

القسم الثاني



وزارة التعليم

Ministry of Education

2023 - 1445

المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل
3

141	التهيئة للفصل الثالث
142	3-1 المتطابقات المثلثية
147	3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية
152	3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
156	اختبار منتصف الفصل
157	3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
163	استكشاف 3-5 معمل الحاسبة البيانية : حل المعادلات المثلثية
164	3-5 حل المعادلات المثلثية
170	دليل الدراسة والمراجعة
175	اختبار الفصل

القطع المخروطية

الفصل
4

177	التهيئة للفصل الرابع
178	4-1 القطوع المكافئة
186	4-2 القطوع الناقصة والدوائر
194	اختبار منتصف الفصل
195	4-3 القطوع الزائدة
204	4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية
208	توسع 4-4 معمل الحاسبة البيانية : أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية
210	دليل الدراسة والمراجعة
214	اختبار الفصل



217	التهيئة للفصل الخامس
218	5-1 مقدمة في المتجهات
226	5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي
234	5-3 الضرب الداخلي
240	اختبار منتصف الفصل
241	5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
247	5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء
252	دليل الدراسة والمراجعة
257	اختبار الفصل
258	الصيغ

المتطابقات والمعادلات المثلثية Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق:

درست الدوال المثلثية،
وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستخدم المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستخدم المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحل معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.





التهيئة للفصل 3

مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y .

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x ، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ .

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

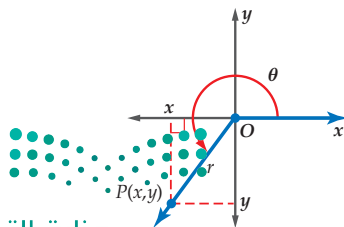
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا

(trigonometric functions of general angles):

لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x}, x \neq 0 & \csc \theta &= \frac{r}{y}, y \neq 0 \\ \sec \theta &= \frac{r}{x}, x \neq 0 & \cot \theta &= \frac{x}{y}, y \neq 0\end{aligned}$$



تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّ كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

$$(1) -16a^2 + 4a \quad (2) 5x^2 - 20$$

$$(3) 4x^2 - x + 6 \quad (4) 2y^2 - y - 15$$

(5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8) \text{ cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4) \text{ cm}$ ، فما عرضها؟

حلّ كلّ من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

$$(6) x^2 + 6x = 0 \quad (7) x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$(8) x^2 - 9 = 0 \quad (9) x^2 - 7x + 12 = 0$$

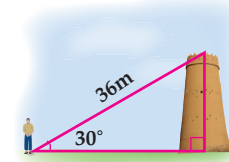


(10) **حدائق:** قامت ليلي بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض 42 ft^2 ، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة.

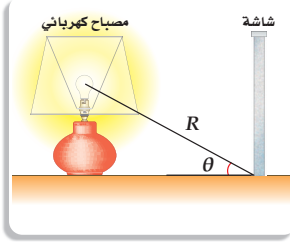
أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

$$(11) \sin 45^\circ \quad (12) \cos 225^\circ$$

$$(13) \tan 150^\circ \quad (14) \sin 120^\circ$$

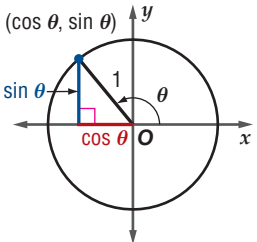
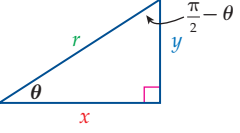
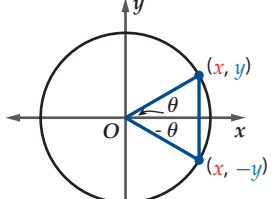


(15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



لماذا؟
تُسمى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$ ، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.

المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة متطابقة إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلاً:
 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، والمتطابقة المثلثية هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثلاً مضاداً يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي		المتطابقات المثلثية الأساسية
المتطابقات النسبية:		$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$
متطابقات المقلوب:		$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$
متطابقات فيثاغورس:		 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$ حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين:		 $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$ $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$ $\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:		 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$

فيما سبق:

درس كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة

identity

المتطابقة المثلثية

trigonometric identity

المتطابقات النسبية

quotient identities

متطابقات المقلوب

reciprocal identities

متطابقات فيثاغورس

pythagorean identities

متطابقات الزاويتين

المتتامتين

cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية

والدوال الفردية

odd-even identities

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين

المتتامتين:

يمكن كتابة متطابقات

الزاويتين المتتامتين

بالدرجات كما يلي:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

يمكنك استعمال المتطابقات الأساسية، لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية.

استعمال المتطابقات المثلثية

مثال 1

(a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{4}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

(b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc \theta$ إذا كان $\cot \theta = -\frac{3}{5}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

تحقق من فهمك

(1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

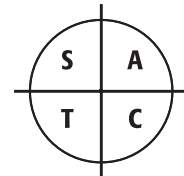
(1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec \theta$ إذا كان $\sin \theta = -\frac{2}{7}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

إرشادات للدراسة

الأربع:

يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1, 2, 3, 4.

—		
		θ
		$\csc \theta$
		θ
		$\sec \theta$
		θ
		θ



A
S
T
C



تبسيط العبارات المثلثية : تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

تبسيط العبارة المثلثية

مثال 2

بسّط العبارة : $\frac{\sin \theta \csc \theta}{\cot \theta}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية
عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب ($\sin \theta$) و/أو بدلالة جيب التمام ($\cos \theta$).

تحقق من فهمك

$\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta)$ (2B)

$\frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta}$ (2A)

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيداً في حل مسائل من واقع الحياة.

إعادة كتابة الصيغ الرياضية

مثال 3 من واقع الحياة

الاستضاءة : ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

(a) حل المعادلة $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لـ E .

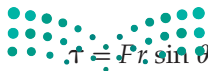


تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوّرهُ علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علماً مستقلاً بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

(b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$ ؟ فسّر إجابتك.

تحقق من فهمك



(3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau = F r \sin \theta$. أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

(20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص

باستعمال العلاقة $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربع، و A المساحة السطحية المعرضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

- (a) حل المعادلة بالنسبة لـ W .
(b) أوجد W إذا كانت $\theta = 40^\circ$ ، $A = 0.75$ ، $e = 0.80$ ، $S = 1000 \text{ W/m}^2$. (قرب إلى أقرب جزء من مئة).

(21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية؛ لتحديد ما إذا كانت معادلة ما تمثل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثل المعادلة: $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ متطابقة؟
(a) **جدولياً:** أكمل الجدول الآتي.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$				
$\tan^2 \theta \sin^2 \theta$				

(b) **بيانياً:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلاً من طرفي المعادلة $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ كدالة، بيانياً.

(c) **تحليلياً:** "إذا كان التمثيلان البيانيان لـ $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$ و $\tan^2 \theta \sin^2 \theta$ متطابقين؛ فإن المعادلة تمثل متطابقة". هل التمثيلان البيانيان في الفرع (b) متطابقان؟

(d) **تحليلياً:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة ما إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ متطابقة أم لا. (تأكد أن الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

(22) **الترنّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m في اتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة ينتج نظام المعادلات الآتي:



حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثرة في المتزلّج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لكتابة μ_k كدالة في θ .

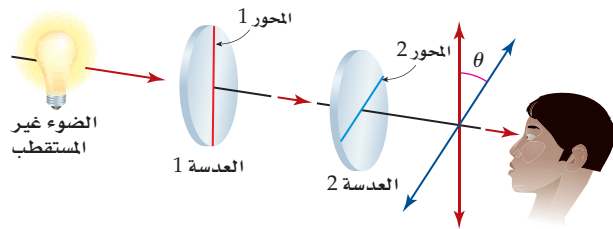
أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

- (1) $\tan \theta$ ، إذا كان $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ، $\cot \theta = 2$
(2) $\csc \theta$ ، إذا كان $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ، $\cos \theta = \frac{2}{3}$
(3) $\sin \theta$ ، إذا كان $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ، $\cos \theta = \frac{5}{13}$
(4) $\sec \theta$ ، إذا كان $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ، $\tan \theta = -1$
(5) $\tan \theta$ ، إذا كان $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sec \theta = -3$
(6) $\csc \theta$ ، إذا كان $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\cot \theta = \frac{1}{4}$
(7) $\cos \theta$ ، إذا كان $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، $\sin \theta = \frac{4}{5}$
(8) $\cot \theta$ ، إذا كان $\sin \theta < 0$ ، $\sec \theta = -\frac{9}{2}$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

- (9) $\tan \theta \cos^2 \theta$
(10) $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$
(11) $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$
(12) $\sec \theta \tan^2 \theta + \sec \theta$
(13) $\sin \theta (1 + \cot^2 \theta)$
(14) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sec \theta$
(15) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$
(16) $(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$
(17) $2 - 2 \sin^2 \theta$
(18) $\csc \theta - \cos \theta \cot \theta$

(19) **بصرياً:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقبل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



(a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos \theta$

(b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها 30° مع محور العدسة الأولى.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل مما يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم. (مهارة سابقة)

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (33)$$

$$\tan\left(\cos^{-1}\frac{6}{7}\right) \quad (34)$$

$$\sin\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (35)$$

$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) \quad (36)$$

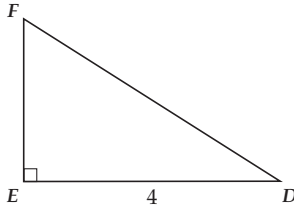
(37) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} K + x^2, & x < 5 \\ 3x + 2, & x \geq 5 \end{cases} \quad \text{متصلة عند } x = 5. \quad \text{(مهارة سابقة)}$$

(38) حل المعادلة: $2^x = 32^{x-2}$. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

(39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D = 0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$ ؟



3.2 C 5 A

10 D 4 B

(40) إذا كان $\sin x = m$ و $0^\circ < x < 90^\circ$ ، فما قيمة $\tan x$ ؟

$\frac{1}{m^2}$ A

$\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$ B

$\frac{1-m^2}{m}$ C

$\frac{m}{1-m^2}$ D

بسط كل ما يأتي:

$$\frac{\sec \theta \sin \theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \sec \theta} \quad (24) \quad \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 1}{1 + \sin(-\theta)} \quad (23)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(25) **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرب 10 قيم للمتغير وحقت جميعها المعادلة فعلاً، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

(26) **تحذّر:** أوجد مثلاً مضاداً يبين أن: $1 - \sin x = \cos x$ ليست متطابقة.

(27) **تبرير:** وضح كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الاستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos \theta = \frac{ER^2}{I}$.

(28) **اكتب:** بين كيف تستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

(29) **برهان:** برهن أن $\tan(-a) = -\tan a$ تمثل متطابقة.

(30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة: $\tan \theta \sin \theta$

(31) **تبرير:** بين كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ على الصورة: $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

(32) **اكتشف الخطأ:** بسط كل من علاء وسامي المقدار $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

سامي

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{1} \\ &= \sin^2 \theta \end{aligned}$$

علاء

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \tan^2 \theta + 1 \\ &= \sec^2 \theta \end{aligned}$$





لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R ، لاحظ أن جسمه لا يكون عمودياً على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.



كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin \theta = \frac{v^2}{gR} \cos \theta$ ، حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$. هل تختلف هاتان المعادلتان كلياً عن بعضهما بعضاً، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.
(الدرس 1-3)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

تحويل أحد طرفي المتطابقة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي

إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً.

مثال 1

إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta \quad \text{أثبت صحة المتطابقة}$$

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة
توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

تحقق من فهمك

$$(1) \cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$$



عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، لا بد من تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$ ؟

$\cot^2 \theta$ **C**

$\cot \theta$ **A**

$\csc^2 \theta$ **D**

$\csc \theta$ **B**

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات
كي تتحقق من صحة حلك
اختر قيمة لـ θ . وعوض
بها في البديل المختار، ثم
قارنها بإجابتك عند تعويض
قيمة θ في العبارة الأصلية.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2 \theta (\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)$ ؟

$\cos^2 \theta$ **C**

$\cot^2 \theta$ **A**

$\sin^2 \theta$ **D**

$\tan^2 \theta$ **B**



تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي

اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّ أو اضرب كلّاً من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب ، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\cos \theta \cot \theta = \csc \theta - \sin \theta$

تنبيه!

تبسيط الطرفين

تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عملية التحقق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

تحقق من فهمك

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta \quad (3)$$

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

$$\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1 \quad (1)$$

$$\cot \theta (\cot \theta + \tan \theta) = \csc^2 \theta \quad (2)$$

$$1 + \sec^2 \theta \sin^2 \theta = \sec^2 \theta \quad (3)$$

$$\sin \theta \sec \theta \cot \theta = 1 \quad (4)$$

$$\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\csc \theta - \cot \theta)^2 \quad (5)$$

$$\frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan \theta - \cot \theta \quad (6)$$

$$\tan \theta = \frac{\sec \theta}{\csc \theta} \quad (7)$$

$$\cos \theta = \sin \theta \cot \theta \quad (8)$$

$$(\sin \theta - 1)(\tan \theta + \sec \theta) = -\cos \theta \quad (9)$$

$$\cos \theta \cos(-\theta) - \sin \theta \sin(-\theta) = 1 \quad (10)$$

$$\frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta} \quad \text{أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة ؟} \quad (11)$$

(مثال 2)

$$\cos^2 \theta \quad \text{C} \quad \sin^2 \theta \quad \text{A}$$

$$\csc^2 \theta \quad \text{D} \quad \tan^2 \theta \quad \text{B}$$



بسّط كلّاً من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو -1 :

$$\cot(-\theta) \tan(-\theta) \quad (26)$$

$$\sin \theta \csc(-\theta) \quad (27)$$

$$\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) \quad (28)$$

$$\sec(-\theta) \cos(-\theta) \quad (29)$$

$$\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta) \quad (30)$$

$$\cot(-\theta) \cot(\pi - \theta) \quad (31)$$

$$\cos(-\theta) \sec \theta \quad (32)$$

$$\sin(-\theta) \csc \theta \quad (33)$$

بسّط كلّاً مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \csc \theta}{\csc^2 \theta} \quad (34)$$

$$\frac{1 + \tan \theta}{1 + \cot \theta} \quad (35)$$

$$\frac{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}{\cos^2 x + \sin^2 x} \quad (36)$$

$$\tan \theta \cos \theta \quad (37)$$

$$\cot \theta \tan \theta \quad (38)$$

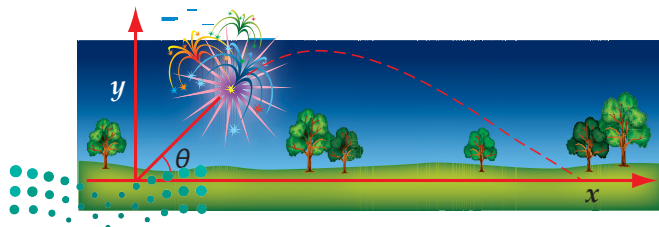
$$\sec \theta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (39)$$

$$(\sec^2 \theta + \csc^2 \theta) - (\tan^2 \theta + \cot^2 \theta) \quad (40)$$

41) فيزياء: عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة:

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + \frac{x \sin \theta}{\cos \theta}$$

للمقدوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan \theta$.



أثبت صحة كلّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

$$\sec \theta - \tan \theta = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (12)$$

$$\frac{1 + \tan \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \sec \theta \quad (13)$$

$$\sec \theta \csc \theta = \tan \theta + \cot \theta \quad (14)$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sin \theta - \cos \theta} \quad (15)$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{2 + \sec \theta \csc \theta}{\sec \theta \csc \theta} \quad (16)$$

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \quad (17)$$

$$\csc \theta - 1 = \frac{\cot^2 \theta}{\csc \theta + 1} \quad (18)$$

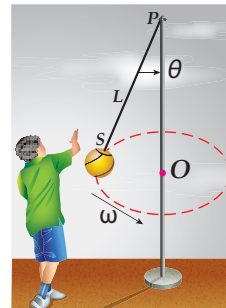
$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta \quad (19)$$

$$\sin \theta \cos \theta \tan \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (20)$$

$$\sec \theta - \cos \theta = \tan \theta \sin \theta \quad (21)$$

$$\csc^2 \theta = \cot^2 \theta + \sin \theta \csc \theta \quad (22)$$

$$\frac{\sec \theta - \csc \theta}{\csc \theta \sec \theta} = \sin \theta - \cos \theta \quad (23)$$



24) ألعاب: يبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω (الإزاحة الزاوية مقسومة على الزمن المستغرق)، فإنها تكون مع الحبل L الذي طرفاه p, s ، والزاوية المحصورة شكلاً مخروطياً. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود θ تُعطى بالصيغة: $L = \frac{g \sec \theta}{\omega^2}$ ، حيث g تسارع

الجاذبية الأرضية ويساوي 9.8 m/s^2 ، فهل الصيغة $L = \frac{g \tan \theta}{\omega^2 \sin \theta}$ هي أيضاً تمثّل العلاقة بين L, θ ؟ وضح إجابتك.

25) جري: مضمار سباق نصف قطره 16.7 m . إذا ركض أحد العدّائين

في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$ ،

فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos \theta$ أولاً، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

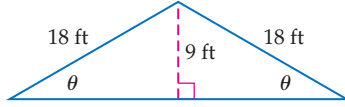
مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 1-3)

(50) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$

(51) $\cos \theta$ ، إذا كان $\sec \theta = \frac{5}{3}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

(52) **هندسة معمارية:** يمثل الشكل أدناه سقف منزل مغطى بالقرميد. أوجد θ . (مهارة سابقة)



بسّط العبارتين الآتيتين. (الدرس 1-3)

(54) $\sin \theta \cos \theta (1 + \cot^2 \theta)$ (55) $\frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$

تدريب على اختبار

(55) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ $\cos \theta$ ، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟

A $\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ C $\cot \theta \sin \theta$

B $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$ D $\tan \theta \csc \theta$

(56) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثل متطابقة: $\sin^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$

(42) **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردد من خلال مقاومة R ، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi ft$ ، حيث f التردد ، I_0 أعلى قيمة للتيار.

(a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$.

(b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$.

(43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $1 = 2 \sin x$.

(a) **جبرياً:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

(b) **بيانياً:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثل كلاً من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع (a) بيانياً كدالة في المجال $0 \leq x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

(c) **بيانياً:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثل كلاً من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع (a) بيانياً، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما ، وأوجد قيم x بالراديان.

(d) **لفظياً:** خمن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

(44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$

(45) **تبرير:** بين لماذا تُعدّ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست متطابقة.

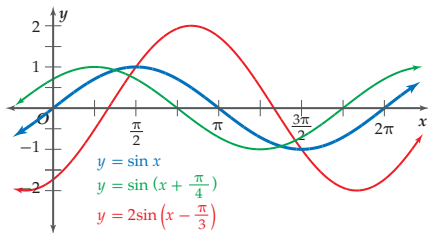
(46) **اكتب سؤالاً:** يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالاً قد يساعده في ذلك.

(47) **تبرير:** اكتب موضعاً لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب ($\sin \theta$) وجيب التمام ($\cos \theta$) في معظم الأحيان.

(48) **تحّد:** إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$

(49) **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.





لماذا؟

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟

تُسبب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلاً. ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.

متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمن جمع الزاويتين x و $\frac{\pi}{4}$. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزاويا محدّدة. فمثلاً يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$ من خلال إيجاد: $\sin(60^\circ - 45^\circ)$.

متطابقات المجموع والفرق

مفهوم أساسي

متطابقات الفرق

- $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

متطابقات المجموع

- $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

إيجاد القيم المثلثية

مثال 1

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(a) $\sin 105^\circ$

(b) $\cos(-120^\circ)$

(1B) $\cos(-15^\circ)$

(1A) $\sin 15^\circ$

تحقق من فهمك

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوال المثلثية للزاويا.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

إرشادات للدراسة

كُون قائمة:

كُون قائمة بقياسات الزوايا الناتجة من جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين 0° , 360° ، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعاً لك.



بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

استعمال متطابقات المجموع والفرق

مثال 2 من واقع الحياة

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

(a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين من الزاوي الخاصة.

(b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.



الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285^\circ t$ ، فأجب عما يأتي:

(2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

(2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضاً في إثبات صحة المتطابقات.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3

أثبت صحة كلّ من المتطابقتين الآتيتين:

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \quad (a)$$



$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \quad (b)$$

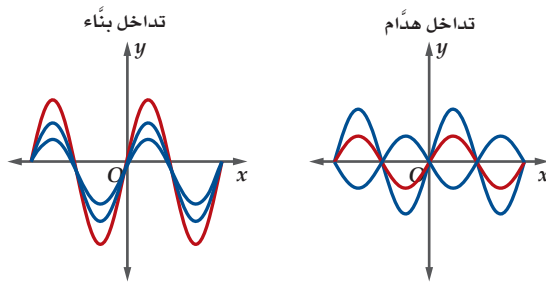
تحقق من فهمك

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad (3A)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \quad (3B)$$

تدرب وحل المسائل

(16) إلكترونيات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبالعكس ذلك يكون هدامًا.



إذا علمت أن كلا من الدالتين:
 $y_1 = 10 \sin(2t + 210^\circ)$, $y_2 = 10 \sin(2t + 30^\circ)$
تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسّر معناه بالنسبة للموجتين.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\sec 1275^\circ \quad (18)$$

$$\tan 165^\circ \quad (17)$$

$$\tan \frac{23\pi}{12} \quad (20)$$

$$\sin 735^\circ \quad (19)$$

$$\cot \frac{113\pi}{12} \quad (22)$$

$$\csc \frac{5\pi}{12} \quad (21)$$

(23) بين أنه يمكن كتابة المقدار $\frac{\sin A + \tan \theta \cos A}{\cos A - \tan \theta \sin A}$ على الصورة $\tan(A + \theta)$ ، حيث θ ، A زاويتان حادتان.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: **(مثال 1)**

$$\cos 105^\circ \quad (2)$$

$$\cos 165^\circ \quad (1)$$

$$\cos \frac{\pi}{12} \quad (4)$$

$$\cos 75^\circ \quad (3)$$

$$\sin(-210^\circ) \quad (6)$$

$$\sin 135^\circ \quad (5)$$

$$\tan 195^\circ \quad (8)$$

$$\cos 135^\circ \quad (7)$$

(9) كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120^\circ t)$. **(مثال 2)**

(a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

(b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين من الزاوية الخاصة؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: **(مثال 3)**

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta \quad (10)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta \quad (11)$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta \quad (12)$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \quad (13)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \quad (14)$$

$$\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \quad (15)$$



32) اكتب: استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس وفي السؤال 16؛ لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضِّحاً الفرق بين التداخل البناء، والتداخل الهدام.

33) مسألة مفتوحة: في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ اختر قيمًا لكل من A, B, C . وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها.

مراجعة تراكمية

بسّط كلاً من العبارتين الآتيتين: (الدرس 3-1)

$$\sin \theta \csc \theta - \cos^2 \theta \quad (34)$$

$$\cos^2 \theta \sec \theta \csc \theta \quad (35)$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

$$\sec \theta \quad (36) \text{ إذا كان } \tan \theta = \frac{1}{2}, 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\cos \theta \quad (37) \text{ إذا كان } \sin \theta = -\frac{2}{3}, 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

$$\csc \theta \quad (38) \text{ إذا كان } \cot \theta = -\frac{7}{12}, 90^\circ < \theta < 180^\circ$$

$$\sin \theta \quad (39) \text{ إذا كان } \cos \theta = \frac{3}{4}, 270^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$\tan \theta \quad (40) \text{ إذا كان } 8 \cos \theta - 5 = 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين: (الدرس 3-2)

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} + \frac{\cos \theta}{\cot \theta} = \cos \theta + \sin \theta \quad (41)$$

$$\sec \theta (\sec \theta - \cos \theta) = \tan^2 \theta \quad (42)$$

تدريب على اختبار

(43)

ما القيمة الدقيقة للعبارة:

$$\sin (60^\circ + \theta) \cos \theta - \cos (60^\circ + \theta) \sin \theta$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{C} \quad \frac{1}{2} \quad \text{A}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{D} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{B}$$

44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان $\cos \theta + 0.3 = 0$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot \theta$ حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

24) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$.

(a) جدولياً: أكمل الجدول.

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin (A + B)$	$\sin A + \sin B$
30°	90°				
45°	60°				
90°	30°				

(b) بيانياً: افترض أن B أقل من A بـ 15° دائماً، واستعمل الحاسبة

$$\text{البيان لتمثل كلاً من: } y = \sin (x + x - 15^\circ),$$

$$y = \sin x + \sin (x - 15^\circ) \text{ على الشاشة نفسها.}$$

(c) تحليلياً: حدّد ما إذا كانت $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$

متطابقة أم لا. فسّر إجابتك.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

$$\sin (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B} \quad (25)$$

$$\cos (A + B) = \frac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B} \quad (26)$$

$$\sec (A - B) = \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B} \quad (27)$$

$$\sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B \quad (28)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

29) تبرير: بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.

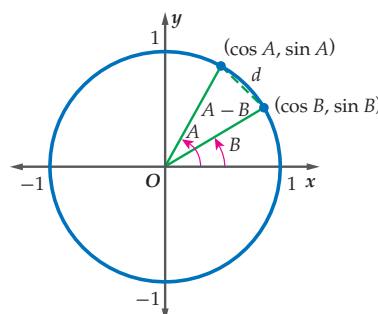
$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right)$$

30) تحدّ: اشتق المتطابقة $\cot (A + B)$ بدلالة $\cot A, \cot B$.

31) برهان: الشكل أدناه، يُبين الزاويتين A, B في الوضع القياسي

في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة؛ لإيجاد قيمة d ، حيث

$$(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B), (x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$$

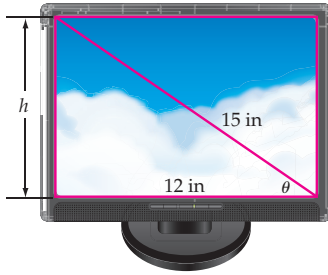


(14) **حاسوب:** تُصنّف شاشات الحاسوب عادة وفقاً لطول قطرها.

استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 3-1)

(a) أوجد قيمة h .

