- **متوازيان** :

في نفس الاتجاه نجمع و نفس الاتجاه

في اتجاهين متعاكسين نطرح و اتجاه الأكبر

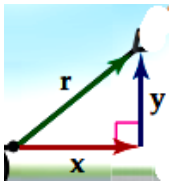
مثال :



- **متعامدان** :

نوجد المحصلة باستخدام نظرية فيتاغورس

مثال :

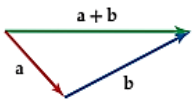


$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

إيجاد المحصلة هندسياً

- **قاعدة المثلث** : نصل نهاية المتجه الأول ببداية المتجه الثاني و تكون المحصلة هي المتجه الذي بدايته المتجه الأول و نهايته المتجه الثاني

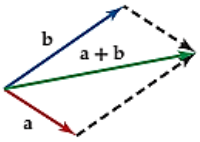
مثال :



محصلة المتجهين a, b هي المتجه المرسوم من نقطة بداية a إلى نقطة نهاية b .

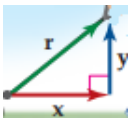
- **قاعدة متوازي الأضلاع** : نصل بداية المتجه الأول ببداية المتجه الثاني و تكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع الذي بدايته تقاطع بداية المتجهين

مثال :



محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع .

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين



- المركبة الأفقية : $|x| = r\ cos\theta$
- المركبة الرأسية : $|y| = r\ sin\theta$

مثال :

يدفع علي عربة قص العشب بقوة مقدارها $450\ N$ و بزاوية قياسها $30°$ مع الأرض أوجد مقدار كل من :

1) المركبة الأفقية للقوة.

$$|x| = r\ cos\theta = 450\ cos30°$$
$$= 450\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 225\sqrt{3}$$

2)المركبة الرأسية للقوة .

$$|y| = r\ sin\theta = 450\ sin30°$$
$$= 450\left(\frac{1}{2}\right) = 225$$

الصور المختلفة لكتابة متجه

الصورة الإحداثية : الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1\ ,y_1)$ و نقطة نهايته $B(x_2\ ,y_2)$ هي $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1\ ,y_2 - y_1\ \rangle$

طول المتجه $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- الصورة المثلثية : يمكن كتابة المتجه $v = \langle a, b\rangle$ باستعمال زاوية التي يصنعها مع محور x الموجب $v = \langle |v|\ cos\theta\ ,|v|\ sin\theta\ \rangle$
- التوافق الخطي : يمكن كتابة المتجه $v = \langle a, b\rangle$ باستعمال متجهي الوحدة مع المحورين $i\ ,j$ بالصورة $v = ai + bj$

مثال : إذا كان $A(-2,3)\ ,B\ (4,5\ )$ **اكتب المتجه** $\overrightarrow{AB}$ **صورة توافق خطي .**

الصورة الإحداثية $\overrightarrow{AB} = \langle 4 - (-2)\ ,5 - 3\ \rangle = \langle 6\ ,2\rangle$

صورة توافق خطي $\overrightarrow{AB} = \langle 6\ ,2\rangle \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 6i + 2j$

إيجاد زاوية اتجاه متجه في المستوى

يمكن إيجاد زاوية المتجه $v = \langle a, b\rangle$ مع الاتجاه الأفقي بالعلاقة

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

من المهم تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية اعتمادا على إشارات مركبتي المتجهة

مثال :

أوجد زاوية اتجاه المتجه $\langle 2\ ,-2\rangle$ مع المحور x الموجب

$$a = 2\quad ,\quad b = -2$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{-2}{2} = \tan^{-1}(-1)$$
$$\theta = -45°$$

بما أن المتجه يقع في الربع الرابع

$$\theta = 360° - 45° = 315°$$

إيجاد الزاوية بين متجهين في المستوى

يمكن إيجاد الزاوية بين متجهين الغير صفريين بالعلاقة

$$\theta = cos^{-1}\frac{u\ .v}{|u|.|v|}$$

مثال :

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين

$$u = \langle -2, -3\ \rangle\ ,\quad v = \langle 6\ ,-4\ \rangle$$
$$\theta = cos^{-1}\frac{u\ .v}{|u|.|v|}$$
$$\theta = cos^{-1}\frac{\langle -2, -3\ \rangle\ .\langle 6\ ,-4\ \rangle}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}\ .\sqrt{(6)^2 + (-4)^2}}$$
$$\theta = cos^{-1}\frac{(-2)(6) + (-3)(-4)}{\sqrt{4+9}\ .\sqrt{36+16}}$$
$$\theta = cos^{-1}\frac{-12 + 12}{\sqrt{13}\ .\sqrt{52}} = \cos^{-1}(0)$$
$$\theta = 90°$$

العمليات على المتجهات في المستوى

إذا كان $a=\langle a_1\,,a_2\rangle$ ، $b=\langle b_1\,,b_2\rangle$ متجهين و k عدداً حقيقياً فإن :

- جمع متجهين $a+b=\langle a_1+b_1\,,a_2+b_2\rangle$
- طرح متجهين $a-b=\langle a_1-b_1\,,a_2-b_2\rangle$
- ضرب متجه في عدد حقيقي $ka=\langle ka_1\,,k\,a_2\rangle$

مثال :

إذا كان $a=\langle 2\ ,-3\rangle, b=\langle 1\ ,\ 4\rangle$ أوجد ما يلي :

1) $a+b$

$$a+b=\langle 2\ ,-3\rangle+\langle 1\ ,4\rangle$$
$$=\langle 2+1\ ,-3+4\rangle=\langle 3\ ,1\rangle$$

2) $2a-b$

$$2a-b=2\langle 2\ ,-3\rangle-\langle 1\ ,4\rangle$$
$$=\langle 2(2)\ ,-3(2)\rangle+\langle -1\ ,-4\rangle$$
$$=\langle 4\,,-6\rangle+\langle -1\,,-4\rangle=\langle 3\ ,-10\rangle$$

إيجاد متجه الوحدة

يسمى المتجه الذي طوله 1 متجه الوحدة

لإيجاد متجه الوحدة للمتجه الذي له نفس الاتجاه

$$u=\frac{v}{|v|}=\frac{\text{المتجه}}{\text{طوله}}$$

مثال :

أوجد متجه الوحدة u للمتجه $v=\langle -2\ ,3\rangle$

$$u=\frac{v}{|v|}=\frac{\langle -2\ ,3\rangle}{\sqrt{(-2)^2+(3)^2}}$$
$$=\frac{\langle -2\ ,3\rangle}{\sqrt{4+9}}=\frac{\langle -2\ ,3\rangle}{\sqrt{13}}$$
$$=\langle\frac{-2}{\sqrt{13}}\ ,\frac{3}{\sqrt{13}}\rangle$$
$$=\langle\frac{-2\sqrt{13}}{13}\ ,\frac{3\sqrt{13}}{13}\rangle$$

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى

- الضرب الداخلي

إذا كان $a=\langle a_1\,,a_2\rangle$ ، $b=\langle b_1\,,b_2\rangle$ متجهين فإن :

$$a\cdot b=a_1\,b_1+a_2b_2$$

مثال : أوجد الضرب الداخلي للمتجهين

$u=\langle 2\,,5\rangle$ ، $v=\langle 8\,,4\rangle$

$$u\cdot v=\langle 2\,,5\rangle\cdot\langle 8\,,4\rangle=2(8)+5(4)=36$$

- المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان a ، b متعامدان إذا و إذا فقط كان $a\cdot b=0$

مثال : أوجد قيمة التي تجعل المتجهان متعامدان حيث

$u=\langle 2\,,5\rangle$ ، $v=\langle k\,,4\rangle$

$$u\cdot v=0\Rightarrow\langle 2\,,5\rangle\cdot\langle k\,,4\rangle=0$$
$$\Rightarrow 2k+20=0$$
$$\Rightarrow 2k=-20$$
$$\Rightarrow k=-10$$

حساب الشغل

لحساب الشغل W الناتج عن قوة ثابتة F لتحريك الجسم من النقطة A إلى النقطة B

$$W=F.\overrightarrow{AB}$$

مثال : يدفع أبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها $25\ N$ إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة و سطح الأرض $60°$ فأوجد الشغل الذي بذله أبراهيم لتحريك المكنسة مسافة $6\ m$

$$\overrightarrow{AB}=\langle 6\,,0\rangle$$
$$F=\langle 25\ \cos(-60°)\,,25\ \sin(-60°)\rangle$$

$$W=F.\overrightarrow{AB}$$
$$W=\langle 25\ \cos 60°\,,-25\ \sin 60°\rangle\cdot\ \langle 6\,,0\rangle$$
$$W=(25\ \cos 60°)\ (6)+(\ -25\ \sin 60°\ )\ (0)$$
$$W=25\times\frac{1}{2}\times 6+0$$
$$W=75\ J$$

المتجهات في الفضاء الثلاثي

- **الصورة الإحداثية :**

الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1, z_1)$ و نقطة نهايته $B(x_2 , y_2, z_2)$ هي

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 \ , y_2 - y_1 \ , z_2 - z_1 \ \rangle$$

- **التوافق الخطي :** يمكن كتابة المتجه $v = \langle a, b, c \rangle$ باستعمال متجهات الوحدة $i\ , j, k$

بالصورة $v = ai + bj + ck$

طول المتجه : $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1, z_1)$ و نقطة نهايته $B(x_2 , y_2, z_2)$ هي

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

أي أنه إذا كان $v = \langle a, b, c \rangle$ فإن $|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

مثال : أوجد طول المتجه $v = 5i + 3j - k$

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$|v| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$$

العمليات على المتجهات في الفضاء الثلاثي

منتصف قطعة مستقيمة :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \ , \frac{y_1 + y_2}{2} \ , \ \frac{z_1 + z_2}{2} \ \right)$$

مثال : إذا كان $A = (2, 3 ,4) , B = (4 , -1 , 2)$

أوجد منتصف $\overline{AB}$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \ , \frac{y_1 + y_2}{2} \ , \ \frac{z_1 + z_2}{2} \ \right)$$

$$M = \left(\frac{2 + 4}{2} \ , \frac{3 + (-1)}{2} \ , \ \frac{4 + 2}{2} \ \right) = (3,1,3)$$

العمليات على المتجهات في الفضاء

إيجاد زاوية اتجاه متجه في الفضاء

إيجاد الزاوية بين متجهين في الفضاء

إيجاد متجه الوحدة

الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء

(بنفس الطريقة السابق شرحها في المستوى)

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

← بوضع متجهات الوحدة i, j, k في الصف 1

← بوضع إحداثيات a في الصف 2

← بوضع إحداثيات b في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

مثال : أوجد $u \times v$ إذا كان $u = 3i - 2j + k \ , \ v = -3i + 3j + k$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = (-2 - 3)i - (3 - (-3))j + (9 - 6)k$$

$$u \times v = -5i - 6j + 3k = \langle -5 , -6 , 3 \rangle$$

تطبيقات الضرب الاتجاهي

- مساحة متوازي الأضلاع الذي في u, v ضلعان متجاوران يساوي $|u \times v|$

مثال : أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه ضلعان $u = 3i - 2j + k \ , \ v = -3i + 3j + k$

من المثال في الضرب الاتجاهي $u \times v = \langle -5 , -6 , 3 \rangle$

$$|u \times v| = \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2 + (3)^2} = \sqrt{70}$$

- حجم متوازي السطوح الذي فيه u, v, t ثلاثة أحرف متجاورة يساوي

$$t.(u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال : أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه الأضلاع $t = \langle 2, -5, 0 \rangle , u = \langle -6, -2, 3 \rangle \ , \ v = \langle 4, 3, 1 \rangle$

$$t.(u \times v) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -5 \\ -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

$$t.(u \times v) = |(-4 - 60 + 0) - (0 + 18 + 30)| = 112$$

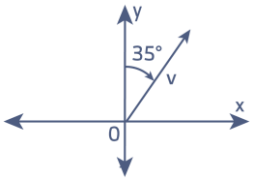
أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1 الكمية المتجه من بين هذه الكميات هي ...

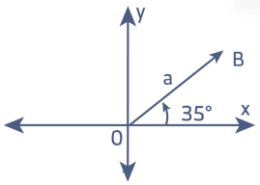
A	سقوط حجر إلى أسفل بسرعة $9\ m/s$	B	سيارة تسير بسرعة $30\ km/h$	C	دفع العربة بقوة $70\ N$	D	سباح قطع مسافة $80\ m$

2 في الشكل المجاور : الاتجاه الربعي للمتجه ؟



A	N 35° E	B	N 55° E	C	W 55° S	D	N 35° W

3 في الشكل المجاور : الاتجاه الحقيقي للمتجه ؟

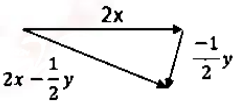
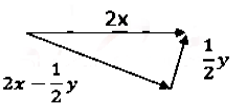
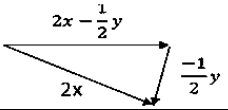
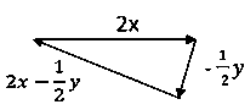


A	35°	B	035°	C	055°	D	090°

4 اذا كان المتجه $a = \langle 3\ ,5 \rangle$ و كان المتجه b موازي للمتجه a ولكن معاكس له في الاتجاه فإن الصورة الإحداثية للمتجه b هي.....

A	$\langle 3\ ,5 \rangle$	B	$\langle -3\ ,-5 \rangle$	C	$\langle 5\ ,-3 \rangle$	D	$\langle -5\ ,-3 \rangle$

5 اعتماداً على الشكل المقابل أي مما يأتي يمثل محصلة $2x - \frac{1}{2}y$

A		B		C		D	

6 الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(-3,1)\ ,\ B(4\ ,5)$ هي

A	$\langle -7,-4 \rangle$	B	$\langle 7,-4 \rangle$	C	$\langle -7,4 \rangle$	D	$\langle 7,4 \rangle$

7 ما الصورة الاحداثية لمتجه طوله 6 وزاوية اتجاه مع الافقي $150°$ ؟

A	$\langle -3\sqrt{3}\ ,3 \rangle$	B	$\langle 3\ ,-3\sqrt{3} \rangle$	C	$\langle 3\ ,3\sqrt{3} \rangle$	D	$\langle 3\sqrt{3}\ ,-3 \rangle$

8 المتجه $\overrightarrow{DE}$ بدلالة متجه الوحدة i , j حيث $D(3\ ,\ 0)\ ،E(4\ ,\ 5)$ هو

A	$7i + 5j$	B	$7i - 5j$	C	$i + 5j$	D	$i - 5j$

9 يدفع خالد عربة قص العشب بقوة $450N$ و بزاوية $60°$ مع سطح الأرض ، مقدار المركبة الأفقية تساوي ...

A	**225**	B	300	C	325.87	D	400

10 اذا كان المتجهين $A = <1\ ,\ 4\ >\ ,\ B = <5\ ،-3>$ فإن $2A - B$ يساوي...

A	$\langle 9\ ,-10 \rangle$	B	$\langle\ 4\ ,-7 \rangle$	C	$\langle -3\ ,11 \rangle$	D	$\langle\ 6\ ,1 \rangle$

اختر الإجابة الصحيحة :

11	زاوية اتجاه المتجه $p = 3i + 3j$ مع محور x الموجب هي							
	A	$\theta = 30°$	B	$\theta = 45°$	C	$\theta = 60°$	D	$\theta = 75°$
12	متجه الوحدة u باتجاه $v = \langle 3\ , -4 \rangle$ هو ؟							
	A	$\langle -1\ ,\ 0 \rangle$	B	$\langle 1\ , -1 \rangle$	C	$\langle -\frac{3}{5}\ , \frac{4}{5} \rangle$	D	$\langle \frac{3}{5}\ , -\frac{4}{5} \rangle$
13	اذا كانت $u = < -1,4 >$ ، $v = < 1,3 >$ فاوجد $u.v$							
	A	-11	B	-1	C	1	D	11
14	إذا كان $w = \langle -1\ ,\ 2 \rangle, y = \langle 1\ ,\ 3 \rangle$ فإن ناتج $y.\ 3w$ هو ...							
	A	1	B	3	C	5	D	15
15	إذا كان المتجهان $\langle k\ ,\ 3 \rangle = v$ و $u = \langle 1\ ,\ -2 \rangle$ متعامدين فإن قيمة k تساوي ...							
	A	-2	B	$-\frac{3}{2}$	C	$\frac{3}{2}$	D	4
16	قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 1\ ,\ 1 \rangle$ ، $\langle 9\ ,\ 0 \rangle$ هي							
	A	$\theta = 0°$	B	$\theta = 45°$	C	$\theta = 90°$	D	$\theta = 135°$
17	يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها $25N$ إذا كانت الزاوية بين ذراع المكنسة و سطح الأرض هي $60°$ فإن الشغل المبذول لتحريك المكنسة مسافة $6\ m$ يساوي							
	A	$75\ j$	B	$60\ j$	C	$25\ j$	D	$24\ j$
18	الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $B\ (2\ ,\ 3\ ,\ 4\ )$ ، $A(2\ ,-4\ ,\ 5\ )$ هي ...							
	A	$\langle 0\ ,\ 7,1 \rangle$	B	$\langle 0\ ,\ 7,-1 \rangle$	C	$\langle 1\ ,\ 7,0 \rangle$	D	$\langle 4\ ,\ 7,9 \rangle$
19	احداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي بدايتها $(1\ ,0\ ,9)$ و نهايتها $(1\ ,4\ ,1)$ هي ...							
	A	$(2\ ,4\ ,10)$	B	$(1\ ,2\ ,5)$	C	$(1\ ,2\ ,10)$	D	$(1\ ,4\ ,5)$
20	متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $v = \langle 1\ ,-2\ ,\ 2 \rangle$							
	A	$\langle \mathbf{1}\ ,\ \mathbf{-1}\ ,\ \mathbf{1} \rangle$	B	$\left\langle \frac{1}{9}\ ,\ \frac{-2}{9}, \frac{2}{9} \right\rangle$	C	$\left\langle \frac{1}{3}\ ,\ \frac{-2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$	D	$\left\langle \frac{1}{4}\ ,\ \frac{-2}{4}, \frac{2}{4} \right\rangle$
21	إذا كان $v = \langle 4\ ,\ 7\ ,\ 3 \rangle$ ، $u = \langle 3\ ,-3\ ,\ 3 \rangle$ فإن $u\ .\ v$ يساوي							
	A	0	B	8	C	21	D	42
22	قياس الزاوية بين المتجهين $a = \langle \sqrt{2}, 2\ ,0 \rangle$ ، $b = \langle \sqrt{3}\ ,0\ ,1 \rangle$							
	A	$\theta = 30°$	B	$\theta = 45°$	C	$\theta = 60°$	D	$\theta = 90°$
23	إذا كان $v = \langle 4\ ,\ 7\ ,\ 3 \rangle$ ، $u = \langle 3\ ,-3\ ,\ 3 \rangle$ فإن المتجهين $u\ ,\ v$ يكونان							
	A	متوازيان	B	متعامدان	C	متطابقان	D	غير متعامدان