(b) بين أن $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$



أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: (الدرس 3-2)

$$\frac{\sin \theta \cdot \sec \theta}{\sec \theta - 1} = (\sec \theta + 1) \cot \theta \quad (15)$$

$$\sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (16)$$

$$\cot \theta (1 - \cos \theta) = \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (17)$$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(الدرس 3-3)

$$\cos 105^\circ \quad (18)$$

$$\sin (-135^\circ) \quad (19)$$

$$\tan 15^\circ \quad (20)$$

$$\cot 75^\circ \quad (21)$$

(22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos \frac{5\pi}{12}$ ؟ (الدرس 3-3)

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{C} \quad \sqrt{2} \quad \text{A}$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{D} \quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \quad \text{B}$$

(23) أثبت صحة المتطابقة الآتية: (الدرس 3-2)
 $\cos 30^\circ \cos \theta + \sin 30^\circ \sin \theta = \sin 60^\circ \cos \theta + \cos 60^\circ \sin \theta$

بسط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-1)

$$\cot \theta \sec \theta \quad (1)$$

$$1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (2)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (3)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \csc \theta \quad (4)$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

$$\sin \theta \quad (5) \quad \text{إذا كان } \cos \theta = \frac{3}{5}, \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\csc \theta \quad (6) \quad \text{إذا كان } \cot \theta = -\frac{1}{2}, \quad 270^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$\tan \theta \quad (7) \quad \text{إذا كان } \sec \theta = \frac{4}{3}, \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

(8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة:
(الدرس 3-1) $\frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta}$

$$\tan \theta \quad \text{C} \quad \cos \theta \quad \text{A}$$

$$\sec \theta \quad \text{D} \quad \csc \theta \quad \text{B}$$

(9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16m، وظل زاوية ميل

سلمان تُعطى بالعلاقة $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$ ، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتري لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 9.8 m/s^2 . (الدرس 3-2)

(a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$ ، فأوجد زاوية ميله.

(b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: (الدرس 3-2)

$$\cot^2 \theta + 1 = \frac{\cot \theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \quad (10)$$

$$\frac{\cos \theta \csc \theta}{\cot \theta} = 1 \quad (11)$$

$$\frac{\sin \theta \tan \theta}{1 - \cos \theta} = (1 + \cos \theta) \sec \theta \quad (12)$$

$$\tan \theta (1 - \sin \theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin \theta} \quad (13)$$



لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v ، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D ، وأقصى ارتفاع H :

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ .

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مفهوم أساسي

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 30

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin(A+B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ ، أو $\sin 2\theta$. كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos(A+B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ ، أو $\cos 2\theta$.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 1

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

تحقق من فهمك

(1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.



المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مثال 2

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي علمًا بأن $0^\circ < \theta < 90^\circ$; $\sin \theta = \frac{2}{3}$:

(a) $\cos 2\theta$

(b) $\tan 2\theta$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي علمًا بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$; $\cos \theta = -\frac{1}{3}$:

(2B) $\tan 2\theta$

(2A) $\cos 2\theta$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ في إيجاد جيب نصف الزاوية θ أو $\frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ في إيجاد جيب تمام نصف الزاوية θ أو $\frac{\theta}{2}$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مفهوم أساسي

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مثال 3

(a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ، تقع في الربع الثالث.

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة

أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$.
وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

(b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5^\circ$.

تحقق من فهمك



(3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، تقع في الربع الثاني.

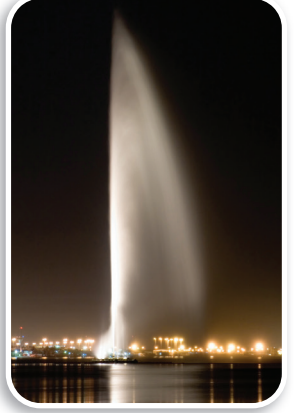
وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها 159

2023

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.



الربط مع الحياة

نافورة الملك فهد هي أحد معالم الجمال في مدينة جدة، فقد أقيمت على جزيرة قرابة الشاطئ، وتضخ الماء رأسياً إلى ارتفاع 312m.

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتيمتر لكل ثانية تربيع) تقريباً بالصيغة:
 $g = 978 + 5.17 \sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$ ، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

(4A) بسط هذه العلاقة مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

(4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة g عندما $L = 45^\circ$.

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضاً.

إثبات صحة المتطابقات

مثال 5

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$

تحقق من فهمك

(5) $4 \cos^2 x - \sin^2 2x = 4 \cos^4 x$



تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل من

$$\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \text{ ، إذا كان: (الأمثلة 1-3)}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{4}; 0^\circ < \theta < 90^\circ \quad (1)$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}; 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (2)$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}; 270^\circ < \theta < 360^\circ \quad (3)$$

$$\tan \theta = -\frac{8}{15}; 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (4)$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3}; 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (5)$$

$$\sin \theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (6)$$

$$\tan \theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (7)$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\sin \frac{\pi}{8} \quad (8)$$

$$\cos 15^\circ \quad (9)$$

$$\sin 75^\circ \quad (10)$$

$$\tan 165^\circ \quad (11)$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} \quad (12)$$

(13) كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم

كرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52 ft/s . إذا كانت

المسافة الأفقية d التي تقطعها

الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث g تسارع

الجاذبية الأرضية ويساوي 32 ft/s^2 ، و v تمثل السرعة الابتدائية

المتجهة. (مثال 4)

(a) بسط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

(b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة

المبسطة؟

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: (مثال 5)

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad (14)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (15)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta} \quad (16)$$

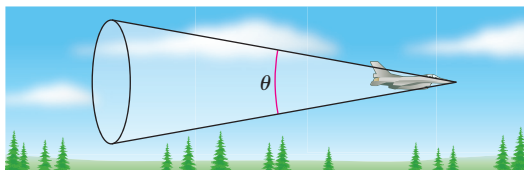
$$\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2} \quad (17)$$



(18) عدد ماخ: ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكّله الأمواج

الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M

(نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) وفق العلاقة $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



(a) عبّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

(b) إذا كان $\cos \theta = \frac{17}{18}$ ، فاستعمل العبارة التي أوجدتها في (a) لحساب قيمة عدد ماخ.

(19) إلكترونيات: يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار

الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تُعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

(20) كرة قدم: ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة ابتدائية

مقدارها 95 ft/s . برهن أن المسافة الأفقية التي قطعها الكرة

متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45^\circ + A$ ، $\theta = 45^\circ - A$.

استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13.

أوجد القيم الدقيقة لكل من $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ، $\tan 2\theta$ ، إذا كان:

$$\cos \theta = \frac{4}{5}; 0^\circ < \theta < 90^\circ \quad (21)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (22)$$

$$\tan \theta = -3; 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (23)$$

$$\sec \theta = -\frac{4}{3}; 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (24)$$

$$\cot \theta = \frac{3}{2}; 180^\circ < \theta < 270^\circ \quad (25)$$

(26) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد

متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

(a) بيانيًا: استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة

$$f(\theta) = 4 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ بيانيًا في الفترة } -2\pi \leq \theta \leq 2\pi$$

(b) تحليليًا: اعتمد على التمثيل البياني في (a) لتخمين دالة بدلالة

الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًا.

(c) بيانيًا: استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة

$$g(\theta) = \cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) - \sin^2 \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \text{ بيانيًا في الفترة } -2\pi \leq \theta \leq 2\pi$$

(d) تحليليًا: اعتمد على التمثيل البياني في (c) لتخمين دالة بدلالة

جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًا.

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: (الدرس 2-3)

$$\cot \theta + \sec \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad (33)$$

$$\sin^2 \theta + \tan^2 \theta = (1 - \cos^2 \theta) + \frac{\sec^2 \theta}{\csc^2 \theta} \quad (34)$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \quad (35)$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-3)

$$\sin 135^\circ \quad (36)$$

$$\cos 105^\circ \quad (37)$$

$$\sin 285^\circ \quad (38)$$

$$\cos 210^\circ \quad (39)$$

$$\sin (-240^\circ) \quad (40)$$

$$\cos (-120^\circ) \quad (41)$$

$$\cos 78^\circ \cos 18^\circ + \sin 78^\circ \sin 18^\circ \quad (42)$$

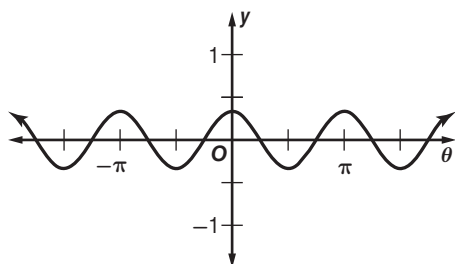
تدريب على اختبار

(43) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $0 < \theta < 90^\circ$; $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{C} \quad \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \quad \text{A}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{D} \quad \sqrt{3} - 2 \quad \text{B}$$

(44) معادلة الدالة الممثلة بيانياً في الشكل أدناه هي:



$$y = 3 \cos \frac{1}{2} \theta \quad \text{C} \quad y = 3 \cos 2\theta \quad \text{A}$$

$$y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2} \theta \quad \text{D} \quad y = \frac{1}{3} \cos 2\theta \quad \text{B}$$



مسائل مهارات التفكير العليا

(27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ برّر إجابتك.

سعيد

$$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

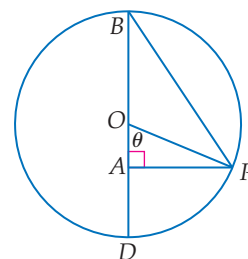
$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\sin \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$

$$= 0.5$$

(28) **تحذّر:** استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها. لبرهن أن:

$$\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$



(29) **اكتب:** اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها؛ كي تستعمل كلا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$.

(30) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin (A + B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\sin 2\theta$ ، واستعمل الصيغة $\cos (A + B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$.

(31) **تبرير:** اشتق المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

(32) **مسألة مفتوحة:** ضرب لاعب جولف كرة عدة مرات بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعها الكرة في كل مرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. فسّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45^\circ$. ($g = 32 \text{ ft/s}^2$)



معمل الحاسبة البيانية؛ حل المعادلات المثلثية Solving Trigonometric Equations

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة جميعها. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كلّ من طرفي المعادلة بوصفها دالة على حدة، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

معادلة مثلثية بحلول حقيقية

نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$ ، إذا كانت $0^\circ \leq x < 360^\circ$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًا

- اضبط الحاسبة على نظام الدرجات بالضغط على مفتاح on ثم 5 الإعدادات ومنها

2: إعدادات المستند... ثم الزاوية: درجة

- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = 0.4$.

- مثّل الدالتين بيانيًا بالضغط على المفاتيح:

on trig sin x enter tab 0.4 enter

- حدد فترة الرسم المطلوبة بالضغط على menu واختر منها 4: تكبير/تصغير النافذة ثم 1: إعدادات النافذة

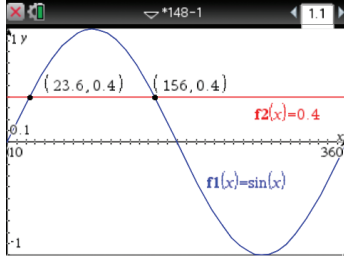
وحدد القيمة الصغرى لـ x بـ 0° ، والقيمة العظمى لـ x بـ 360° ،

كذلك حدد القيمة الصغرى لـ y بـ -1 ، والقيمة العظمى لـ y بـ 1

الخطوة 2: تحديد الحلول

- استعمل ميزة نقاط التقاطع في إيجاد قيم تقريبية للحلول بالضغط على مفتاح menu واختر منها 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر

4: نقاط التقاطع، واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقاط التقاطع في $0^\circ \leq x < 360^\circ$ ، ستكون الحلول هي: $x \approx 23.6^\circ$, $x \approx 156.0^\circ$



معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية

نشاط 2

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ ، إذا كانت $0^\circ \leq x < 360^\circ$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًا

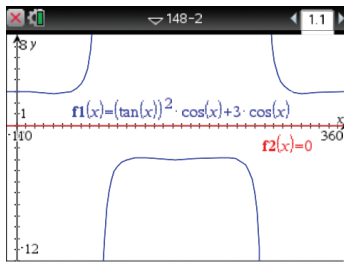
- أعد كتابة المعادلة $f_1(x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x$, $f_2(x) = 0$.

- مثّل الدالتين بيانيًا بالضغط على المفاتيح:

on trig tan x enter 2 trig cos x $+$ 3 trig cos x enter tab 0 enter

الخطوة 2: تحديد الحلول

هاتان الدالتان لا تتقاطعان؛ لذلك ليس للمعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.



تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x الموضحة بجانب كلّ منها:

(1) $\sin x = 0.7$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$

(3) $3 \cos x + 4 = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$

(5) $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$

(2) $\tan x = \cos x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$

(4) $0.25 \cos x = 3.4$; $-720^\circ \leq x < 720^\circ$

(6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0$; $-360^\circ \leq x < 360^\circ$



لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$$

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعاً خاصاً من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل المعادلات المثلثية التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

حل المعادلات على فترة معطاة

مثال 1

حلّ كلّاً من المعادلتين الآتيتين:

$$(a) \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0 \text{ ، إذا كانت } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$(b) 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0 \text{ ، إذا كان } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

فيما سبق:

درست المتطابقات المثلثية.
(الدروس من 2-3 إلى 4-3)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية

trigonometric equations

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية

حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.



تحقق من فهمك

(1A) حل المعادلة $\cos x \sin x = 3 \cos x$ ، إذا كانت $0 \leq x \leq 2\pi$.

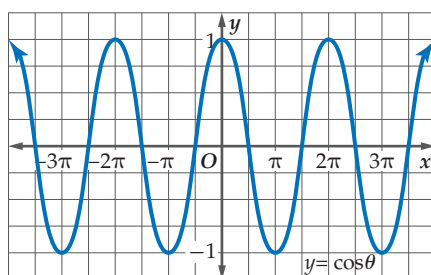
(1B) حل المعادلة $4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta = 0$ إذا كانت $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغير في الفترة $[0, 2\pi]$ بالراديان، أو $[0^\circ, 360^\circ]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

مثال 2

حل المعادلة $\cos \theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.



إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات
العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π
مضافاً لها مضاعفات 2π ،
ولذلك، ليس من الضروري
سرد جميع الحلول.

تحقق من فهمك

(2A) حل المعادلة $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$.

(2B) حل المعادلة $2 \sin \theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حل مسائل من واقع الحياة.

حل معادلات مثلثية

مثال 3 من واقع الحياة

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟



تحقق من فهمك

3 كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة ، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحلول الدخيلة : بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل . فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos \theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos \theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولاً دخيلة.

إذا لم تتمكن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالترتيب مثلاً إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

مثال 4

حلّ المعادلة: $\sin \theta = 1 + \cos \theta$ إذا كان $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

تحقق من فهمك

$$\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta \quad (4)$$



حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

مثال 5

حلّ المعادلة $2 \sec^2 \theta - \tan^4 \theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك.
ابحث عن زوج من الحلول
الفرق بينهما هو π تمامًا.
واكتب حلولك بأبسط
طريقة.

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة
الظل هو π ، وهذا يبرر كتابة
الحلول في الصورة:
 $\theta = 60^\circ + 180^\circ k$
 $\theta = 120^\circ + 180^\circ k$

تحقق من فهمك

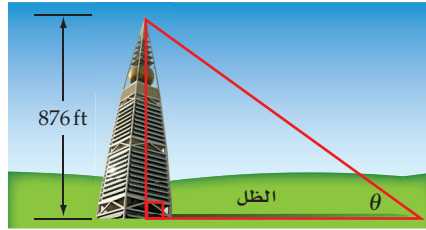


حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

$$\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0 \quad (5B)$$

$$\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0 \quad (5A)$$

(23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft. أوجد θ إذا كان طول ظلّه في الشكل أدناه 685 m؟



(24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3 \sin \left[\frac{\pi}{6}(x - 4) \right] + 8$ عمق نهر

خلال أحد الأيام؛ حيث $x = 0, 1, 2, \dots, 24$ تدل على الساعة الثانية عشرة عند منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر، وهكذا....

(a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟

(b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

$$(\cos \theta)(\sin 2\theta) - 2 \sin \theta + 2 = 0 \quad (25)$$

$$2 \sin^2 \theta + (\sqrt{2} - 1) \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (26)$$

$$2 \sin \theta = \sin 2\theta \quad (27)$$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

$$\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \quad (28)$$

$$1 - \sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{3}{4} \quad (29)$$

(30) **ألماس:** حسب قانون سنيل ($n_1 \sin i = n_2 \sin r$) حيث n_1 معامل الانكسار للوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

(a) إذا كان معامل الانكسار للألماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو 35° ، فما قياس زاوية الانكسار؟

(b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛



حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها: (مثال 1)

$$\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 0; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (1)$$

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (2)$$

$$-2 \sin^2 \theta = 7 - 15 \sin \theta; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (3)$$

$$\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0; 0^\circ \leq \theta \leq 240^\circ \quad (4)$$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

$$2 \cos^2 \theta = 1 \quad (6) \quad 4 \sin^2 \theta - 1 = 0 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta = -2 \quad (8) \quad \sin \frac{\theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0 \quad (7)$$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

$$\sin^2 \theta - \sin \theta = 0 \quad (10) \quad \cos 2\theta - \sin^2 \theta + 2 = 0 \quad (9)$$

$$\cos \theta - 2 \cos \theta \sin \theta = 0 \quad (12) \quad 2 \sin^2 \theta - 1 = 0 \quad (11)$$

(13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d ، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3 \sin \frac{2\pi}{365}t + 12$ ، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3)

(a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$ h تمامًا؟

(b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريباً يوم 22 يونيو؟ فسّر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

$$\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0 \quad (14) \quad \sin 2\theta - \cos \theta = 0 \quad (15)$$

$$\tan \theta = 1 \quad (16) \quad \tan \theta - \sin \theta = 0 \quad (21)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (17)$$

$$2 \sin^2 \theta = 1; 90^\circ < \theta < 270^\circ \quad (18)$$

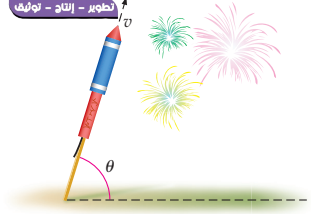
$$\sin 2\theta - \cos \theta = 0; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (19)$$

$$4 \sin^2 \theta - 1 = 0; 180^\circ < \theta < 360^\circ \quad (20)$$

$$4 \sin^2 \theta = 4 \sin \theta - 1 \quad (22)$$

$$\tan \theta - \sin \theta = 0 \quad (21)$$

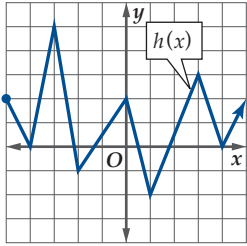
$$4 \sin^2 \theta = 4 \sin \theta - 1 \quad (22)$$



(45) ألعاب نارية: إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$ ، حيث θ زاوية الانطلاق، و v السرعة المتجهة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي 9.8 m/sec .

(a) أثبت أن $\frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{v^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ تمثل متطابقة.

(b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية 80° ، وسرعة ابتدائية مقدارها 110 m/s ، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه.
(الدرس 3-2)



(46) استعمل التمثيل البياني في الشكل المجاور؛ لتحديد مجال الدالة $h(x)$ ومداها. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

(47) أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة $\sin \theta + \cos \theta \tan^2 \theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ B $\frac{7\pi}{4}$ C 2π D $\frac{3\pi}{4}$

(48) ما حل المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0^\circ < x < 360^\circ$ ؟

A 150° أو 30° C 330° أو 210°

B 120° أو 60° D 300° أو 240°

مسائل مهارات التفكير العليا

(31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$ ، $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برّر إجابتك.

ليلى

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin \theta \\ -\sin \theta &= -\sin \theta \\ 2 \cos \theta &= 0 \\ \cos \theta &= 0 \\ \theta &= 90^\circ, 270^\circ \end{aligned}$$

هلا

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin \theta \\ \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \\ 2 \cos \theta &= 1 \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= 60^\circ, 300^\circ \end{aligned}$$

(32) تحدّ: حل المتباينة $\sin 2x < \sin x$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة.

(33) اكتب: حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟

(34) تبرير: اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية.

(35) مسألة مفتوحة: اكتب مثلاً على معادلة مثلثية لها حلان فقط، بحيث تكون $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

(36) تحدّ: هل للمعادلتين $\cot^2 x + 1 = 2$ ، $\csc x = \sqrt{2}$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برّر إجابتك.

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-4)

(37) $\cos 165^\circ$ (38) $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ (39) $\sin \frac{7\pi}{8}$ (40) $\cos \frac{7\pi}{12}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (الدرس 3-3)

(41) $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta$ (42) $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$

(43) $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ (44) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$



ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 3-1, 3-2, 3-5)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
(الدروس 3-3)

- لجميع قيم A, B :

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
(الدروس 3-4)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

(1) يمكن استعمال _____ في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية 75° إذا علم الجيب والجيب تمام لكل من الزاويتين 90° و 15° .

(2) المتطابقة $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هي مثال على _____.

(3) _____ هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرّفًا.

(4) يمكن استعمال _____ في إيجاد $\sin 60^\circ$ باستعمال الزاوية 30° .

(5) تكون _____ صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.

(6) يمكن استعمال _____ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$.

(7) المتطابقتان $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ ، $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ مثالان على _____.

(8) يمكن استعمال _____ في إيجاد كل من $\sin 120^\circ$ ، $\cos 120^\circ$ إذا علم الجيب، والجيب تمام لكل من الزاويتين 90° ، 30° .

(9) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على _____.



مراجعة الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 142 - 146)

مثال 1

أوجد $\sin \theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{4}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

متطابقة فيثاغورس $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

اطرح $\cos^2 \theta$ من كلا الطرفين. $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

عوّض $\frac{3}{4}$ بدلاً عن $\cos \theta$ $\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$

ربع $\frac{3}{4}$ $\sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{16}$

اطرح $\sin^2 \theta = \frac{7}{16}$

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin \theta$ موجبة.

إذن، $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos \theta \sec \theta \cot \theta$.

$$\cos \theta \sec \theta \cot \theta = \cos \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$= \cot \theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

(10) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

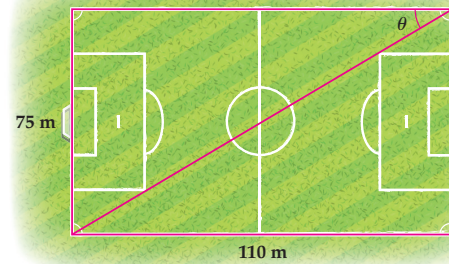
(11) $\sec \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

(12) $\tan \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = 2$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$

(13) $\cos \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$

(14) $\csc \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = -\frac{4}{5}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

(15) **كرة قدم:** إذا كان بُعدا ملعب كرة القدم هما: 75 m, 110 m كما في الشكل أدناه، فأوجد جيب الزاوية θ .



بسّط كل عبارة مما يأتي :

(16) $1 - \tan \theta \sin \theta \cos \theta$

(17) $\tan \theta \csc \theta$

(18) $\sin \theta + \cos \theta \cot \theta$

(19) $\cos \theta (1 + \tan^2 \theta)$

إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 147 - 151)

3-2

مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} = \cot \theta + \csc \theta$

الطرف الأيسر $\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta}$

بسّط $= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta}$

بسّط $= \cot \theta + \csc \theta \checkmark$

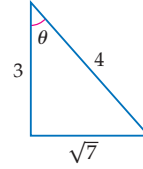
= الطرف الأيمن

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

$\tan \theta \cos \theta + \cot \theta \sin \theta = \sin \theta + \cos \theta$ (20)

$\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \sin \theta + \cos \theta$ (21)

$\sec^2 \theta - 1 = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$ (22)



(23) هندسة: المثلث المجاور قائم الزاوية.

استعمل أطواله المعطاة للتحقق من أن

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 152 - 155)

3-3

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75^\circ$

دون استعمال الآلة الحاسبة، استعمل المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$

$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$\cos(-135^\circ)$ (24)

$\cos 15^\circ$ (25)

$\sin 210^\circ$ (26)

$\sin 105^\circ$ (27)

$\tan 75^\circ$ (28)

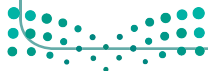
$\cos 105^\circ$ (29)

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$ (30)

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$ (31)

$\tan(\theta - \pi) = \tan \theta$ (32)



مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ، وتقع θ في الربع الثاني.

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \text{متطابقة نصف الزاوية}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \quad = \pm \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$\text{اطرح} \quad = \pm \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$$

$$\text{اقسم ، بسط ، وأنطق المقام} \quad = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{بما أن } \theta \text{ تقع في الربع الثاني، فإن}$$

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، $\cos \frac{\theta}{2}$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ، إذا علمت أن:

$$\cos \theta = \frac{4}{5}; 0^\circ < \theta < 90^\circ \quad (33)$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{4}; 180^\circ < \theta < 270^\circ \quad (34)$$

$$\cos \theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (35)$$

(36) **ملاحظ:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

(a) أوجد طول قطر الملعب.

(b) اكتب النسبة $\sin 45^\circ$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

(c) استعمل الصيغة $\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع (b).

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$ ، إذا كان $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$\sin 2\theta - \cos \theta = 0 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0 \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$\cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0 \quad \text{حل}$$

$$\cos \theta = 0 \quad \text{أو} \quad 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2} \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ أو } \frac{5\pi}{6}$$

حل كل معادلة مما يأتي ، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

$$2 \cos \theta - 1 = 0; 0^\circ \leq \theta < 360^\circ \quad (37)$$

$$4 \cos^2 \theta - 1 = 0; 0^\circ \leq \theta < 2\pi \quad (38)$$

$$\sin 2\theta + \cos \theta = 0; 0^\circ \leq \theta < 360^\circ \quad (39)$$

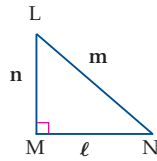
$$\sin^2 \theta = 2 \sin \theta + 3; 0^\circ \leq \theta < 360^\circ \quad (40)$$

$$4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 1 = 0; 0 \leq \theta < 2\pi \quad (41)$$

تطبيقات ومسائل

- (45) **موجات:** يُسمى تداخل موجتين بناءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين الآتيتين معادلتهما بناءً؟
 $y_1 = 20 \sin(3t + 225^\circ)$ ، $y_2 = 20 \sin(3t + 45^\circ)$
 (الدرس 3-3)

- (46) **هندسة:** استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$.
 (الدرس 3-4)



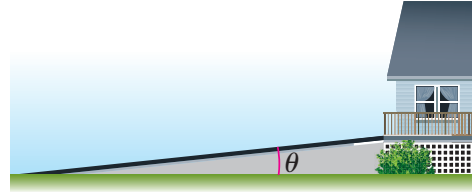
- أثبت أن كلاً من المعادلتين الآتيتين تمثلان متطابقة: (الدرس 3-4)

$$\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2 \theta} = \cot \theta \quad (47)$$

$$1 + \cos 2\theta = \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} \quad (48)$$

- (49) **مقدوفات:** إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v \cos \theta}$ ، فأوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة، إذا علمت أن $v = 50 \text{ ft/s}$ ، وكانت المسافة الأفقية 100 ft، وزمن التحليق 4 ثوانٍ.
 (الدرس 3-5)

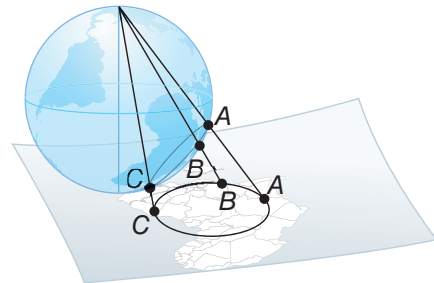
- (42) **إنشاءات:** يبين الشكل أدناه ممراً مائلاً لمنزل. (الدرس 3-1)



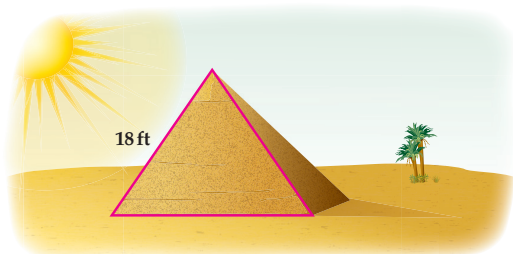
أوجد θ ، $\cos \theta$ ، $\sin \theta$ إذا كان $\tan \theta = \frac{1}{12}$.