اختر الإجابة الصحيحة :								
24	إذا كان $b = 2i - k$ ، $a = i + j + k$ فإن $a \times b = \cdots$							
	A	$i + 3j - 2k$	B	$i + 3j + 2k$	C	$-\boldsymbol{i} + 3j - 2k$	D	$-i - 3j - 2k$
25	$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots$							
	A	$2i + j + 4k$	B	$2i - j + 4k$	C	$2i + j - 4k$	D	$2i - j - 4k$
26	مساحة متوازي الأضلاع فيه $u = 7i + 2j - 2k$, $v = 4i + 3j - k$ ضلعان متجاوران هي							
	A	13.5 وحدة مربعة	B	31 وحدة مربعة	C	62.5 وحدة مربعة	D	73 وحدة مربعة
27	حجم متوازي السطوح الذي فيه $t = \langle 0, -2, -2 \rangle$, $v = \langle 1, -5, 3 \rangle$, $u = \langle 2, 4, -3 \rangle$ أحرف متجاورة							
	A	20 وحدة مكعبة	B	30 وحدة مكعبة	C	46 وحدة مكعبة	D	64 وحدة مكعبة
28	إذا كان حجم متوازي السطوح الذي فيه $w = \langle 1, 0, -2 \rangle$, $v = \langle -2, -1, 4 \rangle$, $u = \langle c, -3, 1 \rangle$ أحرف متجاورة تساوي 7 وحدات مكعبة فما قيمة c ؟							
	A	1	B	2	C	3	D	4
29	أي المتجهات التالية عمودي على المتجهين $w = 4i + 3j - 2k$, $v = 2i - k$							
	A	$\langle -3, 2, 6 \rangle$	B	$\langle -3, 6, -6 \rangle$	C	$\langle 3, -2, 6 \rangle$	D	$\langle -3, -6, 6 \rangle$
	A	13.5 وحدة مربعة	B	31 وحدة مربعة	C	62.5 وحدة مربعة	D	73 وحدة مربعة
30	إذا كان $a = i + j + k$, $b = 2i - k$ ، $c = -2j + k$ فإن $a \cdot (b \times c) = \cdots$							
	A	-10	B	-8	C	8	D	10
31	إذا كان $A = (-3, 0)$, $B(-9, k)$ ، و كان $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 10$ فإن k يساوي							
	A	9	B	8	C	6	D	3
32	إذا كان $v = \langle 7, 3, 2 \rangle$, $u = \langle 8, 3, 5 \rangle$ ، فإن $u - v$ يساوي							
	A	$\langle -1, 0, -3 \rangle$	B	$\langle 1, 0, 3 \rangle$	C	$\langle 2, 0, -6 \rangle$	D	$\langle 16, 6, 6 \rangle$

مفاتيح الإجابات

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
D	D	B	C	A	C	A	D	A	B	C	A	A
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
A	A	C	B	C	A	C	B	B	A	B	C	D
							32	31	30	29	28	27
							B	B	B	C	C	C

الفصل السادس

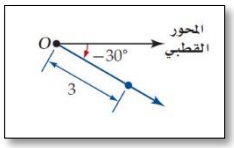
الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

تمثيل الإحداثيات القطبية $p\ (r\ ,\theta\ )$

- r موجبة : p تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ .
- r سالبة : p تقع على امتداد ضلع الانتهاء للزاوية θ
- θ موجبة : الدوران من المحور عكس عقارب الساعة
- θ سالبة : الدوران من المحور مع عقارب الساعة

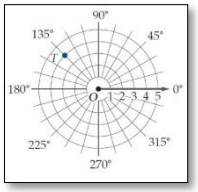
مثال :

إحداثيات النقطة الممثلة في الشكل المقابل هي .....



$$(r\ ,\theta\ ) = (\ 3\ ,-30°)$$

إحداثيات النقطة الممثلة في الشكل المقابل هي .....



$$(r\ ,\theta\ ) = (\ 4\ ,135°)$$

تمثيلات قطبية متعددة

كل نقطة $(r\ ,\theta\ )$ في المستوى القطبي لها عدد لانهائي من التمثيلات حيث :

$$(r\ ,\theta) = (r\ ,\theta\ \pm 360\ °n) = (\ r\ ,\theta\ \pm 2\pi n)$$

$$(r\ ,\theta) = (-r\ ,\theta\ \pm (2n+1)180\ °)$$
$$= (-r\ ,\theta\ \pm (2n+1)\pi)$$

مثال :

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل النقطة $(\ 4\ ,135°)$ حيث $-360° \le \theta \le 360°$

$$(\ 4\ ,135°) = (\ 4\ ,135° - 360°) = (4, -225°)$$

$$(\ 4\ ,135°) = (-4\ ,135° - 180°) = (-4, -45°)$$

$$(\ 4\ ,135°) = (-4\ ,135° + 180°) = (-4,315°)$$

المسافة بالصيغة القطبية

إذا كانت $P_1 = (r_1\ ,\theta_1)$, $P_2 = (r_2\ ,\theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي فإن المسافة بينهما

$$P_1 \cdot P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1 r_2 \cos(\ \theta_1 - \theta_2\ )}$$

مثال :

المسافة بين النقطتين $P_1 = (3\ ,\ 90°)$, $P_2 = (4\ ,\ 150°)$ تساوي .....

$$P_1 \cdot P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1 r_2 \cos(\ \theta_2 - \theta_1\ )}$$

$$P_1 \cdot P_2 = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos(\ 150° - 90°\ )}$$

$$P_1 \cdot P_2 = \sqrt{9 + 16 - 24 \cos 60°} = \sqrt{13}$$

تحويل الإحداثيات

التحويل من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية

$$(\ r\ ,\theta\ ) \to (x\ ,y) = (r\cos\theta\ ,r\sin\theta)$$

التحويل من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية

$$(x\ ,y) \to (\ r\ ,\theta\ )$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{y}{x} & x > 0 \\ \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180° & x < 0 \\ 90°, 270° & x = 0 \end{cases}$$

مثال :

الصورة الديكارتية للنقطة $(\ 2\ ,60°\ )$ تساوي .....

$$x = r\cos\theta = 2\cos 60° = 1$$
$$y = r\sin\theta = 2\sin 60° = \sqrt{3}$$
$$(x\ ,y\ ) = (\ 1\ ,\sqrt{3}\ )$$

الصورة القطبية للنقطة $(\ 1\ ,\sqrt{3}\ )$ تساوي .....

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60°$$

$$(\ r\ ,\theta\ ) = (\ 2\ ,60°\ )$$

الصورة القطبية لعدد مركب

لتحويل العدد المركب من الصورة الديكارتية $z = a + ib$ إلى الصورة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{b}{a} & a > 0 \\ \tan^{-1}\frac{b}{a} + 180° & a < 0 \\ 90°, 270° & a = 0 \end{cases}$$

مثال :

الصورة القطبية للعدد المركب $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ تساوي .....

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}° \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}(1)$$

$$\Rightarrow \theta = 45°$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow z = 2(\cos 45° + i\sin 45°)$$

ضرب و قسمة الأعداد المركبة بالصورة القطبية

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$1)\ z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$2)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

مثال :

إذا كان $z_1 = 6(\cos 120° + i\sin 120°)$ ، $z_2 = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$ فأوجد كل من :

$$1)\ z_1 \cdot z_2 \quad , \quad 2)\ \frac{z_1}{z_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot 2[\cos(120° + 30°) + i\sin(120° + 30°)]$$

$$= 12(\cos 150° + i\sin 150°)$$

$$= 12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -6\sqrt{3} + 6i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}[\cos(120° - 30°) + i\sin(120° - 30°)]$$

$$= 3(\cos 90° + i\sin 90°) = 3[0 + i(1)] = 3i$$

قوى عدد مركب (نظرية ديموافر)

إذا كان $z = a + ib$ فإن

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

مثال :

أوجد قيمة $(1 + i)^4$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1)$$

$$\Rightarrow \theta = 45°$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow z = 2(\cos 45° + i\sin 45°)$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$z^4 = (\sqrt{2})^4[\cos(4 \cdot 45°) + i\sin(4 \cdot 45°)]$$

$$z^4 = 4(\cos 180° + i\sin 180°)$$

$$z^4 = 4[-1 + i(0)] = -4$$

جذور عدد مركب في الصورة القطبية

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

فإن الجذور النونية للعدد المركب تعطى بالعلاقة

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots n - 1$$

١) الجذور النونية المختلفة لأي عدد مركب لها جميعها لها المقياس نفسه $r^{\frac{1}{n}}$

٢) سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$ ثم تزداد الجذور الآخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$

مثال : إذا كان للعدد واحد جذور ثلاثية فأوجد الجذر الثالث

$$a = 1, b = 0, r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}° \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = \tan^{-1}(0) \Rightarrow \theta = 0°$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

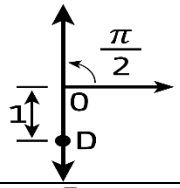
الجذر الثالث $= 1\left(\cos\frac{0 + 2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2(2)\pi}{3}\right)$

الجذر $= 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

أسئلة وتدريبات

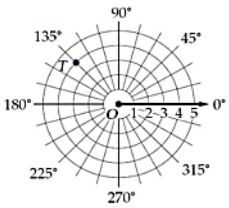
اختر الإجابة الصحيحة :

1 تمثيل النقطة D في الشكل المجاور هو ؟



A	B	C	D
$(-1,\frac{\pi}{2})$	$(1,\frac{\pi}{2})$	$(-1,\pi)$	$(0,\frac{\pi}{2})$

2 في الشكل المقابل النقطة T في المستوى القطبي هي ؟



A	B	C	D
$(3,135°)$	$(4,-135°)$	$(4,135°)$	$(0,135°)$

3 كل مما يلي يمثل النقطة $T(4,135°)$ في المستوى القطبي ما عدا ...

A	B	C	D
$(4,-225°)$	$(-4,-45°)$	$(-4,315°)$	$(4,45°)$

4 تمثل المعادلة القطبية $r=3$ دائرة طول قطرها ....

A	B	C	D
2	3	4	6

5 المسافة بين النقطتين $(-2,30°)$ ، $(5,90°)$ هي ...

A	B	C	D
$\sqrt{39}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{15}$	3

6 المسافة بين زوج النقاط $P_1(r,0°)$ ، $P_2(4,90°)$ تساوي 5 وحدات فإن قيمة r ؟

A	B	C	D
1	2	3	4

7 الصورة الديكارتية للنقطة $(2,\frac{\pi}{4})$ هي ...

A	B	C	D
$(2,2)$	$(\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},2)$	$(2,\sqrt{2})$

8 الصورة القطبية للنقطة $(1,\sqrt{3})$ هي ...

A	B	C	D
$(2,\frac{\pi}{3})$	$(2,\frac{\pi}{6})$	$(4,\frac{\pi}{3})$	$(4,\frac{\pi}{6})$

9 الصورة القطبية للمعادلة $x=2$ هي...

A	B	C	D
$r=2\sec\theta$	$r=2\tan\theta$	$r=2\csc\theta$	$r=2$

10 الصورة القطبية للمعادلة $x^2+(y-2)^2=4$ هي ...

A	B	C	D
$r=\sin\theta$	$r=2\sin\theta$	$r=4\sin\theta$	$r=8\sin\theta$

11 الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $\tan\theta=4$ هي ...

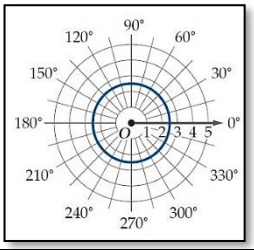
A	B	C	D
$y=4x$	$x=4y$	$y=2x$	$x=2y$

اختر الإجابة الصحيحة :

12 المعادلة القطبية $r = 7$ صورتها الديكارتية هي ...

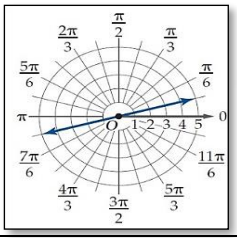
A	$x^2 + y^2 = 7$	B	$x^2 - y^2 = 7$	C	$x^2 + y^2 = 49$	D	$x^2 - y^2 = 7$

13 الشكل المقابل يمثل المعادلة القطبية .....



A	$r = 2$	B	$r = 2.5$	C	$r = 3$	D	$r = 4$

14 ا لشكل المقابل يمثل المعادلة القطبية .....



A	$\theta = \frac{\pi}{3}$	B	$\theta = \frac{\pi}{6}$	C	$\theta = \frac{\pi}{9}$	D	$\theta = \frac{\pi}{12}$

15 التمثيل البياني للمعادلة القطبية $\theta = 30°$ هو ...

A	دائرة قطرها 15	B	دائرة قطرها 30	C	مستقيم ميله $\sqrt{3}$	D	مستقيم ميله $\frac{\sqrt{3}}{3}$

16 القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$ تساوي ...

A	1	B	3	C	4	D	5

17 عدد مركب مقياسه 3 و سعته $30°$ الصورة القطبية لهذا العدد ....

A	$\cos 30° + i \sin 30°$	B	$\cos 30° - i \sin 30°$	C	$3(\cos 30° + i \sin 30°)$	D	$3(\sin 30° + i \cos 30°)$

18 يكتب العدد المركب $z = \sqrt{3} + i$ على الصورة القطبية...

A	$2(\cos \pi + i \sin \pi)$	B	$2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$	C	$2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$	D	$2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

19 الصورة الديكارتية للعدد $2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ هي ...

A	$\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$	B	$2 + \sqrt{2}\, i$	C	$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$	D	$2 + 2\, i$

20 إذا كانت $z_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ ، $z_2 = 3$ $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ فإن .. $\frac{z_1}{z_2} =$

A	$1 + \sqrt{3}\, i$	B	$1 - \sqrt{3}\, i$	C	$\frac{1}{3}(1 + \sqrt{3}\, i)$	D	$\frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i)$

21 ناتج الضرب $5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ على الصورة الديكارتية هو

A	-10	B	10	C	$10 + i$	D	$10 - i$

اختر الإجابة الصحيحة:							
22	قيمة المقدار $[2(\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^\circ)]^4$						
	A	-16	B	$-16\,i$	C	16	D	$16\,i$
23	$\left(1+i\sqrt{3}\right)^6 =$						
	A	27	B	$27\sqrt{3}$	C	64	D	$64\sqrt{3}$
24	عند إيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ فإن مقياس الجذر الثاني يساوي						
	A	1	B	2	C	4	D	8
25	عند إيجاد الجذور الخماسية للعدد المركب $3\,(\cos\pi + i\sin\pi)$ فإن سعة الجذر الأول يساوي						
	A	$\frac{\pi}{5}$	B	$\frac{\pi}{3}$	C	π	D	$5\,\pi$
26	عند إيجاد الجذور الرباعية للعدد واحد فإن مقياس الجذر الثالث يساوي						
	A	1	B	2	C	3	D	4
27	الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $r = 4\,\sin\theta$ هي ...						
	A	$x + y = 3x$	B	$x^2 + y^2 = 4y$	C	$x^2 + y^2 = 4x$	D	$x^2 = 4\,y^2$
28	الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $x^2 - y^2 = 3$ هي ...						
	A	$r^2 = 3\cos 2\theta$	B	$r^2 = 3\sec 2\theta$	C	$r^2 = \frac{3}{\sec 2\theta}$	D	$r^2 = \frac{3}{\csc 2\theta}$
29	مقياس العدد المركب $(i-1)^8$ يساوي						
	A	6	B	6	C	8	D	16

مفاتيح الإجابات

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	C	A	C	A	A	B	C	A	D	D	C	A
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
A	A	B	C	D	A	D	A	D	C	D	D	D
										29	28	27
										D	B	B

مجموعة رفعة الرياضيات

الفصل السابع

الاحتمال والإحصاء

أنواع الدراسات الإحصائية و العينات

أنواع الدراسات الإحصائية :

١) دراسة مسحية

تؤخذ البيانات من استجابات أفراد حول موضوع معين

٢) دراسة بالملاحظة

ملاحظة أفراد العينة دون أي محاولة للتأثير على النتائج

٣) دراسة تجريبية

إجراء معالجة خاصة على مجموعة و ملاحظة استجاباتهم

أنواع العينات العشوائية :

عينة عشوائية (متحيزة) هي العينة التي يتم اختيارها بحيث تعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى

عينة عشوائية (غير متحيزة) هي العينة التي يتم اختيارها دون تفضيل مجموعة على أخرى ، ويكون لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار

الارتباط و السببية :

الارتباط : كل من الظاهرتين تؤثر في الأخرى

السببية : وقوع ظاهرة معينة سبب في وقوع الأخرى

مقاييس النزعة المركزية

١) المتوسط الحسابي : يساوي مجموع البيانات مقسوما على عددها و يفضل استخدامه عند عدم وجود قيمة متطرفة في البيانات ويتم حسابه بالقانون $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_k}{n}$

٢) الوسيط : العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة و يفضل استخدامه إذا وجدت قيم متطرفة في البيانات

٣) المنوال : العدد أو الأعداد الأكثر تكرار في مجموعة البيانات و يفضل استخدامه عند وجود قيم متكررة في البيانات

مثال :

أي مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور ؟

17	15	17	16
15	16	16	12
18	18	18	14
1	48	16	40

الوسيط هو المقياس الأنسب لوجود قيم متطرفة في البيانات (40, 48)

و لا يوجد فجوات في منتصف البيانات

مقاييس التشتت

١) الانحراف المعياري : هو القيمة التي تحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي و يتم حسابه بالقانون

للمجتمع $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$

حيث n عدد قيم المجتمع

للعينة $s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$

حيث n عدد قيم العينة

٢) التباين : مربع الانحراف المعياري

مثال :

أوجد قيمة الانحراف المعياري للبيانات التالية :

9 , 10 , 12 , 11 , 8

	x_k	μ	$x_k - \mu$	$(x_k - \mu)^2$
	8	10	−2	4
	9	10	−1	1
	10	10	0	0
	11	10	1	1
	12	10	2	4
$\sum$	50			10

$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_k}{n} = \frac{50}{5} = 10$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$

هامش خطأ المعاينة

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال :

في دراسة مسحية عشوائية شملت 2500 أفاد 58% منهم أن رياضتهم المفضلة هي كرة القدم .