- (43) **ضوء:** تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$ ؛ حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan \theta$. (الدرس 3-1)

- (44) **خرائط:** يستعمل إسقاط الستيروجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة)، بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$. أثبت أن $r = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$. (الدرس 3-2)



(14) تاريخ: يُرجَّح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، ثمَّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنَّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 18 ft.



(a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

(b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبين أن $\sin 2(30^\circ) = \sin 60^\circ$ ، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثة $\sin 60^\circ$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\cos (-225^{\circ}) \quad (15$$

$$\sin 480^\circ \quad (16)$$

$\cos 75^\circ$ (17)

$\sin 165^\circ$ (18)

حلّ كلّاً من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

$$2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0 \quad (19)$$

$$2 \sin 3\theta - 1 = 0 \quad (20)$$

حل المعادلتين الآتيتين، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

$$\cos 2\theta + \cos \theta = 2 \quad (21)$$

$$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = 0 \quad (22)$$

(1) **اختيار من متعدد:** أى من العبارات الآتية تكافئ

$$\sin \theta + \cos \theta \cot \theta$$

$\sec \theta$ **C** $\cot \theta$ **A**

$$\csc \theta \quad \mathbf{D} \qquad \tan \theta \quad \mathbf{B}$$

أثبت أن كلا من المعادلتين الآتيتين تمثل متطابقة:

$$\therefore \cos (30^\circ - \theta) = \sin (60^\circ + \theta) \quad (2)$$

$$\cos (\theta - \pi) = -\cos \theta \quad (3)$$

(4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$ ، إذا كان

For $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$$-\frac{4}{5} \quad \mathbf{C} \qquad \frac{5}{3} \quad \mathbf{A}$$

$$\frac{4}{5} \mathbf{D} \qquad \frac{\sqrt{34}}{8} \mathbf{B}$$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$270^\circ < \theta < 360^\circ$ ، $\sec \theta = \frac{4}{3}$ ، إذا كان $\cot \theta$ (5)

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ إذا كان $\tan \theta$ (6

$180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sec \theta$ اذا كان $\csc \theta = -2$ (7

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ ، $\sin \theta = \frac{1}{2}$ إذا كان **(8)**

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

$$\sin \theta (\cot \theta + \tan \theta) = \sec \theta \quad (9)$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sec \theta - \tan \theta} \quad (10)$$

$$(\tan \theta + \cot \theta)^2 = \csc^2 \theta \sec^2 \theta \quad (11)$$

$$\frac{1 + \sec \theta}{\sec \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \quad (12)$$

(13) اختيار من متعدد: ما قيمة $\tan \frac{\pi}{8}$ ؟

$$1 - \sqrt{2} \quad \mathbf{C} \qquad \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad \mathbf{A}$$

$$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad \mathbf{D} \qquad \sqrt{2}-1 \quad \mathbf{B}$$

القطوع المخروطية

Conic Sections

الفصل 4

فيما سبق:

درست تمثيل الدالة التربيعية (والتي تمثل قطعاً مكافئاً)، ودالة المقلوب (والتي تمثل قطعاً زائداً). **الدرس (3-5)**

والآن:

- أحل معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأمثلةها بيانياً.
- أكتب معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحل مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟

فضاء: القطوع

المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضاوية الشكل تشبه القطوع الناقصة، أما المذنبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، مما يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقاً.

قراءة سابقة: اكتب قائمة

بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلهما البياني.





التهيئة للفصل 4

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال

(Functions transformations):

هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسية (الأم).

المماس (tangent line):

يكون المستقيم مماساً لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

إكمال المربع (completing the square):

لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$ ، اتبع الخطوات التالية:

(1) أوجد نصف معامل x ؛ أي نصف b .

(2) رُبع الناتج في الخطوة (1).

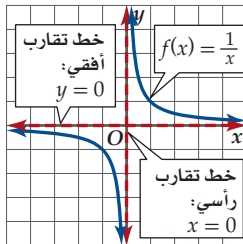
(3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

محور التماثل (axis of symmetry):

مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):

هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن

أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

(1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$ (2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

(3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$ (4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$

(5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$ (6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

(7) أعمال: يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة.

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

(8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ (9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$

(10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ (11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

(12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$ (13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

(14) $x^2 + 8x$

(15) $x^2 - 18x$

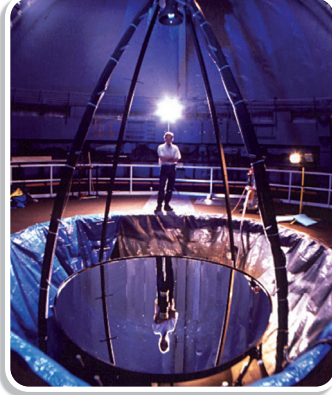
مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

(16) $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$

(17) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

(18) هدية: أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوباً ورقياً لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثل هذا الموقف، ومثلها بيانياً.

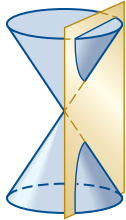




لماذا؟

استعمل العلماء حديثاً تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطعتها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

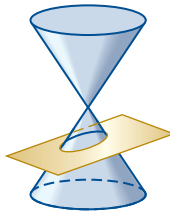
القطع المخروطية: القطع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما. بحيث لا يمر المستوى بالرأس. والقطع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.



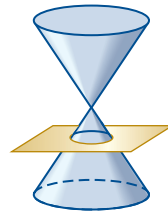
القطع الزائد



القطع المكافئ



القطع الناقص

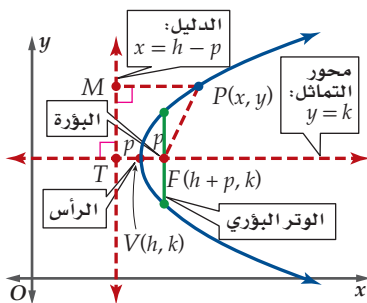


الدائرة

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفاراً. وتوجد صورة أكثر تحديداً لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعاً في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانياً:

المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة (**تسمى البؤرة**) مساوياً دائماً لبُعدها عن مستقيم معلوم (**يسمى الدليل**).



والقطع المكافئ متمائل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **الوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

درست سابقاً الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ والتي يمثل منحناها قطعاً مكافئاً مفتوحاً إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحاً أفقياً (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسياً (إلى أعلى أو إلى أسفل).

فيما سبق:

درست الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانياً. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحلل معادلات قطع مكافئة، وأمثلها بيانياً.
- أكتب معادلات قطع مكافئة.

المفردات

القطع المخروطي

conic section

المحل الهندسي

locus

القطع المكافئ

parabola

البؤرة

focus

الدليل

directrix

محور التماثل

axis of symmetry

الرأس

vertex

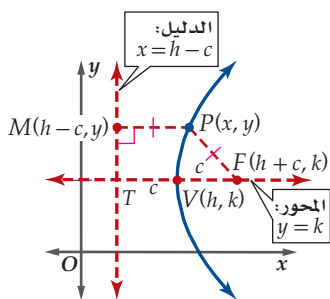
الوتر البؤري

latus rectum

إرشادات للدراسة

القطع

كلمة قطع هي مفرد كلمة قطع، وتعني في اللغة الجزء قال تعالى: ﴿فَأَنزِلْ بِأَهْلِكَ بِقِطْعٍ مِّنَ الْبَلِّ...﴾ [الحجر: 65]



افترض أن نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h + c, k)$ ، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.

نعلم من تعريف القطع المكافئ أن $PF = PM$. وبما أن M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} = \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - y)^2}$$

$$[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2 = [x - (h - c)]^2 + 0^2$$

$$x^2 - 2x(h + c) + (h + c)^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2x(h - c) + (h - c)^2$$

$$x^2 - 2xh - 2xc + h^2 + 2hc + c^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2xh + 2xc + h^2 - 2hc + c^2$$

بسّط

$$(y - k)^2 = 4xc - 4hc$$

حلّ

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

أي أن معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y - k)^2 = 4c(x - h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$. وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطع المكافئ، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

قراءة الرياضيات

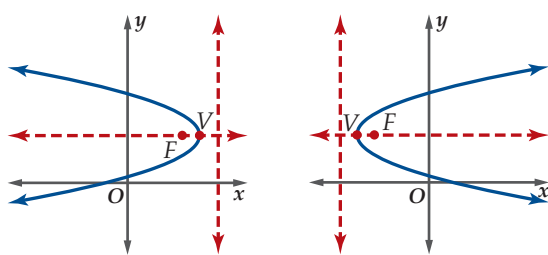
اتجاه فتحة منحنى القطع

ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًا (إلى اليمين أو اليسار).

خصائص القطع المكافئ

مفهوم أساسي

المعادلة في الصورة القياسية: $(y - k)^2 = 4c(x - h)$



$c < 0$

$c > 0$

المنحنى مفتوح أفقيًا

الاتجاه:

(h, k)

الرأس:

$(h + c, k)$

البؤرة:

$y = k$

معادلة محور التماثل:

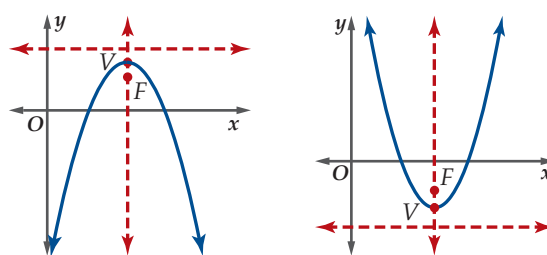
$x = h - c$

معادلة الدليل:

$|4c|$

طول الوتر البؤري:

المعادلة في الصورة القياسية: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$



$c < 0$

$c > 0$

المنحنى مفتوح رأسيًا

الاتجاه:

(h, k)

الرأس:

$(h, k + c)$

البؤرة:

$x = h$

معادلة محور التماثل:

$y = k - c$

معادلة الدليل:

$|4c|$

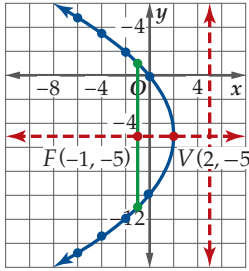
طول الوتر البؤري:

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل.

تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانياً

مثال 1

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y + 5)^2 = -12(x - 2)$ ، ثمّ مثلّ منحناه بيانياً.



تحقق من فهمك

$$2(x + 6) = (y + 1)^2 \quad (1B)$$

$$8(y + 3) = (x - 4)^2 \quad (1A)$$

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ

يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:

— مفتوحاً إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c > 0$.

— مفتوحاً إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c < 0$.

— مفتوحاً إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c > 0$.

— مفتوحاً إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c < 0$.

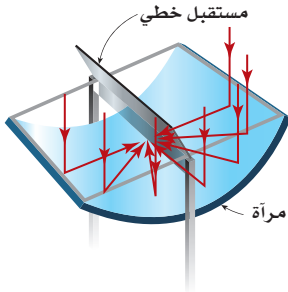
إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري

لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبؤرة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

خصائص القطع المكافئ

مثال 2 من واقع الحياة



طاقة شمسية: يتكون مجمّع شمسي من مرآة مقطوعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$ ، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع ، أين يقع المستقبل الخطي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟



الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

تحقق من فهمك

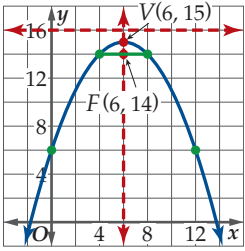
(2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y - 6)$ ، حيث $-5 \leq x \leq 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحياناً إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

مثال 3

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدّد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًا.



تحقق من فهمك

$$3y^2 + 6y + 15 = 12x \quad (3B)$$

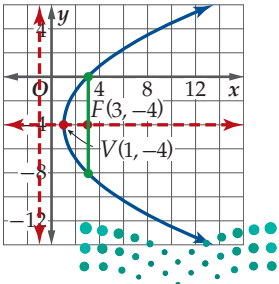
$$x^2 - 4y + 3 = 7 \quad (3A)$$

معادلات القُطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

مثال 4

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا:
(a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.



إرشادات للدراسة

الاتجاه

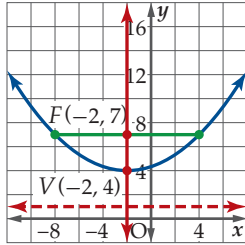
إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x ، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحاً إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى اليمين أو إلى اليسار.

(b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

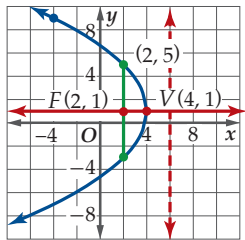
إرشادات للدراسة

الدليل

يقع الدليل في الاتجاه
المعكس لاتجاه منحنى
القطع المكافئ.



(c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.



تحقق من فهمك

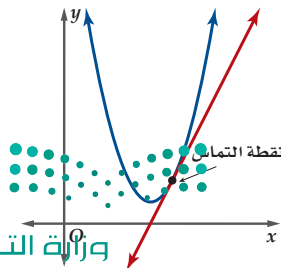
4A البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

4C البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

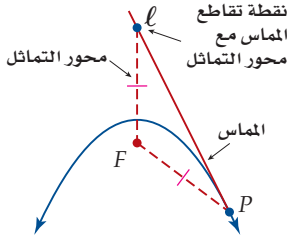
4D البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

يمكن رسم مماس لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقاً كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



مفهوم أساسي

مماس منحنى القطع المكافئ



مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.

إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

— إذا كان المنحنى مفتوحاً أفقيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي:
 $x = h$

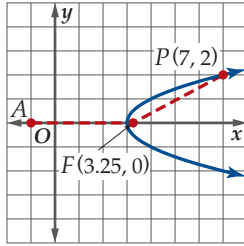
— إذا كان المنحنى مفتوحاً رأسيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي:
 $y = k$

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

مثال 5

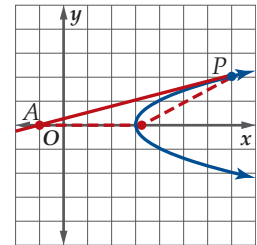
اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.
 الخطوة الأولى:

الخطوة الثانية:



الخطوة الثالثة:

الخطوة الرابعة:



الشكل 4.1.1

تحقق من فهمك



(5A) $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

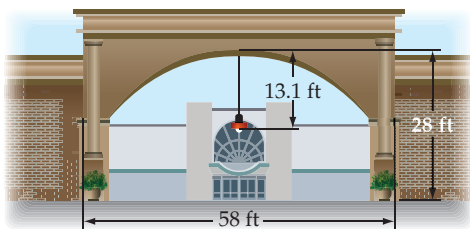
(5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 1-4 القطوع المكافئة 144 183

(23) عمارة: أنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



- (a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x ، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y .
(b) مثل منحنى القطع المكافئ بيانياً.

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

$$(24) (-5, -5); (x + 7)^2 = -\frac{1}{2}(y - 3)$$

$$(25) (24, 2); y^2 = \frac{1}{5}(x - 4)$$

$$(26) (0, 14); (x + 6)^2 = 3(y - 2)$$

$$(27) (0, -5); -4x = (y + 5)^2$$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

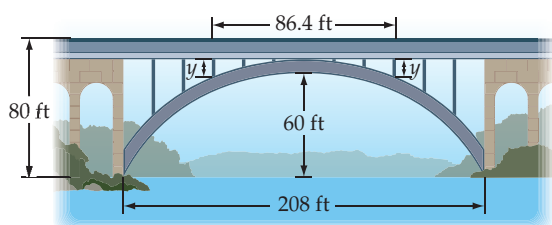
$$(28) \text{ الدليل } y = 4 \text{ و } c = -2$$

$$(29) \text{ المعادلة هي } y^2 = -8(x - 6)$$

$$(30) \text{ الرأس } (-5, 1) \text{ والبؤرة } (-5, 3)$$

$$(31) \text{ البؤرة } (7, 10) \text{ والدليل } x = 1$$

(32) جسر: يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft، وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.



- (a) اكتب معادلة تمثل شكل القوس مفترضاً أن مسار الطريق على الجسر يمثل المحور x ، والمحور المار بقمة القوس والعمودي على المحور x هو المحور y .
(b) توجد دعامتان رأسيان للقوس تبعدان مسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft.

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً: (مثال 1)

$$(1) (x - 3)^2 = 12(y - 7) \quad (2) (x + 1)^2 = -12(y - 6)$$

$$(3) (y - 4)^2 = 20(x + 2) \quad (4) -40(x + 4) = (y - 9)^2$$

$$(5) (y + 5)^2 = 24(x - 1) \quad (6) -4(y + 2) = (x + 8)^2$$

(7) لوح تزليج: صمّم بدر لوح تزليج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y - 2)$ ، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

(8) قوارب: يُبحر قارب في الماء تاركاً وراءه أثراً على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$ ، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)



(a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

(b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدّد خصائصه ومثل منحناه بيانياً: (مثال 3)

$$(9) x^2 - 17 = 8y + 39 \quad (10) y^2 + 33 = -8x - 23$$

$$(11) 3x^2 + 72 = -72y \quad (12) 60x - 80 = 3y^2 + 100$$

$$(13) -33 = x^2 - 12y - 6x \quad (14) -72 = 2y^2 - 16y - 20x$$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4)

$$(15) \text{ البؤرة } (-9, -7) \text{ والرأس } (-9, -4).$$

$$(16) \text{ البؤرة } (3, 3) \text{ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة } (23, 18).$$

$$(17) \text{ البؤرة } (2, -1) \text{ والرأس } (-4, -1).$$

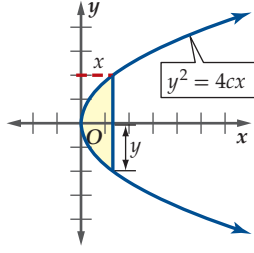
$$(18) \text{ البؤرة } (11, 4) \text{ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة } (20, 16).$$

$$(19) \text{ البؤرة } (-3, -2) \text{، والرأس } (1, -2).$$

$$(20) \text{ المنحنى مفتوح رأسياً ويمر بالنقاط } (-12, -14), (0, -2), (6, -5).$$

$$(21) \text{ البؤرة } (-3, 4) \text{، والرأس } (-3, 2).$$

$$(22) \text{ الرأس } (-3, 2) \text{، محور التماثل } y = 2 \text{، طول الوتر البؤري 8 وحدات.}$$



(39) تحد: تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A = \frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وعرضه ($2y$) يساوي 3 وحدات.

(40) اكتب: اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أُعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

$\log_3 27^x$ (43) $\log_4 16^x$ (42) $\log_{16} 4$ (41)

حلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك. (مهارة سابقة)

$8^{2x-1} = 2 \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (44)

$\log_3 (-x) + \log_3 (6-x) = 3$ (45)

$\log_3 x \leq -3$ (46)

أوجد كلاً مما يأتي إذا كان: (مهارة سابقة)

$h(x) = 16 - \frac{12}{2x+3}$
 $h(-3)$ (a)

$h(6x)$ (b)

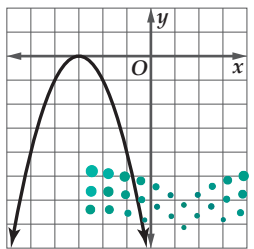
$h(10-2c)$ (c)

(48) إذا كان $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$ ، فأوجد $\sin \theta + \cos \theta$ ، حيث θ زاوية في الربع الأول. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

(49) إذا كان x عدداً موجباً، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

$\sqrt{x^5}$ D $x^{\frac{3}{4}}$ C $\sqrt{x^3}$ B $x^{-\frac{1}{4}}$ A



(50) ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحنها جانباً؟

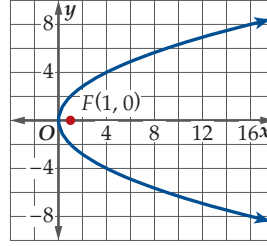
$y = x$ A

$y = |x|$ B

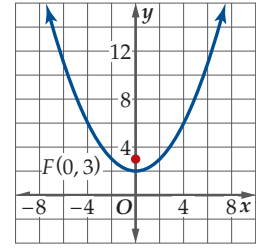
$y = \sqrt{x}$ C

$y = x^2$ D

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F ، في كل مما يأتي:



(34)



(33)

(35) تمثيلات متعددة: ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعاً لتغير موقع البؤرة.

(a) هندسياً: أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

(i) $y^2 = 4(x-2)$ (ii) $y^2 = 8(x-2)$ (iii) $y^2 = 16(x-2)$

(b) بيانياً: مثل منحنى كل قطع مكافئ في الفرع a بيانياً باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيّن بؤرة كل منها.

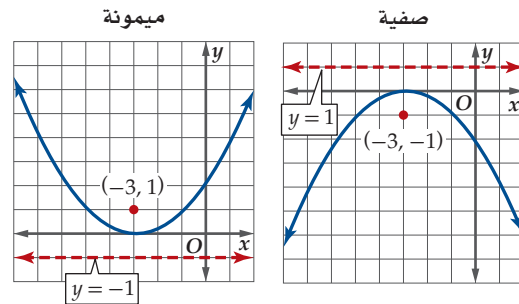
(c) لفظياً: صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

(d) تحليلياً: اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنه أقل اتساعاً.

(e) تحليلياً: كوّن تخميناً حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي: $x^2 = -2(y+1)$, $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -5(y+1)$ ثم تحقق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانياً.

مسائل مهارات التفكير العليا

(36) اكتشف الخطأ: مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانياً كما هو موضح أدناه. فأَي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.



(37) تبرير: أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

(38) تبرير: حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2 = -8(x+2)$. فسّر تبريرك.



لماذا؟

يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائرياً تماماً حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلاً إهليلجياً يسمى قطعاً ناقصاً.

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانياً. (الدرس 1-4)

والآن:

- أحلل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثلها بيانياً.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

المضردات:

القطع الناقص

ellipse

البؤرتان

foci

المحور الأكبر

major axis

المركز

center

المحور الأصغر

minor axis

الرأسان

vertices

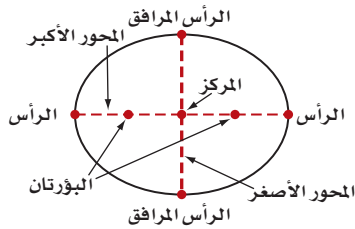
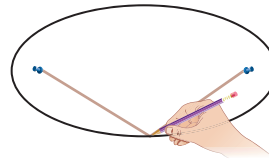
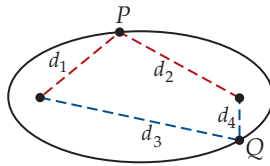
الرأسان المرافقان

co-vertices

الاختلاف المركزي

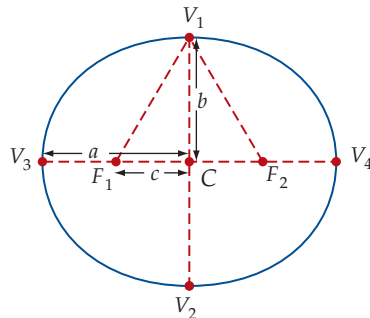
eccentricity

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلها بيانياً: القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً. وتسمى هاتان النقطتان البؤرتان، وعملياً يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البؤرتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شدة كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقداراً ثابتاً، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ ، وهذا مقدار ثابت.



تُسمى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أما القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمى نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.

مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضاً، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة. وفيما يلي توضيح للعلاقة بين a, b, c



بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS ($\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}$, $\angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2$, $\overline{V_1C} \cong \overline{V_1C}$) فإن $V_1F_1 \cong V_1F_2$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1, V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c .

تعريف القطع الناقص

$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$$

$$V_3F_1 = V_4F_2$$

$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$$

$$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$$

$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$$

$$V_3V_4 = 2a$$

$$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$$

$$V_1F_1 = V_1F_2$$

$$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$$

بسط

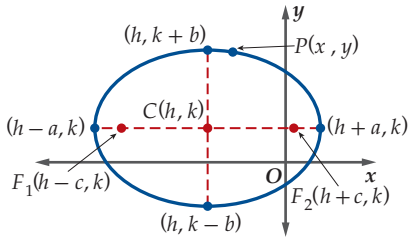
$$2(V_1F_1) = 2a$$

اقسم

$$V_1F_1 = a$$

بما أن $V_1F_1 = a$ ، و $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.





تعريف القطع الناقص

صيغة المسافة

خاصية التوزيع ثم التجميع

ا طرح

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين

بسّط

اقسم كلا الطرفين على 4

ربّع الطرفين

خاصية التوزيع

بسّط

$a^2 - c^2 = b^2$

اقسم الطرفين على $a^2 b^2$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ، حيث $a > b$ ، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

افترض أن نقطة $P(x, y)$ على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a - \sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2}$$

$$(x - h)^2 - 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} +$$

$$(x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2$$

$$4a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} = 4a^2 + 4c(x - h)$$

$$a\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} = a^2 + c(x - h)$$

$$a^2[(x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2] = a^4 + 2a^2c(x - h) + c^2(x - h)^2$$

$$a^2(x - h)^2 + 2a^2c(x - h) + a^2c^2 + a^2(y - k)^2 = a^4 + 2a^2c(x - h) + c^2(x - h)^2$$

$$a^2(x - h)^2 - c^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$$

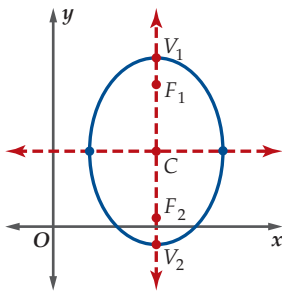
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

خصائص القطع الناقص

مفهوم أساسي

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2a$

المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2b$

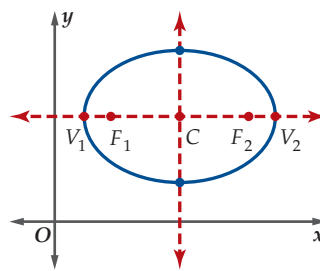
العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

الرأسان: $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$

المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2a$

المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2b$

العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

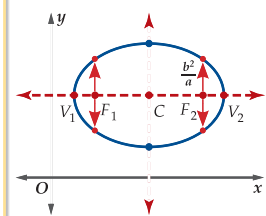
طول البعد البؤري: $2C$

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.