١) أوجد هامش خطأ المعاينة .

٢) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا أن كرة القدم هي رياضتهم المفضلة ؟

١)

هامش خطأ المعاينة $= \pm \frac{1}{\sqrt{n}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2500}} = \pm \frac{1}{50} = 0.02$

٢) الفترة هي :

$58\% - 2\% = 56\%$

$58\% + 2\% = 60\%$

الاحتمال المشروط

إذا كانت A , B حادثتان غير مستقلتان فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B إذا علم أن الحادثة A قد وقعت و يتم حسابه بالقانون

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال :

اعتماداً على الجدول أدناه أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائياً معافي علماً بإنه يمارس رياضة المشي

الحالة	عدد الأشخاص	
	يمارس المشي (W)	لا يمارس المشي (Nw)
مريض(S)	1600	1200
معافى(H)	800	400

$$P(H \backslash W) = \frac{P(H \cap W)}{P(W)}$$
$$= \frac{800}{1600 + 800} = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$

احتمال النجاح

إذا كان عدد مرات نجاح حادثة s و عدد مرات فشلها f فإن احتمال النجاح يعطى بالعلاقة

$$P(S) = \frac{s}{s + f}$$

مثال :

صندوق به 10 كرات منها 6 حمراء إذا سحبت منه كرتان معاً عشوائياً ، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين ؟

$$s = {}_6C_2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,(4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 15$$

$$s + f = {}_{10}C_2 = \frac{10!}{2!\,(10-2)!}$$
$$= \frac{10!}{2!\,(8)!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 1 \times 8!} = 45$$

$$P(S) = \frac{s}{s + f} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

التوزيع الاحتمالي

يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين التاليين :

١) احتمال كل قيمة من قيم X محصورة بين 0 و1

$$0 \le P(X) \le 1$$

٢) مجموع كل احتمالات قيم X تساوي واحد $\sum P(X) = 1$

مثال :

بين صحة أو خطأ العبارة مع التعليل :

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

البيانات في الجدول السابق يمثل توزيعاً احتمالياً

العبارة صحيحة لأنها تحقق شرطي التوزيع الاحتمال

$$0 \le P(X) \le 1$$
$$\sum P(X) = 0.1 + 0.8 + 0.1 = 1$$

القيمة المتوقعة

القيمة المتوقعة $E(X)$ هي مجموع حاصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $P(X)$ و يمكن إيجاده بالقانون

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X)_i$$

مثال :

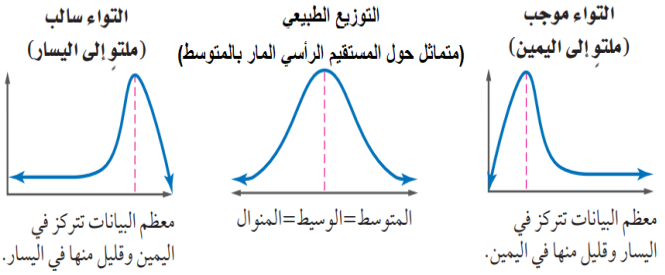
ما القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي المبين في الجدول التالي

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

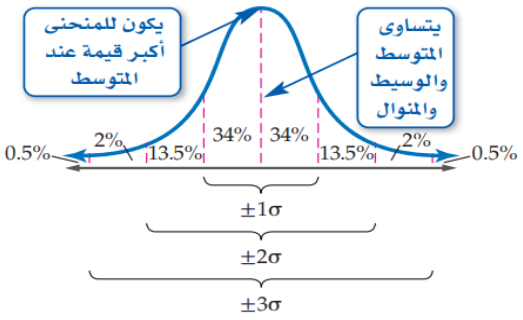
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X)_i$$
$$= 1 \times 0.1 + 2 \times 0.8 + 3 \times 0.2 = 2$$

التوزيع الطبيعي

هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية.



لحساب احتمالات التوزيع الطبيعي نستخدم القانون التجريبي حيث يمثل σ الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي.

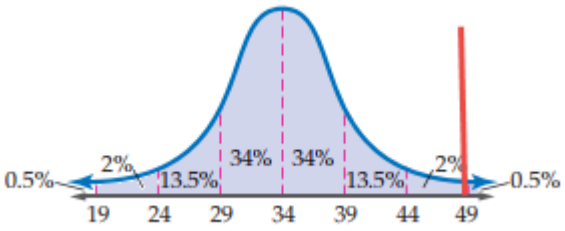


مثال

إذا توزعت بيانات توزيعا طبيعيا بمتوسط مقداره 34 و انحراف معياري 5 فإن احتمال قيمة أقل من 49 تم اختيارها عشوائياً يساوي .....

الحل:

نرسم منحنى التوزيع الطبيعي للبيانات



منه نجد أن

$$P(X<49)=100\%-0.5\%=99.5\%$$

توزيع ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

١) يعاد إجراء التجربة لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة.

٢) كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان: نجاح S ، أو فشل F.

٣) احتمال النجاح $P(S)$ "ويرمز له بالحرف p" هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ "ويرمز له بالحرف q" هو نفسه في كل محاولة ويساوي $1-p$.

ويمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات. ولحساب احتمال ذات الحدين نستخدم الصيغة التالية:

$$P(X)=nC_X\,p^x\,q^{n-x}=\frac{n!}{(n-X)!\,X!}p^x\,q^{n-x}$$

حيث p احتمال النجاح، و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

مثال

كسب لاعب 50 % من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية ما احتمال أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة

الحل:

التجربة ذات حدين لأن الحوادث مستقلة و لها ناتجان فقط أما كسب أو خسارة

$$p=0.5\Rightarrow q=1-p=1-0.5=0.5, n=5, x=3$$

$$P(X)={}_nC_x p^x q^{n-x}$$

$$\Rightarrow P(3)={}_5C_3(0.5)^3(0.5)^2=\frac{5}{16}$$

أسئلة وتدريبات

اختر الإجابة الصحيحة :

1 عند إرسال استبانة إلى المدارس الحكومية و الخاصة لاستطلاع رأيهم في مادة الرياضيات تكون نوع الدراسة هو ؟

A	دراسة مسحية منحازة	B	دراسة مسحية غير منحازة	C	دراسة تجريبية	D	دراسة بالملاحظة

2 نريد معرفة إذا كان التدخين لمدة 5 سنوات يؤثر في سعة الرئة أم لا ؟

A	دراسة مسحية منحازة	B	دراسة مسحية غير منحازة	C	دراسة تجريبية	D	دراسة بالملاحظة

3 استطلاع أراء طلاب كلية الطب عن المهنة المستقبلية المفضلة لدى الشباب

A	دراسة مسحية منحازة	B	دراسة مسحية غير منحازة	C	دراسة تجريبية	D	دراسة بالملاحظة

4 عندما نريد اختبار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال ، فإننا نصمم دراسة :

A	مسحية منحازة	B	مسحية غير منحازة	C	تجريبية	D	بالملاحظة

5 ((عندما يركض محمود عند باب المدرسة فإنه يكون متأخراً)) العبارة تظهر

A	ارتباطاً	B	سببية	C	ارتباط و سببية	D	ليست ارتباط و لا سببية

6 أي من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات التالية بشكل أفضل : 15 , 20 , 22, 25 , 60 ؟

A	المتوسط الحسابي	B	الوسيط	C	المنوال	D	المتوسط و المنوال

7 أي من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المقابل بشكل أفضل

السرعات القصوى للطرقات جميعها (mi/h)									
77	70	65	65	75	78	70	75	65	70

A	المتوسط الحسابي	B	الوسيط	C	المنوال	D	الوسيط و المنوال

8 في مجموعة مكونة من خمسة أعداد أي مما ياتي لايؤثر على الوسيط

A	مضاعفة كل عدد	B	زيادة كل عدد بمقدار3	C	زيادة أصغر قيمة	D	زيادة أكبر قيمة

9 البيانات التي لها أكبر انحراف معياري هي :

A	10 , 12 ,11 ,13,14	B	13, 11,15, 10 14,	C	9, 10 , 20 11, 13	D	13 ,11 , 30 , 10 , 14

10 إذا كانت قيمة المقدار $\sum_{k=1}^{25}(x_k-\mu)^2$ تساوي 50 لمجموعة بيانات عددها 25 فإن الانحراف المعياري للمجتمع يساوي .....

A	$\sqrt{2}$	B	3	C	4	D	5

11 في دراسة مسحية عشوائية تشمل 100 طالب بمدرسة أفاد 95% منهم أن الجوالات ضرورية لهم فإن هامش خطأ المعاينة يساوي .....

A	±0.001	B	±0.01	C	±0.1	D	±10

اختر الإجابة الصحيحة :

12 في دراسة مسحية عشوائية تشمل 100 شخص أفاد 47% منهم أن القراءة مفيدة فأي عينة بين الأشخاص قالوا أنها مفيدة محددة في الفترة .....