لرسم القطع الناقص نعين نقاطاً مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين.

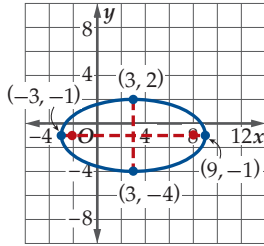


تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

مثال 1

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثمّ مثلّ منحناه بيانيًا:

$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad (a)$$

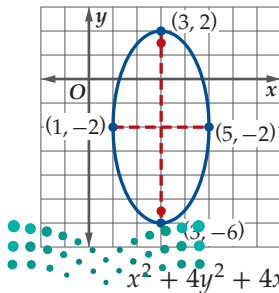


$$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0 \quad (b)$$

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.



$$x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0 \quad (1B)$$

تحقق من فهمك

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1 \quad (1A)$$

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا علمت بعض خصائصه

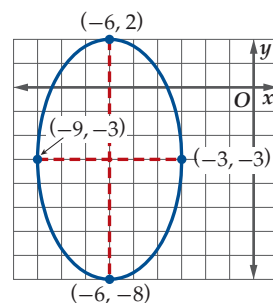
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:
(a) الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.

(b) الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.

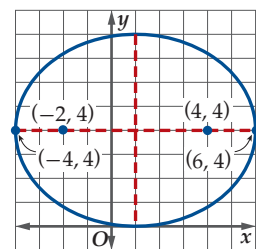
إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.



الشكل 4.2.1



الشكل 4.2.2

تحقق من فهمك

- (2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.
(2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

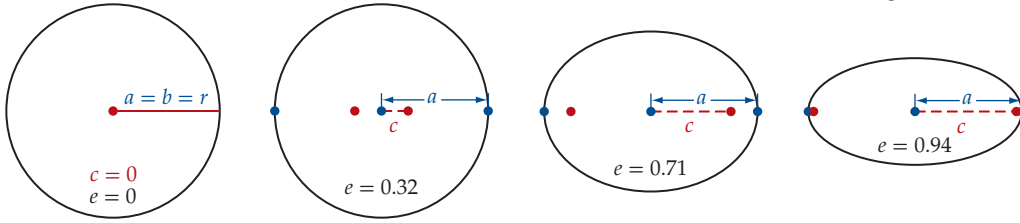
الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . وتقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1، وتحدد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

الاختلاف المركزي

مفهوم أساسي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ، حيث $a^2 = b^2 + c^2$ ، فإن
الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

تمثل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن c من قيمتي e, c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a, b مساوية لطول نصف قطر الدائرة.

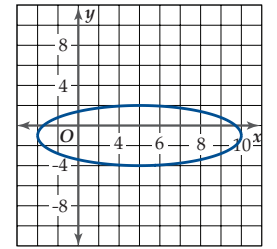


تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

مثال 3

$$\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص



الشكل 4.2.3

تحقق من فهمك

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

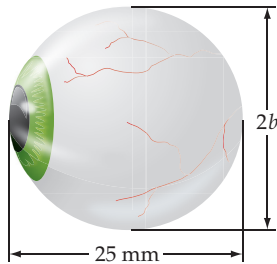
$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1 \quad (3B)$$

$$\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1 \quad (3A)$$

استعمال الاختلاف المركزي

مثال 4 من واقع الحياة

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثل المقطع العرضي المنصف للعين ماراً بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريباً، فما الارتفاع التقريبي لها؟



مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39. فإذا كان عمق العين 25 mm، فما ارتفاعها؟

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\text{معادلة القطع الناقص} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$e = 0 \text{ عندما } a = b \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\text{اضرب كلا الطرفين في } a^2 \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

$$a \text{ نصف قطر الدائرة} \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

مفهوم أساسي

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5

كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8.

تحقق من فهمك

(5B) المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10

(5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3

مثال 6

كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$ ، $(7, 6)$.

الخطوة 1:

الخطوة 2:

تحقق من فهمك

(6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$ ، $(3, -3)$.



اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

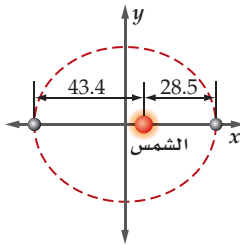
(18) $(2, 1), (2, -4)$

(19) $(-4, -10), (4, -10)$

(20) $(5, -7), (-2, -9)$

(21) $(-6, 4), (4, 8)$

(22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.



(23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، أجب عما يأتي:

(a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

(b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

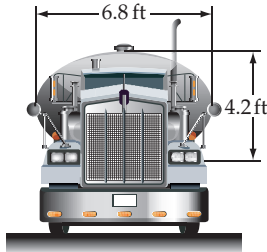
أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

(24) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

(25) $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

(26) $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

(27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعتها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتاً من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



(a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

(b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

(c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثل المقطع العرضي للخزان.

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(28) الرأسان $(10, 0), (-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

(29) الرأسان المرافقان $(6, 1), (0, 1)$ ، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$

(30) المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(-4 + 2\sqrt{5}, -4)$ والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً. (مثال 1)

(1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

(2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

(3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

(4) $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

(5) الرأسان $(-5, -3), (11, -3)$ ، والبؤرتان $(-7, -3), (13, -3)$

(6) الرأسان $(4, -9), (4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

(7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(1, 2), (-13, 2)$ ، وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0), (-6, 4)$.

(8) البؤرتان $(-6, -3), (-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

(9) الرأسان المرافقان $(-3, 7), (-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

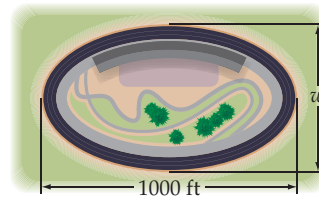
حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

(10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$

(11) $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

(12) $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$

(13) $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$



(14) **سباق:** يوضح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75. (مثال 4)

(a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

(b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً. (مثال 5)

(15) المركز $(3, 0)$ ، ونصف القطر 2.

(16) المركز $(-4, -3)$ ، والقطر 12.

(17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7.

(41) مسألة مفتوحة: إذا كانت معادلة دائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ حيث $h > 0, k < 0$ ، فأوجد مجال الدائرة مدعماً إجابتك بمثال جبري، وآخر بياني.

(42) اكتب: اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b .

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي:
(الدرس 4-1)

(44) $y = -2x^2 + 5x - 10$ **(43)** $y = 3x^2 - 24x + 50$

(45) $x = 5y^2 - 10y + 9$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
(الدرس 3-5)

(46) $\sin \theta = \cos \theta$

(47) $\sin \theta = 1 + \cos \theta$

(48) $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن لكل دالة مما يأتي، ثم حدد مجالها.
(مهارة سابقة)

(49) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

(50) $f(x) = \sqrt{5-x}$

(51) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

(52) مثل الدالة $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ بيانياً، وحدد مداها.
(مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

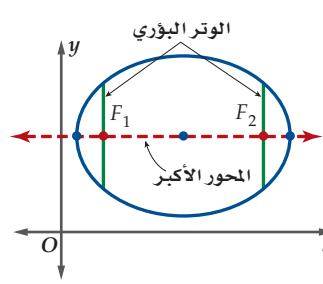
(53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M ، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

(54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعاد اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$ **C** $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$

B $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$ **D** $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$



(31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعاود المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.

اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(3, 2)$ ، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

(32) هندسة: تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3$, $2x + 3y = 7$, $4x - 7y = 27$ لتشكّل مثلثاً. اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

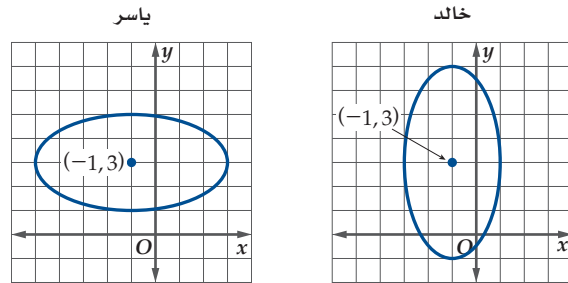
اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

(33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$ **(34)** $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

(35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$ **(36)** $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

مسائل مهارات التفكير العليا

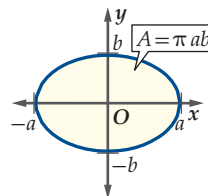
(37) اكتشف الخطأ: مثل خالد وياسر بيانياً القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$ ، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟



(38) تبرير: حدّد ما إذا كان للقطع الناقصين

$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1$, $\frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$ حيث $r > 0$ ، البؤرة نفسها. وضح إجابتك.

تحذّر: تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالصيغة $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي:



(39) $b + a = 12, A = 35\pi$

(40) $a - b = 5, A = 24\pi$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

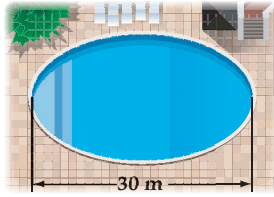
(7) الرأسان $(-3, -3)$ ، $(9, -3)$ ، والبؤرتان $(-1, -3)$ ، $(7, -3)$.

(8) البؤرتان $(3, 7)$ ، $(3, 1)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

(9) الرأسان $(1, -13)$ ، $(1, -1)$ ، والرأسان المرافقان $(4, -7)$ ، $(-2, -7)$.

(10) الرأسان $(8, -9)$ ، $(8, 5)$ ، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

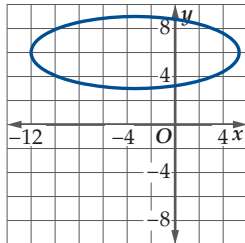
(11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30 m واختلافه المركزي 0.68 . (الدرس 4-2)



(a) ما أكبر عرض للبركة؟

(b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة.

(12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثل القيمة الأقرب لطول المحور الأكبر في القطع الناقص الممثل بيانياً أدناه؟ (الدرس 4-2)



C 6 وحدات

A 17 وحدة

D 3 وحدات

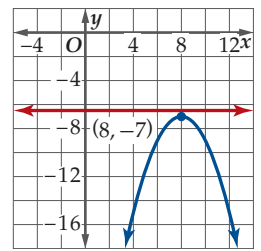
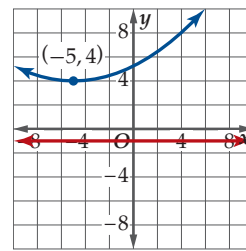
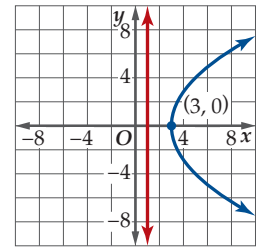
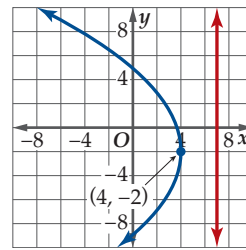
B 9 وحدات

اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثل منحنيهما بيانياً: (الدرس 4-1)

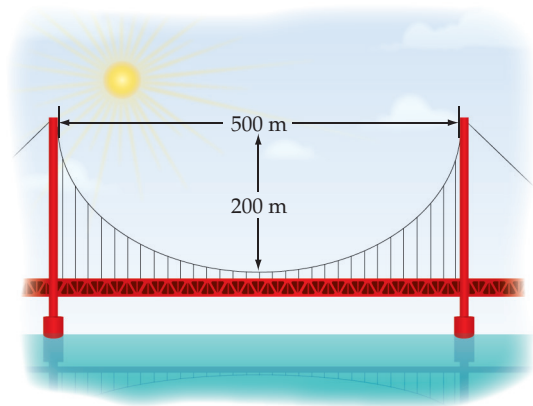
(1) البؤرة $(1, 5)$ ، الرأس $(1, 3)$

(2) البؤرة $(5, -7)$ ، الرأس $(1, -7)$

(3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثلة بيانياً أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 4-1)



(4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 4-1)



مثل منحني القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانياً: (الدرس 4-2)

$$\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1 \quad (5)$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1 \quad (6)$$



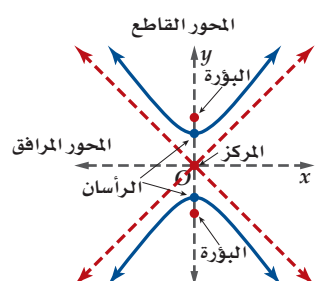
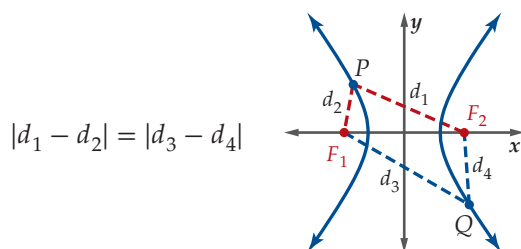


لماذا؟



يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقص؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرة واحدة فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة الكاشفري مثلاً، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجياً مفتوحاً من إحدى جهتيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانية، ومثل هذه المسارات تُسمّى قطعاً زائده.

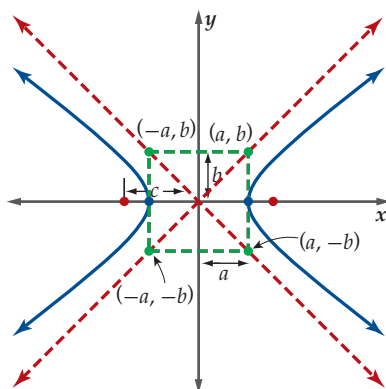
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً: القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعدها عن نقطتين ثابتتين تسميان (المؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً.



يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، ومركز القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، ورأس القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.

لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$ ، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدى أى نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوى $2a$.



فيما سبق:

درست تحلیل القطوع
الناقصة والدوائر
وتمثيل منحنياتها بيانياً.
(الدرس 2-4)

والآن:

- أحل معادلات القطوع الزائدة، وأمثلها بيانياً.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد

hyperbola

البورتان

foci

المركز

center

الرأسان

vertices

المحور القاطع

transverse axis

المحور المرافق

conjugate axis

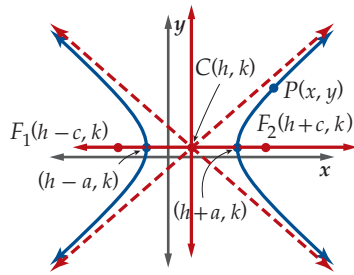
إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع

الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعا الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.





الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:

يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$ ، ومحوره القاطع أفقي. يوضح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} - \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} - \sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

اجمع

$$\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2} = 2a + \sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2}$$

ربع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع

$$(x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} +$$

مجموع (أو الفرق) بين حدين

$$(x - h)^2 - 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2$$

بسّط

$$-4a\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 4a^2 - 4c(x - h)$$

اقسم الطرفين على -4 .

$$a\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = -a^2 + c(x - h)$$

ربع الطرفين

$$a^2[(x - h)^2 - 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2] = a^4 - 2a^2c(x - h) + c^2(x - h)^2$$

الخاصية التوزيعية

$$a^2(x - h)^2 - 2a^2c(x - h) + a^2c^2 + a^2(y - k)^2 = a^4 - 2a^2c(x - h) + c^2(x - h)^2$$

بسّط

$$a^2(x - h)^2 - c^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

الخاصية التوزيعية

$$(a^2 - c^2)(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$a^2 - c^2 = -b^2$$

$$-b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2(-b^2)$$

اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا،

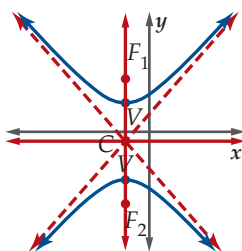
كما تكون في الصورة $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

خصائص القطع الزائد

مفهوم أساسي

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$



المحور القاطع رأسي

الاتجاه:

(h, k)

المركز:

$(h, k \pm a)$

الرأسان:

$(h, k \pm c)$

البؤرتان:

المحور القاطع: $x = h$ وطوله $2a$

المحور المرافق: $y = k$ وطوله $2b$

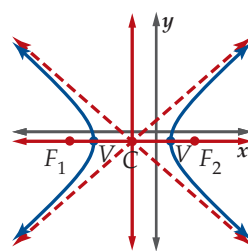
خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ أو } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



المحور القاطع أفقي

الاتجاه:

(h, k)

المركز:

$(h \pm a, k)$

الرأسان:

$(h \pm c, k)$

البؤرتان:

المحور القاطع: $y = k$ وطوله $2a$

المحور المرافق: $x = h$ وطوله $2b$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ أو } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

طول البعد البؤري: $2C$

وزارة التعليم

Ministry of Education

2023 - 1445

تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

مثال 1

حدّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9}$ ، ثمّ مثلّ منحناه بيانيّاً.

تنبيه!

عندما تمثّل منحنى القطع الزائد بيانيّاً تذكر أن المنحنى سيقترّب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

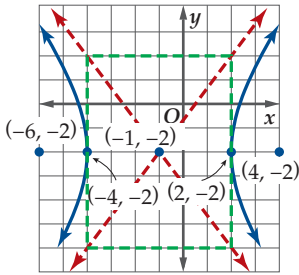
اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y ، فإن اتجاه القطع رأسي.

تحقق من فهمك

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \quad (1A)$$

$$\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1 \quad (1B)$$



يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

مثال 2

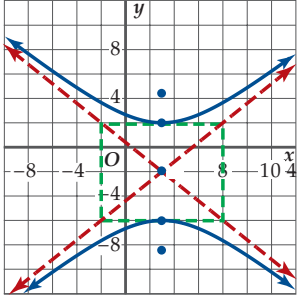
اكتب معادلة القطع الزائد $444 = 25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x$ على الصورة القياسية، ثم حدّد خصائصه ومثّل منحناه بيانيّاً.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائماً عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1.





الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)

كانت هايياتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولونيوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طوّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

تحقق من فهمك



$$2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0 \quad (2B)$$

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68 \quad (2A)$$

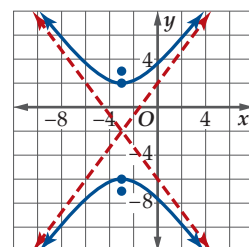
يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلومات كافية.

كتابة معادلة قطع زائد إذا علم بعض خصائصه

مثال 3

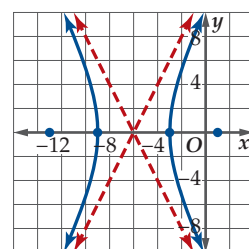
اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(a) الرأسان $(-3, 2)$ ، $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$ ، $(-3, -7)$.



الشكل 4.3.1

(b) الرأسان $(-3, 0)$ ، $(-9, 0)$ ، وخطا التقارب $y = 2x - 12$ ، $y = -2x + 12$.



الشكل 4.3.2

تحقق من فهمك

(3A) الرأسان $(3, 6)$ ، $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

(3B) البؤرتان $(12, -2)$ ، $(2, -2)$ ، وخطا التقارب $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$ ، $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$.

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكل من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائماً، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.



الاختلاف المركزي للقطع الزائد

مثال 4

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36}$.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

$$\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1 \quad (4B)$$

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1 \quad (4A)$$

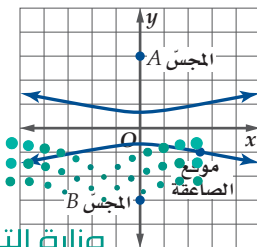
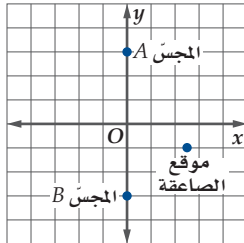
يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسّين موضوعين عند بُرتي قطع زائد.

تطبيقات على القطع الزائد

مثال 5 من واقع الحياة

أرصاد: يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسّين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B. ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجسّ B.

(a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.



الربط مع الحياة

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

(b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.

تحقق من فهمك

(5) **ملاحة بحرية:** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلاً بحرياً.

(5A) إذا كان موقعاً المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(100, 0)$ ، $(-100, 0)$.

(5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياتها $(100, 0)$.

تدرب وحل المسائل

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:
(مثال 3)

(13) البؤرتان $(-1, 9)$ ، $(-1, -7)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

(14) الرأسان $(-5, 5)$ ، $(7, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5)$ ، $(11, 5)$.

(15) الرأسان $(-1, 3)$ ، $(-1, 9)$ ، وخطا التقارب $y = \pm \frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

(16) البؤرتان $(-17, 7)$ ، $(9, 7)$ ، وخطا التقارب $y = \pm \frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

(17) المركز $(-7, 2)$ ، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$ ، والمحور القاطع أفقيًا وطوله 10 وحدات.

(18) الرأسان $(2, -2)$ ، $(2, 10)$ ، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

(19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(13, -2)$ ، $(-1, -2)$.

حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل
(مثال 1)

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} &= 1 & (2) \quad \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} &= 1 \\ (3) \quad \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} &= 1 & (4) \quad \frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} &= 1 \\ (5) \quad 3x^2 - 2y^2 &= 12 & (6) \quad 3y^2 - 5x^2 &= 15 \end{aligned}$$



(7) **إضاءة:** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًا. (مثال 1)

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثّل منحناه بيانيًا: (مثال 2)

$$(8) \quad x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$$

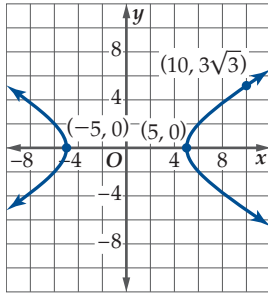
$$(9) \quad -x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$$

$$(10) \quad -5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$$

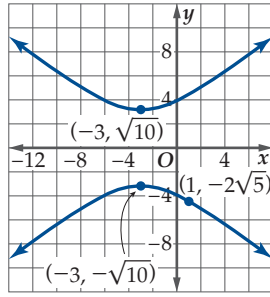
$$(11) \quad 9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$$

$$(12) \quad 16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$$

اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانياً في كل مما يأتي:

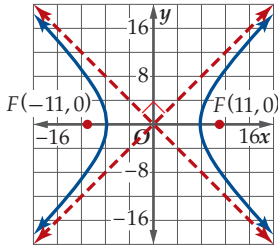


(30)



(29)

(31) **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft. إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.



(32) يتشكّل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، و $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد المتطابق الساقين في الشكل المجاور.

(33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعاً خاصاً من القطوع الزائدة يسمى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

(a) **بيانياً:** مثلّ منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه.

(b) **تحليلياً:** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

(c) **تحليلياً:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

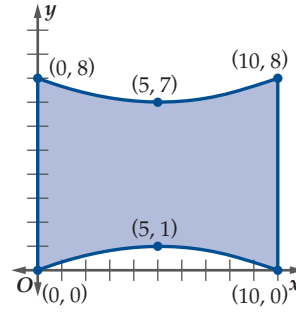
(d) **بيانياً:** مثل منحنى القطع في الفرع c.

(e) **لفظياً:** كوّن تخميناً حول تشابه القطعين الزائدين المتبرافقين.

(20) **هندسة معمارية:** بيّن الشكل المجاور مخطط أرضية مكتب.

(a) اكتب معادلة تمثّل فرعي المنحنى في الشكل.

(b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثّل 15 ft، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)



حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

(21) $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$ (22) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

(23) $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$ (24) $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

(25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

(26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

(27) **طيران:** يقع المطاران A, B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A. وعند لحظة ما كان بُعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بعدها عن المطار A. (مثال 5)

(a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

(b) مثلّ منحنى القطع الزائد بيانياً مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.

(c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثي موقع الطائرة.



(28) **هندسة معمارية:** يأخذ برج "كوب

بورث" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

(a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m، فما معادلة القطع الزائد؟

(b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

(43) مقذوفات: قُذفت كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s، بحيث يكون ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $h = -16t^2 + 80t + 5$. (الدرس 4-1)

(a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تبلغه الكرة؟

(b) كم تستغرق الكرة من الوقت؛ لتعود مرة أخرى إلى المستوى الذي انطلقت منه؟

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ . (الدرس 3-5)

$$\tan \theta = \sec \theta - 1 \quad (44)$$

$$\sin \theta + \cos \theta = 0 \quad (45)$$

$$\csc \theta - \cot \theta = 0 \quad (46)$$

تدريب على اختبار

(47) مراجعة: يمثل منحنى $1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2$ قطعاً زائداً. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

$$y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x \quad \mathbf{A}$$

$$y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x \quad \mathbf{B}$$

$$y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x \quad \mathbf{C}$$

$$y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x \quad \mathbf{D}$$

(48) سؤال ذو إجابة قصيرة: أوجد معادلتا خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1}$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(34) مسألة مفتوحة: اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين.

(35) تبرير: افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$ ، حيث r, s, t أعداد ثابتة. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. وشرح تبريرك.

$$rs = 0 \quad (\mathbf{a})$$

$$rs > 0 \quad (\mathbf{b})$$

$$r = s \quad (\mathbf{c})$$

$$rs < 0 \quad (\mathbf{d})$$

(36) تبرير: افترض أنك أعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: دائماً أو أحياناً أو غير ممكن أبداً؟

(37) تحدّ: قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9), F_2(0, -9)$ ، ويمر بالنقطة P . يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2 . اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية.

(38) برهان: يتشكل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متطابق الساقين هو $\sqrt{2}$.

(39) اكتب: صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما تعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع.

مراجعة تراكمية

مثلّ منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

$$(x-8)^2 + \frac{(y-2)^2}{81} = 1 \quad (40)$$

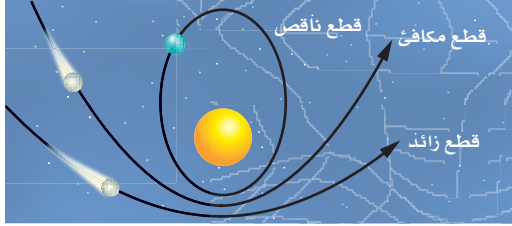
$$\frac{x^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{49} = 1 \quad (41)$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1 \quad (42)$$





لماذا؟



تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثل مركز الشمس بؤرة للقطع.

فيما سبق:

درست كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.
(الدروس من 1-4 إلى 3-4)

والآن:

■ أعدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة:
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفاراً. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

مثال 1

اكتب كلاً من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله:

$$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0 \quad (a)$$

$$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0 \quad (b)$$

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله.