A	B	C	D
23% – 50%	37% – 57 %	30% – 46%	54 % – 56%

13 عند رمي مكعب أرقام مرة واحدة .ما احتمال ظهور العدد 5 إذا كان العدد الظاهر عدد فردي ؟

A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{9}$

14 يحتوي كيس على 35 منها 5 كرات خضراء و 8 كرات زرقاء ، إذا سحبت منه كرة واحدة عشوائيًا فما احتمال أن تكون خضراء إذا علم أنها ليست زرقاء ؟

A	B	C	D
$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{35}$

15 يبين الجدول التالي عدد الطلاب المشاركين و غير المشاركين في مسابقة القرآن الكريم في المرحلة الابتدائية ، إذا اختير طالب عشوائيًا ؛ فما احتمال أن يكون مشاركًا علمًا بأنه في الصف الثالث. ؟

	الصف الثاني	الصف الثالث
مشارك	30	40
غير مشارك	50	80

A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{9}$

16 بالجدول إذا تم اختيار زهرة عشوائيًا ؛ فما احتمال أن الزهرة ماتت علمًا بأنها تعرضت لمصابيح جديدة ؟

	A مصابيح جديدة	B مصابيح عادية
عاشت	24	18
ماتت	6	12

A	B	C	D
20%	25%	30%	40%

17 جميع القيم الممكنة لـ X لصندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء و 4 كرات خضراء و كرتين زرقاوين ، سُحبت 3 كرات معًا عشوائيا. إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة هي ؟

A	B	C	D
0 , 1 , 2 , 3	0 , 1 , 2	0 , 1 , 3	1 , 2

18 التوزيع $p(0) = 0.1 , p(1) = a , p(2) = 0.4 , p(3) = 0.2$ يمثل توزيع احتمالي ، إذا كان a يساوي

A	B	C	D
0.1	0.2	0.3	0.4

19 قيمة التي تجعل البيانات في الجدول المقابل تمثل توزيعاً احتمالياً هي:

X	1	2	3	4
$p(X)$	0.1	S	0.3	0.2

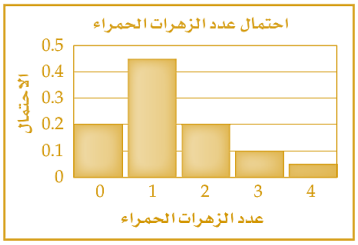
A	B	C	D
0	0.4	0.6	1

20 أي مما يلي ليس من مقاييس النزعة المركزية

A	B	C	D
المتوسط الحسابي	الوسيط	المنوال	الانحراف المعياري

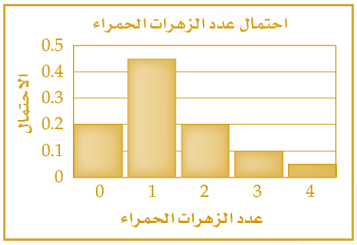
اختر الإجابة الصحيحة :

21 يوضح التمثيل البياني المجاور التوزيع الاحتمالي لعدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور فإن $p(0)$ يساوي ؟



A	B	C	D
0.1	0.2	0.3	0.4

22 يوضح التمثيل البياني المجاور التوزيع الاحتمالي لعدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور فما احتمال أن تكون زهرتان على الأقل حمراوين؟



A	B	C	D
0.15	0.35	0.65	0.85

23 حقيبة تحتوى 3 أقلام حمراء و 4 أقلام زرقاء سحب منها قلمان عشوائياً . ما احتمال أن يكون القلمان مختلفين في اللون ؟

A	B	C	D
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

24 إذا اشترك عبدالله في سباق $400\ m$ مع ثلاثة رياضين آخرين فإن احتمال أن ينهي عبدالله السباق في المركز الأول يساوي

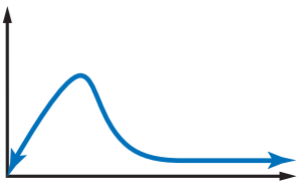
A	B	C	D
25%	50%	75%	100%

25 الجدول يوضح التوزيع الاحتمالي لرمي قطعتين نقد متمايزتين مرة واحدة ، فإن القيمة المتوقعة $E(x)$ لظهور الشعار مرة واحدة هي ؟

عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

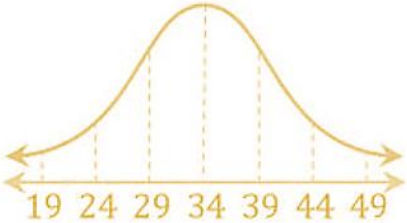
A	B	C	D
1	2	3	4

26 الوصف الأمثل لمنحنى التوزيع الطبيعي في الشكل المقابل ....



A	B	C	D
توزيع سالب الالتواء	توزيع موجب الالتواء	توزيع طبيعي	توزيع متماثل

27 التوزيع الطبيعي المرسوم وسطه الحسابي 34 و انحرافه المعياري 5 ؛
ما احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًا أقل من 49 ؟



A	B	C	D
68%	86%	99.5%	100%

اختر الإجابة الصحيحة :							
28	تتوزع مجموعة بيانات توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 12 و انحرافه المعياري 2 فما قيمة $10 < P < 16$						
	A	40%	B	47.5%	C	81.5%	D	85%
29	يتوزع عُمر 10000 بطارية توزيعًا طبيعيًا بوسط 300 يوم ، وانحراف معياري 40 يومًا ، كم بطارية يقع عمرها بين 340 و 260 يومًا ؟						
	A	6800	B	5000	C	3400	D	2500
30	كسب لاعب 50% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته ؛ ما احتمال أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة ؟						
	A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{3}{5}$	C	$\frac{5}{16}$	D	1
31	في تجربة ذات حدين إذا كان $n = 5 , p = 0.35$ فإن المتوسط μ يساوي ؟						
	A	1.25	B	1.35	C	1.5	D	1.75
32	في تجربة ذات الحدين إذا كان احتمال النجاح 25% و تم إجراء التجربة المستقلة 100 مرة فإن الوسط يساوي						
	A	15	B	18.75	C	25	D	75
33	في تجربة ذات الحدين إذا كان احتمال النجاح 40 % و المتوسط 20 فإن عدد المحاولات يساوي						
	A	30	B	40	C	50	D	60
34	اخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام العشرة التالية يساوي 40 % فإن التباين يساوي						
	A	$\sqrt{2.4}$	B	2.4	C	4	D	6
35	تقدمت العنود لاختبار من 80 سؤال من نوع الاختيار من متعدد لكل منها 4 خيارات فإن الانحراف المعياري يساوي						
	A	$\sqrt{12}$	B	$\sqrt{15}$	C	12	D	15

مفاتيح الإجابات

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	B	C	A	D	D	A	B	A	C	A	D	B
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
B	A	A	D	B	B	D	B	C	B	A	B	B
				35	34	33	32	31	30	29	28	27
				B	B	C	C	D	C	A	C	C

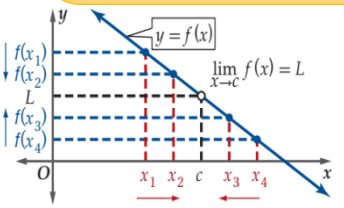
مجموعة رفعة الرياضيات

الفصل الثامن

النهايات والاشتقاق

تقدير النهايات بيانياً

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من العدد c إذا و إذا فقط كانت النهايتان من اليمين و اليسار موجودتين و متساويتين أي أن

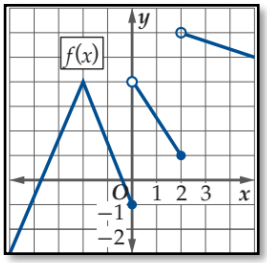


$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L \iff \lim_{x\to c} f(x) = L$$

مثال :

للدالة الممثلة بيانياً في الشكل المقابل

قدر النهاية إذا كانت موجودة



1) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 6$

2) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

3) $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

لأن $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

حساب النهاية جبرياً عند نقطة

لحساب نهاية دالة عند نقطة c:

١) بالتعويض المباشر في الدالة عن كل x بـ c

٢) يكون ناتج التعويض أحد الحالتين

- عدد حقيقي فيكون النهاية المطلوبة
- $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة لذلك يجب حذف العامل المتسبب في وجود الصفر بالمقام أما بالتحليل أو الضرب في المرافق ثم الاختصار و التعويض .

مثال :

أوجدي النهاية أن أمكن $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

بالتعويض المباشر : $\frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ **كمية غير معينة**

باستخدام التحليل ثم الاختصار ثم التعويض

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

حساب النهاية جبرياً عند المالانهاية

كثيرة حدود : نحسب نهاية وحيدة الحد ذات الأس الأكبر ثم نعوض عن $x \to \pm\infty$ و نطبق قاعدة الإشارات

$$\lim_{x\to \pm\infty} (a_n x^n + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_1) = \lim_{x\to \pm\infty} (a_n x^n)$$

دالة نسبية : نقسم كل حد في بسط و مقام الدالة النسبية على اعلى قوة للمتغير في الدالة ثم نبسط و نستخدم أحد النظريتين

$$\lim_{x\to \pm\infty} a = a \quad , \quad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

ملاحظات هامة : عند حساب نهاية الدوال النسبية عند $\pm\infty$

١) درجة البسط = درجة المقام

فإن النهاية = $\frac{\text{المعامل الرئيسي للبسط}}{\text{المعامل الرئيسي للمقام}}$

٢) درجة البسط اقل من درجة المقام فإن النهاية = صفر

٣) درجة البسط اكبر من درجة المقام فإن النهاية $= \pm\infty$

مثال : أوجد النهاية أن أمكن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{7 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{4}{x^2}} = \frac{7-0+0}{2-0} = \frac{7}{2} = 3.5$$

المشتقات

مشتقة دالة $f(x)$ بالنسبة لـ x يرمز لها بالرموز التالية

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

قواعد الاشتقاق :

١) مشتقة العدد الثابت تساوي صفر $\frac{d}{dx}(c) = 0$

٢) $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$

٣) $\frac{d}{dx}(f.g)(x) = f'.g + g'.f$ = مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الأول × الثاني + الأول × مشتقة الثاني

٤) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f'.g - f.g'}{(g)^2}$ = مشتقة حاصل قسمة دالتين

$$= \frac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} - \text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}}{(\text{المقام})^2}$$

٥) مشتقة الجذر التربيعي $= \frac{\text{مشتقة ماتحت الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$

إيجاد القيم القصوى

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a\,,b]$ فإن لها قيمة عظمى و قيمة صغرى على هذه الفترة أما عند أحد طرفي الفترة أو عند النقاط الحرجة.

خطوات إيجاد القيم القصوى :

١- نوجد المشتقة

٢- نوجد النقط الحرجة بمساواة مشتقة الدالة بالصفر ونتأكد أنها تقع داخل الفترة المعطاة في السؤال

٣- نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة وعند الأطراف

٤- اكبر قيمة هي القيمة العظمى و أصغر قيمة هي القيمة الصغرى .

مثال : أوجد القيم القصوى للدالة على الفترة المعطاة

$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad , \quad [\,0\,,4]$

1) $f'(x) = 2x - 2$

2) $f'(x) = 0 \implies 2x - 2 = 0 \implies x = 1 \in [\,0\,,4\,]$

3) $f(1) = (1)^2 - 2(1) + 1 = 0$

$f(0) = (0)^2 - 2(0) + 1 = 1$

$f(4) = (4)^2 - 2(4) + 1 = 9$

القيمة الصغرى $= 0$ القيمة العظمى $= 9$

التكامل

الدالة الأصلية (التكامل الغير محدود) :

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

التكامل المحدود :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

مثال : أوجد التكاملات التالية :

$$1)\ \int (\,3x^2 - 2x + 3)\,dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} - \frac{2x^{1+1}}{1+1} + 3x + c$$

$$= x^3 - x^2 + 3x + c$$

$$2)\ \int_1^3 4x^3\,dx = \left.\frac{4x^{3+1}}{3+1}\right|_1^3$$

$$= x^4|_1^3 = [(3)^4] - [(1)^4] = 80$$

المساحة تحت منحنى و التكامل المحدود

يعبر عن المساحة المحصورة بين منحنى دالة و المحور x في الفترة $[a\,,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

حيث $x_i = a + i\,\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

خواص التكامل المحدود :

$$1)\ \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

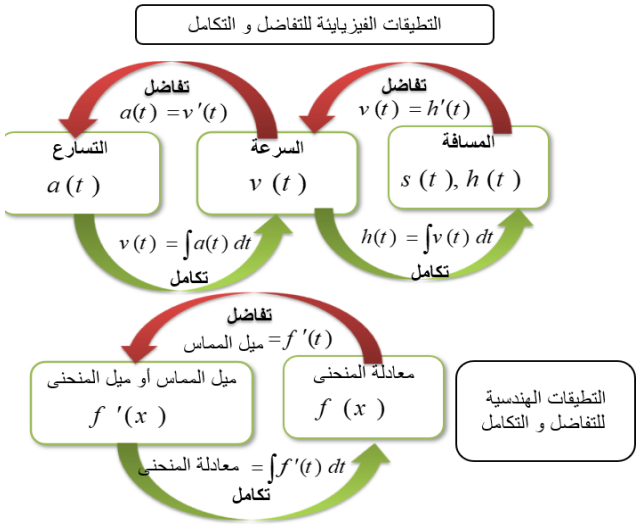
$$2)\ \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = 0$$

مثال : إذا تم تجزئ الفترة $[2\,,12]$ تجزيئا منتظما و عدد الفترات يساوي 6 فأوجد x_6

$$x_i = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \qquad x_i = \frac{12-2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x_i = a + i \cdot x_i \qquad x_6 = 2 + 6 \cdot \frac{5}{3} = 12$$

المشتقات



مثال :

الدالة $h(t) = 55 - 16t^2$ تمثل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت رأسياً للأعلى ، أوجد السرعة اللحظية؟

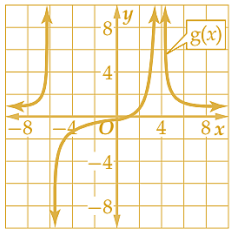
$$v(t) = h'(t)$$

$$v(t) = 0 - 16 \times 2\,t = -32\,t \quad ft/s$$

أسئلة وتدريبات

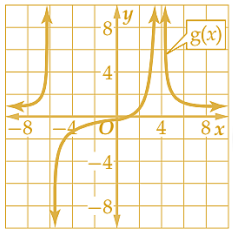
اختر الإجابة الصحيحة :

1 — من الشكل المقابل تكون $\lim_{x\to 4} g(x)$ تساوي



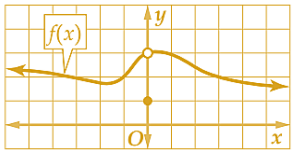
A	$-\infty$	B	-4	C	∞	D	غير موجودة

2 — من الشكل المقابل تكون $\lim_{x\to -4} g(x)$ تساوي



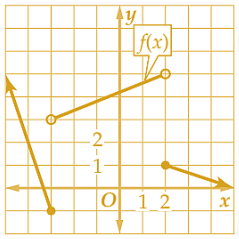
A	$-\infty$	B	-4	C	∞	D	غير موجودة

3 — من الشكل المقابل تكون $\lim_{x\to 0} f(x)$ تساوي



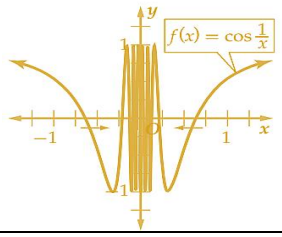
A	0	B	1	C	3	D	غير موجودة

4 — من الشكل المقابل تكون $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ تساوي



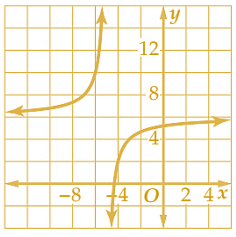
A	0	B	1	C	5	D	غير موجودة

5 — من الشكل المقابل تكون $\lim_{x\to 0} f(x)$ تساوي



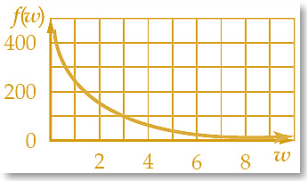
A	$-\infty$	B	0	C	∞	D	غير موجودة

6 — من الشكل المقابل تكون $\lim_{x\to \infty} f(x)$ تساوي



A	$-\infty$	B	6	C	∞	D	غير موجودة

اختر الإجابة الصحيحة :

7	من الشكل المقابل تكون $\lim_{w\to\infty} f(w)$ تساوي 							
	A	$-\infty$	B	0	C	∞	D	غير موجودة
8	$\lim_{x\to5}(4x-10)=\cdots$							
	A	-10	B	5	C	10	D	20
9	$\lim_{x\to5}\frac{x^2-4x-5}{x-5}=\cdots$							
	A	$\frac{1}{6}$	B	2	C	5	D	6
10	$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-1}=\cdots$?							
	A	-1	B	$\sqrt{7}$	C	$\frac{3-\sqrt{7}}{3}$	D	3
11	$\lim_{x\to25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}=\cdots$?							
	A	-5	B	0	C	10	D	25
12	قيمة النهاية $\lim_{x\to0^-}\frac{\lvert4x\rvert}{x}$ تساوي							
	A	-4	B	0	C	4	D	غير موجودة
13	قيمة النهاية $\lim_{x\to0}\frac{\lvert4x\rvert}{x}$ تساوي							
	A	-4	B	0	C	4	D	غير موجودة
14	$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$ تساوي							
	A	$-\infty$	B	0	C	2	D	∞
15	$\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)=\cdots$							
	A	$-\infty$	B	0	C	4	D	∞
16	$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x-1}{2x^3+7}=\cdots$							
	A	4	B	2	C	0	D	∞
17	$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{3x^2-1}=\cdots$							
	A	$-\infty$	B	0	C	$\frac{2}{3}$	D	∞

اختر الإجابة الصحيحة :

18 **إذا كان** $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2+kx^3}{5-2x+3x^3}=1$ **فإن** k **تساوي**

A		B		C		D	
-4		-3		3		5	

19 **إذا كانت** $f(x)=\begin{cases}x^3+3 & , \quad x<1\\ 2x+1 & , \quad x\geq 1\end{cases}$ **فإن** $\lim_{x\to 1}f(x)$ **تساوي**

A		B		C		D	
1		3		4		**غير موجودة**	

20 **أوجد قيمة** a **التي تجعل الدالة متصلة عند** $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x & , \quad x<1\\ a+1 & , \quad x\geq 1\end{cases}$$