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة:
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

المميز	نوع القطع المخروطي
$B^2 - 4AC = 0$	قطع مكافئ
$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$	قطع ناقص
$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$	دائرة
$B^2 - 4AC > 0$	قطع زائد

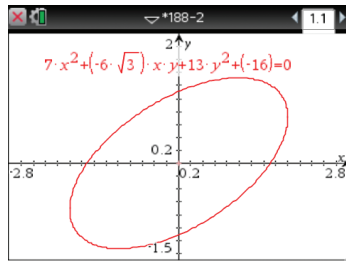
مراجعة المفردات

المميز

تذكر أن مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو $b^2 - 4ac$.

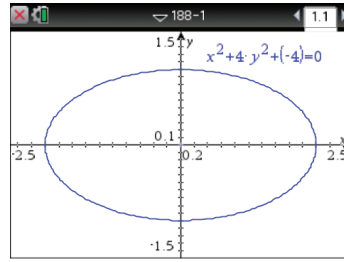
يكون القطع أفقيًا أو رأسيًا عندما $B = 0$ ، أما إذا كانت $B \neq 0$ ، فلا يكون القطع أفقيًا ولا رأسيًا.

قطع ناقص ليس رأسيًا ولا أفقيًا: $B \neq 0$



$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$$

قطع ناقص أفقي: $B = 0$



$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

مثال 2

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

$$y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0 \quad (a)$$

$$3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0 \quad (b)$$

$$4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0 \quad (c)$$

تحقق من فهمك

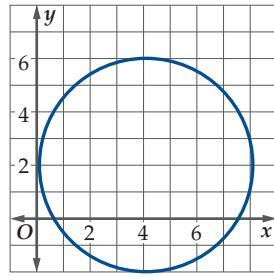
حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

$$8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0 \quad (2A)$$

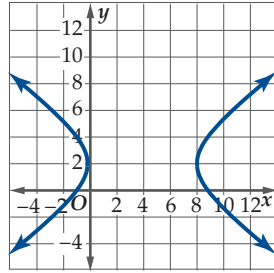
$$3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0 \quad (2B)$$

$$3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0 \quad (2C)$$





(14)



(15)

(a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

(b) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

(c) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

قابل بين كل حالة في التمارين 16-19 مع المعادلة التي تمثلها من a-d

(a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

(b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

(c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

(16) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft.

(17) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

(18) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

(19) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

(20) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$ ، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$ ، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

(a) **تحليليًا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

(b) **جبريًا:** حوّل المعادلة في الفرع a إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

(c) **بيانيًا:** مثل معادلة القطع الناقص بيانيًا.

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله. (مثال 1)

(1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

(2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

(3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

(4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

(5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

(6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

(7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

(8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$

(9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

(10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

(11) $16xy + 8x^2 + 10y^2 - 18x + 8y = 13$

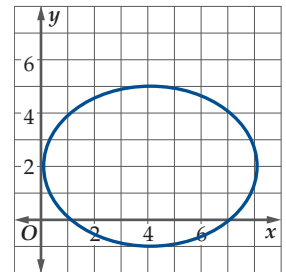
(12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$ ، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام.

(a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

(b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$ ، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

(c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثّل كلّ منها:



(13)



حل كل معادلة من المعادلتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

$$\log_4 8n + \log_4 (n - 1) = 2 \quad (29)$$

$$\log_9 9p + \log_9 (p + 8) = 2 \quad (30)$$

(31) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثّل قطعاً مكافئاً أو دائرة أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً، دون كتابتها على الصورة القياسية.

(32) اختيار من متعدد: ما المعادلة التي تمثّل قطعاً مكافئاً رأسه عند النقطة $(2, 2)$ ، ويمر بالنقطة $(0, 6)$ ؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

(21) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً.
"عندما يكون القطع رأسياً، وتكون $A = C$ ، فإن القطع دائرة".

(22) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، بحيث يكون $A = 9C$ ، وتمثّل المعادلة قطعاً مكافئاً.

(23) اكتب: أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها.

مراجعة تراكمية

(24) فلك: افترض أنه يمكن تمثيل مسار مُدَبَّب بفرع من قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$. أوجد كلاً من الرأسين والبؤرتين ومعادلتى خطي التقارب للقطع الزائد، ثم مثل المعادلة بيانياً. (الدرس 4-3)

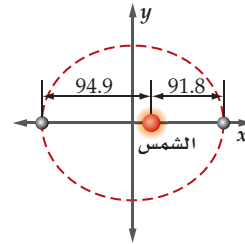
حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً: (الدرس 4-2)

$$\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1 \quad (25)$$

$$4x^2 + 8y^2 = 32 \quad (26)$$

$$x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0 \quad (27)$$

(28) فلك: أقرب مسافة بين مركز الشمس والأرض في مسار دورانها 91.8 مليون ميل. أما أبعد مسافة فتساوي 94.9 مليون ميل. اكتب معادلة تمثّل مدار الأرض حول الشمس باعتبار أن مركز المدار هو نقطة الأصل، وأن الشمس تقع على المحور x . (الدرس 4-2)



أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa

الهدف

استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالاً إلا في بعض الحالات. ويمكنك حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire من خلال تمثيل كل معادلة في النظام ثم إيجاد نقاط التقاطع.

حل نظام معادلات غير خطية بيانياً

نشاط 1

حلّ نظام المعادلات الآتي بيانياً:

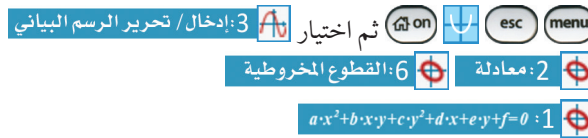
$$x^2 + y^2 = 13$$

$$xy + 6 = 0$$

لحل المعادلتين بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة 1: مثل المعادلتين بيانياً.

• اضغط على المفاتيح:

• اكتب المعادلة ثم اضغط **enter** سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الأولى.• اضغط **tab** واكتب المعادلة الثانية ثم اضغط **enter** سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الثانية.

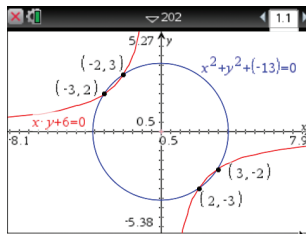
الخطوة 2: إيجاد نقاط التقاطع.

• استعمل ميزة نقاط التقاطع لإيجاد الحلول بالضغط

على **menu** ثم اختيار **6: تحليل الرسم البياني** ثم**4: نقاط التقاطع** واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك

المؤشر مروراً بكل نقطة من نقاط التقاطع، ستظهر الأزواج المرتبة الممثلة لنقاط التقاطع الأربع؛

أي أن الحلول هي: $(-3, 2), (-2, 3), (2, -3), (3, -2)$



تمارين:

حلّ كل نظام معادلات فيما يأتي بيانياً مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة:

$$x = 2 + y \quad (3) \quad 49 = y^2 + x^2 \quad (2) \quad xy = 2 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 100 \quad x = 1 \quad x^2 - y^2 = 3$$

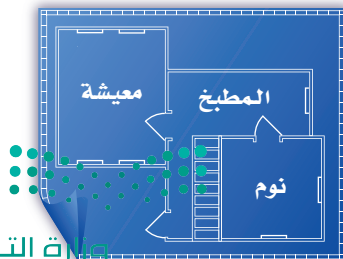
$$y = -1 - x \quad (6) \quad y^2 = 9 - 3x^2 \quad (5) \quad 25 - 4x^2 = y^2 \quad (4)$$

$$4 + x = (y - 1)^2 \quad x^2 = 10 - 2y^2 \quad 2x + y + 1 = 0$$

(7) تحدّد: يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم، والمساحة الكلية للغرفتين هي 468 ft^2 ، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار 180 ft^2 .

(a) اكتب نظاماً من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

(b) مثلّ نظام المعادلات بيانياً، وقدر طول كل غرفة.



كذلك يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، وقد مرّ معك في صفٍّ سابقٍ أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانياً، وذلك بكتابة كل متباينة بدلالة y .

نشاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

حلّ نظام المتباينات الآتي بيانياً:

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$y - x^2 > 0$$

الخطوة 1: اكتب كل متباينة بدلالة y .

$$y > x^2, y \leq \sqrt{36 - x^2}, y \geq -\sqrt{36 - x^2}$$

الخطوة 2: افتح الحاسبة بالضغط على **on**.

اختر من الشاشة الظاهرة **1** مستند جديد

ثم اختر من الشاشة الظاهرة **2**: إضافة تطبيق الرسوم البيانية

الخطوة 3: اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$ ، وذلك بالضغط على مفتاح **del**، ثم اختر رمز التباين $>$ مستعملاً الأسهم، فتظهر $y >$ ،

أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط **enter**.

الخطوة 4: اكتب المتباينة الثانية $y \leq \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح **tab** ثم المفتاح **del**، ثم اختر رمز التباين $\leq$ مستعملاً

الأسهم، ستظهر $y \leq$ ، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط **enter**

ثم اضغط على المفتاح **tab** وتمثيل المتباينة

$y \geq -\sqrt{36 - x^2}$ ستكون منطقة الحل هي منطقة التظليل

المشترك.

أي قم بالضغط على المفاتيح:

$$\text{del} > x^2 \text{ enter } \text{tab} \text{ del } \leq \text{ctrl} x^2 36 - x^2 \text{ enter } \text{tab}$$

$$\text{del } \geq - \text{ctrl} x^2 36 - x^2 \text{ enter}$$

لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$ ، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق النظام جميعها.

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$y - x^2 > 0$$

تمارين:

حلّ كل نظام متباينات فيما يأتي بيانياً:

$$2y^2 \leq 32 - 2x^2 \quad (8)$$

$$y + 5 \geq x^2 \quad (9)$$

$$9y^2 \leq 36 + x^2$$

$$x + 4 \geq y^2$$

$$x^2 + 4y^2 \leq 32 \quad (10)$$

$$4x^2 + y^2 \leq 32$$

إرشاد تقني

تدريج المحاور

يمتد تدريج الحاسبة

التلقائي على محور y

بين $(-6.67, 6.67)$ ،

ولكي يتضمن التمثيل

البياني للمعادلة $f2(x)$

القيمة $f2(x) = 7$ ، قم

بالضغط على مفتاح

menu، ومنها اختيار

4: تكبير/ تصغير النافذة

ثم اختيار

1: إعدادات النافذة

وليمتد تدريج المتغير

y ليتضمن العدد 7،

يمكن اختيار قيمة

القيمة العظمى Y : 10

إرشاد تقني

لون التظليل

يمكن تغيير لون التظليل

الذي يمثل منطقة حل

المتباينة بالضغط على

menu **ctrl**، ثم اختيار

B: اللون

ومنها

1: لون السطر

أو

2: لون التعبئة

أو

كلاهما، وذلك حتى يكون

لون منطقة الحل مميزاً عن

لون تظليل كل متباينة من

نظام المتباينات.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القطع المكافئ (الدرس 4-1)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأس	البؤرة
$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	أفقي	(h, k)	$(h + c, k)$
$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	رأسي	(h, k)	$(h, k + c)$

- تحدد قيمة p موقع البؤرة .

القطع الناقص والدوائر (الدرس 4-2)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 - b^2 = c^2$

- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

القطع الزائد (الدرس 4-3)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الزائد هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 + b^2 = c^2$

تحديد أنواع القطوع المخروطية (الدرس 4-4)

- يمكن تحديد أنواع القطوع المخروطية بكتابة معادلاتها العامة بالصورة القياسية إن أمكن، أو باستعمال المميز.

القطع المخروطي ص 178	المركز ص 186
المحل الهندسي ص 178	المحور الأصغر ص 186
القطع المكافئ ص 178	الرأسان ص 186
البؤرة ص 178	الرأسان المرافقان ص 186
الدليل ص 178	الاختلاف المركزي ص 186
محور التماثل ص 178	القطع الزائد ص 195
الرأس ص 178	البؤرتان ص 195
الوتر البؤري ص 178	المركز ص 195
القطع الناقص ص 186	الرأسان ص 195
البؤرتان ص 186	المحور القاطع ص 195
المحور الأكبر ص 186	المحور المرافق ص 195

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

(1) _____ هو الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما، بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

(2) الدائرة هي _____ للنقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن نقطة معطاة.

(3) يكون _____ القطع المكافئ عمودياً على محور تماثله.

(4) يقع الرأسان المرافقان في _____ على محوره الأصغر، بينما يقع الرأسان على محوره الأكبر.

(5) مجموع بعدي نقطة واقعة على منحنى القطع الناقص عن _____ يساوي مقداراً ثابتاً .

(6) _____ للقطع الناقص هو نسبة تحدّد ما إذا كان شكل منحناه متسعاً أو دائرياً، ويمكن إيجادها باستعمال النسبة $\frac{c}{a}$.

(7) _____ الدائرة هو نقطة تبعد عنها جميع نقاط الدائرة بعداً ثابتاً.

(8) كما يوجد للقطع الناقص رأسان وبؤرتان فإن لـ _____ الشيء نفسه، لكن له خطي تقارب، ومنحناه مكوّن من جزئين.

مراجعة الدروس

القطوع المكافئة (الصفحات 178 - 185)

4-1

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$ ، ثم مثل منحناه بيانيًا.

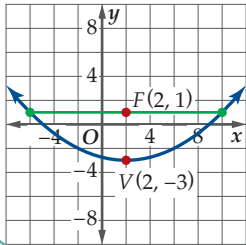
بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x ، فإن المنحنى رأسي. البؤرة هي $(h, k + p)$ ، لذلك فإن قيمة p هي $1 - (-3) = 4$. وبما أن p قيمة موجبة، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k .

$$4p(y - k) = (x - h)^2 \quad \text{الصورة القياسية}$$

$$p = 4, k = 3, h = 2 \quad 4(4)(y + 3) = (x - 2)^2$$

$$16(y + 3) = (x - 2)^2 \quad \text{بسّط}$$



الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x - 2)^2 = 16(y + 3)$. مثل بيانيًا كلاً من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًا بكلا طرفي الوتر البؤري.

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًا.

$$(x + 3)^2 = 12(y + 2) \quad (9)$$

$$(x - 2)^2 = -4(y + 1) \quad (10)$$

$$(x - 5) = \frac{1}{12}(y - 3)^2 \quad (11)$$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًا.

$$F(1, 1), V(1, 5) \quad (12)$$

$$F(-3, 6), V(7, 6) \quad (13)$$

$$F(-2, -3), V(-2, 1) \quad (14)$$

$$F(3, -4), V(3, -2) \quad (15)$$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًا.

$$F(-4, -4) \text{ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة } (-7, 0) \quad (16)$$

$$F(-1, 4) \text{ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة } (7, -2) \quad (17)$$

$$F(3, -6) \text{ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة } (9, 2) \quad (18)$$

القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 186 - 193)

4-2

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(11, 4)$ ، وإحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1, -4)$ ، $(1, 12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a, b .

نصف طول المحور الأكبر نصف طول المحور الأصغر

$$b = \frac{12 - (-4)}{2} = 8 \quad a = \frac{11 - (-9)}{2} = 10$$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$$\text{قانون نقطة المنتصف} \quad (h, k) = \left(\frac{11 + (-9)}{2}, \frac{12 + (-4)}{2} \right)$$

$$= (1, 4) \quad \text{بسّط}$$

الإحداثيان h, k لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x . لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:



$$\frac{(x - 1)^2}{100} + \frac{(y - 4)^2}{64} = 1$$

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًا.

$$\frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y + 6)^2}{25} = 1 \quad (20)$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (19)$$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

$$\text{الرأسان } (3, -3), (7, -3), \text{ والبؤرتان } (4, -3), (6, -3) \quad (21)$$

$$\text{البؤرتان } (1, 2), (9, 2), \text{ وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات.} \quad (22)$$

$$\text{إحداثيات نهايتي المحور الأكبر } (6, 4), (-4, 4) \text{ وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر } (1, 7), (1, 1) \quad (23)$$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

$$\text{المركز } (-1, 6), \text{ وطول نصف القطر 3 وحدات.} \quad (24)$$

$$\text{إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين } (0, 0), (2, 5). \quad (25)$$

$$\text{إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين } (-2, -6), (4, -2). \quad (26)$$

4-3 القطوع الزائدة (الصفحات 195 - 203)

مثال 3

مثّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ بيانيًا.

في هذه المعادلة: $h = -1, k = -3, a = \sqrt{16} = 4,$

$b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$

حدّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: رأسي

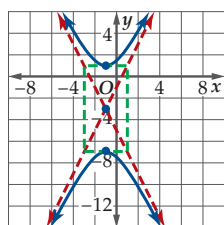
المركز: (h, k) $(-1, -3)$

الرأسان: $(h, k \pm a)$ $(-1, 1), (-1, -7)$

البؤرتان: $(h, k \pm c)$ $(-1, -3 + 2\sqrt{5}), (-1, -3 - 2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$ $y + 3 = 2(x + 1)$

و $y + 3 = -2(x + 1)$



عين المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثّل القطع الزائد بيانيًا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

$$\frac{(y+3)^2}{30} - \frac{(x-6)^2}{8} = 1 \quad (27)$$

$$\frac{(x+7)^2}{18} - \frac{(y-6)^2}{36} = 1 \quad (28)$$

$$\frac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 = 1 \quad (29)$$

$$x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0 \quad (30)$$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(31) الرأسان $(-7, 0)$ ، $(7, 0)$ ، طول المحور المرافق 8.

(32) البؤرتان $(0, -5)$ ، $(0, 5)$ ، والرأسان $(0, -3)$ ، $(0, 3)$.

(33) البؤرتان $(1, -5)$ ، $(1, 15)$ ، وطول المحور القاطع 16.

(34) الرأسان $(-2, 0)$ ، $(2, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm \frac{3}{2}x$.

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية (الصفحات 204 - 207)

مثال 4

اكتب المعادلة $3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله.

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$

$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$

$$3(x - 2)^2 + 3(y + 5)^2 = 48$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

بما أن المعادلة على الصورة $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ فإنها معادلة دائرة مركزها $(2, -5)$.

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

$$x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0 \quad (35)$$

$$4y^2 - x - 40y + 107 = 0 \quad (36)$$

$$9x^2 + 4y^2 + 162x + 8y + 732 = 0 \quad (37)$$



تطبيقات ومسابائل

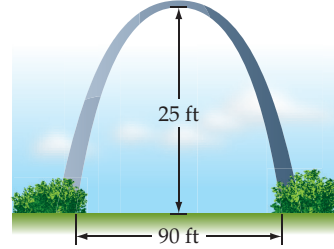
(40) طاقة: تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسم هو قطع زائد. (الدرس 4-3)

(a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

(b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

(41) ضوء: ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكلاً قطعاً مخروطياً. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدّد نوع القطع. (الدرس 4-4)

(38) أقواس: يوضح الشكل المجاور قوساً على شكل قطع مكافئ مقاماً عند بوابة متنزه. (الدرس 4-1)



(a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثلها هذا القوس بصورة تقريبية.

(b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ.

(39) حركة الماء: أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 4-2)



(a) اكتب معادلة الدائرة المتشكلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضاً أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل.

(b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2 + y^2 = 225$. بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

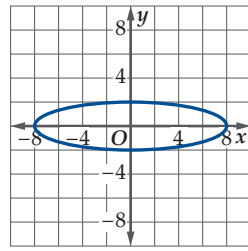


مثّل بيانياً منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 7 و 8:

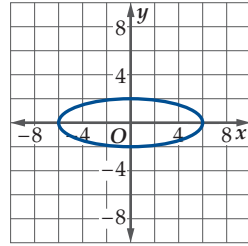
$$\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1 \quad (7)$$

$$\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1 \quad (8)$$

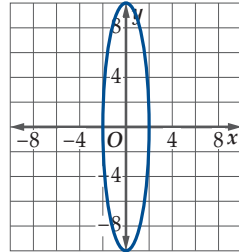
(9) اختيار من متعدد: أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟



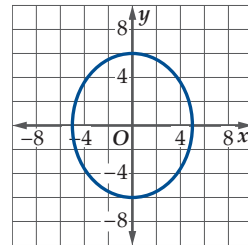
A



B



C



D

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

(1) الرأسان $(-3, -4)$ ، $(7, -4)$ ، والبؤرتان $(-2, -4)$ ، $(6, -4)$.

(2) البؤرتان $(-2, -9)$ ، $(-2, 1)$ ، وطول المحور الأكبر 12.

(3) اختيار من متعدد: ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة

$$4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$$

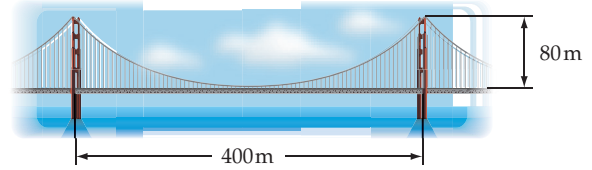
A -8

B -4

C 4

D 8

(4) جسر: يمثّل الشكل أدناه جسراً معلّقاً، تظهر أسلاكه على شكل قطع مكافئ.



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373m تقريباً. اكتب معادلة القطع المكافئ.

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

(5) الرأسان $(-3, 0)$ ، $(3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm \frac{2}{3}x$.

(6) البؤرتان $(8, 8)$ ، $(8, 0)$ ، والرأسان $(8, 6)$ ، $(8, 2)$.



مستعملًا البؤرة F والرأس V ، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثل منحنييهما بيانيًا.

$F(2, 8), V(2, 10)$ (10)

$F(2, 5), V(-1, 5)$ (11)

مثل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

$\frac{(x - 5)^2}{49} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$ (12)

$(x + 3)^2 + \frac{(y + 6)^2}{81} = 1$ (13)



فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات
لحل المثلث .

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية، الشائئية والثلاثية الأبعاد.
- أجد مسقط متجه على متجه آخر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهي الوحدة.
- أجد الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة الإحداثية الشائئية، والثلاثية الأبعاد.
- أجد الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء، وأستعمل الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا؟

رياضة: تستعمل المتجهات لنمذجة مواقف حياتية، فمثلاً يمكن استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما ستتعلمه في هذا الفصل .





مراجعة المفردات

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي (Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي (Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

إذا كان $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ، فإن إحداثي نقطة منتصف AB :

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

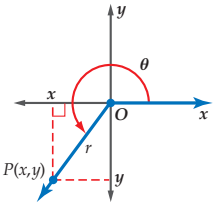
النسبة المثلثية (Trigonometric Ratio)

نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا

(Trigonometric Functions of Angles)

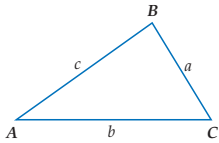
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x}, x \neq 0 & \csc \theta &= \frac{r}{y}, y \neq 0 \\ \sec \theta &= \frac{r}{x}, x \neq 0 & \cot \theta &= \frac{x}{y}, y \neq 0 \end{aligned}$$

قانون جيب التمام (Law of Cosines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

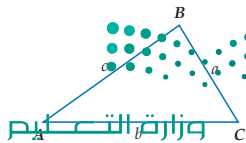


$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

قانون الجيوب (Law of Sines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



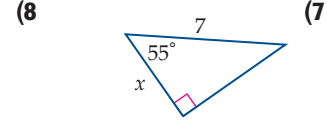
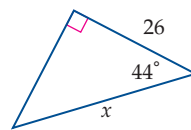
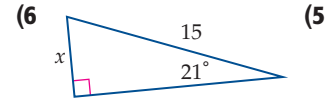
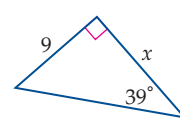
اختبار سريع

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

(1) $(-5, 3), (-5, 8)$ (2) $(1, 4), (-2, 4)$

(3) $(-4, -1), (-6, -8)$ (4) $(2, -9), (-3, -7)$

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر.



(9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطاً بحبلين مشدودين يمسك بكل منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft، بحيث كان قياس الزاوية بين كل من الحبلين والأرض 40° ، فأوجد طول كل من الحبلين إلى أقرب جزء من عشرة.

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حل فكتب "لا يوجد حل" مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(10) $a = 10, b = 7, A = 128^\circ$

(11) $a = 15, b = 16, A = 127^\circ$

(12) $a = 15, b = 18, A = 52^\circ$



لماذا؟

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كل من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذ تُسمى كمية قياسية (عددية)، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما المتجه فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلاً سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوباً تمثل كلاً من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى كمية متجهة.

تحديد الكميات المتجهة

مثال 1

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كل مما يأتي:

(a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.

(b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.

(c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كل مما يأتي:

(1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi/h ، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي.

(1B) هبوط مظلي رأسياً إلى أسفل بسرعة 12.5 mi/h .

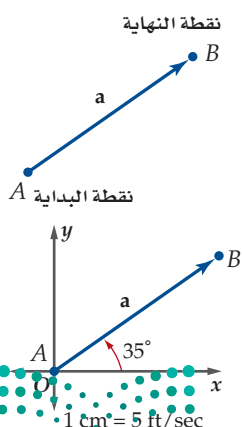
(1C) طول قطعة مستقيمة 5 cm .

المتجهات:

يمكن تمثيل المتجه هندسياً بقطعة مستقيمة لها اتجاه (قطعة مستقيمة متجهة)، أو سهم يُظهر كلاً من المقدار والاتجاه. ويمثل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها نقطة البداية A، ونقطة النهاية B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\vec{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\vec{a}$.

أما طول المتجه فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثلها، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1 \text{ cm} = 5 \text{ ft/s}$ ، فإن طول المتجه $\vec{a}$ ، ويرمز له بالرمز $|\vec{a}|$ ، يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في الوضع القياسي. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبر عن اتجاه المتجه بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلاً: اتجاه المتجه $\vec{a}$ هو 35° .



فيما سبق:

دوست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثلها هندسياً.
- أحل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- أحل مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية)

scalar quantity

متجه

vector

الكمية المتجهة

vector quantity

قطعة مستقيمة متجهة

directed line segment

نقطة البداية

initial point

نقطة النهاية

terminal point

الوضع القياسي

standard position

اتجاه المتجه

direction

طول المتجه (المقدار)

magnitude

الاتجاه الرباعي

quadrant bearing

الاتجاه الحقيقي

true bearing

المتجهات المتوازية

parallel vectors

المتجهات المتساوية

equal vectors

المتجهان المتعاكسان

opposite vectors

المحصلة

resultant

قاعدة المثلث

triangle method

قاعدة متوازي الاضلاع

parallelogram method

المتجه الصفري

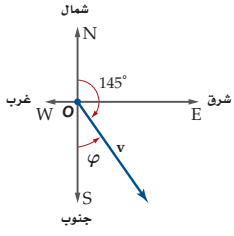
zero vector

المركبات

components

المركبات المتعامدة

rectangular components



ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الرباعي** ϕ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسى (خط شمال - جنوب). فمثلاً زاوية الاتجاه الرباعي للمتجه v في الشكل المجاور هي 35° جنوب شرق، وتُكتب $S 35^\circ E$.

كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي**، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءاً من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلاً يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة 025° .

تمثيل المتجه هندسياً

مثال 2

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكل من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

(a) $a = 20 \text{ ft/s}$ باتجاه 030° .

(b) $v = 75 \text{ N}$ ، بزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الأفقي.

(c) $z = 30 \text{ mi/h}$ ، باتجاه $S 60^\circ W$.

تحقق من فهمك

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكل من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

(2A) $t = 20 \text{ ft/s}$ ، باتجاه 065° .

(2B) $u = 15 \text{ mi/h}$ ، باتجاه $S 25^\circ E$.

(2C) $m = 60 \text{ N}$ ، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي.

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي

إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تُعط أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلاً زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه v في الشكل المجاور هي 145° .

إرشادات للدراسة

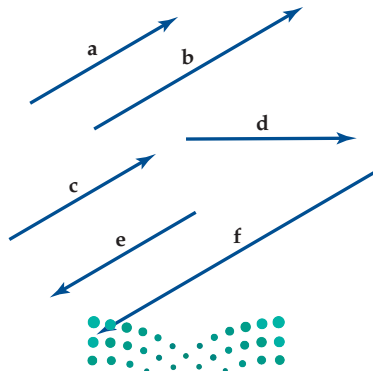
النيوتن

وحدة لقياس القوة، ويرمز له بالحرف N ، وهو عبارة عن القوة التي تؤثر في جسم كتلته 1 kg لتكسبه تسارعاً مقداره 1 m/s^2 .

تنبيه!

الطول

يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثل المسافة المقطوعة.



عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهاً متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلاً في الشكل المجاور $a \parallel b \parallel c \parallel e \parallel f$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور a, c ؛ لهما الطول والاتجاه نفسهما، لذا هما متساويان، ويعبر عنه بالرموز: $a = c$. لاحظ أن $a \neq b$ ؛ لأن $|a| \neq |b|$ ؛ لأن لهما اتجاهاً مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاھيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه a على الصورة $-a$ ، ففي الشكل المجاور $e = -a$.

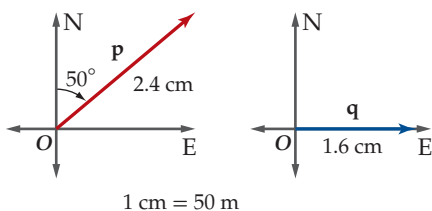
عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، ويسمى **المحصلة**. ويكون لمتجه المحصلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصلة هندسيًا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو قاعدة متوازي الأضلاع.

مفهوم أساسي	إيجاد المحصلة
قاعدة المثلث لإيجاد محصلة المتجهين a, b، اتبع الخطوات الآتيتين: الخطوة 1 أجر انسحابًا للمتجه b بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه a. الخطوة 2 محصلة المتجهين a, b هي المتجه المرسوم من نقطة بداية a إلى نقطة نهاية b.	قاعدة متوازي الأضلاع لإيجاد محصلة المتجهين a, b، اتبع الخطوات الآتية: الخطوة 1 أجر انسحابًا للمتجه b بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه a. الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعا a, b. الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثله قطر متوازي الأضلاع.

إيجاد محصلة متجهين

مثال 3 من واقع الحياة

رياضة المشي: قطع عبد الله في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه $N 50^\circ E$ ، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الرباعي؟



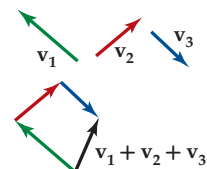
الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

الطريقة 1 قاعدة المثلث

إرشادات للدراسة

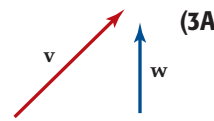
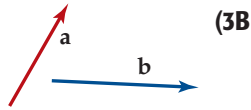
المحصلة

لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.

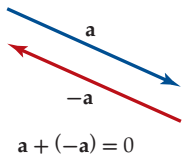


تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.



(3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرة صغيرة في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة 7 in/s ، باتجاه 310° ، فارتدت باتجاه 055° ، وبسرعة 4 in/s . أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها. (قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**، ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0 ، وطوله صفر، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $p - q$ ، اجمع معكوس q إلى p ؛ أي أن: $p - q = p + (-q)$. وكذلك يمكن ضرب المتجه في عدد حقيقي.

ضرب المتجه في عدد حقيقي

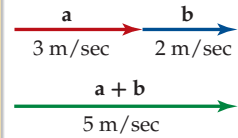
مفهوم أساسي

- إذا ضرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k| |\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .
- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
 - إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

محصلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.

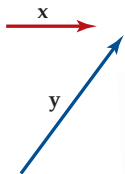


قراءة الرياضيات

- $|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k .
- $|\mathbf{v}|$ تمثل طول المتجه $\mathbf{v}$.

العمليات على المتجهات

مثال 4



ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

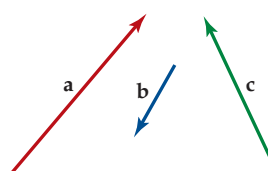
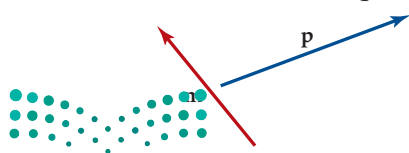


تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلاً مما يأتي :

$$a - c + 2b \quad (4A)$$

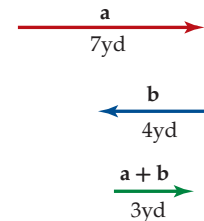
$$m - \frac{1}{4}p \quad (4B)$$

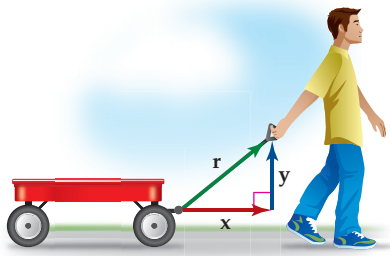


إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان

محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولَي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولاً.

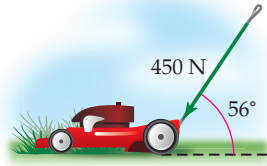




تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللذان ناتج جمعهما المتجه r ، مركبتين r . ومع أن مركبتين المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالباً تحليل المتجه إلى مركبتين متعامدتين، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

مثال 5 من واقع الحياة



قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N، وبزاوية قياسها 56° مع سطح الأرض.

(a) ارسم شكلاً يوضح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

(b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

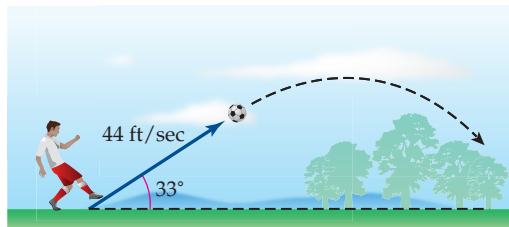


الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N. والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريباً. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريباً.

تحقق من فهمك

(5) **كرة قدم:** يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft/s، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



(A) ارسم شكلاً يوضح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

(B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.



(17) **ركوب الزوارق:** غادر زورق أحد الموانئ باتجاه $N 60^\circ W$ ، فقطع مسافة 12 ميلاً بحرياً، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى $N 25^\circ E$ ، فقطع مسافة 15 ميلاً بحرياً. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. (مثال 3)

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلّ مما يأتي: (مثال 3)

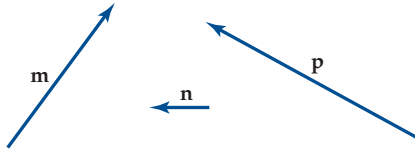
(18) 18 N للأمام، ثم 20 N للخلف.

(19) 100 m للشمال، ثم 350 m للجنوب.

(20) 17 mi شرقاً، ثم 16 mi جنوباً.

(21) 15 m/s^2 باتجاه زاوية قياسها 60° مع الأفقي، ثم 9.8 m/s^2 إلى الأسفل.

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثل كل عبارة مما يأتي: (مثال 4)



$$m - 2n \quad (22)$$

$$4n + \frac{4}{5}p \quad (23)$$

$$p + 2n - 2m \quad (24)$$

$$m - 3n + \frac{1}{4}p \quad (25)$$

ارسم شكلاً يوضح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كل منهما. (مثال 5)

(26) $2\frac{1}{8} \text{ in/s}$ ، باتجاه 310° مع الأفقي.

(27) 1.5 cm، باتجاه $N 49^\circ E$.

(28) $\frac{3}{4} \text{ in/min}$ ، باتجاه 255° .

حدّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلّ مما يأتي: (مثال 1)

(1) طول محمد 125 cm.

(2) مساحة مربع 20 m^2 .

(3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب.

(4) المسافة التي قطعها كرة قدم 5 m.

(5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل.

(6) رمي حجر رأسياً إلى أعلى بسرعة 50 ft/s .

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. (مثال 2)

(7) $h = 13 \text{ in/s}$ ، باتجاه 205°

(8) $g = 6 \text{ km/h}$ ، باتجاه $N 70^\circ W$

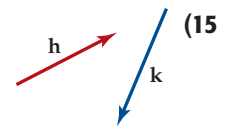
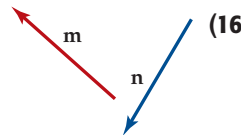
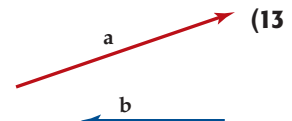
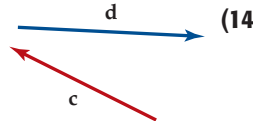
(9) $j = 5 \text{ ft/s}$ ، وبزاوية قياسها 300° مع الأفقي.

(10) $d = 28 \text{ km}$ ، وبزاوية قياسها 35° مع الأفقي.

(11) $R = 40 \text{ m}$ ، باتجاه $S 55^\circ E$

(12) $n = 32 \text{ m/s}$ ، باتجاه 030°

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من الستمتر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة والمنقلة: (مثال 3)

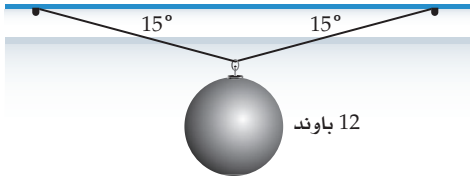


(32) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:

$$a = 15 \text{ mi/h} , \text{ باتجاه } 125^\circ$$

$$b = 12 \text{ mi/h} , \text{ باتجاه } 045^\circ$$

(33) **كرة حديدية:** علقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه.



(a) إذا كانت T_1, T_2 تمثّلان قوتَي الشدّ في الحبلين، وكانت $T_1 = T_2$ ، فارسم شكلاً يُمثّل وضع التوازن للكرة.

(b) أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $T_1 + T_2$

(c) استعمل الشكل في الفقرة b وحقيقة أن محصلة $T_1 + T_2$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من T_1, T_2

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كلٍّ منها:

(34) الأفقية 0.32 in ، الرأسية 2.28 in ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

(35) الأفقية 3.1 ft ، الرأسية 4.2 ft ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

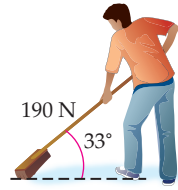
(36) الأفقية 2.6 cm ، الرأسية 9.7 cm ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

ارسم ثلاثة متجهات **a, b, c**؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسياً:

$$(37) \text{ الخاصية الإبدالية } a + b = b + a$$

$$(38) \text{ الخاصية التجميعية } (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(39) \text{ الخاصية التوزيعية } k(a + b) = ka + kb, \text{ حيث } k = 2, 0.5, -2$$



(29) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. (مثال 5)

(a) ارسم شكلاً يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبتها المتعامدتين.

(b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

(30) **لعب أطفال:** يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N ، وباتجاه 31° مع الأفقي، أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح.

(31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي ضرب متجه في عدد حقيقي.

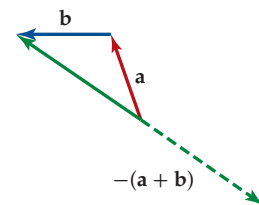
(a) **بيانياً:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لـ k ، ثم ارسم متجهاً ناتجاً عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية مع أربعة متجهات أخرى **b, c, d, e**، واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة.

(b) **جدولياً:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع a.

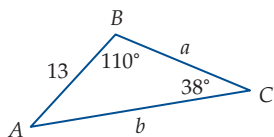
المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروباً في العدد k
a		
b		
c		
d		
e		

(c) **تحليلياً:** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a**، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه ka ؟

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري، والمتجه الموازن للمتجه **a** هو $-(a + b)$



(49) حلّ المثلث الآتي مقرَّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك.
(مهارة سابقة)

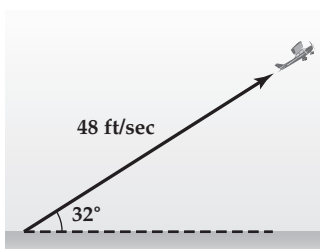


(50) حلّ المعادلة: $\sin 2x - \cos x = 0$ لجميع قيم x .
(مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

(51) **نزهة:** قام حسان بنزهة خارج مخيمه الكشفي، فقطع مسافة 3.75 km في اتجاه الشرق من المخيم حتى وصل أحد المساجد، ثم سار شمالاً قاصداً حديقة عامة، فقطع مسافة 5.6 km، حدّد موقع الحديقة بالنسبة للمخيم؟

(52) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



A 25.4 ft/s, 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s, 25.4 ft/s

C 56.6 ft/s, 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s, 56.6 ft/s



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 1-5 مقدمة في المتجهات 225

مسائل مهارات التفكير العليا

(40) **مسألة مفتوحة:** لديك متجه مقداره 5 وحدات بالاتجاه الموجب لمحور x ، حلّ المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيّ منهما أفقية أو رأسية.

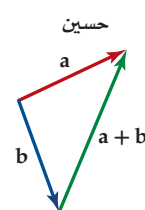
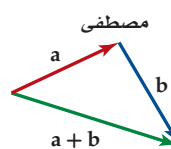
(41) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحياناً، أو صحيحة دائماً أو ليست صحيحة أبداً، وبرّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع".

(42) **تبرير:** بفرض أن: $|a| + |b| \geq |a + b|$

(a) عبّر عن هذه العبارة بالكلمات.

(b) هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ برّر إجابتك.

(43) **اكتشف الخطأ:** حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين a, b . أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

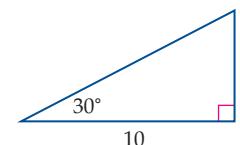


(44) **تبرير:** هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساوياً لأحدهما؟ برّر إجابتك.

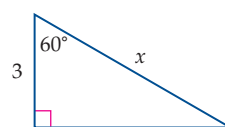
(45) **اكتب:** قارن بين قاعدتي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين.

مراجعة تراكمية

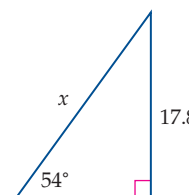
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرَّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك. (مهارة سابقة)



(46)



(48)



(47)

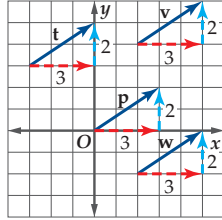


لماذا؟

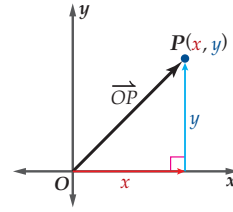
تؤثر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 5-1، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقة أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\vec{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 5.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y \rangle$ ، حيث إن x, y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\vec{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y \rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه.

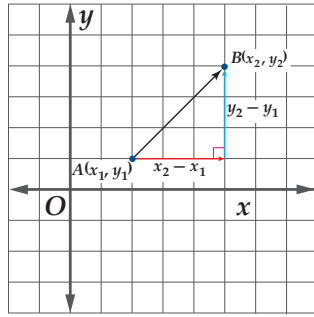


الشكل 5.2.2



الشكل 5.2.1

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفسهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلًا المتجهات p, t, v, w في الشكل 5.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2 \rangle$ ، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجه مرسوم في وضع غير قياسي، استعمل إحداثي نقطتي بدايته ونهايته.



الصورة الإحداثية لمتجه

مفهوم أساسي

الصورة الإحداثية لـ $\vec{AB}$ الذي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي:

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

مثال 1

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\vec{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\vec{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

(1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ (1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$



يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

قراءة الرياضيات

المعيار
يسمى مقدار المتجه أحياناً
معيار المتجه.

مفهوم أساسي

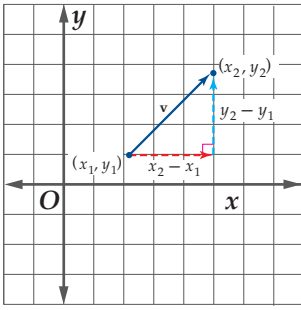
طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهاً، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ،
فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مثال 2

إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$A(0, 8), B(-9, -3)$ (2B)

$A(-2, -7), B(6, 1)$ (2A)

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عدداً حقيقياً، فإن:

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ جمع متجهين

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$ طرح متجهين

$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$ ضرب متجه في عدد حقيقي

مثال 3

العمليات على المتجهات

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle$ ، $\mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

$\mathbf{c} + \mathbf{a}$ (a)

$\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$ (b)

تحقق من فهمك

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle$ ، $\mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

$-3\mathbf{c}$ (3B)

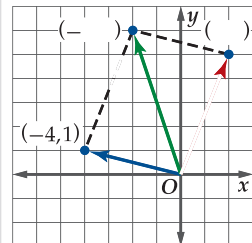
$4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ (3A)

$2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (3C)

إرشادات للدراسة

التحقق بيانياً

يمكن التحقق بيانياً من إجابة
مثال 3 الفرع a، استعمال
طريقة قاعدة متوازي
الأضلاع. كما في الشكل أدناه.



متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$ ، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ ، أقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. ونكون قد عبّرنا عن المتجه غير الصفري $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي.



تاريخ الرياضيات

ويليام روان هاميلتون
(1805-1865)

طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظرية في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات يعتمد على هذه النظرية.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطى

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

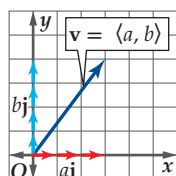
تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

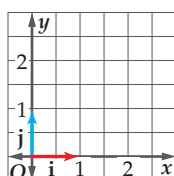
$\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$ (4B)

$\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$ (4A)

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ على الترتيب كما في الشكل 5.2.3. كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ **متجهي الوحدة القياسيين**.



الشكل 5.2.4



الشكل 5.2.3

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 5.2.4؛ وذلك لأن:

الصورة الإحداثية $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$

أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين $= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$

اضرب متجه في عدد حقيقي $= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$ ، $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$ $= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

تنبيه

متجه الوحدة $\mathbf{i}$

لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ ، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍ داكن غير مائل $\mathbf{i}$ ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍ غير داكن مائل i .



تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ توافقاً خطياً للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

مثال 5

كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

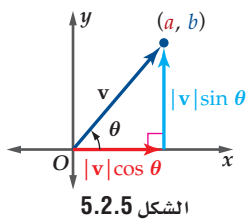
إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ مما يأتي:

(5B) $D(-3, -8), E(7, 1)$

(5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$



ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 5.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$

$$= \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle \quad \text{عوض}$$

$$= |\mathbf{v}| (\cos \theta) \mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin \theta) \mathbf{j} \quad \text{توافق خطي من } \mathbf{i}, \mathbf{j}$$

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة

تستنتج من الصورة

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$$

أن متجه الوحدة الذي له

نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة

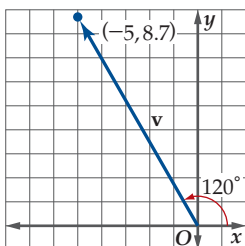
$$\mathbf{u} = \langle 1 \cos \theta, 1 \sin \theta \rangle$$

$$= \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$$

مثال 6

إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10، وزاوية اتجاهه 120° مع الأفقي.



تحقق من فهمك



أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ مما يلي:

(6B) $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210^\circ$

(6A) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45^\circ$

وزارة التعليم

Ministry of Education

من الشكل (5.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحل المعادلة المثلثية: $\tan \theta = \frac{b}{a}$ أو $\tan \theta = \frac{|\mathbf{v}| \sin \theta}{|\mathbf{v}| \cos \theta}$.

زوايا الاتجاه للمتجهات

مثال 7

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x .

(a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

تنبيه

لكل قيمة $\tan \theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:
 $\tan \theta = \tan(\theta + 180)$
فإذا كانت قيمة $\tan \theta$ موجبة فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan \theta$ سالبة، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحدهما عبارة عن قياس الأولى مجموعاً لها 180° .

تحقق من فهمك

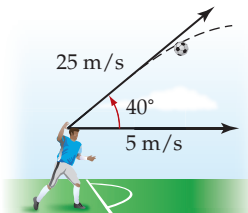
أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتين مع الاتجاه الموجب لمحور x .

(7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

(7B) $\langle -3, -8 \rangle$

تطبيق العمليات على المتجهات

مثال 8 من واقع الحياة



كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



تحقق من فهمك



(8) كرة قدم: أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/s

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي: (المثالان 1, 2)

(1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

(2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

(3) $A(10, -2), B(3, -5)$

(4) $A(-2, 6), B(1, 10)$

(5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$

(6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

إذا كان: $\mathbf{h} = \langle -6, 2 \rangle$, $\mathbf{g} = \langle -3, -5 \rangle$, $\mathbf{f} = \langle 8, 0 \rangle$ ، فأوجد كلا مما يأتي: (مثال 3)

(7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$

(8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$

(9) $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$

(10) $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$

(11) $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$

(12) $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4)

(13) $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$

(14) $\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle$

(15) $\mathbf{v} = \langle -8, -5 \rangle$

(16) $\mathbf{v} = \langle 6, 3 \rangle$

(17) $\mathbf{v} = \langle -1, -5 \rangle$

(18) $\mathbf{v} = \langle 1, 7 \rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي على صورة توافقي خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5)

(19) $D(4, -1), E(5, -7)$

(20) $D(9, -6), E(-7, 2)$

(21) $D(3, 11), E(-2, -8)$

(22) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$

(23) $D(-4, -6), E(9, 5)$

(24) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

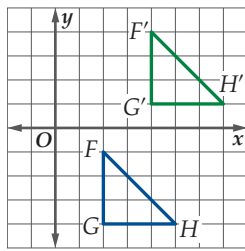


بين ما إذا كان $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overline{AB} = \overline{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب.

(36) $A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0)$

(37) $A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1)$

(38) **انسحاب:** يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$ ؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x ، وإضافة b إلى الإحداثي y .



(a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور.

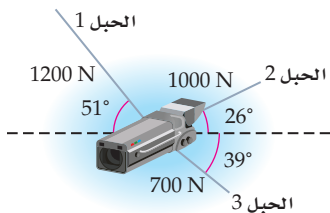
(b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$ ، فمثّل بيانيًا كلاً من $\triangle F'G'H'$ ، وصورته $\triangle F''G''H''$.

(c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$.

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا عُلِمَت طوله ونقطة بدايته:

(39) $\sqrt{37}, (-1, 4)$

(40) $10, (-3, -7)$



(41) **آلة تصوير:** علّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثّل متجهًا، فأجب عما يأتي:

(a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه لأقرب عدد صحيح.

(b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير.

(c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى.

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ مما يأتي: (مثال 6)

(25) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60^\circ$

(26) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330^\circ$

(27) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135^\circ$

(28) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125^\circ$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x : (مثال 7)

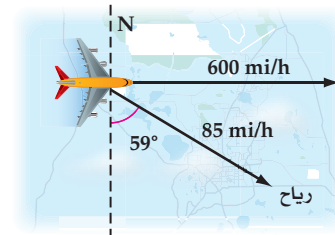
(29) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

(30) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

(31) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

(32) $\langle -5, 9 \rangle$

(33) **ملاحه جوية:** تطير طائرة جهة الشرق بسرعة مقدارها 600 mi/h، وتهب الرياح بسرعة مقدارها 85 mi/h باتجاه $S59^\circ E$. (مثال 8)



(a) أوجد محصلة سرعة الطائرة.

(b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة.

(34) **تجديف:** يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h، ويؤثر فيه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h.

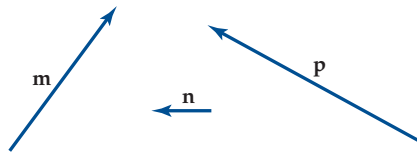
(a) أوجد السرعة التي يتحرك بها القارب إلى أقرب جزء من عشرة.

(b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة.

(35) **ملاحه جوية:** تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه $N82^\circ E$ ، وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه $N79^\circ E$. ارسّم شكلاً يمثّل هذا الموقف.



استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثل كلاً مما يأتي:
(الدرس 5-1)



$$\frac{1}{2}p + 3n \quad (52)$$

$$n - \frac{3}{4}m \quad (51)$$

$$p + 2n - m \quad (54)$$

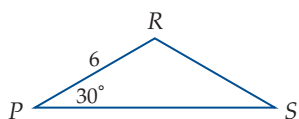
$$m - 3n \quad (53)$$

تدريب على اختبار

(55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته (2, 5)، ونقطة نهايته (-3, -4) ؟

$$\sqrt{82} \quad \text{C} \quad \sqrt{2} \quad \text{A}$$

$$\sqrt{106} \quad \text{D} \quad \sqrt{26} \quad \text{B}$$



(56) ما مساحة المثلث المجاور،
إذا علمت أن $PR = RS$ ؟

$$18\sqrt{3} \quad \text{D} \quad 18\sqrt{2} \quad \text{C} \quad 9\sqrt{3} \quad \text{B} \quad 9\sqrt{2} \quad \text{A}$$

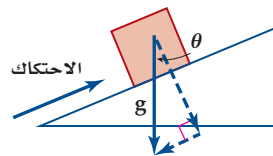


وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي 2023 233 1445

(42) **قوة:** تؤثر قوة الجاذبية g وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكناً؟



مسائل مهارات التفكير العليا

(43) **تبرير:** إذا كان a, b متجهين متوازيين، فعبر عن كلٍّ من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيناً العلاقة بين a, b .

(44) **تبرير:** إذا أعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تمثل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطاً معيناً).

(45) **تحذير:** إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y \rangle$ هي $(4y)^\circ$ ، فأوجد قيمة x بدلالة y .

برهان: إذا كان: $a = \langle x_1, y_1 \rangle, b = \langle x_2, y_2 \rangle, c = \langle x_3, y_3 \rangle$ ، فأثبت الخصائص الآتية:

$$a + b = b + a \quad (46)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (47)$$

$$k(a + b) = ka + kb \quad (48) \quad \text{حيث } k \text{ عدد حقيقي.}$$

$$|ka| = |k| |a| \quad (49) \quad \text{حيث } k \text{ عدد حقيقي.}$$

مراجعة تراكمية

(50) **دُمى أطفال:** يقوم محمد بسحب دميته بقوة مقدارها 1.5 N بواسطة نابض مثبت بها. (الدرس 5-1)

(a) إذا كان النابض يصنع زاوية 52° مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الرأسية والأفقية للقوة.

(b) إذا رفع محمد النابض، وأصبح يصنع زاوية قياسها 78° مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.



لماذا؟



تحمل كلمة الشغل معاني متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محدداً في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

فيما سبق:

درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسياً وجبرياً. (الدرس 2-5)

والآن:

- أجد الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات:

الضرب الداخلي

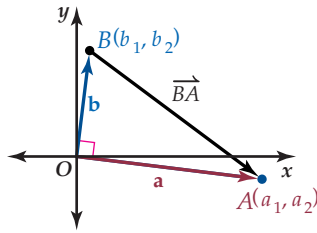
dot product

المتجهان المتعامدان

Orthogonal vectors

الشغل

work



الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-5 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان a , b في الوضع القياسي، وكان $\vec{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\vec{BA}|^2 = |a|^2 + |b|^2$. وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\vec{BA}|^2$.

$$\begin{aligned} \text{تعريف طول متجه} \quad |\vec{BA}| &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\ \text{رُبع الطرفين} \quad |\vec{BA}|^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\ \text{فك الأقواس} \quad |\vec{BA}|^2 &= a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 \\ \text{جمع الحدود المربعة} \quad |\vec{BA}|^2 &= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2) \\ |a| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, |a|^2 = a_1^2 + a_2^2, & |\vec{BA}|^2 &= |a|^2 + |b|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2) \\ |b| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, |b|^2 = b_1^2 + b_2^2 \end{aligned}$$

لاحظ أن العبارتين $|a|^2 + |b|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ ، $|a|^2 + |b|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. ويُسمى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين a , b ، ويُرمز له بالرمز $a \cdot b$ ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a , b ، أو يُقرأ اختصاراً $a \cdot b$.

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي

يُعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي:

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$$

لاحظ أنه خلافاً لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عدداً وليس متجهاً. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربيهما الداخلي صفراً. ويقال للمتجهين اللذين حاصل ضربيهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان**.

المتجهان المتعامدان

مفهوم أساسي

يكون المتجهان غير الصفريين a , b متعامدين، إذا وفقط إذا كان $a \cdot b = 0$.



على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي $\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

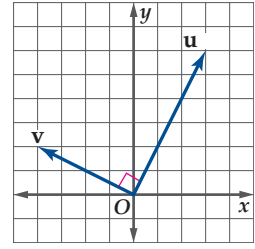
استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

مثال 1

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

$$u = \langle 2, 5 \rangle, v = \langle 8, 4 \rangle \quad (b)$$

$$u = \langle 3, 6 \rangle, v = \langle -4, 2 \rangle \quad (a)$$



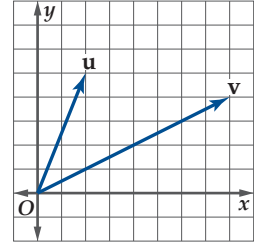
الشكل 5.3.1

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

$$u = \langle -2, -3 \rangle, v = \langle 9, -6 \rangle \quad (1b)$$

$$u = \langle 3, -2 \rangle, v = \langle -5, 1 \rangle \quad (1a)$$



الشكل 5.3.2

يحق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

خصائص الضرب الداخلي

نظرية

إذا كانت u, v, w متجهات، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

$$u \cdot v = v \cdot u$$

الخاصية الإبدالية

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

خاصية التوزيع

$$k(u \cdot v) = k u \cdot v = u \cdot k v$$

خاصية الضرب في عدد حقيقي

$$0 \cdot u = 0$$

خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري

$$u \cdot u = |u|^2$$

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

البرهان

$$u \cdot u = |u|^2 \text{ إثبات أن:}$$

$$u = \langle u_1, u_2 \rangle \text{ افترض أن:}$$

$$u \cdot u = u_1^2 + u_2^2 \quad \text{الضرب الداخلي}$$

$$(u_1^2 + u_2^2) \text{ اكتب على صورة مربع جذر}$$

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |u|$$

$$= (\sqrt{u_1^2 + u_2^2})^2$$

$$= |u|^2$$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 35-37

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

مثال 2

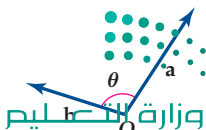
استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $a = \langle -5, 12 \rangle$.

تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية :

$$c = \langle -1, -7 \rangle \quad (2b)$$

$$b = \langle 12, 16 \rangle \quad (2a)$$



وزارة التعليم
Ministry of Education

الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين a, b هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونا في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث إن: $0 \leq \theta \leq \pi$ ، أو $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.

إرشادات للدراسة

المتجهات المتعامدة

والمتجهات المتوازية

يقال لمتجهين: إنهما

متعامدان، إذا كانت الزاوية

بينهما 90° . ويقال لمتجهين

أنهما متوازيان، إذا كانت

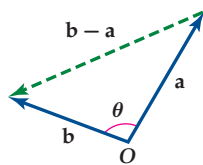
الزاوية بينهما 0° أو 180° .

مفهوم أساسي

الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a, b ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$



البرهان

إذا كان: $a, b, b-a$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه، فإن:

قانون جيب التمام

$$|u|^2 = u \cdot u$$

خاصية التوزيع للضرب الداخلي

$$u \cdot u = |u|^2$$

ب طرح $|a|^2 + |b|^2$ من الطرفين

بقسمة الطرفين على $-2|a| |b|$

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a| |b| \cos \theta = |b-a|^2$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a| |b| \cos \theta = (b-a) \cdot (b-a)$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a| |b| \cos \theta = b \cdot b - b \cdot a - a \cdot b + a \cdot a$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a| |b| \cos \theta = |b|^2 - 2a \cdot b + |a|^2$$

$$-2|a| |b| \cos \theta = -2a \cdot b$$

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

مثال 3

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي:

$$u = \langle 6, 2 \rangle, v = \langle -4, 3 \rangle \quad (a)$$

$$u = \langle 3, 1 \rangle, v = \langle 3, -3 \rangle \quad (b)$$

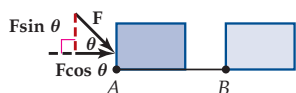
تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي:

$u = \langle 9, 5 \rangle, v = \langle -6, 7 \rangle$ (3B)

$u = \langle -5, -2 \rangle, v = \langle 4, 4 \rangle$ (3A)

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت F قوة مؤثرة في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت F موازية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن الشغل W الناتج عن F يساوي مقدار القوة F مضروباً في المسافة من A إلى B ، أو $W = |F||\overrightarrow{AB}|$.



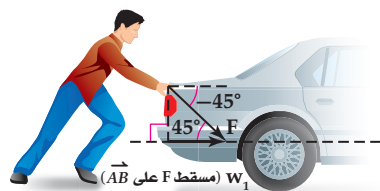
ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة F ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

$$W = F \cdot \overrightarrow{AB}$$

أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة F ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

حساب الشغل

مثال 4 من واقع الحياة



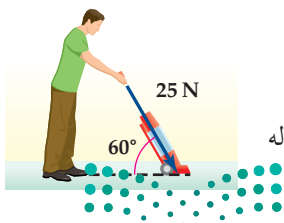
سيارة: يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

إرشادات للدراسة

وحدات الشغل

وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

تحقق من فهمك



4) تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة و سطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل المبذول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟

تدرب وحل المسائل

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كل مما يأتي:

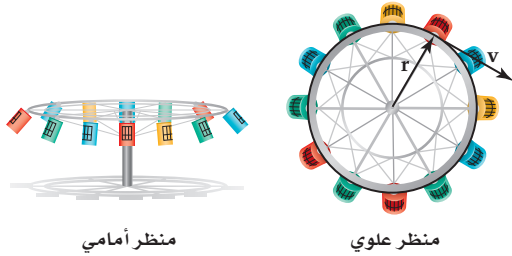
(17) $\langle -2, -8 \rangle$

(18) $\langle 3, 5 \rangle$

(19) $\langle 7, -4 \rangle$

(20) $\langle -1, 6 \rangle$

(21) **عجلة دوارة:** يعامد المتجه r في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية v عند أي نقطة من نقاط الدائرة.



(a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/s، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجه r ، إذا كان يصنع زاوية قياسها 35° مع الأفقي، ثم اكتب الصورة الإحداثية لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة قرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

(b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه r ، ومتجه السرعة باستعمال الصورتين الإحداثيتين اللتين أوجدتهما في الفرع a؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

إذا علمت كلاً من $v, u \cdot v$ ، فأوجد قيمة ممكنة للمتجه u في كل مما يأتي:

(22) $v = \langle 3, -6 \rangle, u \cdot v = 33$

(23) $v = \langle 4, 6 \rangle, u \cdot v = 38$



(24) **مدرسة:** يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها 100 N، إذا بذل الطالب شغلاً مقداره 1747 J، لسحب حقيبته مسافة 31 m، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

(1) $u = \langle 3, -5 \rangle, v = \langle 6, 2 \rangle$

(2) $u = \langle 9, -3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle$

(3) $u = \langle 4, -4 \rangle, v = \langle 7, 5 \rangle$

(4) $u = 11i + 7j, v = -7i + 11j$

(5) $u = \langle -4, 6 \rangle, v = \langle -5, -2 \rangle$

(6) **زيت الزيتون:** يمثل المتجه $u = \langle 406, 297 \rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر، ويمثل المتجه $v = \langle 27.5, 15 \rangle$ سعر العلب من كلا النوعين على الترتيب (مثال 1)

(a) أوجد $u \cdot v$.

(b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

(7) $m = \langle -3, 11 \rangle$ (8) $r = \langle -9, -4 \rangle$

(9) $v = \langle 1, -18 \rangle$ (10) $t = \langle 23, -16 \rangle$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 3)

(11) $u = \langle 0, -5 \rangle, v = \langle 1, -4 \rangle$

(12) $u = \langle 7, 10 \rangle, v = \langle 4, -4 \rangle$

(13) $u = \langle -2, 4 \rangle, v = \langle 2, -10 \rangle$

(14) $u = -2i + 3j, v = -4i - 2j$

(15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيمهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $u = \langle 3, -5 \rangle$ يمثل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $v = \langle -7, 6 \rangle$ يمثل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3)

(16) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا على أرض مستوية مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534 N؛ بزاوية 25° ، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (مثال 4)



مراجعة تراكمية

إذا علمت: أن $c = \langle \frac{3}{4}, -9 \rangle$, $b = \langle -5, 2.8 \rangle$, $a = \langle 10, 1 \rangle$, فأوجد
كلًا مما يأتي: (الدرس 5-2)

$$b - a + 4c \quad (39)$$

$$c - 3a + b \quad (40)$$

$$2a - 4b + c \quad (41)$$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x :
(الدرس 5-2)

$$-i - 3j \quad (42)$$

$$\langle -9, 5 \rangle \quad (43)$$

$$\langle -7, 7 \rangle \quad (44)$$

تدريب على اختبار

(45) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1 \rangle$, $\langle -9, 0 \rangle$ ؟

$$90^\circ \quad \text{C} \quad 0^\circ \quad \text{A}$$

$$135^\circ \quad \text{D} \quad 45^\circ \quad \text{B}$$

(46) إذا كان: $t = \langle -6, 2 \rangle$, $s = \langle 4, -3 \rangle$, فأَيُّ مما يأتي يمثل r , حيث
 $r = t - 2s$ ؟

$$\langle -14, 8 \rangle \quad \text{C} \quad \langle 14, 8 \rangle \quad \text{A}$$

$$\langle -14, -8 \rangle \quad \text{D} \quad \langle 14, 6 \rangle \quad \text{B}$$

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي، من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غير ذلك.

$$u = \langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \rangle, v = \langle 9, 8 \rangle \quad (25)$$

$$u = \langle -1, -4 \rangle, v = \langle 3, 6 \rangle \quad (26)$$

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كلٍّ مما يأتي، قَرِّب الناتج إلى أقرب عُشر.

$$u = i + 5j, v = -2i + 6j \quad (27)$$

$$u = 4i + 3j, v = -5i - 2j \quad (28)$$

(29) النقاط: $(2, 3)$, $(4, 7)$, $(8, 1)$ تُمثِّل رؤوس مثلث، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات.

إذا علمت كلًّا من $|u|$ والزاوية θ بين المتجهين u, v ، فأوجد قيمة ممكنة للمتجه v ، قَرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

$$u = \langle 4, -2 \rangle, |v| = 10, \theta = 45^\circ \quad (30)$$

$$u = \langle 3, 4 \rangle, |v| = \sqrt{29}, \theta = 121^\circ \quad (31)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(32) **تبرير:** اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية:

إذا كانت $|d|, |e|, |f|$ تُمثِّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين d, e وبين e, f حادتين، فإن الزاوية بين d, f يجب أن تكون قائمة. فسر تبريرك.

(33) **اكتشف الخطأ:** يدرس كلٌّ من فهد وفصيل خصائص الضرب

الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن:

$$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$$

صواب؟ وضِّح إجابتك.

(34) **اكتب:** وضِّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين.

برهان: إذا كان: $u = \langle u_1, u_2 \rangle$, $v = \langle v_1, v_2 \rangle$, $w = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية:

$$u \cdot v = v \cdot u \quad (35)$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad (36)$$

$$k(u \cdot v) = ku \cdot v = u \cdot kv \quad (37)$$

(38) **برهان:** إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين u, v يساوي 90° ،

فأثبت أن $u \cdot v = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين.



أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على الترتيب في كلٍّ مما يأتي، قَرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-2)

Q(1, -5), R(-7, 8) (12) A(-4, 2), B(3, 6) (11)

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v ، وقَرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 5-3)

$u = \langle 9, -4 \rangle, v = \langle -1, -2 \rangle$ (13)

$u = \langle 8, 4 \rangle, v = \langle -2, 4 \rangle$ (14)

$u = \langle 2, -2 \rangle, v = \langle 3, 8 \rangle$ (15)

(16) اختيار من متعدد: إذا كان:

$u = \langle 2, 3 \rangle, v = \langle -1, 4 \rangle, w = \langle 8, -5 \rangle$

$(u \cdot v) + (w \cdot v)$ (الدرس 5-3)

15 C -2 A

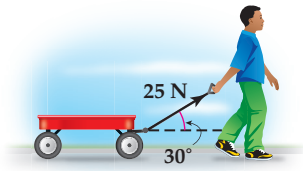
38 D -18 B

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 5-3)

$\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 7, 4 \rangle$ (18) $\langle 2, -5 \rangle \cdot \langle 4, 2 \rangle$ (17)

$\langle 3, -6 \rangle \cdot \langle 10, 5 \rangle$ (20) $\langle 1, -6 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle$ (19)

(21) عربية: يسحب أحمد عربة بقوة مقدارها 25 N، وبزاوية 30° مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 5-3)



(a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m، قَرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

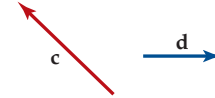
(b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي 40° ، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلاً أكبر أم أقل؟ فسر إجابتك.

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، وقَرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من الستمتر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة. (الدرس 5-1)



(3) التزلج: يسحب شخص مزليجة على الجليد بقوة مقدارها 50 N بزاوية 35° مع الأفقي، أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة، وقَرِّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 5-1)

(4) ارسم شكلاً يُمثل المتجه $\frac{1}{2}c - 3d$ (الدرس 5-1)



اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة i, j . (الدرس 5-2)

$B(10, -6), C(-8, 2)$ (6) $B(3, -1), C(4, -7)$ (5)

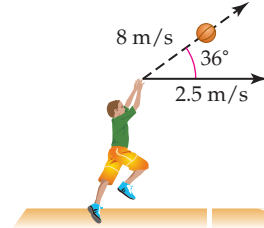
$B(4, -10), C(14, 10)$ (8) $B(1, 12), C(-2, -9)$ (7)

(9) اختيار من متعدد: أيٌّ مما يأتي يُمثل الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، حيث $A(-5, 3)$ نقطة بدايته، و $B(2, -1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 5-2)

$\langle -4, 7 \rangle$ C $\langle 4, -1 \rangle$ A

$\langle -6, 4 \rangle$ D $\langle 7, -4 \rangle$ B

(10) كرة سلة: ركض راشد في اتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة 2.5 m/s، ومن منتصف الملعب صوّب كرة بسرعة 8 m/s بزاوية قياسها 36° مع الأفقي. (الدرس 5-2)



(a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللذين يُمثلان سرعة راشد، وسرعة الكرة، قَرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

(b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قَرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.



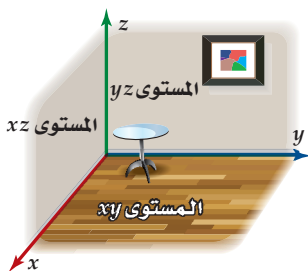


لماذا؟

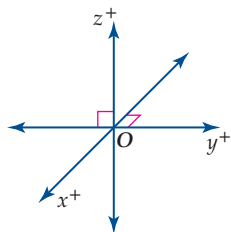
لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيّدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.



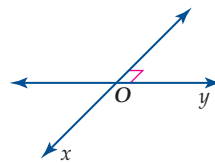
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y ، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاط في المستوى، وتحتاج إلى نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد؛ لتعيين نقطة في الفضاء، فنبداً بالمستوى xy ، ونضعه بصورة تظهر عمقاً للشكل كما في الشكل 5.4.1، ثم نضيف محوراً ثالثاً يُسمى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلياً من المحورين x ، y كما في الشكل 5.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy ، yz ، xz ، وتقسّم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمى كلٌّ منها **الثمان**، ويمكن تمثيل الثمن الأول بجزء الحجرة في الشكل 5.4.3.



الشكل 5.4.3



الشكل 5.4.2



الشكل 5.4.1

تُمثّل النقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية (x, y, z) ، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولاً النقطة (x, y) في المستوى xy ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازياً للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z .

تعيين نقطة في الفضاء

مثال 1

عيّن كلياً من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

(a) $(4, 6, 2)$

(b) $(-2, 4, -5)$

فيما سبق:

درست المتجهات في النظام
الثلاثي الأبعاد هندسياً
وجبرياً. **الدرس (1-5)**

والآن:

- أعيّن نقاطاً، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أجبر عن المتجهات جبرياً، وأجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المفردات:

نظام الإحداثيات الثلاثي

الأبعاد

three-dimensional
coordinate system

المحور z

z -axis

الثمان

octant

الثلاثي المرتب
ordered triple

إرشادات للدراسة

تدريج المحاور

تذكر أن التدريج في المحاور
الثلاثة في نظام الإحداثيات
الثلاثي الأبعاد متساوٍ.



تحقق من فهمك

عيّن كلياً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

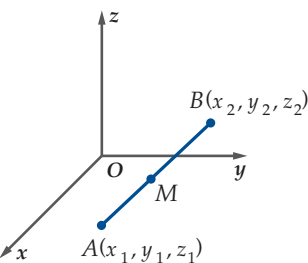
(1A) $(-3, -4, 2)$

(1B) $(3, 2, -3)$

(1C) $(-4, -1, 2)$

(1C) $(-4, -1, 2)$

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .



مفهوم أساسي

صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

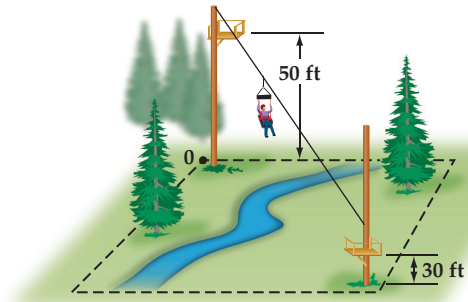
تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

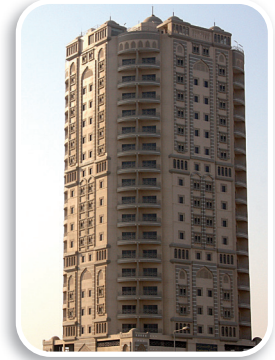


مثال 2 من واقع الحياة

رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصتين تسمح للمتزلجين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$ ، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

(a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصتين إلى أقرب قدم.

(b) اوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين.



الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصاً في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

تحقق من فهمك

(2) **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين:

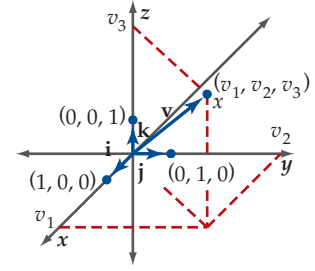
$(450, -250, 28000)$, $(300, 150, 30000)$ ، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

(A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

(B) إذا أطلقت ألعاب نارية، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشاد: الميل = 5280 قدمًا

المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ ، $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في الشكل 5.4.4، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



الشكل 5.4.4

تعيين متجه في الفضاء

مثال 3

مثّل بيانياً كلّاً من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

$$\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle \quad (\mathbf{a})$$

$$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (\mathbf{b})$$

تحقق من فهمك

مثّل بيانياً كلّاً من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

$$\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle \quad (\mathbf{3A})$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad (\mathbf{3B})$$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

العمليات على المتجهات في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عدداً حقيقياً، فإن:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

جمع متجهين



$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

طرح متجهين

$$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$$

ضرب متجه في عدد حقيقي

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات
خصائص العمليات على
المتجهات في الفضاء
هي الخصائص نفسها في
المستوى الإحداثي.

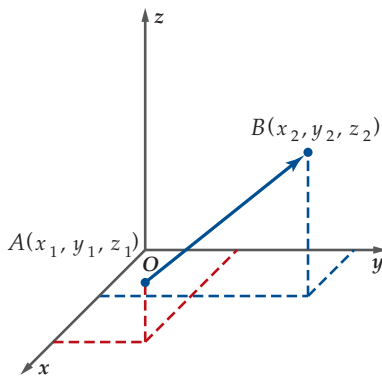
مثال 4 العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $y = \langle 3, -6, 2 \rangle$, $w = \langle -1, 4, -4 \rangle$, $z = \langle -2, 0, 5 \rangle$
(a) $4y + 2z$

(b) $2w - z + 3y$

تحقق من فهمك

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $y = \langle 3, -6, 2 \rangle$, $w = \langle -1, 4, -4 \rangle$, $z = \langle -2, 0, 5 \rangle$
(4a) $4w - 8z$
(4b) $3y + 3z - 6w$



وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة u باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $u = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

مثال 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبرياً

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$ ، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$ ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

(5A) $A(-2, -5, -5)$, $B(-1, 4, -2)$ (5B) $A(-1, 4, 6)$, $B(3, 3, 8)$

تدرب وحل المسائل

عَيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1)

$$(1, -2, -4) \quad (1)$$

$$(3, 2, 1) \quad (2)$$

$$(-5, -4, -2) \quad (3)$$

$$(-2, -5, 3) \quad (4)$$

$$(2, -2, 3) \quad (5)$$

$$(-16, 12, -13) \quad (6)$$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كل مما يأتي: (مثال 2)

$$(-4, 10, 4), (1, 0, 9) \quad (7)$$

$$(-6, 6, 3), (-9, -2, -2) \quad (8)$$

$$(8, 3, 4), (-4, -7, 5) \quad (9)$$

$$(-7, 2, -5), (-2, -5, -8) \quad (10)$$

(11) **طيارون:** في لحظة ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة (675, -121, 19300)، وإحداثيات موقع طائرة أخرى (-289, 715, 16100)، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

(a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقربة إلى أقرب قدم.

(b) عَيِّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

مثّل بيانيًا كلاً من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3)

$$\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle \quad (12)$$

$$\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle \quad (13)$$

$$\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4 \rangle \quad (14)$$

$$\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3 \rangle \quad (15)$$

$$\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad (16)$$

$$\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k} \quad (17)$$

$$\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \quad (18)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k} \quad (19)$$

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات :

$$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$$

(مثال 4)

$$6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c} \quad (20)$$

$$7\mathbf{a} - 5\mathbf{b} \quad (21)$$

$$2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c} \quad (22)$$

$$6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a} \quad (23)$$

$$8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c} \quad (24)$$

$$-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c} \quad (25)$$

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات :

$$\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

(مثال 4)

$$7\mathbf{x} + 6\mathbf{y} \quad (26)$$

$$3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z} \quad (27)$$

$$4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z} \quad (28)$$

$$-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z} \quad (29)$$

$$-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z} \quad (30)$$

$$-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z} \quad (31)$$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كل مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

$$A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1) \quad (32)$$

$$A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9) \quad (33)$$

$$A(3, 5, 1), B(0, 0, -9) \quad (34)$$

$$A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8) \quad (35)$$

$$A(2, -5, 4), B(1, 3, -6) \quad (36)$$

$$A(8, 12, 7), B(2, -3, 11) \quad (37)$$

$$A(3, 14, -5), B(7, -1, 0) \quad (38)$$

$$A(1, -18, -13), B(21, 14, 29) \quad (39)$$



مسائل مهارات التفكير العليا

(53) **تحذّر:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5)$, $M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M .

(54) **اكتب:** اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر منطقية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية.

مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 5-2)

(55) $A(6, -4)$, $B(-7, -7)$

(56) $A(-4, -8)$, $B(1, 6)$

(57) $A(-5, -12)$, $B(1, 6)$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطّيٍّ لمتجهي الوحدة i , j في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 5-2)

(58) $D(-5, \frac{2}{3})$, $E(-\frac{4}{5}, 0)$

(59) $D(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$, $E(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7})$

(60) $D(9.7, -2.4)$, $E(-6.1, -8.5)$

تدريب على اختبار

(61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, -3, 5)$ ؟

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$ ، فأوجد إحداثيات النقطة P في كلٍّ ممّا يأتي:

(40) $M(3, 4, 5)$, $N(\frac{7}{2}, 1, 2)$

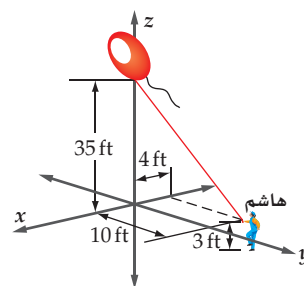
(41) $M(-1, -4, -9)$, $N(-2, 1, -5)$

(42) $M(7, 1, 5)$, $N(5, -\frac{1}{2}, 6)$

(43) $M(\frac{3}{2}, -5, 9)$, $N(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2})$

(44) **تطوّع:** تطوّع هاشم لحمل بالونٍ كدليل في استعراض رياضي. إذا

كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالجبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الجبل إلى أقرب قدم.



حدّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ ممّا يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

(45) $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

(46) $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

(47) $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

(48) **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء؛ لكتابة صيغة

عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ) ، وطول نصف قطرها r .

"إرشاد: الكرة هي مجموعة نقاط في الفضاء تبعد بعداً ثابتاً (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز)."

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ ممّا يأتي:

(49) مركزها $(-4, -2, 3)$ ، طول نصف قطرها 4

(50) مركزها $(6, 0, -1)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

(51) مركزها $(5, -3, 4)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

(52) مركزها $(0, 7, -1)$ ، طول نصف قطرها 12





لماذا؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممّا إذا كان خطاً سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطتي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.



الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاد لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا فقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفراً.

الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

مفهوم أساسي

يُعرّف الضرب الداخلي للمتجهين: $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالاتي:
 $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين a , b متعامدين، إذا فقط إذا كان
 $a \cdot b = 0$

فيما سبق:

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى .

الدرس (3-5)

والآن:

- أجد الضرب الداخلي لمتجهين، والزوايا بينهما في الفضاء .
- أجد الضرب الاتجاهي للمتجهات، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:

- الضرب الاتجاهي
- cross product
- متوازي السطوح
- parallelepiped
- الضرب القياسي الثلاثي
- triple scalar product

إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

مثال 1

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

$$(a) \quad u = \langle -7, 3, -3 \rangle, v = \langle 5, 17, 5 \rangle \quad (b) \quad u = \langle 3, -3, 3 \rangle, v = \langle 4, 7, 3 \rangle$$

تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

$$(1A) \quad u = \langle 3, -5, 4 \rangle, v = \langle 5, 7, 5 \rangle \quad (1B) \quad u = \langle 4, -2, -3 \rangle, v = \langle 1, 3, -2 \rangle$$

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a, b في الفضاء فإن $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$.

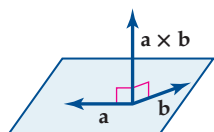
الزاوية بين متجهين في الفضاء

مثال 2

أوجد قياس الزاوية θ بين u, v ، إذا كان: $u = \langle -4, 3, -2 \rangle, v = \langle 3, 2, -1 \rangle$ ، إلى أقرب جزء من عشرة.

تحقق من فهمك

(2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $u = -4i + 2j + k, v = 4i + 3k$ ، إلى أقرب جزء من عشرة.



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين a, b هو متجه وليس عدداً، ويُرمز له بالرمز $a \times b$ ، ويُقرأ a cross b ، ويكون المتجه $a \times b$ عمودياً على المستوى الذي يحوي المتجهين a, b .

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كان: $a = a_1i + a_2j + a_3k, b = b_1i + b_2j + b_3k$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b

هو المتجه: $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$

إذا طبقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة i, j, k ، وإحداثيات كل من a, b ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $a \times b$.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة i, j, k في الصف 1
بوضع إحداثيات a في الصف 2
بوضع إحداثيات b في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

مثال 3

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $u = \langle 3, -2, 1 \rangle, v = \langle -3, 3, 1 \rangle$ ، ثم بيّن أن $u \times v$ يعامد كلياً من u, v .

تنبيه

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

تحقق من فهمك

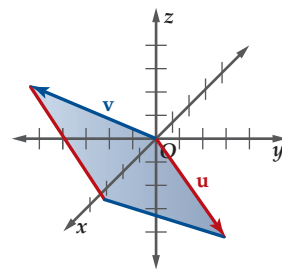


أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم بيّن أن $u \times v$ يعامد كلياً من u, v :

3B $u = \langle -2, -1, -3 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle$

3A $u = \langle 4, 2, -1 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle$

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلاً مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل 5.5.1.



الشكل 5.5.1

مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

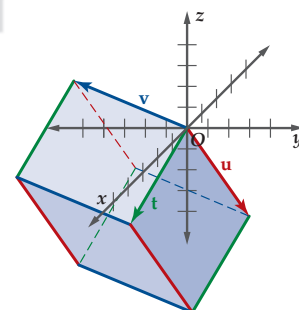
مثال 4

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

تحقق من فهمك

(4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكون أحرفاً متجاورة لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجه، كل وجه منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 5.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي لهذه المتجهات يُمثّل حجم متوازي السطوح.



الشكل 5.5.2

الضرب القياسي الثلاثي

مفهوم أساسي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالاتي

حجم متوازي السطوح

مثال 5

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

تحقق من فهمك

(5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه u, v, t أحرف متجاورة في كل مما يأتي: (مثال 5)

$$t = \langle -1, -9, 2 \rangle, u = \langle 4, -7, -5 \rangle, v = \langle 3, -2, 6 \rangle \quad (20)$$

$$t = \langle 2, -3, -1 \rangle, u = \langle 4, -6, 3 \rangle, v = \langle -9, 5, -4 \rangle \quad (21)$$

$$t = i + j - 4k, u = -3i + 2j + 7k, v = 2i - 6j + 8k \quad (22)$$

$$t = 5i - 2j + 6k, u = 3i - 5j + 7k, v = 8i - j + 4k \quad (23)$$

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المعطى في كل مما يأتي:

$$\langle 3, -8, 4 \rangle \quad (24)$$

$$\langle -1, -2, 5 \rangle \quad (25)$$

$$\langle 6, -\frac{1}{3}, -3 \rangle \quad (26)$$

$$\langle 7, 0, 8 \rangle \quad (27)$$

إذا علم كل من $u \cdot v, v$ ، فأوجد حالة ممكنة للمتجه u في كل مما يأتي:

$$v = \langle 2, -4, -6 \rangle, u \cdot v = -22 \quad (28)$$

$$v = \langle \frac{1}{2}, 0, 4 \rangle, u \cdot v = \frac{31}{2} \quad (29)$$

$$v = \langle -2, -6, -5 \rangle, u \cdot v = 35 \quad (30)$$

حدّد ما إذا كانت النقاط المعطاة واقعة على استقامة واحدة أم لا؟

$$(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13) \quad (31)$$

$$(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5) \quad (32)$$

حدّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

$$m = \langle 2, -10, 6 \rangle, n = \langle 3, -15, 9 \rangle \quad (33)$$

$$a = \langle 6, 3, -7 \rangle, b = \langle -4, -2, 3 \rangle \quad (34)$$

(35) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه u الذي يقع في المستوى yz ، وطوله 8، ويصنع زاوية قياسها 60° فوق الاتجاه الموجب للمحور y .

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع أم لا، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحته، وحدّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا:

$$A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4) \quad (36)$$

$$A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3) \quad (37)$$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

$$u = \langle 3, -9, 6 \rangle, v = \langle -8, 2, 7 \rangle \quad (1)$$

$$u = \langle 5, 0, -4 \rangle, v = \langle 6, -1, 4 \rangle \quad (2)$$

$$u = \langle -7, -3, 1 \rangle, v = \langle -4, 5, -13 \rangle \quad (3)$$

$$u = \langle 11, 4, -2 \rangle, v = \langle -1, 3, 8 \rangle \quad (4)$$

$$u = 6i - 2j - 5k, v = 3i - 2j + 6k \quad (5)$$

$$u = 9i - 9j + 6k, v = 6i + 4j - 3k \quad (6)$$

(7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتي الهيدروجين في جزيء الماء عند $(55.5, 55.5, -55.5)$ ، والأخرى عند $(-55.5, -55.5, -55.5)$ ، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللذين يكوّنان رابطة الأكسجين - الهيدروجين مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 2)

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة: (مثال 2)

$$u = \langle 6, -5, 1 \rangle, v = \langle -8, -9, 5 \rangle \quad (8)$$

$$u = \langle -8, 1, 12 \rangle, v = \langle -6, 4, 2 \rangle \quad (9)$$

$$u = \langle 10, 0, -8 \rangle, v = \langle 3, -1, -12 \rangle \quad (10)$$

$$u = -3i + 2j + 9k, v = 4i + 3j - 10k \quad (11)$$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم بيّن أن $u \times v$ عمودي على كل من u, v : (مثال 3)

$$u = \langle -1, 3, 5 \rangle, v = \langle 2, -6, -3 \rangle \quad (12)$$

$$u = \langle 4, 7, -2 \rangle, v = \langle -5, 9, 1 \rangle \quad (13)$$

$$u = \langle 3, -6, 2 \rangle, v = \langle 1, 5, -8 \rangle \quad (14)$$

$$u = -2i - 2j + 5k, v = 7i + j - 6k \quad (15)$$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u, v ضلعان متجاوران في كل مما يأتي: (مثال 4)

$$u = \langle -9, 1, 2 \rangle, v = \langle 6, -5, 3 \rangle \quad (16)$$

$$u = \langle 4, 3, -1 \rangle, v = \langle 7, 2, -2 \rangle \quad (17)$$

$$u = 6i - 2j + 5k, v = 5i - 4j - 8k \quad (18)$$

$$u = i + 4j - 8k, v = -2i + 3j - 7k \quad (19)$$

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعةٍ مستقيمةٍ مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 5-4)

(46) $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$

(47) $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$

(48) $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 5-3)

(49) $\langle -8, -7 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle$

(50) $\langle -4, -6 \rangle \cdot \langle 7, 5 \rangle$

(51) $\langle 6, -3 \rangle \cdot \langle -3, 5 \rangle$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مُستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي. (الدرس 5-1)

(52) a (أفقي إلى اليمين)، b (أفقي إلى اليمين)

(53) d (أفقي إلى اليمين)، c (أفقي إلى اليمين)

تدريب على اختبار

(54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟

A $\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle$

B $\langle 1, -2, 3 \rangle, \langle 2, -4, 6 \rangle$

C $\langle 3, 4, 6 \rangle, \langle 6, 4, 3 \rangle$

D $\langle 3, -5, 4 \rangle, \langle 6, 2, -2 \rangle$

(55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين:

$u = \langle 3, 8, 0 \rangle, v = \langle -4, 2, 6 \rangle$

A $48i - 18j + 38k$

B $48i - 22j + 38k$

C $46i - 22j + 38k$

D $46i - 18j + 38k$



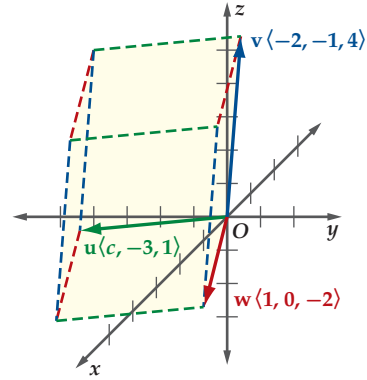
(38) **عرض جوي:** أفلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فأفلعت الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$ ، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$ ، في حين أفلعت الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$ ، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازي خطًا سير الطائرتين؟ وضح إجابتك.

إذا كان: $u = \langle 3, 2, -2 \rangle, v = \langle -4, 4, 5 \rangle$ ، فأوجد كلاً مما يأتي إن أمكن:

(39) $u \cdot (u \times v)$

(40) $v \times (u \cdot v)$

(41) إذا كانت u, v, w تُمثّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحدات مكعبة، فما قيمة c ؟



مسائل مهارات التفكير العليا

(42) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، برّر إجابتك.

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين».

(43) **تحّد:** إذا كان: $u = \langle 4, 6, c \rangle, v = \langle -3, -2, 5 \rangle$ ، فأوجد قيمة c التي تجعل: $u \times v = 34i - 26j + 10k$.

(44) **تبرير:** فسّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى.

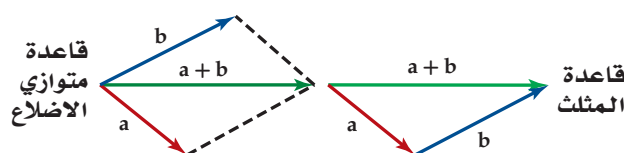
(45) **اكتب:** بين طرق الكشف عن توازي متجهين أو تعامدهما.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 5-1)

- يُعبّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصلة، ويمكن إيجادها باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 5-2)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y \rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$.
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ وكان عدداً حقيقياً، فإن: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ ، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$ ، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$.
- يمكن استعمال متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 5-3)

- يُعرّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، فإن: $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$.

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 5-4)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- تعطى نقطة منتصف AB بالصيغة: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء

(الدرس 5-5)

- يُعرّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
- إذا كان: $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$ فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ، ويساوي $(a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$.

المركبات ص 222	كمية قياسية عددية ص 218
المركبات المتعامدة ص 222	المتجه ص 218
الصورة الإحداثية ص 226	كمية متجهة ص 218
متجه الوحدة ص 228	قطعة مستقيمة متجهة ص 218
متجهها الوحدة	نقطة البداية ص 218
القياسيَّان ص 228	نقطة النهاية ص 218
توافق خطيّ ص 229	طول المتجه ص 218
الضرب الداخلي ص 234	الوضع القياسي ص 218
المتجهان المتعامدان ص 234	اتجاه المتجه ص 218
الشغل ص 237	الاتجاه الرباعي ص 219
نظام الإحداثيات الثلاثي	الاتجاه الحقيقي ص 219
الأبعاد ص 241	المتجهات المتوازية ص 219
المحور Z ص 241	المتجهات المتساوية ص 219
الثمن ص 241	المتجهان المتعاكسان ص 219
الثلاثي المرتب ص 241	المحصلة ص 220
الضرب الاتجاهي ص 248	قاعدة المثلث ص 220
متوازي السطوح ص 249	قاعدة متوازي الأضلاع ص 220
الضرب القياسي الثلاثي ص 249	المتجه الصفري ص 221

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

- نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه .
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle 3, 2 \rangle$ ، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$.
- نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.
- طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6 \rangle$.
- يتساوى متجهان إذا فقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه.
- إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما 180° .
- لتجد متجهاً يعامد أي متجهين على الأقل في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين.
- طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه.
- إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$ ، فإن $\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u}$.



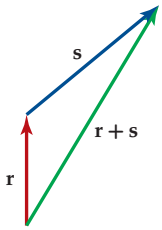
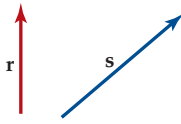
مراجعة الدروس

مقدمة في المتجهات (الصفحات 218 - 225)

5-1

مثال 1

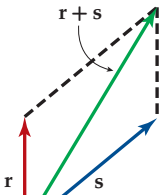
أوجد محصلة المتجهين r و s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من الستمر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



قاعدة المثلث

اسحب r ، بحيث تلتقي نقطة نهاية r مع نقطة بداية s ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية r ، وينتهي عند نقطة نهاية s .

قاعدة متوازي الأضلاع



اسحب s ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية r ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه r و s ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكون قطر متوازي الأضلاع.

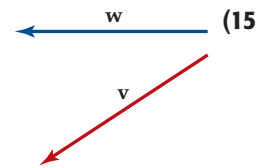
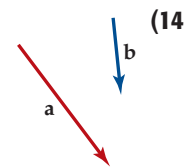
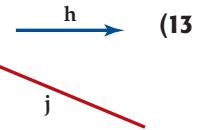
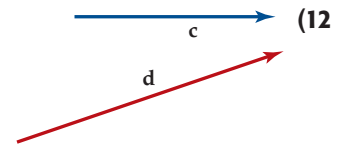
فيكون طول المحصلة 3.4 cm، وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلّ مما يأتي:

(10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق.

(11) شجرة طولها 20 ft.

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من الستمر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



أوجد طول المحصلة لنتائج جمع المتجهين واتجاهها في كلّ مما يأتي:

(16) 70 m جهة الغرب، ثم 150 m جهة الشرق.

(17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف.



5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 226 - 233)

5-2

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$ ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$$\begin{aligned} \text{الصورة الإحداثية } \overrightarrow{AB} &= \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \\ \text{عوض} &= \langle 4 - 3, -1 - (-2) \rangle \\ \text{اطرح} &= \langle 1, 1 \rangle \end{aligned}$$

أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned} \text{قانون المسافة } |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{عوض} &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ \text{بسّط} &= \sqrt{2} \approx 1.4 \end{aligned}$$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$A(-1, 3), B(5, 4)$ (18)

$A(7, -2), B(-9, 6)$ (19)

$A(-8, -4), B(6, 1)$ (20)

$A(2, -10), B(3, -5)$ (21)

إذا كان: $p = \langle 4, 0 \rangle, q = \langle -2, -3 \rangle, t = \langle -4, 2 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

$2q - p$ (22)

$p + 2t$ (23)

$t - 3p + q$ (24)

$2p + t - 3q$ (25)

أوجد متجه وحدة u باتجاه v في كلٍّ مما يأتي:

$v = \langle 3, -3 \rangle$ (27) $v = \langle -7, 2 \rangle$ (26)

$v = \langle 9, 3 \rangle$ (29) $v = \langle -5, -8 \rangle$ (28)

5-3 الضرب الداخلي (الصفحات 234 - 239)

5-3

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين: $x = \langle 2, -5 \rangle, y = \langle -4, 7 \rangle$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

$$\begin{aligned} \text{الضرب الداخلي } x \cdot y &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \text{عوض} &= 2(-4) + (-5)(7) \\ \text{بسّط} &= -8 + (-35) = -43 \end{aligned}$$

بما أن $x \cdot y \neq 0$ ، فإن المتجهين x, y غير متعامدين.

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا:

$u = \langle -3, 5 \rangle, v = \langle 2, 1 \rangle$ (30)

$u = \langle 4, 4 \rangle, v = \langle 5, 7 \rangle$ (31)

$u = \langle -1, 4 \rangle, v = \langle 8, 2 \rangle$ (32)

$u = \langle -2, 3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle$ (33)

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي:

$u = \langle 5, -1 \rangle, v = \langle -2, 3 \rangle$ (34)

$u = \langle -1, 8 \rangle, v = \langle 4, 2 \rangle$ (35)

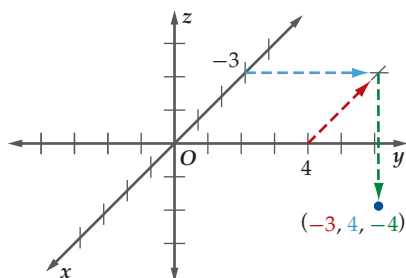


المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 241 - 246)

5-4

مثال 4

عين النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد .
حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عين نقطة
تبعد 4 وحدات أسفل هذه النقطة، وباتجاه مواز للمحور z .



عين كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

(1, 2, -4) (36)

(3, 5, 3) (37)

(5, -3, -2) (38)

(-2, -3, -2) (39)

أوجد طول القطعة المستقيمة المغطاة نقطتا طرفيها في كل مما يأتي،
ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها.

$(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$ (40)

$(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$ (41)

$(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$ (42)

$(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$ (43)

مثّل بيانياً كلّاً من المتجهات الآتية في الفضاء:

$\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4 \rangle$ (44)

$\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (45)

$\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ (46)

$\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3 \rangle$ (47)

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 247 - 251)

5-5

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$ ،
 $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2 \rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلّاً من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle$$

$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي



صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا
كانا متعامدين أم لا.

$\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13 \rangle$ (48)

$\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3 \rangle$ (49)

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلّ مما يأتي، ثم بيّن أن
 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

$\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3 \rangle$ (50)

$\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1 \rangle$ (51)

تطبيقات ومسائل

(55) أقمار اصطناعية: إذا مثَّلت النقطتان: $(28625, 32461, -38426)$ ، $(-31613, -29218, 43015)$ موقعي قمرين اصطناعيين، ومثَّلت النقطة $(0, 0, 0)$ مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل، وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريباً، فأجب عمَّا يأتي: (الدرس 4-5)

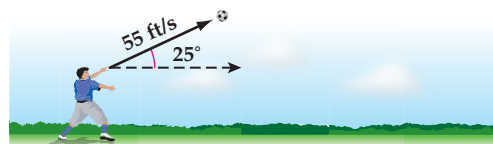
(a) أوجد المسافة بين القمرين.

(b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟

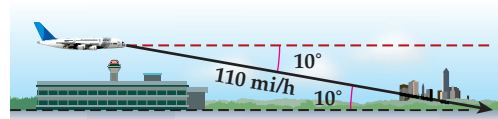
(c) اشرح إمكانية وضع قمر ثالث في الإحداثيات التي أوجدتها في الفرع b.

(56) استعمل الضرب القياسي الثلاثي لحساب حجم غرفة أبعادها 3 m, 4 m, 5 m
"إرشاد: اعتبر متوازي المستطيلات حالة خاصة من متوازي السطوح". (الدرس 5-5)

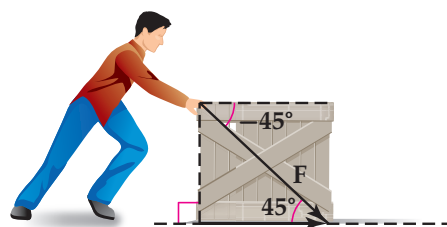
(52) كرة قدم: تلقى لاعب كرة قدم الكرة برأسه، فارتدت بسرعة ابتدائية مقدارها 55 ft/s، وبزاوية قياسها 25° فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 1-5)



(53) طيران: تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h، وبزاوية قياسها 10° تحت الأفقي، أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثل سرعة الطائرة. (الدرس 2-5)



(54) صناديق: يدفع عامل صندوقاً بقوة ثابتة مقدارها 90 N بزاوية 45° في الشكل أدناه. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الصندوق 8 m (مع إهمال قوة الاحتكاك). (الدرس 3-5)

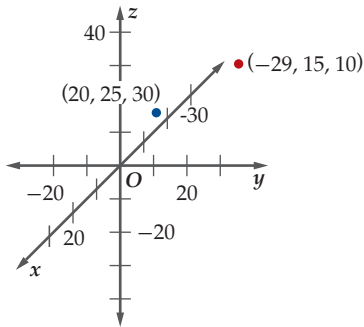


إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9 \rangle$
فأوجد كلاً مما يأتي:

$$2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c} \quad (12)$$

$$\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c} \quad (13)$$

(14) بالونات الهواء الساخن: أُطلق 12 بالوناً تحوي هواءً ساخناً في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: $(-29, 15, 10)$, $(20, 25, 30)$ كما في الشكل أدناه، علماً بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



(a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة.

(b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته.

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

$$\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12 \rangle \quad (15)$$

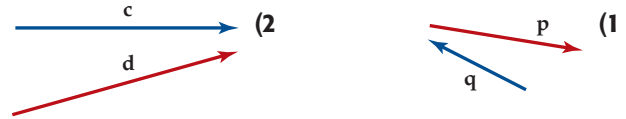
$$\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \quad (16)$$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بين أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلاً من $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11 \rangle \quad (17)$$

$$\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad (18)$$

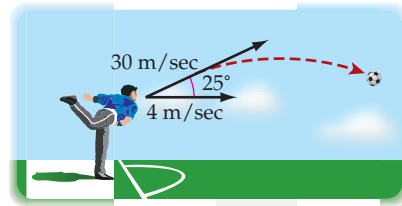
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قَرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من الستمتر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$$A(1, -3), B(-5, 1) \quad (3) \quad A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7) \quad (4)$$

(5) كرة قدم: ركض لاعب بسرعة 4 m/s ؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s ، وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي، فما محصلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟



أوجد متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

$$\mathbf{u} = \langle 6, -3 \rangle \quad (7) \quad \mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle \quad (6)$$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بين ما إذا كانا متعامدين أم لا:

$$\mathbf{u} = \langle 2, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8 \rangle \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j} \quad (10)$$

(11) اختيار من متعدد: إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ ، فأَيُّ مما يأتي يُمثل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ ؟

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5} \right\rangle \quad \mathbf{A}$$

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5} \right\rangle \quad \mathbf{B}$$

$$\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5} \right\rangle \quad \mathbf{C}$$

$$\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle \quad \mathbf{D}$$

القطع المخروطية

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ أو $x^2 + y^2 = r^2$	الدائرة	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ أو $(x - h)^2 = 4p(y - k)$	القطع المكافئ
$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	القطع الزائد	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$	القطع الناقص

المتطابقات المثلثية

$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$		المتطابقات النسبية
$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	متطابقات المقلوب
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	متطابقات فيثاغورس
$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$	$\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$	$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$	متطابقات الزاويتين المتتامتين
$\sin (-\theta) = -\sin \theta$ $\csc (-\theta) = -\csc \theta$	$\cos (-\theta) = \cos \theta$ $\sec (-\theta) = \sec \theta$	$\tan (-\theta) = -\tan \theta$ $\cot (-\theta) = -\cot \theta$	متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية
$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$		متطابقات المجموع والفرق
$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$	$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$	متطابقات ضعف الزاوية
$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$	$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$	متطابقات نصف الزاوية



الصيغ

المتجهات

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$	جمع متجهين في الفضاء	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	جمع متجهين في المستوى
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ $= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$	طرح متجهين في الفضاء	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	طرح متجهين في المستوى
$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$	ضرب متجه في عدد حقيقي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	ضرب متجه في عدد حقيقي في المستوى
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى
$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$	الضرب القياسي للثلاثيات	$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a} \mathbf{b} }$	الزاوية بين متجهين
		$ \mathbf{v} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	طول متجه
		$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$	الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء

قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الزاوية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	0



التمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية

$y = \tan \theta$	$y = \cos \theta$	$y = \sin \theta$	الدالة
			التمثيل البياني

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

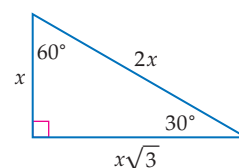
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

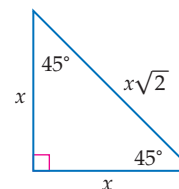


$45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

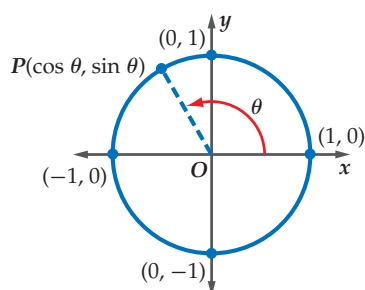
$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$



دوال في دائرة الوحدة



إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$

فإن $P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$ أي أن: $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120^\circ$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$



الرموز

$\sin^{-1} x$	دالة معكوس الجيب	A^{-1}	التظير الضربي للمصفوفة A
$\cos^{-1} x$	دالة معكوس جيب التمام	$-A$	التظير الجمعي للمصفوفة A
$\tan^{-1} x$	دالة معكوس الظل	I	مصفوفة الوحدة
$A_{m \times n}$	مصفوفة رتبته $m \times n$	$\sin x$	دالة الجيب
a_{ij}	العنصر في الصف i والعمود j من المصفوفة A	$\cos x$	دالة جيب التمام
$ A $	محددة المصفوفة A	$\tan x$	دالة الظل
$\langle a, b \rangle$	المتجه AB	$\cot x$	دالة مقلوب الظل
$\mathbf{a}$	المتجه a	$\csc x$	دالة مقلوب الجيب
$ a $	مقدار المتجه a	$\sec x$	دالة مقلوب جيب التمام





وزارة التعليم

Ministry of Education

2023 - 1445