A		B		C		D	
-2		2		3		6	

21 **إذا كانت** $f(x)=3x^2-5x+12$ **فإن مشتقة الدالة** $f(x)$ **تساوي**

A		B		C		D	
$6x-5$		$6x^2-5$		$6x-5x$		6	

22 **إذا كانت** $g(x)=\sqrt[5]{x^9}$ **فإن** $\dot{g}(x)$ **تساوي ؟**

A		B		C		D	
$9\sqrt[5]{x^8}$		$\frac{5}{9}\sqrt[5]{x^4}$		$9\sqrt[4]{x^9}$		$\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$	

23 **مشتقة الدالة** $r(t)=\frac{t^2+2}{3-t^2}$ **تساوي ؟**

A		B		C		D	
$\dot{r}(t)=\frac{10\,t}{3-t}$		$\dot{r}(t)=\frac{10t}{(3-t^2)^2}$		$\dot{r}(t)=\frac{9t}{3-t^2}$		$\dot{r}(t)=\frac{5\,t^2}{3-t^2}$	

24 **ما مشتقة** $h(x)=4x^2\,(2x+6)$ **؟**

A		B		C		D	
$24\,x^2+48\,x$		$3x^2$		$8\,x^3-24\,x^2$		$2\,x^4+8\,x^3$	

25 **ما معادلة ميل المنحنى** $y=x^5+3x-2$ **عند أي نقطة عليه ؟**

A		B		C		D	
$5x^4+3$		$4x^4+3x$		x^4+1		x^4+3	

26 **ما ميل مماس منحنى الدالة** $y=2x^2$ **عند النقطة** $(1,2)$ **تساوي ؟**

A		B		C		D	
1		2		4		8	

27 **إذا كان** $f(x)=(x^2+5)\,(5x-4)$ **فإن** $\dot{f}(-1)$

A		B		C		D	
-1		0		4		48	

28 **مشتقة الدالة** $f(x)=\frac{7x}{5x-3}$ **تساوي ؟**

A		B		C		D	
$7x$		$7x+5$		$\frac{7}{5}$		$\frac{-21}{(5x-3)^2}$	

اختر الإجابة الصحيحة :							
29	إذا كان $f(x)=\frac{5}{x+7}$ فإن $\grave{f}(x)$ تساوي						
	A	$\frac{-5}{x}$	B	$\frac{-5}{x^2}$	C	$\frac{-5}{(x+7)^2}$	D	$\frac{5}{(x+7)^2}$
30	إذا كانت $f(x)=k\,x^2-4x$, $\grave{f}(1)=2$ فإن k تساوي						
	A	-3	B	1	C	2	D	3
31	أوجد السرعة المتجهة اللحظية للدالة $f(t)=1+55t-3\,t^3$						
	A	$55-9t^2$	B	$9t^2$	C	$55\,t$	D	1
32	أوجد النقط الحرجة للدالة $y=x^2-6x$						
	A	$(1\,,0)$	B	$(3\,,-9)$	C	$(-3\,,9)$	D	$(9\,,3)$
33	إذا كانت $f(x)=6x^2-x^3$ فما القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في الفترة $[0\,,3]$ ؟						
	A	21	B	27	C	32	D	64
34	قذف حارس مرمى الكرة لأعلى فإذا كانت المسافة الراسية التي تقطعها الكرة بعد t ثانية تعطي بالمعادلة $s(t)=20\,t-2\,t^2+3$ فما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة ؟						
	A	153	B	53	C	50	D	5
35	ما المشتقة الثانية للدالة $f(x)=2x^5-x^3+6$ ؟						
	A	$10\,x^4-3x^2$	B	$40\,x^4-6x$	C	$40\,x^3-6\,x$	D	$40\,x^3-6$
36	ما المشتقة السادسة للدالة $y=\frac{2}{5}\,x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}\,x^3-\frac{1}{2}\,x^2+7x-12$ ؟						
	A	-1	B	0	C	1	D	3
37	ما الدالة الأصلية للدالة $f(x)=3x^2-1$						
	A	x^3-x+c	B	$3x^2-1+c$	C	$6\,x+c$	D	x^3+c
38	$\int 10\,x^4\,dx=\cdots$						
	A	$2x^5+c$	B	$40\,x^3+c$	C	$4x^2+x+c$	D	x^3+c
39	$\int\left(8x^3+x-\frac{7}{x^5}\right)dx=\cdots$						
	A	$2x^4+\frac{x^2}{2}+\frac{7}{4x^4}+\boldsymbol{c}$	B	$24x^2+x-\frac{7}{4x^3}+C$	C	$x^4+\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{c}$	D	$2x^4+\frac{7}{4x^4}+C$

اختر الإجابة الصحيحة:

40 $\frac{3}{2}\int \sqrt{x}\ dx = \cdots$

A		B		C		D	
$\sqrt{x}+c$		$x\sqrt{x}+c$		$\frac{3}{2}x\sqrt{x}+c$		$\frac{9}{4}\sqrt{x}+c$	

41 $\int (1+\frac{1}{x^2})\ dx = \cdots$

A		B		C		D	
x^2+c		$\frac{1}{x}+c$		$x+\frac{1}{x}+c$		$x-\frac{1}{x}+c$	

42 **التكامل** $\int_2^3 (4x+1)\,dx$ **يساوي**

A		B		C		D	
10		11		20		21	

43 $\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+1}\,dx = \cdots$

A		B		C		D	
0		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$	

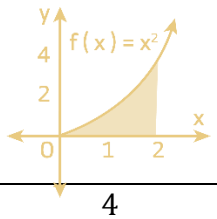
44 **إذا كان** $\int_0^2 kx\,dx = 6$ **فإن** k **تساوي**

A		B		C		D	
1		2		3		4	

45 $\int_2^6 \frac{x^2}{x^2-1}\,dx - \int_2^6 \frac{1}{x^2-1}\,dx + \int_2^6 \frac{1}{2}\,dx = \ldots.$

A		B		C		D	
6		4		2		0	

46 **المساحة المحصورة بين منحنى الدالة** $f(x) = x^2$ **و محور x في الفترة** $[0, 2]$ **تساوي .... وحدة مساحة ؟**



A		B		C		D	
$\frac{1}{3}$		$\frac{8}{3}$		2		4	

47 **تمثل الدالة** $v(t) = -32t$ **السرعة التي قفز بها شخص من فوق منحدر ارتفاعه** $100\ ft$ **باتجاه سطح الماء فإن دالة الموقع للشخص** $s(t)$ **بعد** t **ثانية تساوي ؟**

A		B		C		D	
$-16t^2+100$		$16t^2+100$		$-16t^2$		$-16t^2+32$	

مفاتيح الإجابات

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	D	C	B	D	B	B	C	D	C	C	A	D
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	D	B	D	C	D	B	A	D	B	A	A	C
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
D	D	C	D	A	B	B	B	C	B	A	A	A
40	41	42	43	44	45	46	47					
B	D	B	D	C	A	B	A					

مجموعة رفعة الرياضيات

جميع الحقوق محفوظة

التصميم لـ :

ندى الناصر

مراجعة :

هند العديني

حسابات المؤلفات

فريعة العمري

@aliali1431ali

جواهر العنزي

@Jwaher_H5

هند العديني

@H__Ali1

ندى الناصر

@nada_mn_

المراجع

- رياضيات ١ (التعليم الثانوي – نظام المقررات – البرنامج المشترك) وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٧ هـ .
- الرياضيات ٢ – البرنامج المشترك – نظام المقررات – كتاب الطالب . وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٧ هـ .
- الرياضيات ٣ (كتاب الطالب) التعليم الثانوي نظام المقررات (مسار العلوم الطبيعية) . وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٨ هـ .
- الرياضيات ٤(كتاب الطالب) التعليم الثانوي نظام المقررات (مسار العلوم الطبيعية) . وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٨ هـ .
- الرياضيات ٥ : المستوى الخامس المسار العلمي . وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٩هـ .
- رياضيات ٦ التعليم الثانوي نظام المقررات (مسار العلوم الطبيعية). وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٩هـ .
- تجميعات متنوعة .

الفهرس

1 مقرر أول ثانوي

الفصل الأول : التبرير والبرهان	6
الفصل الثاني : التوازي والتعامد	15
الفصل الثالث : المثلثات المتطابقة	24
الفصل الرابع : العلاقات في المثلثات	32
الفصل الخامس : الأشكال الرباعية	41
الفصل السادس : التشابه	50
الفصل السابع : التحويلات الهندسية والتناسب	61
الفصل الثامن : الدائرة	73

الفهرس

2 مقرر ثاني ثانوي

الفصل الأول : الدوال والمتباينات	86
الفصل الثاني : المصفوفات	99
الفصل الثالث : كثيرات الحدود ودوالها	111
الفصل الرابع : العلاقات والدوال العكسية والجذرية	126
الفصل الخامس : العلاقات والدوال النسبية	136
الفصل السادس : المتتابعات والمتسلسلات	145
الفصل السابع : الاحتمالات	154
الفصل الثامن : حساب المثلثات	164

الفهرس

3 مقرر ثالث ثانوي

الفصل الأول : تحليل الدوال	179
الفصل الثاني : العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية	200
الفصل الثالث : المتطابقات والمعادلات المثلثية	211
الفصل الرابع : القطوع المخروطية	220
الفصل الخامس : المتجهات	232
الفصل السادس : الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة	241
الفصل السابع : الاحتمال والإحصاء	248
الفصل الثامن : النهايات والاشتقاق	257

مميزات الكتاب ..

- عرض للموضوعات بطريقة مختصرة .
- يحتوي على أكثر من 500 سؤال .

مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق