



قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



وزارة التعليم
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية



تطوير - إنتاج - توثيق

الرياضيات

الصف الثالث المتوسط

الفصل الدراسي الثاني



قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

طبعة ١٤٤٤ - ٢٠٢٢

٢) وزارة التعليم ، ١٤٤٣هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

وزارة التعليم

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط - التعليم العام - الفصل الدراسي الثاني /

وزارة التعليم - الرياض ، ١٤٤٣هـ .

١٤٣ ص ؛ ٢١ × ٢٧ سم

ردمك : ٥-٢٥٠-٥١١-٦٠٣-٩٧٨

١ - الرياضيات - تعليم - السعودية ٢ - التعليم المتوسط - السعودية

- كتب دراسية . أ.العنوان

١٤٤٣ / ١٣١٢٢

ديوي ٥١٠,٧

رقم الإيداع : ١٤٤٣ / ١٣١٢٢

ردمك : ٥-٢٥٠-٥١١-٦٠٣-٩٧٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم

www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"



IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي



FB.T4EDU.COM



وزارة التعليم

Ministry of Education

2022 - 1444

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيئ للطالب فرص اكتساب مستويات عليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية؛ وعياً بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءاً من المرحلة الابتدائية؛ سعياً للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
 - تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
 - إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
 - الاهتمام بالمهارات الرياضية، التي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
 - الاهتمام بتنفيذ خطوات حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياتها المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
 - الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
 - الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.
- ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطورة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، إضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطلاب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.
- ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم، وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق



الفهرس

الفصل ٥

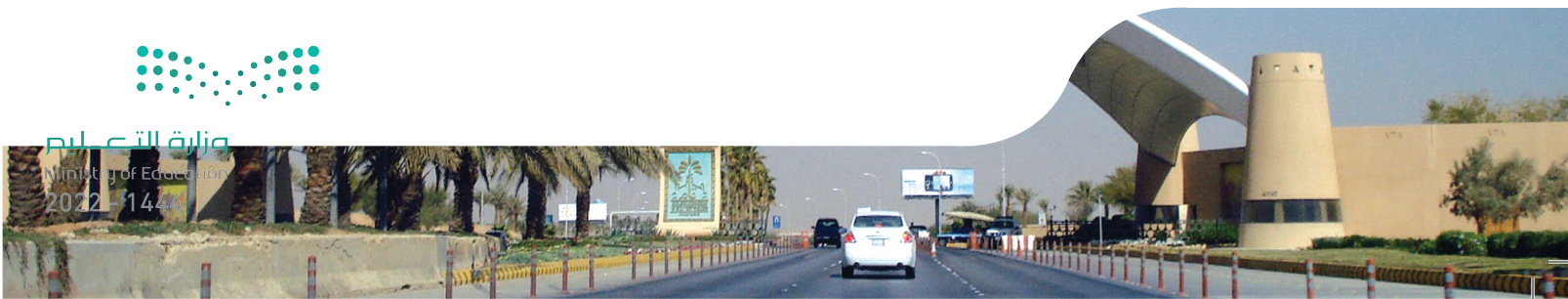
أنظمة المعادلات الخطية

- التهيئة للفصل ٥ ١١
- ١-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً ١٢
- ١٨ ٢٠ ٢٥ ٣٠ ٣٢ ٣٣ ٣٩ ٤٤ ٤٥
- معمل الحاسبة البيانية : حل نظام من معادلتين خطيتين
- حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض
- حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح
- اختبار منتصف الفصل
- حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب
- تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين
- اختبار الفصل
- الاختبار التراكمي

الفصل ٦

كثيرات الحدود

- التهيئة للفصل ٦ ٤٩
- ١-٦ ضرب وحيدات الحد ٥٠
- ٢-٦ قسمة وحيدات الحد ٥٦
- ٣-٦ كثيرات الحدود ٦٢
- ٦٧ ٦٩ ٧٤ ٧٥ ٨١ ٨٣ ٨٩ ٩٥ ٩٦
- معمل الجبر : جمع كثيرات الحدود وطرحها
- جمع كثيرات الحدود وطرحها
- اختبار منتصف الفصل
- ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود
- معمل الجبر : ضرب كثيرات الحدود
- ضرب كثيرات الحدود
- حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود
- اختبار الفصل
- الاختبار التراكمي



٩٩	التهيئة للفصل ٧
١٠٠	١-٧ تحليل وحيدات الحد
١٠٤	٢-٧ استعمال خاصية التوزيع
١١١	معامل الجبر: تحليل ثلاثية الحدود
١١٣	٣-٧ المعادلات التربيعية: $س^٢ + ب س + ج = ٠$
١٢٠	اختبار منتصف الفصل
١٢١	٤-٧ المعادلات التربيعية: $أ س^٢ + ب س + ج = ٠$
١٢٧	٥-٧ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين
١٣٣	٦-٧ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة
١٤١	اختبار الفصل
١٤٢	الاختبار التراكمي



ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- المعادلات الخطية والتربيعية.
- الدوال الخطية والتربيعية.
- كثيرات الحدود والعبارات الجذرية.
- الإحصاء والاحتمال.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الرياضية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.



كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن**.
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر**، وقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات**؛ لتتذكر نطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **تذكر** بعض المفردات التي تعلمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**.
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجنبها.
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- **استعمل** أسئلة **استعد للدوس اللاحق** لمراجعة بعض المهارات والمفاهيم اللازمة للدرس التالي.
- **نفذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تراجع أفكار الدرس مستفيداً مما دَوَّنته من أفكار في **المطويات**.
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وما قبله من فصول.



أنظمة المعادلات الخطية



فيما سبق

درست حل المعادلات الخطية في متغير واحد.

والآن

- أحل نظام معادلتين خطيتين بيانياً.
- أحل نظام معادلتين خطيتين بالتعويض.
- أحل نظام معادلتين خطيتين بالحذف.
- أحل مسائل لفظية من واقع الحياة تؤول إلى نظام من معادلتين خطيتين.

لماذا؟

حقائق: باعت حديقة الحيوانات بالرياض في أحد الأيام تذاكر دخول بقيمة ٣٥٠٠ ريال. فإذا كان سعر التذكرة ١٠ ريالاً للكبير، ٥ ريالاً للصغير، فيمكنك استعمال نظام من معادلتين خطيتين لمعرفة عدد الكبار وعدد الصغار الذين اشترؤا التذاكر عند معرفة إجمالي عدد التذاكر المباعة.

المفردات

- النظام المتسق ص (١٢)
- النظام المستقل ص (١٢)
- النظام غير المستقل ص (١٢)
- النظام غير المتسق ص (١٢)

منظم أفكار

المطويات

أنظمة المعادلات الخطية اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك مبتدئاً بورقة A4.

- ١ اطو الورقة طولياً من المنتصف.
- ٢ قص النصف العلوي خمسة أجزاء بالتساوي.
- ٣ سم الأجزاء الخمسة بأرقام الدروس وعناوينها.

١-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً
٢-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض
٣-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح
٤-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب
٥-٥ تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين





التهيئة للفصل ٥

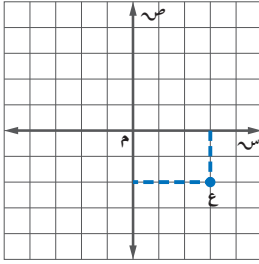
تشخيص الاستعداد :

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

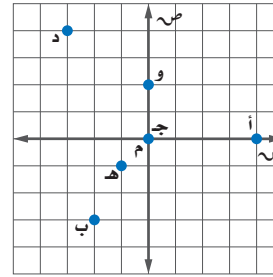
سم الزوج المرتب الذي يمثل النقطة ع في المستوى الإحداثي.



ارسم خطاً رأسياً من النقطة ع إلى محور السينات، لتحديد الإحداثي السيني للنقطة وهو (٣).
ارسم خطاً أفقياً من النقطة ع إلى محور الصادات، لتحديد الإحداثي الصادي للنقطة وهو (-٢).
إذن الزوج المرتب للنقطة ع هو (٣، -٢).

اختبار سريع

سم الزوج المرتب الممثل لكل نقطة فيما يأتي: (مهارة سابقة)



- | | |
|--------|-------|
| أ (١) | د (٢) |
| ب (٣) | ج (٤) |
| هـ (٥) | و (٦) |

مثال ٢

حل المعادلة $١٢ - ٣ = ٣٦$.

المعادلة الأصلية

$$١٢ - ٣ = ٣٦$$

أضف ١٢ إلى كل من الطرفين

$$١٢ + ١٢ - ٣ = ١٢ + ٣٦$$

بسّط

$$٤٨ = ٣$$

اقسم كلا الطرفين على ٣

$$\frac{٤٨}{٣} = \frac{٣}{٣}$$

بسّط

$$١٦ = ٣$$

حلّ كل معادلة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

$$١٢ = ٤ + ٢س$$

$$٩ - = ٣س$$

$$٦ = ٢ + م$$

$$١٠ = ٢م + س + ب، م، ب ثابتان.$$

$$١١ = ب + ٢ل + (٤-)، ب ثابت.$$

$$١٢ = ٢٠ - ١٠ص$$

(١٣) هندسة: إذا كانت $م = \frac{١}{٣} ق \times ع$ ، تمثل صيغة مساحة المثلث، حيث م المساحة، ق قاعدة المثلث، ع ارتفاعه. فأوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته ١٠ سم، وارتفاعه ٥ سم.



حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً

رابط الدرس الرقمي

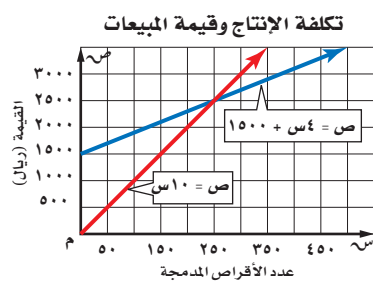


www.ien.edu.sa

لماذا؟

بلغت تكاليف إعداد مادة أقراص مدمجة علمية ١٥٠٠ ريال، وكان تسجيل القرص الواحد يكلف ٤ ريالات ويباع بـ ١٠ ريالات، ويرغب مدير الإنتاج في معرفة عدد الأقراص المدمجة التي عليه بيعها حتى يحقق ربحاً.

إن التمثيل البياني لنظام المعادلات يساعد على معرفة الوضع الذي يحقق ربحاً، ويمكن التعبير عن تكاليف الإنتاج الكلية بالمعادلة $ص = ٤س + ١٥٠٠$ ؛ حيث $ص$ تمثل تكلفة الإنتاج، $س$ عدد الأقراص المدمجة المنتجة.



يمكن تمثيل القيمة الكلية للمبيعات بالمعادلة $ص = ١٠س$ ، حيث تمثل $ص$ القيمة الكلية للمبيعات، $س$ عدد الأقراص المدمجة المباعة.

يمكننا تمثيل هاتين المعادلتين بيانياً من معرفة متى يبدأ تحقيق الربح. وذلك بتحديد النقطة التي يتقاطع فيها المستقيمان، وهو ما يحدث عند بيع ٢٥٠ قرصاً مدمجاً؛ أي أن تحقيق الربح يبدأ عند بيع أكثر من ٢٥٠ قرصاً مدمجاً.

عدد الحلول الممكنة: تشكّل المعادلتان $ص = ٤س + ١٥٠٠$ ، $ص = ١٠س$ نظاماً من معادلتين، ويُسمى الزوج المرتب الذي يمثل حلاً لكلتا المعادلتين حلاً للنظام.

فيما سبق

درست التمثيل البياني للمعادلات الخطية.

والآن

- أتعرف عدد حلول نظام مكون من معادلتين خطيتين.
- أحل نظاماً مكوناً من معادلتين خطيتين بيانياً.

المضردات

نظام من معادلتين

النظام المتسق

النظام المستقل

النظام غير المستقل

النظام غير المتسق

- إذا كان للنظام حل واحد على الأقل، يسمى **نظاماً متسقاً**، وتتقاطع تمثيلاته البيانية في نقطة واحدة، أو تشكّل مستقيماً واحداً.
- إذا كان للنظام حل واحد فقط، يسمى **نظاماً مستقلاً**، وإذا كان له عدد لا نهائي من الحلول يسمى **نظاماً غير مستقل**؛ وهذا يعني وجود عدد غير محدود من الحلول تحقق كلتا المعادلتين.
- إذا لم يكن للنظام أي حل، يسمى **نظاماً غير متسق**، وتشكل تمثيلاته البيانية مستقيمتان متوازيتان.

مفهوم أساسي			
الحلول الممكنة			
عدد الحلول	واحد فقط	عدد لا نهائي	لا يوجد حل
المصطلح	متسق ومستقل	متسق وغير مستقل	غير متسق
التمثيل البياني			

إرشادات للدراسة

عدد الحلول

عندما تُكتب كل من
المعادلتين على الصيغة
ص = م س + ب،
فإن قيم م، ب تحدد عدد
الحلول.

عدد الحلول	المقارنة بين قيم م، ب
١	قيمتا م مختلفتان
لا يوجد	قيمتا م متساويتان، وقيمتا ب مختلفتان.
لا نهائي	قيمتا م متساويتان، وقيمتا ب متساويتان.

مثال ١ عدد الحلول

استعمل التمثيل البياني المجاور لتحديد ما إذا كان النظام الآتي
متسقاً أم غير متسق، ومستقلاً أم غير مستقل.

$$(أ) \quad ٣ + ٢س = ص$$

$$٥ - س = ص$$

بما أن المستقيمين اللذين يمثلان المعادلتين يتقاطعان في
نقطة واحدة، فهناك حل واحد للنظام، ويكون النظام متسقاً
ومستقلاً.

$$(ب) \quad ٥ - س = ص$$

$$٣ + ٢س = ص$$

بما أن المستقيمين اللذين يمثلان المعادلتين متوازيان فلا يوجد حل للنظام، ويكون النظام غير متسق.

تحقق من فهمك

$$(أ) \quad ٣ + ٢س = ص$$

$$٥ - س = ص$$

$$٥ - س = ص$$

$$٣ + ٢س = ص$$

الحل بالتمثيل البياني: من الطرائق المستعملة في حل نظام من معادلتين تمثيلهما بيانياً في المستوى
البياني نفسه، وإيجاد النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان التي تمثل حل النظام.

مثال ٢ الحل بالتمثيل البياني

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحداً فاكتبه:

$$(أ) \quad ١٠ + ٣س = ص$$

$$٢ - س = ص$$

يظهر من التمثيل البياني أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة (١، ٣)، ويمكن التحقق من ذلك بالتعويض
عن س بـ ٣، وعن ص بـ ١.

$$\text{تحقق} \quad ١٠ + ٣س = ص \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$١٠ + ٣(٣) = ١ \quad \text{عوض}$$

$$١٠ + ٩ = ١ \quad \text{اضرب}$$

$$١ = ١ \quad \checkmark$$

$$٢ - س = ص \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$٢ - ٣ = ١ \quad \text{عوض}$$

$$١ = ١ \quad \checkmark \quad \text{اضرب}$$

إذن للنظام حل واحد، هو (١، ٣).

$$(ب) \quad ١ - س = ص$$

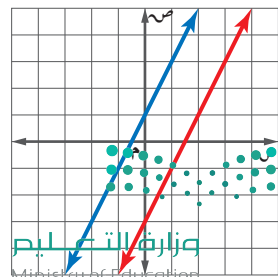
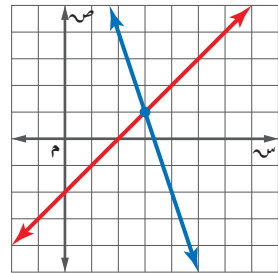
$$٤ - ٢س = ص$$

بما أن للمعادلتين الميل نفسه، ومقطعاهما الصاديان مختلفان،
فالمستقيمان الممثلان للمعادلتين متوازيان، وبما أنهما لا يتقاطعان
في أي نقطة فلا يوجد حل لهذا النظام.

مراجعة المفردات

المستقيمات المتوازية

لا تتقاطع أبداً، ولها الميل
نفسه.



تحقق من فهمك

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًا، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحدًا فاكتبه:

$$\begin{aligned} (أ) \quad & ٢ = ص - ٢ \\ (ب) \quad & ٣ - ص = ٢ \\ (ج) \quad & ٩ = ص + ٢ \\ (د) \quad & ٣ + ص = ٩ \end{aligned}$$

يمكننا استعمال أنظمة المعادلات لحل مسائل متنوعة من واقع الحياة تتضمن متغيرين أو أكثر.

مثال ٣ من واقع الحياة كتابة نظام من معادلتين وحله

تمر: يزداد إنتاج مزرعتي نخيل من التمور بانتظام تقريبًا عبر عدد من السنين. استعمل المعلومات الواردة في الجدول أدناه للتنبؤ بالسنة التي يصبح فيها إنتاج المزرعتين متساويًا على اعتبار أن معدل الزيادة يبقى ثابتًا خلال السنوات القادمة في كلتا المزرعتين.

المزرعة	كمية الإنتاج عام ١٤٢٩ هـ (طن)	معدل الزيادة السنوية (طن)
الأولى	٣٠٩	٨
الثانية	٤١٨	٣

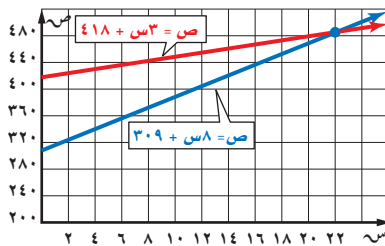


الربط مع الحياة

تعد التمور غذاءً صحيًا مركّزًا وطبيعيًا، ومنجمًا للفيتامينات؛ لكثرة ما بها من عناصر معدنية وفيتامينات.

التعبير اللفظي	كمية الإنتاج الكلية	تساوي	معدل الزيادة	ضرب	عدد السنوات بعد ١٤٢٩ هـ	زائد	كمية الإنتاج عام ١٤٢٩ هـ
المتغيرات	لنكن $ص$ = كمية الإنتاج الكلية				$ص$ = عدد السنوات بعد ١٤٢٩ هـ.		
المعادلات	المزرعة الأولى $ص$	$=$	٨	$\times$	$س$	$+$	٣٠٩
	المزرعة الثانية $ص$	$=$	٣	$\times$	$س$	$+$	٤١٨

بتمثيل الدالتين: $ص = ٨س + ٣٠٩$ ، $ص = ٣س + ٤١٨$ بيانيًا نجد أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة (٢٢، ٤٨٥) تقريبًا.



تحقق استعمال التعويض للتحقق من صحة الإجابة.

$$\begin{aligned} ٣٠٩ + ٨س &= ٤٨٥ & ٣٠٩ + ٨(٢٢) &\stackrel{?}{=} ٤٨٥ \\ ٤١٨ + ٣س &= ٤٨٥ & ٤١٨ + ٣(٢٢) &\stackrel{?}{=} ٤٨٥ \\ ٤٨٥ &= ٤٨٥ & ٤٨٤ &\approx ٤٨٥ \end{aligned}$$

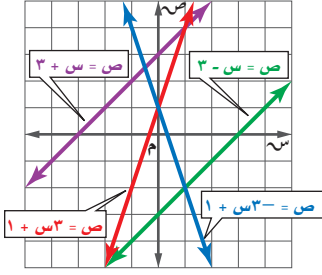
إذن سيكون إنتاج المزرعتين متساويًا بعد ٢٢ سنة من عام ١٤٢٩ هـ؛ أي في عام ١٤٥١ هـ، إذا بقي معدل الزيادة ثابتًا في كلتا المزرعتين.

تحقق من فهمك

(٣) **ساعات:** يرغب كل من محمود ورائد في شراء ساعة يدوية، فإذا كان مع محمود ١٤ ريالًا، ويوفر ١٠ ريالًا في الأسبوع، ومع رائد ٢٦ ريالًا ويوفر ٧ ريالًا في الأسبوع، فبعد كم أسبوعًا يصبح المبلغ نفسه؟

مثال ١

استعمل التمثيل البياني المجاور لتحديد ما إذا كان كلٌّ من أنظمة المعادلات الآتية متسقاً أم غير متسق، ومستقلاً أم غير مستقل:



$$\begin{array}{ll} (١) \quad \text{ص} = ٣ - \text{س} & (٢) \quad \text{ص} = ٣ + \text{س} \\ \text{ص} = ٣ + \text{س} & \text{ص} = ٣ - \text{س} \\ (٣) \quad \text{ص} = ٣ - \text{س} & \text{ص} = ٣ + \text{س} \\ \text{ص} = ٣ + \text{س} & \text{ص} = ٣ - \text{س} \end{array}$$

مثال ٢

مثّل كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانيّاً، وأوجد عدد حلوله، وإن كان واحداً فاكتبه:

$$\begin{array}{ll} (٥) \quad \text{ص} = \text{س} + ٤ & (٦) \quad \text{ص} = \text{س} + ٣ \\ \text{ص} = -\text{س} - ٤ & \text{ص} = ٢ + \text{س} \end{array}$$

مثال ٣

(٧) **قراءة:** يقرأ كلّ من صالح وعبدالله قصة طويلة كما في الشكل المقابل.



(أ) اكتب معادلة تعبر عن عدد الصفحات التي يقرأها كلّ منهما.

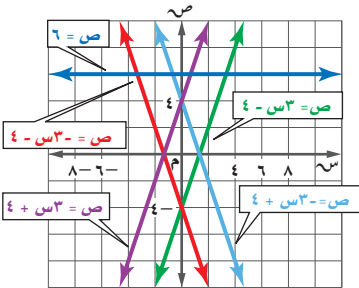
(ب) مثّل كل معادلة بيانيّاً.

(ج) بعد كم يوم يصبح ما قرأه صالح أكثر مما قرأه عبدالله؟ تحقق من إجابتك وفسّرهما.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

استعمل التمثيل البياني المجاور لتحديد ما إذا كان كل نظام فيما يأتي متسقاً أم غير متسق، ومستقلاً أم غير مستقل:



$$\begin{array}{ll} (٨) \quad \text{ص} = ٣ + \text{س} & (٩) \quad \text{ص} = -٣ - \text{س} \\ \text{ص} = -٣ - \text{س} & \text{ص} = ٣ - \text{س} \\ (١٠) \quad \text{ص} = -٣ - \text{س} & (١١) \quad \text{ص} = ٣ - \text{س} \\ \text{ص} = ٣ + \text{س} & \text{ص} = ٣ + \text{س} \end{array}$$

مثال ٢

مثّل كل نظام فيما يأتي بيانيّاً، وأوجد عدد حلوله. وإن كان واحداً فاكتبه:

$$\begin{array}{lll} (١٢) \quad \text{ص} = ٤ + ٢ & (١٣) \quad \text{ص} = \text{س} - ٦ & (١٤) \quad \text{ص} = \text{س} + ٤ \\ \text{ص} = -٢ - ٣ & \text{ص} = \text{س} + ٢ & \text{ص} = ٣ + ٣ = ١٢ \\ (١٥) \quad \text{ص} = -٢ & (١٦) \quad \text{ص} = ٢ + ٣ & (١٧) \quad \text{ص} = ٢ + \text{س} - ٤ \\ \text{ص} = -٢ + \text{س} & \text{س} = ٥ & \text{ص} = ٢ - ٣ \end{array}$$

مثال ٣ (١٨) هويات: يتنافس خالد وسعود في جمع الطوابع التذكارية، فإذا كان لدى خالد ٣٠ طابعًا، ويضيف إليها أسبوعيًا ٤٠ طابعًا، ولدى سعود ٥٠ طابعًا، ويضيف إليها ٣٠ طابعًا كل أسبوع.

(أ) فاكتب معادلة تعبر عن عدد الطوابع التي جمعتها كل منهما.

(ب) مثل كل معادلة بيانيًا.

(ج) بعد كم أسبوع يصبح لدى كل منهما العدد نفسه من الطوابع؟

مثل كل نظام فيما يأتي بيانيًا، وأوجد عدد حلوله، وإن كان واحدًا فاكتبه:

$$(١٩) \text{ ص } \frac{1}{3} = \text{ س } \quad (٢٠) \text{ ص } ٢ = \text{ س } - ١٧$$

$$\text{ص} = \text{س} + ٢ \quad \text{ص} = \text{س} - ١٠$$

$$(٢١) -٣ \text{ س} + ٤ \text{ ص} = ٢٤ \quad (٢٢) ٢ \text{ س} - ٨ \text{ ص} = ٦$$

$$٤ \text{ س} - \text{ص} = ٧$$

$$\text{س} - ٤ \text{ ص} = ٣$$

$$(٢٣) ٤ \text{ س} - ٦ \text{ ص} = ١٢ \quad (٢٤) ٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} = ١٠$$

$$-٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} = -٦ \quad ٤ \text{ س} + ٦ \text{ ص} = ١٢$$

$$(٢٥) ٣ \text{ س} + ٢ \text{ ص} = ١٠ \quad (٢٦) \frac{3}{4} \text{ س} + \frac{1}{4} \text{ ص} = \frac{1}{4}$$

$$٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} = ١٠ \quad \frac{2}{3} \text{ س} + \frac{1}{6} \text{ ص} = \frac{1}{4}$$

(٢٧) تصوير: افترض أن ص تمثل عدد آلات التصوير التي باعها متجر (بالمئات)، س تمثل عدد السنوات منذ عام ١٤٢٠ هـ. إذا كانت المعادلة $\text{ص} = ٥ + ١٢ \text{ س}$ ، $٩ + ١٠$ تعبر عن عدد آلات التصوير الرقمية المباعة في كل عام منذ عام ١٤٢٠ هـ، والمعادلة $\text{ص} = -١ + ٩ \text{ س} + ٧٨$ تعبر عن عدد آلات التصوير العادية المباعة.

(أ) فمثل كل معادلة بيانيًا.

(ب) ما العام الذي تتجاوز فيه مبيعات آلات التصوير الرقمية مبيعات آلات التصوير العادية؟

(ج) في أي عام ستتوقف مبيعات آلات التصوير العادية؟

مثل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانيًا، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحدًا فاكتبه:

$$(٢٨) \text{ ص } ٢ = ١ \text{ س} - ١٠ \quad (٢٩) \text{ س } - ٦ = \frac{3}{8} \text{ ص}$$

$$٤ \text{ ص} = ٢, ٤ \text{ س} \quad ٤ = \frac{2}{3} \text{ س} + \frac{1}{4} \text{ ص}$$

(٣٠) تمثيلات متعددة: سوف تكتشف في هذه المسألة طرائق متنوعة لإيجاد نقطة تقاطع تمثيلي معادلتين خطيتين.

(أ) جبريًا: حُلّ المعادلة $\frac{1}{4} \text{ س} + ٣ = -٣ \text{ س} + ١٢$ جبريًا.

(ب) تقنية: حل نظام المعادلتين: $\text{ص} = \frac{1}{4} \text{ س} + ٣$ ، $\text{ص} = -٣ \text{ س} + ١٢$ بيانيًا، وتحقق من صحّة الحل باستخدام أحد البرامج الحاسوبية.

(ج) تحليليًا: ما علاقة المعادلة في الفرع (أ) والنظام في الفرع (ب)؟

(د) لفظيًا: وضح كيف تستعمل التمثيل البياني في الفرع (ب) لحل المعادلة في الفرع (أ).



الربط مع الحياة

تتيح آلات التصوير الرقمية للمصورين فرصة مشاهدة الصورة وإمكانية معالجتها وتعديلها ونقلها إلى الحاسوب وطباعتها.



مسائل مهارات التفكير العليا

(٣١) **تحذّر:** استعمل التمثيل البياني لحل النظام $2س + 3ص = 5$ ، $3س + 4ص = 6$ ، $4س + 5ص = 7$.

(٣٢) **تبرير:** بيّن هل النظام الذي يتكون من معادلتين وتشكّل كل من النقطتين $(0, 0)$ ، $(2, 2)$ حلًّا له، تكون له حلول أخرى أحيانًا أم دائمًا أم ليس له أي حلول أخرى.

(٣٣) أيّ من أنظمة المعادلات الآتية يختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى؟ فسّر إجابتك:

$4س - 5ص = 1$ $2س + 3ص = 18$	$4س + 8ص = 1$ $3س - 6ص = 6$	$4س + 2ص = 14$ $12س + 6ص = 18$	$3س - 2ص = 1$ $2س + 3ص = 18$
---------------------------------	--------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث معادلات تشكّل مع المعادلة $5س - 3ص = 0$ أحد أنظمة المعادلات الآتية: غير متسق، متسق ومستقل، متسق وغير مستقل على الترتيب.

(٣٥) **اكتب:** صف مزايا ومساوئ استعمال التمثيل البياني لحل أنظمة المعادلات الخطية.

تدريب على اختبار

(٣٧) **هندسة:** قُصت قطعة من السلك طولها ٨٤ سنتيمترًا إلى قطع متساوية، ثم ألصقت من نهاياتها لتشكّل أحرف مكعب. فما حجم هذا المكعب؟

- (أ) ٢٩٤ سم^٣ (ب) ٣٤٣ سم^٣
(ج) ١١٥٨ سم^٣ (د) ٢٧٤٤ سم^٣

(٣٦) **إجابة قصيرة:** يمكن لأحد أنواع البكتيريا مضاعفة عدده كل ٢٠ دقيقة. فإذا كان عدد البكتيريا في الساعة ٠:٠٠ ٩ صباحًا ٤٥٠٠، فكم يصبح عند الساعة ١٢:٠٠ ظهرًا؟

مراجعة تراكمية

الاختبار	الدرجة
١	٩١
٢	٩٥
٣	٨٨

(٣٨) **اختبار:** بيّن الجدول المجاور درجات هيثم في ٣ اختبارات للرياضيات، وبقي له اختبار رابع، وهو بحاجة إلى معدل لا يقل عن ٩٢ حتى يحصل على التقدير أ. (مهارة سابقة)

(أ) إذا كان م يمثل درجته في الاختبار الرابع، فاكتب المتباينة المثلة لهذا الموقف.

(ب) إذا أراد هيثم الحصول على التقدير أ في الرياضيات، فكم يجب أن تكون درجته في الاختبار الرابع؟

(ج) هل إجابتك معقولة؟ فسّر ذلك.

(٣٩) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-3, 1)$ ، والمعامد للمستقيم $ص = \frac{1}{3}س + 2$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال مجموعة التعويض المعطاة:

$$(٤٠) ١٥(ن + ٦) = ١٦٥؛ \{٣، ٤، ٥، ٦، ٧\}.$$

$$(٤١) \frac{9-2}{4} = 36؛ \{٧٨، ٧٩، ٨٠، ٨١\}.$$

إذا كانت أ = ٢، ب = -٣، ج = ١١، فاحسب قيمة كل عبارة فيما يأتي:

$$(٤٢) أ + ٦ ب$$

$$(٤٣) ٧ - أ ب$$

$$(٤٤) (٢ ج + ٣ أ) \div ٤$$





١-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI - nspire لتمثيل نظام من معادلتين وحله.

نشاط ١

حل نظام من معادلتين خطيتين

حل النظام الآتي مقرباً إلى أقرب جزء من مئة:

$$٧,٤٨ = ص + ٥,٢٣$$

$$٢,١١ = ص - ٦,٤٢$$

الخطوة ١: حل كل معادلة بالنسبة للمتغير ص لإدخالها في الحاسبة.

المعادلة الأولى

$$٧,٤٨ = ص + ٥,٢٣$$

اطرح ٥,٢٣ من كلا الطرفين

$$٧,٤٨ - ٥,٢٣ = ص + ٥,٢٣ - ٥,٢٣$$

بسط

$$٢,٢٥ = ص$$

المعادلة الثانية

$$٢,١١ = ص - ٦,٤٢$$

اطرح ٦,٤٢ من كلا الطرفين

$$٢,١١ - ٦,٤٢ = ص - ٦,٤٢ + ٦,٤٢$$

بسط

$$-٤,٣١ = ص$$

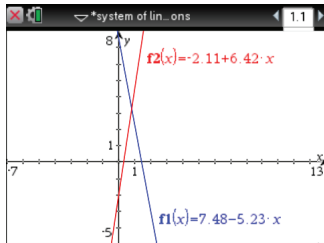
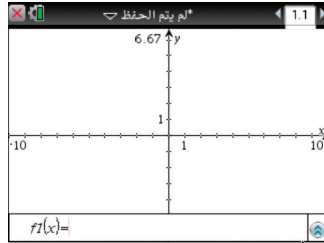
اضرب كلا الطرفين في (-١)

$$٤,٣١ = -ص$$

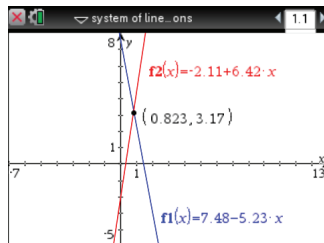
بسط

$$٤,٣١ + ٢,٢٥ = -ص + ٢,٢٥$$

الخطوة ٢: مثل كلا من المعادلتين بيانياً.



[−7, 13] scl: 1 by [−5, 8] scl: 1



[−7, 13] scl: 1 by [−5, 8] scl: 1

• افتح الآلة الحاسبة بالضغط على **on** ، ثم اختر من الشاشة **1** مستند جديد .

• اختر **2** : إضافة تطبيق الرسوم البيانية فتظهر الشاشة المجاورة.

• اكتب المعادلة الأولى $f1(x) = 7.48 - 5.23x$

• ثم اضغط المفتاح **enter** فيظهر التمثيل البياني.

• اضغط المفتاح **tab** ثم اكتب المعادلة الثانية

$f2(x) = -2.11 + 6.42x$ ثم اضغط **enter** ليظهر التمثيل البياني المجاور.

• أظهر الجزء المطلوب من التمثيل البياني على الشاشة، بالضغط على مفتاح **menu** ومنها

اختر **4** : تكبير/تصغير النافذة **1** : إعدادات النافذة ؛ لتحديد التدرج المناسب لكل من ص، س.

الخطوة ٣: إيجاد نقاط التقاطع لإيجاد الحل.

• استعمل ميزة نقاط التقاطع لإيجاد الحل.

• اضغط **menu** واختر منها **6** : تحليل الرسم البياني ثم **4** : نقاط التقاطع ،

وقم بالضغط على المستقيم الأول ثم المستقيم الثاني فتظهر لك نقطة التقاطع

(0.823, 3.17) التي هي حل النظام.

وعليه يكون حل النظام إلى أقرب جزء من مئة هو (٣, ١٧, ٠, ٨٢) .



نشاط ٢

استعمال نظام من معادلتين لحل معادلة خطية

حل المعادلة $5س + ٦ = -٤$ مستعملًا نظامًا من معادلتين.

الخطوة ١: اكتب نظامًا من معادلتين ، على أن يساوي كل طرف من طرفي المعادلة ص.

$$ص = ٥س + ٦ \quad \text{المعادلة الأولى}$$

$$ص = -٤ \quad \text{المعادلة الثانية}$$

الخطوة ٢: مثل كلا من المعادلتين بيانيًا.

• مثل كلا من هاتين المعادلتين بيانيًا

بالضغط على مفتاح **on** ، ثم اختر

الشاشة **1** مستند جديد واختر منها

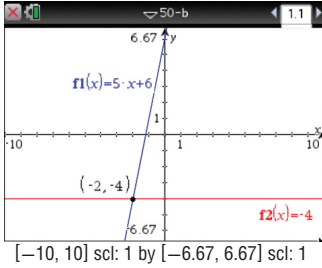
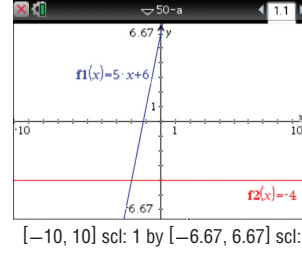
2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية .

• أدخل المعادلة الأولى $f1(x) = 5x + 6$ ثم اضغط

، اضغط مفتاح **tab** وأدخل المعادلة الثانية

$f2(x) = -4$ ثم اضغط **enter** فيظهر التمثيل البياني

التالي:



أي أن الحل هو $س = -٢$

الخطوة ٣: إيجاد نقاط التقاطع لإيجاد الحل.

• حدّد نقطة التقاطع بالضغط على مفتاح **menu** ،

ثم اختر منها **6:** تحليل الرسم البياني، ثم اختر

4: نقاط التقاطع وقم بالضغط في أي نقطة على

الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، تظهر

لك نقطة التقاطع $(-٢, -٤)$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل من أنظمة المعادلات الآتية، وقرب الحل إذا كان كسرًا عشريًا إلى أقرب جزء من مئة:

$$(٢) \quad ٦س + ١ = ص$$

$$(١) \quad ٢س - ٣ = ص$$

$$ص = -٤, ٠س + ٥$$

$$ص = -٤, ٠س + ٥$$

$$(٤) \quad ٣س + ٢ = ص \quad ١٦$$

$$(٣) \quad ٧س - ٢ = ص \quad ١٦$$

$$ص + ٩ = ٥س$$

$$١١س + ٦ = ص \quad ٣٢, ٣$$

$$(٦) \quad ٧٥س - ١٠٠ = ص \quad ٤٠٠$$

$$(٥) \quad ٦٢س + ٠, ٣٥ = ص \quad ١, ٦٠$$

$$٣٣س - ١٠ = ص \quad ٧٠$$

$$٨, ٢٤ = ص + ١, ٣٨$$

استعمل الآلة الحاسبة البيانية لحل كل من المعادلات الآتية، وقرب الحل إذا كان كسرًا عشريًا إلى أقرب جزء من مئة:

$$(٩) \quad ١٠س + ٢ = ص \quad ١ - ٨س$$

$$(٨) \quad ٣ = ١ + \frac{ص}{٢}$$

$$(٧) \quad ٤س - ٢ = ص$$



(١٠) **اكتب:** وضح لماذا يمكنك حل معادلة مثل $ر = أس + ب$ بحل نظام المعادلتين: $ص = ر$ ، $ص = أس + ب$.



حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

٢-٥

لماذا؟



في إحدى السنوات أنتجت مزرعة ناصر ١٦ طنًا من التمور، بينما أنتجت مزرعة محمد ٢٠ طنًا. ثم بدأ إنتاج المزرعتين يتناقص سنويًا، فبلغ في السنة التالية ١٣ طنًا لمزرعة ناصر و ١٦ طنًا لمزرعة محمد.

فإذا استمر تناقص إنتاج كل من المزرعتين وفق المعدل نفسه، فمتى يتساوى الإنتاج السنوي للمزرعتين؟

الحل بالتعويض: يمكنك استعمال نظام مكون من معادلتين

لإيجاد متى يتساوى إنتاج المزرعتين، وإحدى طرائق إيجاد الحل الدقيق لنظام المعادلات **التعويض**.

فيما سبق

درست حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانيًا.

والآن

- أحل نظامًا مكونًا من معادلتين بالتعويض.
- أحل مسائل من واقع الحياة (تتضمن نظامًا من معادلتين) باستعمال التعويض.

المفردات

التعويض

مطوبتك

الحل بالتعويض

مفهوم أساسي

- الخطوة ١:** حل إحدى المعادلتين على الأقل باستعمال أحد المتغيرين إذا كان ذلك ضروريًا.
- الخطوة ٢:** عوض المقدار الناتج من الخطوة (١) في المعادلة الثانية، ثم حلها.
- الخطوة ٣:** عوض القيمة الناتجة من الخطوة (٢) في أي من المعادلتين وحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني، واكتب الحل في صورة زوج مرتب.

حل نظام من معادلتين بالتعويض

مثال ١

استعمل التعويض لحل النظام الآتي:

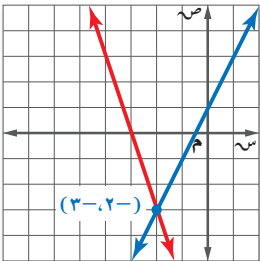
$$\begin{aligned} \text{ص} = ٢س + ١ & \quad \text{الخطوة ١:} \quad \text{إحدى المعادلتين مكتوبة أساسًا بالنسبة إلى ص.} \\ ٩ = \text{ص} + ٣س & \end{aligned}$$

الخطوة ٢: عوض $٢س + ١$ بدلًا من ص في المعادلة الثانية.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الثانية} \quad ٩ = \text{ص} + ٣س & \\ \text{عوض عن ص بـ } ٢س + ١ & \quad ٩ = ١ + ٣س \\ \text{اجمع الحدود المتشابهة} \quad ٩ = ١ + ٣س & \\ \text{اطرح (١) من كلا الطرفين} \quad ٨ = ٣س & \\ \text{اقسم كلا الطرفين على ٣} \quad ٨/٣ = س & \end{aligned}$$

الخطوة ٣: عوض $٨/٣$ بدلًا من س في أي من المعادلتين لإيجاد قيمة ص.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأولى} \quad \text{ص} = ٢س + ١ & \\ \text{عوض عن س بـ } (٨/٣) & \quad \text{ص} = ٢(٨/٣) + ١ \\ \text{بسط} \quad \text{ص} = ١٦/٣ + ٣/٣ & \quad \text{ص} = ١٩/٣ \\ \text{إذن الحل هو: } (٨/٣, ١٩/٣) & \end{aligned}$$



تحقق من فهمك



$$\begin{aligned} \text{١ (ب)} \quad ١ = \text{ص} + ٥س & \\ \text{ص} = ١٠ + ٣س & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{١ (أ)} \quad \text{ص} = ٤س - ٦ & \\ ٥س + ٣ = ١ & \end{aligned}$$



وإذا لم يكن أحد المتغيرين مكتوباً وحده في طرف إحدى المعادلتين في النظام، فحل إحدى المعادلتين أولاً بالنسبة لهذا المتغير، ثم عوض لحل النظام.

مثال ٢ الحل ثم التعويض

استعمل التعويض لحل النظام الآتي:

$$س + ٢ص = ٦$$

$$٣س - ٤ص = ٢٨$$

الخطوة ١: حُلْ المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير س لأن معامل س = ١.

$$س + ٢ص = ٦$$

$$س + ٢ص - ٢ص = ٦ - ٢ص$$

$$س = ٦ - ٢ص$$

الخطوة ٢: عوض عن س بـ (٦ - ٢ص) في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة ص.

$$٣(٦ - ٢ص) - ٤ص = ٢٨$$

$$١٨ - ٦ص - ٤ص = ٢٨$$

$$١٨ - ١٠ص = ٢٨$$

$$١٨ - ٢٨ = ١٠ص - ٢٨$$

$$١٠ص = ١٠$$

$$ص = ١$$

الخطوة ٣: أوجد قيمة س بالتعويض في المعادلة الأولى.

$$س + ٢ص = ٦$$

$$س + ٢(١) = ٦$$

$$س = ٤$$

$$س = ٤$$

الحل هو (٤، ١)

تحقق من فهمك

$$١٢ (أ) ٤س + ٥ص = ١١$$

$$١٣ - ٣س = ٧$$

$$٢ (ب) ٣س - ٤ص = ٩$$

$$٥س - ٢ص = ٧$$

إرشادات للدراسة

صيغة الميل والمقطع

إذا كُتبت كل من المعادلتين بصيغة الميل والمقطع (ص = م س + ب)، فيمكن مساواتهما معاً، ثم إيجاد قيمة س، وتعويضها لإيجاد قيمة ص.

إرشادات للدراسة

النظام غير المستقل

هناك عدد لا نهائي من الحلول للنظام في المثال ٣؛ لأنه عند كتابة المعادلتين بصيغة الميل والمقطع تكونان متكافئتين، ولهما التمثيل البياني نفسه.

مثال ٣ عدد لا نهائي من الحلول، أو لا يوجد للنظام حل

حل النظام الآتي مستعملاً التعويض:

$$ص = ٢س - ٤$$

$$٦س + ٣ص = ١٢$$

عوض عن ص بـ (٢س - ٤) في المعادلة الثانية.

$$٦س + ٣(٢س - ٤) = ١٢$$

$$٦س + ٦س - ١٢ = ١٢$$

$$١٢س - ١٢ = ١٢$$

$$١٢س = ٢٤$$

بما أن الجملة الناتجة تشكل متطابقة، لذا يوجد عدد لا نهائي من الحلول.



تحقق من فهمك

حل كلاً من النظامين الآتيين مستعملًا التعويض.

$$\begin{aligned} (أ) \quad ٢س - ص &= ٨ \\ ٣س - ٤ص &= ١ \\ (ب) \quad ٢س - ٨ص &= ٢ \\ ٦ص - ٨س &= ٢ \end{aligned}$$

حل مسائل من واقع الحياة: يمكنك استعمال التعويض لحل مسألة من واقع الحياة تتضمن نظامًا من معادلتين.

مثال ٤ من واقع الحياة كتابة نظام من معادلتين وحله

أجهزة: باع متجر أجهزة تسجيل وسماعات عددها ١٢٥ جهازًا، بسعر ١٠٤,٩٥ ريالًا لجهاز التسجيل الواحد، و ١٨,٩٥ ريالًا للسماعة الواحدة، فإذا كان ثمن مبيعاته من هذه الأجهزة ٦٩٢٦,٧٥ ريالًا، فكم جهازًا باع من كل نوع؟

لتكن ج = عدد أجهزة التسجيل، ت = عدد السماعات.

عدد الوحدات المباعة	ج	ت	١٢٥
السعر	١٠٤,٩٥ ج	١٨,٩٥ ت	٦٩٢٦,٧٥

فتكون المعادلتان هما: ج + ت = ١٢٥، ١٠٤,٩٥ ج + ١٨,٩٥ ت = ٦٩٢٦,٧٥.

الخطوة ١: حل المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير ج.

$$\text{المعادلة الأولى} \quad ج + ت = ١٢٥$$

$$\text{اطرح ت من كلا الطرفين} \quad ج + ت - ت = ١٢٥ - ت$$

$$\text{بسط} \quad ج = ١٢٥ - ت$$

الخطوة ٢: عوض عن ج بـ (١٢٥ - ت) في المعادلة الثانية.

$$\text{المعادلة الثانية} \quad ٦٩٢٦,٧٥ = ١٨,٩٥ ت + ١٠٤,٩٥ ج$$

$$\text{عوض عن ج بـ (١٢٥ - ت)} \quad ٦٩٢٦,٧٥ = ١٨,٩٥ ت + ١٠٤,٩٥ (١٢٥ - ت)$$

$$\text{خاصية التوزيع} \quad ٦٩٢٦,٧٥ = ١٨,٩٥ ت + ١٣١١٨,٧٥ - ١٢٦٩٨,٥٥$$

$$\text{اجمع الحدود المتشابهة} \quad ٦٩٢٦,٧٥ = ٨٦ - ١٣١١٨,٧٥$$

$$\text{اطرح ١٣١١٨,٧٥ من كلا الطرفين} \quad ٦١٩٢ - = ٨٦ -$$

$$\text{اقسم كلا الطرفين على -٨٦} \quad ٧٢ = ت$$

الخطوة ٣: عوض عن ت بـ (٧٢) في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ج.

$$\text{المعادلة الأولى} \quad ج + ت = ١٢٥$$

$$\text{عوض عن ت بـ (٧٢)} \quad ج + ٧٢ = ١٢٥$$

$$\text{اطرح ٧٢ من كلا الطرفين} \quad ج = ٥٣$$

إذن باع المتجر ٥٣ جهاز تسجيل، ٧٢ سماعة.

تحقق من فهمك

٤) رياضة: مجموع النقاط التي سجلها فريقان في إحدى مباريات كرة اليد ٣١ نقطة. فإذا كان عدد نقاط الفريق الأول يساوي ٥,٢ أمثال عدد نقاط الفريق الثاني، فما عدد نقاط كل فريق؟

الأمثلة ١ - ٣

حل كلاً من الأنظمة الآتية مستعملًا التعويض:

$$\begin{array}{lll} (١) \text{ س} = \text{ص} - ٢ & (٢) \text{ س} + ٢ = ٣\text{ص} + ٤ & (٣) \text{ س} - \text{ص} = ١ \\ (٤) \text{ س} + \text{ص} = ٢ & (٥) \text{ س} + ٤ = ٦\text{ص} + ٩ & (٦) \text{ س} = ٣\text{ص} + ٣ \end{array}$$

مثال ٤

(٤) **هندسة:** إذا كان مجموع قياسي الزاويتين س، ص يساوي ١٨٠°، وقياس الزاوية س يزيد بمقدار ٢٤° على قياس الزاوية ص، فأجب عما يأتي:

(أ) اكتب نظامًا من معادلتين لتمثيل هذا الموقف.

(ب) أوجد قياس كل زاوية.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حل كلاً من الأنظمة الآتية مستعملًا التعويض:

$$\begin{array}{lll} (٥) \text{ ص} = ٤\text{س} + ٥ & (٦) \text{ ص} = ٣\text{س} - ٣٤ & (٧) \text{ ص} = ٣\text{س} - ٢ \\ (٨) \text{ س} + ٢ = ٣ & (٩) \text{ س} + ٣ = ٤\text{ص} - ٣ & (١٠) ١ - ٢\text{س} = \text{ص} \\ (١١) \text{ س} = \text{ص} - ١ & (١٢) \text{ ص} = -٤\text{س} + ١١ & (١٣) \text{ ص} = -٣\text{س} + ١ \\ (١٤) \text{ س} + ٣ = -٥ & (١٥) ٥ = \text{ص} - \text{س} & (١٦) -٥\text{س} + ٤ = \text{ص} - ٢٠ \\ (١٧) \text{ س} + ٢ = ١٠ & (١٨) -٣\text{س} + ٣ = ١٣ & (١٩) ١٠ - \text{ص} = ٨\text{ص} - ٤٠ \end{array}$$



الربط مع الحياة

السياحة في بلادنا متنفس في الإجازات للأسر والوافدين والسياح؛ لما حبا الله به البلاد من مظاهر طبيعية وأثار تاريخية، تمنح زائريها الراحة والتوازن الذهني والجسماني.

مثال ٤

(١٧) **سياحة:** بيّن الجدول أدناه العدد التقريبي لزوار منطقتين سياحيتين في المملكة خلال عام ١٤٣٥ هـ، ومعدل التغير بالآلاف خلال السنة الواحدة:

المنطقة	عدد الزوار	معدل التغير (بالآلاف في السنة الواحدة)
أ	٤٠,٣ ألفاً	زيادة ٠,٨
ب	١٧,٠ ألفاً	زيادة ١,٨

(أ) عرّف المتغيرات، وكتب معادلة تمثل عدد زوار كل منطقة.

(ب) إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه، فبعد كم سنة تتوقع أن يصبح عدد الزوار متساوياً في المنطقتين؟

اللاعب ب	اللاعب أ	العام
١:٥٤:٤٣	١:٥١:٣٩	١٤٢٥هـ
١:٥٨:٠٣	١:٤٩:٣١	١٤٣٠هـ

١٨) **رياضة:** يبين الجدول المجاور الزمن المسجل للاعبين في سباقات الماراثون

خلال عامي ١٤٢٥هـ، ١٤٣٠هـ.

أ) إذا سجل الزمن لكل منهما بالساعات والدقائق والثواني، فأعد كتابته إلى أقرب دقيقة.

ب) إذا اعتبرنا العام ١٤٢٥هـ صفراً، وافترضنا ثبات معدل التغير بعد عام ١٤٢٥هـ، فاكتب معادلة تمثل الزمن المسجل (ص) لكلا اللاعبين في أي عام (س).

ج) إذا استمر التغير في الاتجاه نفسه، فهل يسجلان الزمن نفسه؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

١٩) **تحذ:** كان عدد المتطوعين في العمل الخيري في إحدى القرى ٦٠ متطوعاً، فإذا كانت نسبة الرجال إلى النساء ٧:٥، فأوجد عدد كل من الرجال والنساء المتطوعين.

٢٠) **تبرير:** قارن بين حل نظام من معادلتين بكل من: طريقة التمثيل البياني، وطريقة التعويض.

٢١) **مسألة مفتوحة:** أنشئ نظاماً من معادلتين له حل واحد، ووضح كيف يمكن أن يعبر عن مسألة من واقع الحياة، وصف دلالة.

٢٢) **اكتب:** وضح كيف تحدد الأفضل تعويضاً عند استعمال طريقة التعويض لحل نظام من معادلتين.

تدريب على اختبار

٢٤) ما مجموعة حل المعادلة: $2|f| = 16$ ، إذا كان ف عدداً صحيحاً؟

أ) $\{8, 0\}$ (أ) $\{8, -8\}$ (ب)
ب) $\{0, -8\}$ (ب) $\{8, 0, -8\}$ (د)
ج) $\{8, -8\}$ (ج) $\{8, 0, -8\}$ (د)

٢٣) أي الأنظمة الآتية له حل واحد؟

أ) $\begin{cases} 3s - 4 = v \\ 6s - 2v = 8 \end{cases}$ (أ) $\begin{cases} 5s + 1 = v \\ 4s + v = 10 \end{cases}$ (ج)
ب) $\begin{cases} 2s - 8 = v \\ 4s + 9 = v \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} 1 = s + v \\ v - 3 = s \end{cases}$ (د)

مراجعة تراكمية

مثّل كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانياً، ثم حدد ما إذا كان له حل واحد أم عدد لا نهائي من الحلول أم ليس له حل، وإن كان له حل واحد فاكتبه: (الدرس ٥-١)

٢٥) $s = 1$ (٢٦) $v = s + 5$ (٢٧) $s + v = 1$
٢٨) $v - s = 7$ (٢٩) $v = s - 2$ (٣٠) $3v + 3 = 3$

حلّ كل متباينة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

٢٨) $1 + f \leq 11$ (٢٩) $24 < 18 + 2n$ (٣٠) $11 - \frac{2}{5} \leq f + 5$

٣١) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، ٦)، (١، ١). (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلّاً من العبارات التالية بعد استعمال خاصية التوزيع:



حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال

٣-٥

الجمع أو الطرح

لماذا؟

يزيد عدد الأشهر (أ) التي ترتفع فيها درجة الحرارة العظمى في مدينة الرياض على 30°C بمقدار شهرين على عدد الأشهر (ب) التي تنخفض فيها عن 30°C . ويمثل النظام الآتي هذا الموقف:

$$أ + ب = 12$$

$$أ - ب = 2$$

الحذف باستعمال الجمع: إذا جمعت هاتين المعادلتين فسوف يتم حذف المتغير (ب)، وتُسمى طريقة الجمع أو الطرح في حل النظام **الحذف**.

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالتعويض.

والآن

■ أحل نظامًا من معادلتين باستعمال طريقة الحذف بالجمع.

■ أحل نظامًا من معادلتين باستعمال طريقة الحذف بالطرح.

المضردات

الحذف

أضف إلى

مطويتك

الحل بالحذف

مفهوم أساسي

- الخطوة ١:** اكتب النظام على أن يكون الحدان المتشابهان اللذان معامل أحدهما معكوس للآخر أو مساوٍ له بعضهما فوق بعض.
- الخطوة ٢:** اجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة.
- الخطوة ٣:** عوض القيمة الناتجة في الخطوة ٢ في إحدى المعادلتين وحلها لإيجاد المتغير الثاني، واكتب الحل كزوج مرتب.

الحذف باستعمال الجمع

مثال ١

استعمل الحذف لحل النظام:

$$٤س + ٦ص = ٣٢$$

$$٣س - ٦ص = ٣ \quad \leftarrow \text{الخطوة ١: كلا معاملي ٦ ص، -٦ ص معكوس للآخر}$$

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين.

$$٣٢ = ٤س + ٦ص$$

$$٣ = ٣س - ٦ص (+)$$

$$٣٥ = ٧س$$

$$\frac{٣٥}{٧} = \frac{٧س}{٧}$$

$$٥ = س$$

حذف المتغير ص.

اقسم كلا الطرفين على ٧.

بسط.

الخطوة ٣: عوض عن س بـ ٥ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ص.

المعادلة الأولى

عوض عن س بـ ٥

اضرب

اطرح ٢٠ من كلا الطرفين

بسط

اقسم كلا الطرفين على ٦

بسط

$$٣٢ = ٤س + ٦ص$$

$$٣٢ = ٤(٥) + ٦ص$$

$$٣٢ = ٢٠ + ٦ص$$

$$٢٠ - ٣٢ = ٢٠ - ٢٠ - ٦ص$$

$$١٢ = ٦ص$$

$$\frac{١٢}{٦} = \frac{٦ص}{٦}$$

$$٢ = ص$$

إذن الحل هو (٢، ٥).



$$\begin{aligned} (أ) \quad ٣ - &= ٣ \text{ ص} + ٤ - ٣ \\ ٤ - ٣ &= ٥ \text{ ص} \\ (ب) \quad ٣ + ٤ &= ٣ \text{ ص} + ٢٢ \\ ٣ - ٤ &= ٣ \text{ ص} + ١٤ \end{aligned}$$

يمكنك استعمال طريقة الحذف لإيجاد عددين محددين يرتبطان معًا بعلاقة.

مثال ٢

كتابة نظام من معادلتين وحله

عدنان، سالب ثلاثة أمثال الأول مضافاً إليه خمسة أمثال الثاني يساوي -١١، وثلاثة أمثال الأول مضافاً إليه سبعة أمثال الثاني يساوي -١. فما العددين؟

$$\begin{aligned} \text{سالب ثلاثة أمثال العدد الأول} & \quad \text{زائد} \quad \text{خمسة أمثال العدد الثاني} \quad \text{يساوي} \quad -١١ \\ -٣ \text{ ص} & + ٥ \text{ ص} = -١١ \\ \text{ثلاثة أمثال العدد الأول} & \quad \text{زائد} \quad \text{سبعة أمثال العدد الثاني} \quad \text{يساوي} \quad -١ \\ ٣ \text{ ص} & + ٧ \text{ ص} = -١ \end{aligned}$$

الخطوات ١، ٢: اكتب المعادلتين رأسياً، ثم اجمعهما.

$$\begin{array}{r} -٣ \text{ ص} + ٥ \text{ ص} = -١١ \\ (+) \quad ٣ \text{ ص} + ٧ \text{ ص} = -١ \\ \hline ١٢ \text{ ص} = -١٢ \\ ١٢ \text{ ص} = -١٢ \\ \hline ١ = -١ \end{array}$$

حذف المتغير الأول س.
اقسم كلا الطرفين على ١٢
بسط.

الخطوة ٣: عوض عن ص ب -١ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة س.

$$\begin{aligned} ٣ \text{ ص} + ٧ \text{ ص} &= -١ \quad \text{المعادلة الثانية} \\ ٣ \text{ ص} + (٧ - ١) &= -١ \quad \text{عوض عن ص ب -١} \\ ٣ \text{ ص} + (٦) &= -١ \quad \text{بسط} \\ ٣ \text{ ص} + ٦ &= -١ \quad \text{أضف ٦ إلى كلا الطرفين} \\ ٣ \text{ ص} &= -٦ \quad \text{بسط} \\ \frac{٣ \text{ ص}}{٣} &= \frac{-٦}{٣} \quad \text{اقسم كلا الطرفين على ٣} \\ \text{ص} &= -٢ \quad \text{بسط} \end{aligned}$$

العدنان هما ٢، -١.

تحقق:

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأولى} \quad -٣ \text{ ص} + ٥ \text{ ص} &= -١١ \\ -٣(-٢) + ٥(-١) &= -١١ \\ ٦ - ٥ &= -١ \\ ١ &= -١ \quad \text{بسط} \\ \text{المعادلة الثانية} \quad ٣ \text{ ص} + ٧ \text{ ص} &= -١ \\ ٣(-٢) + ٧(-١) &= -١ \\ -٦ - ٧ &= -١ \\ -١٣ &= -١ \quad \text{بسط} \end{aligned}$$



(٢) أوجد العددين اللذين مجموعهما يساوي -١٠، وسالب ثلاثة أمثال العدد الأول ناقصاً بالعدد الثاني يساوي ٢.

قراءة الرياضيات

الحذف: إذا أدى جمع أو طرح معادلتين إلى أن يكون ناتج معاملي أحد المتغيرين صفراً، يقال عندئذٍ إنه تم حذف هذا المتغير.

إرشادات للدراسة

معاملات:

عندما يتساوى معامل متغير، يؤدي طرح المعادلتين إلى حذفه، وعندما يكون أحد المعاملين معكوساً للآخر، يؤدي جمع المعادلتين إلى حذفه أيضاً.

الحذف باستعمال الطرح: يمكنك أحياناً حذف متغير بطرح معادلة من أخرى.

الحذف باستعمال الطرح

مثال ٣ من اختبار

حل النظام:

$$\begin{aligned} 5r + 2t &= 6 \\ 9r + 2t &= 22 \end{aligned}$$

(أ) $(-7, 15)$ (ب) $(7, \frac{8}{9})$ (ج) $(4, -7)$ (د) $(4, -\frac{2}{5})$

اقرأ الفقرة:

بما أن كلتا المعادلتين تشتمل على ٢ ت، فيمكن حل النظام بالحذف باستعمال الطرح.

حل الفقرة:

الخطوة ١: اطرح المعادلتين.

اكتب نظام المعادلتين على أن تكون الحدود

المتشابهة بعضها تحت بعض.

حذف المتغيرات

بسط

$$5r + 2t = 6$$

$$(-) \quad 9r + 2t = 22$$

$$\hline -4r = -16$$

$$r = 4$$

الخطوة ٢: عوض عن ر ب ٤ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ت.

المعادلة الأولى

$$r = 4$$

بسط

اطرح ٢٠ من كلا الطرفين

بسط

بسط

$$5r + 2t = 6$$

$$5(4) + 2t = 6$$

$$20 + 2t = 6$$

$$20 + 2t - 20 = 6 - 20$$

$$2t = -14$$

$$t = -7$$

فيكون الحل $(4, -7)$ ، والإجابة الصحيحة هي جـ.

تحقق من فهمك

(٣) حل النظام:

$$8b + 3j = 11$$

$$8b + 7j = 7$$

(أ) $(5, -1)$ (ب) $(75, -1)$ (ج) $(75, 1)$ (د) $(5, 1)$



الربط مع الحياة

اهتم الإسلام بالعمل اليدوي المهني والتقني، فمارسه الرسول ﷺ والصحابه والتابعون بوصفه وسيلة إنتاجية وقيمة مهمة تؤدي إلى تطور البلاد وبناء حياة الإنسان والمجتمع.

كتابة نظام من المعادلات وحله

مثال ٤ من واقع الحياة



وظائف: يعمل كل من عبدالعزيز وعبدالرحمن في متجر، فيحصل عبدالعزيز على ٥, ٨ ريالاً في الساعة، وعبدالرحمن على ٥, ٧ ريالاً في الساعة، وبلغ مجموع ما حصلوا عليه خلال يومين ٢٩٩, ٥ ريالاً، وفي اليومين التاليين ضاعف عبدالرحمن عدد ساعات عمله فحصل على ٤١٢ ريالاً، فما عدد الساعات التي عملها كل منهما في اليومين الأولين؟

افهم: أنت تعلم مقدار ما يحصل عليه كل منهما في الساعة ومجموع ما حصلوا عليه معاً.

نريد معرفة عدد الساعات التي عملها كل منهما في اليومين الأولين.

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٣-٥: حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح ٢٠٢٢/٧/١٤٤٤

يمكنك ضرب إحدى المعادلتين في (-)، ثم جمع المعادلتين بدلاً من طرحهما.

خطأ: افترض أن ج = عدد ساعات عمل عبدالعزيز، د = عدد ساعات عمل عبدالرحمن.

أجرة عبد العزيز	زائد	أجرة عبد الرحمن	تساوي	٢٩٩,٥ ريالاً
٨,٥ جـ	+	٧,٥ د	=	٢٩٩,٥
أجرة عبد العزيز	زائد	أجرة عبد الرحمن	تساوي	٤١٢ ريالاً
٨,٥ جـ	+	٧,٥ (٢) د	=	٤١٢

حل: اطرح المعادلتين للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة الناتجة في المتغير الآخر.

اكتب المعادلتين رأسياً

$$٨,٥ جـ + ٧,٥ د = ٢٩٩,٥$$

$$٨,٥ جـ + ١٤,٥ د = ٤١٢$$

$$٨,٥ جـ + ٧,٥ د = ٢٩٩,٥$$

$$(-) \quad ٨,٥ جـ + ١٥ د = ٤١٢$$

بسط.

اطرح لحذف المتغير جـ.

$$١١٢,٥ - = ٧,٥ د -$$

اقسم كلا الطرفين على -٧,٥.

$$\frac{١١٢,٥ -}{-٧,٥} = \frac{٧,٥ د -}{-٧,٥}$$

بسط.

$$١٥ = د$$

والآن عوض عن د بـ ١٥ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة جـ.

المعادلة الأولى

$$٨,٥ جـ + ٧,٥٠ د = ٢٩٩,٥$$

عوض عن د بـ ١٥

$$٨,٥ جـ + ٧,٥ (١٥) = ٢٩٩,٥$$

بسط

$$٨,٥ جـ + ١١٢,٥ = ٢٩٩,٥$$

اطرح ١١٢,٥ من كلا الطرفين

$$٨,٥ جـ = ١٨٧$$

اقسم كلا الطرفين على ٨,٥

$$٢٢ = جـ$$

تحقق: عوض كلا المتغيرين في المعادلة الأخرى للتأكد من صحة الحل.

$$٤١٢ = ٨,٥ (٢٢) + ٧,٥ (١٥)$$

وعليه ففي اليومين الأولين عمل عبدالعزيز ٢٢ ساعة، وعبدالرحمن ١٥ ساعة.

تحقق من فهمك

٤ حفلات: أقام مسفر ومحمود حفلاً بمناسبة نجاحهما، فإذا كان عدد الأصدقاء الذين دعاهم مسفر يقل بـ ٥ عن الذين دعاهم محمود، وكان مجموع الأصدقاء المدعوين ٤٧، فكم شخصاً دعا كل منهما؟

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً طريقة الحذف:

المثالان ١، ٣

$$(١) \quad ٧ = ب - ٥ \quad (٢) \quad ٨س + ٥ص = ٣٨ \quad (٣) \quad ٧ف + ٣جـ = -٦$$

$$٧م - ب = ١١ \quad -٨س + ٢ص = ٤ \quad ٧ف - ٢جـ = -٣١$$

٤ مثال ٢ ما العددين اللذان مجموعهما ٢٤، وخمسة أمثال الأول ناقص الثاني يساوي ١٢؟

٥ طلاب: يزيد عدد طلاب المرحلة الابتدائية في مدينة ما على عدد طلاب المرحلة المتوسطة بـ ١٨ ألف طالب. فإذا علمت أن عدد الطلاب في المرحلتين ٤٤ ألف طالب، فما عدد الطلاب في كل مرحلة؟

تدرب وحل المسائل

المثالان ٣، ١

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

$$(٦) \quad \begin{cases} -ف + و = ٧ \\ ٧ = ص + ز + ٤ \end{cases} \quad (٨) \quad \begin{cases} -٥ ص + ٤ = ١٧ \\ ٤ = ز + ص \end{cases}$$

$$\begin{cases} ١ = و + ف \\ ٨ = ز - ص \end{cases} \quad \begin{cases} ٤ = أ + ب - ٤ \\ ١٠ = أ + ب - ١٦ \end{cases}$$

$$(٩) \quad \begin{cases} ١ = و + ف \\ ٨ = ز - ص \end{cases} \quad (١٠) \quad \begin{cases} ٤ = أ + ب - ٤ \\ ١٠ = أ + ب - ١٦ \end{cases}$$

$$(١١) \quad \begin{cases} ١ = و + ف \\ ٨ = ز - ص \end{cases} \quad (١٢) \quad \begin{cases} ٤ = أ + ب - ٤ \\ ١٠ = أ + ب - ١٦ \end{cases}$$

مثال ٢ (١٢) ما العددين اللذان مجموعهما ٢٢ والفرق بينهما ١٢؟

(١٣) ما العددين اللذان مجموعهما ١١، وثلاثة أمثال أحدهما ناقص الآخر يساوي -٣؟

مثال ٤ (١٤) شحن سيارات: يمثل الجدول أدناه تكاليف شحن عدد من السيارات الصغيرة والكبيرة من مدينة إلى مدينة أخرى. أوجد أجرة شحن كل من السيارة الصغيرة والكبيرة.

الأجرة الكلية (ريال)	عدد السيارات الصغيرة	عدد السيارات الكبيرة
٣٨٠٠	٢	٥
٢٦٠٠	٢	٣

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

$$(١٥) \quad \begin{cases} ٤(س + ٢ص) = ٨ \\ ٢\frac{٣}{٤} = ص + \frac{١}{٣}س \end{cases} \quad (١٦) \quad \begin{cases} ٢\frac{٣}{٤} = ص + \frac{١}{٣}س \\ ٦\frac{١}{٤} = ص - \frac{١}{٣}س \end{cases} \quad (١٧) \quad \begin{cases} ٦ = ص + ٣س \\ ٧ = ص + ٣س \end{cases}$$

$$(١٨) \quad \begin{cases} ٤(س + ٢ص) = ٨ \\ ٢\frac{٣}{٤} = ص + \frac{١}{٣}س \end{cases} \quad (١٩) \quad \begin{cases} ٦ = ص + ٣س \\ ٧ = ص + ٣س \end{cases}$$

(١٨) فن العمارة: يبلغ مجموع ارتفاعي برج المملكة والفصلية معاً ٥٦٧ متراً، ويزيد ارتفاع برج المملكة على برج الفصلية بـ ٣٣ متراً.

(أ) ما ارتفاع برج المملكة؟

(ب) ما ارتفاع برج الفصلية؟



الرابط مع الحياة

افتُتح مهرجان جازان الشتوي الأول الذي تنظمه لجنة النشاط السياحي بالمنطقة في عام ١٤٢٧ هـ، ويشتمل على ألعاب ترفيهية وعروض ومسابقات فنية ورياضية.

(١٩) سباق الدرجات: شارك ٨٠ متسابقاً في سباق الدرجات الهوائية ضمن ملتقى روائع جازان الرابع من فئتي الكبار والصغار. وكان عدد المشاركين من فئة الصغار أكثر من عدد المشاركين من فئة الكبار بـ ١٠.

(أ) افترض أن س يمثل عدد المشاركين في فئة الصغار، ص يمثل عدد المشاركين في فئة الكبار. ثم اكتب نظاماً من معادلتين يمثل هذا الموقف.

(ب) استعمل الحذف لحل هذا النظام.

(ج) فسّر الحل في سياق هذا الموقف.

(د) مثل هذا النظام بيانياً للتأكد من صحة الحل.



(٢٠) تمثيلات متعددة: لديك ٩ قطع نقد، ٩ مشابك ورق، استعمال ٩ منها على الأكثر لإنشاء عدد معين من النقاط، وافترض أن كل مشبك قيمته نقطة واحدة وكل قطعة نقد قيمتها ٣ نقاط، وأن ن تمثل قطعة نقد، م تمثل مشبك ورق. فمثلاً:

$$٢٢ + ٣ م = ٩ قطع نقد + ٩ مشابك ورق$$

(أ) حسيًا: كيف يمكنك أن تحصل على ١٥ نقطة مستعملًا كلا النوعين؟ قارن النمط الذي حصلت عليه بما حصل عليه زملاؤك.

(ب) تحليليًا: مستعملًا ٩ قطع، اكتب نظامًا من معادلتين وحله لإيجاد عدد مشابك الورق وقطع النقد اللازمة للحصول على ١٥ نقطة.

(ج) جدولياً: أنشئ جدولاً يبين عدد مشابك الورق المستعملة والعدد الكلي للنقاط إذا كان عدد قطع النقد ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥.

(د) تفضيلاً: هل تتطابق النتيجة في الجدول مع نتيجة (الإجابة عن الفرع ب)؟ فسر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢١) مسألة مفتوحة: أنشئ نظامًا من معادلتين يمكن حله بحذف أحد متغيريه باستعمال الجمع، ثم اكتب قاعدة عامة لإنشاء مثل هذه الأنظمة.

(٢٢) تبرير: إذا كانت النقطة $(-٣، ٢)$ تمثل حل نظام معادلتين، وكانت إحدى معادلتيه هي $س + ٤ ص = ٥$ ، فأوجد المعادلة الثانية لهذا النظام، وفسر كيف توصلت إليها.

(٢٣) تحدّد: إذا كان ناتج ضرب عدد في ٧ يساوي ١٨٢، ومجموع رقميه يساوي ٨، فحدد المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين يمكنك استعماله لإيجاد هذا العدد، ثم حل النظام وأوجد العدد.

(٢٤) اكتب: بين متى يكون من المفيد استعمال الحذف لحل نظام من معادلتين.

تدريب على اختبار

(٢٥) إذا استمر النمط الآتي، فما العدد الثامن؟

$$٢، ٣، ٩، \frac{٢٧}{٤}، \frac{٨١}{٨}، \dots$$

$$(ج) \frac{٢٢٨١}{٦٤}$$

$$(د) \frac{٢٤٤٥}{٦٤}$$

$$(أ) \frac{٢١٨٧}{٦٤}$$

$$(ب) \frac{٢٢٤٥}{٦٤}$$

(٢٦) ما حل نظام المعادلتين الآتيتين؟

$$س + ٤ ص = ١$$

$$٢ س - ٣ ص = ٩$$

(ج) ليس له حل

(أ) $(١، ٠)$

(د) يوجد عدد لانتهائي من الحلول

(ب) $(-٣، ١)$



مراجعة تراكمية

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا التعويض، وبيّن ما إذا كان للنظام حل واحد، أم عدد لا نهائي من الحلول، أم ليس له حل: (الدرس ٢-٥)

$$(٢٩) \text{ س } ٥ = \text{ ص } ٦ +$$

$$(٢٨) \text{ س } ٣ = \text{ ص }$$

$$(٢٧) \text{ ص } ٦ = \text{ س }$$

$$\text{س } ٥ = \text{ ص } ٢ -$$

$$٤٥ = \text{س } ٣ + \text{ ص } ٢$$

$$٤٠ = \text{س } ٣ + \text{ ص } ٢$$

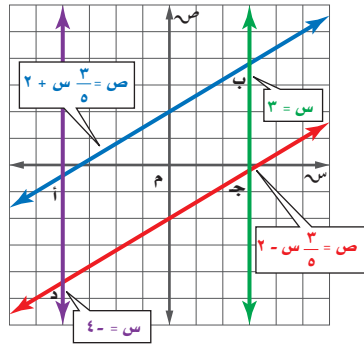
(٣٠) **توفير:** يرغب كل من وائل ورياض في شراء دراجة، وقد وفر وائل حتى الآن ٣٥ ريالاً ويخطط لتوفير ١٠ ريالات كل أسبوع.

أما رياض فلديه الآن ٢٦ ريالاً ويخطط لتوفير ١٣ ريالاً في الأسبوع. (الدرس ١-٥)

(أ) بعد كم أسبوع يصبح مجموع ما وفره كل منهما متساوياً؟

(ب) ما مقدار ما يوفره كل منهما حتى ذلك الوقت؟

(٣١) **هندسة:** بيّن ما إذا كان الشكل أب جـ د متوازي أضلاع أم لا؟ وفّر إجابتك. (مهارة سابقة)



حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

$$٨ = \frac{٢}{٣} (٣٣)$$

$$٤٨ - = ٦ ج - ٨$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلاً من العبارات الآتية:

$$(٣٥) ٧س - ٩س + ٤س$$

$$(٣٤) ٦ - ٣ + ٧ب + ١$$

$$(٣٧) ٥ - ٧(٥ + \text{ص})$$

$$(٣٦) ١٠(٢ + ر) + ٣ر$$



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٣-٥: حل نظام من معادلتين خطيتين بالحدف باستعمال الجمع أو الطرح 1444 2023



(١٣) **حديقة الحيوان:** الجدول الآتي يبين، تكلفة دخول عائلتين لحديقة الحيوان في إحدى المدن. (الدرسان ٢-٥، ٣-٥)

العائلة	المجموعة	التكلفة الإجمالية
أ	٤ كبار وطفلان	١٨٤ ريالاً
ب	٤ كبار و٣ أطفال	٢٠٠ ريال

(أ) عرّف المتغيرات التي تمثل ثمن التذكرة للكبار و ثمن التذكرة للأطفال.

(ب) اكتب نظاماً من معادلتين لإيجاد ثمن كل من تذكري الكبار والأطفال.

(ج) حل النظام، ووضح ماذا يعني الحل.

(د) ما تكلفة دخول مجموعة مكونة من ٣ كبار و ٥ أطفال لحديقة الحيوان؟

(١٤) **اختيار من متعدد:** تريد أسماء شراء ١٢ قطعة من الشوكولاتة والمصاص؛ إذا كان مع أسماء ١٦ ريالاً، وكان ثمن قطعة الشوكولاتة ريالين، و ثمن قطعة المصاص ريالاً، فكم قطعة من كل نوع ستشتري؟ (الدرسان ٢-٥، ٣-٥)

(أ) ٦ قطع شوكولاتة، ٦ قطع مصاص.

(ب) ٤ قطع شوكولاتة، ٨ قطع مصاص.

(ج) ٧ قطع شوكولاتة، ٥ قطع مصاص.

(د) ٣ قطع شوكولاتة، ٩ قطع مصاص.

حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً طريقة الحذف: (الدرس ٣-٥)

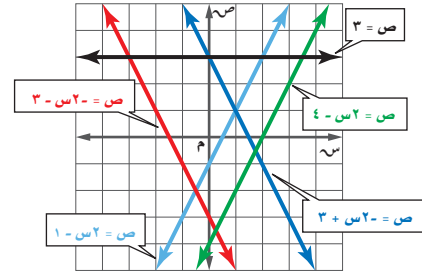
$$(١٥) \begin{cases} ٩ = س + ص \\ ٣ - = س - ص \end{cases}$$

$$(١٦) \begin{cases} ١١ = س + ٣ص \\ ١٩ = س + ٧ص \end{cases}$$

$$(١٧) \begin{cases} ٦ - = س - ٩ص \\ ١٠ = س + ٤ص \end{cases}$$

$$(١٨) \begin{cases} ١١ - = س + ٥ص \\ ١ - = س - ٧ص \end{cases}$$

مستعملاً التمثيل البياني أدناه، حدد خصائص كل نظام فيما يأتي من حيث كونه متسقاً أم غير متسق، ومستقلاً أم غير مستقل: (الدرس ١-٥)



$$(٢) \begin{cases} ٣ + = س - ٢ص \\ ٣ - = س - ٢ص \end{cases}$$

$$(١) \begin{cases} ١ - = س - ٢ص \\ ٣ + = س - ٢ص \end{cases}$$

$$(٣) \begin{cases} ٣ + = س - ٢ص \\ ٣ - = س - ٢ص \end{cases}$$

$$(٢) \begin{cases} ٣ + = س - ٢ص \\ ٣ - = س - ٢ص \end{cases}$$

مثلّ كل نظام فيما يأتي بيانياً، وأوجد عدد حلوله. وإن كان واحداً

فاكتبه: (الدرس ١-٥)

$$(٤) \begin{cases} ٦ = س + ص \\ ٤ = س - ص \end{cases}$$

$$(٣) \begin{cases} ٣ - = س - ٢ص \\ ٤ + = س + ص \end{cases}$$

$$(٦) \begin{cases} ٦ - = س - ٤ص \\ ١ - = ص \end{cases}$$

$$(٥) \begin{cases} ٨ = س + ص \\ ٢٤ = س + ٣ص \end{cases}$$

$$(٨) \begin{cases} ٤ - = س + ٢ص \\ ٦ - = س + ٣ص \end{cases}$$

$$(٧) \begin{cases} ١٢ = س + ٢ص \\ ٦ = س + ٣ص \end{cases}$$

حلّ كلّاً من الأنظمة الآتية مستعملاً التعويض: (الدرس ٢-٥)

$$(١٠) \begin{cases} ٣ - = س - ٢ص \\ ٩ = س + ص \end{cases}$$

$$(٩) \begin{cases} ٤ + = س + ص \\ ١٦ = س + ٢ص \end{cases}$$

$$(١٢) \begin{cases} ٤ - = س \\ ٣٠ = س - ٦ص \end{cases}$$

$$(١١) \begin{cases} ٦ = س + ص \\ ٨ = س - ص \end{cases}$$





حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب

٤ - ٥



لماذا؟

باعت مكتبة ٧٠ قلمًا بمبلغ ٢٦٠ ريالًا. وبناءً على القائمة أدناه يمكن كتابة المعادلتين الآتيتين لإيجاد عدد الأقلام المباعة من كل نوع:

قلم حبر	٤ ريالات
قلم رصاص	ريالان

$$س + ص = ٧٠$$

$$٤س + ٢ص = ٢٦٠$$

الحذف باستعمال الضرب: لا يمكن حذف أي من المتغيرين بالجمع أو الطرح في النظام أعلاه، إلا أنه يمكن حذف أحد المتغيرين باستعمال الضرب في مثل هذه الحالة.

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح.

والآن

- أحل نظامًا من معادلتين بالحذف باستعمال الضرب.
- أحل مسائل من واقع الحياة تتضمن أنظمة من معادلتين.

أضف إلى

مطوياتك

الحل بالحذف

مفهوم أساسي

الخطوة ١: اضرب إحدى المعادلتين على الأقل في عدد ثابت للحصول على معادلتين فيهما حدان أحدهما معكوس للآخر.

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة.

الخطوة ٣: عوض عن قيمة المتغير الناتجة في الخطوة (٢) في إحدى المعادلتين، وحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني، واكتب الحل في صورة زوج مرتب.

ضرب معادلة لحذف أحد المتغيرين

مثال ١

استعمل الحذف لحل النظام:

$$٥س + ٦ص = ٨$$

$$٢س + ٣ص = ٥$$

الخطوتان ١ و ٢: $٥س + ٦ص = ٨$

$$٢س + ٣ص = ٥$$

الخطوة ٣: $٥س + ٦ص = ٨$

$$٥س + ٦ص = ٨$$

$$٥س + ٦ص = ٨$$

$$٩ص = ٣$$

$$٣ص = ٩$$

الحل هو (٣، ٢).

تحقق من فهمك



$$٥س + ٦ص = ٨$$

$$١٠س + ١٢ص = ١٦$$

$$٢س + ٣ص = ٥$$

$$٤س + ٦ص = ١٠$$

$$٤س + ٦ص = ١٠$$

$$٤س + ٦ص = ١٠$$

$$٩ص = ٣$$

$$٣ص = ٩$$

الحل هو (٣، ٢).



$$١٣ = ٩ + ك$$

$$٤ = ٢ + ك$$

$$١٠ = ٦ - ٢ص$$

$$١٩ = ٧ - ٣س$$

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٤ - ٥: حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب ٢٠٢٣ ١٤٤٤

أحياناً نحتاج إلى ضرب كل معادلة في عدد مختلف لحل نظام المعادلتين.

مثال ٢ ضرب كلتا المعادلتين لحذف أحد المتغيرين

إرشادات للدراسة

اختيار المتغير الذي يجب حذفه: يمكنك حذف أي متغير في النظام إذا لم يطلب إليك إيجاد قيمة متغير محدد.

حل النظام الآتي مستعملًا الحذف:

$$٤س + ٢ص = ٨$$

$$٣س + ٣ص = ٩$$

الطريقة ١: حذف المتغير س.

$$٤س + ٢ص = ٨$$

$$٣س + ٣ص = ٩$$

اضرب بـ ٣
اضرب بـ ٤

$$١٢س + ٦ص = ٢٤$$

$$١٢س - ١٢ص = ٣٦ \quad (+)$$

اجمع

$$١٢- = ٦ص -$$

تم حذف المتغير س

$$\frac{١٢-}{٦-} = \frac{٦ص -}{٦-}$$

اقسم كلا الطرفين على ٦-

$$٢ = ص$$

بسط

الآن عوض عن ص بـ ٢ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة س.

المعادلة الثانية

$$٩ = ٣س + ٣ص$$

عوض عن ص بـ ٢

$$٩ = ٣س + (٢)٣$$

بسط

$$٩ = ٣س + ٦$$

اطرح ٦ من كلا الطرفين

$$٣ = ٣س$$

اقسم كل طرف على ٣

$$\frac{٣}{٣} = \frac{٣س}{٣}$$

الحل (٢، ١)

$$١ = س$$

الطريقة ٢: حذف المتغير ص.

$$٤س + ٢ص = ٨$$

$$٣س + ٣ص = ٩$$

اضرب بـ ٣
اضرب بـ ٢

$$١٢س + ٦ص = ٢٤$$

$$٦س - ٦ص = ١٨ \quad (+)$$

تم حذف المتغير ص

$$٦ = ٦س$$

اقسم كلا الطرفين على ٦

$$\frac{٦}{٦} = \frac{٦س}{٦}$$

بسط

$$١ = س$$

والآن عوض عن س = ١ بإحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ص.

المعادلة الثانية

$$٩ = ٣س + ٣ص$$

عوض عن س بـ ١

$$٩ = ٣س + (١)٣$$

بسط

$$٩ = ٣س + ٣$$

اطرح ٣ من كلا الطرفين، ثم بسط

$$٦ = ٣س$$

اقسم كلا الطرفين على ٣

$$\frac{٦}{٣} = \frac{٣ص}{٣}$$

بسط

$$٢ = ص$$

الحل هو (٢، ١) ويتطابق مع الحل الذي حصلنا عليه بالطريقة الأولى.

تحقق: عوض عن س بـ (١)، وعن ص بـ ٢ في المعادلة الأولى

المعادلة الأصلية

$$٨ = ٤س + ٢ص$$

عوض عن (س، ص) بـ (٢، ١).

$$٨ \stackrel{?}{=} (٢)٤ + (١)٢$$

اضرب

$$٨ \stackrel{?}{=} ٤ + ٢$$

اجمع

$$٨ = ٨ \quad \checkmark$$



تحقق من فهمك

$$\begin{aligned} ٢٠ (أ) \quad ٥س - ٣ص = ٦ \\ ٢س + ٥ص = ١٠- \\ ٢٠ (ب) \quad ٢ب + ٦أ = ٢ \\ ٨ = ٣ب + ٤أ \end{aligned}$$

حل مسائل من واقع الحياة: قد يكون من الضروري استعمال الضرب قبل الحذف أحياناً عند حل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من واقع الحياة

كتابة نظام من معادلتين وحله

طيران: تطير طائرة في اتجاه الرياح بمعدل ٥٢٠ ميلاً في ٤ ساعات، وفي رحلة العودة تستغرق ٥ ساعات لقطع المسافة نفسها، أوجد سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة.
ليكن أ = معدل سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة.
و = معدل سرعة الرياح.

السرعة	الزمن	المسافة	السرعة × الزمن = ف
أ + و	٤	٥٢٠	٥٢٠ = ٤(أ + و)
أ - و	٥	٥٢٠	٥٢٠ = ٥(أ - و)

فتكون المعادلتان هما: ٤ + أ = ٥٢٠، ٥ - أ = ٥٢٠.

$$\begin{aligned} ٤ + أ &= ٥٢٠ \\ ٥ - أ &= ٥٢٠ \\ \hline ٢٠٨٠ &= ٢٠ - أ٢٠ \quad (+) \\ ٤٦٨٠ &= ٤٠أ \\ \hline ٤٦٨٠ &= ٤٠أ \\ ١١٧ &= أ \end{aligned}$$

اجمع
حذف المتغير و
اقسم كلا الطرفين على ٤٠
بسّط

وبذلك يكون معدل سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة ١١٧ ميلاً في الساعة.

تحقق من فهمك

(٣) زورق: يقطع زورق ٤ أميال في الساعة في اتجاه التيار، ويستغرق في رحلة العودة ١,٥ ساعة، أوجد معدل سرعة القارب في المياه الساكنة.

تأكد

المثالان ١، ٢: حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا الحذف:

$$\begin{aligned} (١) \quad ٢س - ٣ص &= ٤ \\ (٢) \quad ٢س + ٧ص &= ١ \\ (٣) \quad ٤س + ٢ص &= -١٤ \\ (٤) \quad ٧س + ٣ص &= ٢٧ \\ (٥) \quad ٥س + ٣ص &= ١٧ \end{aligned}$$

مثال ٣ (٤) صيد: يقطع قارب صيد مسافة ١٠ أميال في ٣٠ دقيقة في اتجاه مجرى النهر، إلا أنه يقطع المسافة نفسها في رحلة العودة في ٤٠ دقيقة، أوجد معدل سرعته في المياه الساكنة بوحدة ميل/ساعة.

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٥-٤: حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب ١٤٤٤ ٢٠٢٣

المثالان ١، ٢

حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

$$\begin{array}{ll} (٥) \text{ س} + \text{ص} = ٢ & (٦) \text{ س} - \text{ص} = ٨- \\ -٣\text{س} + ٤\text{ص} = ١٥ & ١٦ = \text{س} + ٥\text{ص} \\ (٧) \text{ س} + \text{ص} = ٣٩- & (٨) ١١ = \text{س} + ٥\text{ص} \\ ٣\text{س} + ٢\text{ص} = ١٥- & ١ = \text{س} + ٣\text{ص} \\ (٩) ٣\text{س} + ٤\text{ص} = ٢٩ & (١٠) ٨٠- = \text{س} + ٧\text{ص} \\ ٤٣ = \text{س} + ٥\text{ص} & ٥٨- = \text{س} + ٥\text{ص} \\ (١١) ١٢\text{س} - ٣\text{ص} = ٣- & (١٢) ٠ = \text{س} + ٢\text{ص} - ٤ \\ ١ = \text{س} + ٦\text{ص} & ٨ = \text{س} + ٣\text{ص} - ١٠ \end{array}$$

المثال ٣

(١٣) **نظرية الأعداد:** ما العددين اللذان سبعة أمثال أحدهما زائد ثلاثة أمثال الآخر يساوي سالب واحد، ومجموعهما يساوي سالب ثلاثة؟

(١٤) **كرة قدم:** سجّل أحد لاعبي كرة القدم (١٢) هدفًا في الدوري الممتاز. فإذا علمت أن ضعف عدد الأهداف التي سجلها في مرحلة الذهاب تزيد على ثلاثة أمثال أهدافه في مرحلة الإياب بـ ٤، فما عدد أهدافه في كل من مرحلتَي الذهاب والإياب؟

حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

$$\begin{array}{ll} (١٥) -٤\text{س} + ٢٥\text{ص} = ١٧٥, ٢ & (١٦) \frac{٣}{٤}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{ص} = ٢ \\ ٢\text{س} + \text{ص} = ٧, ٥ & ٩\frac{١}{٤} = \text{س} + \frac{١}{٢}\text{ص} \end{array}$$

(١٧) **هندسة:** إذا علمت أن التمثيل البياني للمعادلتين $\text{س} + ٢\text{ص} = ٦$ ، $٢\text{س} + \text{ص} = ٩$ يشتمل على ضلعين من أضلاع مثلث، وأن نقطة تقاطع المستقيمين هي رأس المثلث، فأجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) ما إحداثيات رأس المثلث؟

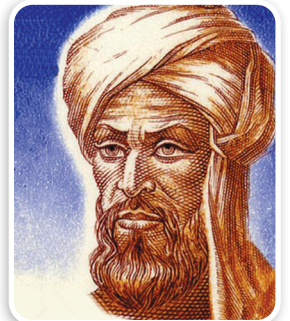
(ب) ارسم هذين المستقيمين، وعين رأس المثلث.

(ج) إذا كان التمثيل البياني للمعادلة $\text{س} - \text{ص} = ٣$ يشمل الضلع الثالث للمثلث، فارسم هذا المستقيم على الشكل نفسه.

(د) أوجد إحداثيات الرأسين الآخرين للمثلث.

(١٨) **اختبارات:** اكتشف معلم أنه عكس درجة أحد طلابه في أثناء رصدها مما أقرّ ترتيبه بين الأوائل، فأخبر

الطالب وبيّن له أن مجموع رقمي درجته يساوي ١٤، والفارق بين درجتيه الحالية والصحيحة ٣٦ درجة. وطلب إليه أن يعرف درجته الصحيحة وسوف يكافئه. فما الدرجة الصحيحة؟



تاريخ الرياضيات

الخوارزمي (١٦٤هـ - ٢٣٢هـ):

هو أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي، عالم مسلم، وقد أسهم كثيرًا في تطور علوم الرياضيات، والجغرافيا، والفلك، ومن أشهر كتبه "الجبر والمقابلة".

مسائل مهارات التفكير العليا

- (١٩) **تبرير:** وضح كيف يمكنك تعريف نظام المعادلتين الخطيتين الذي له عدد لا نهائي من الحلول.
- (٢٠) **اكتشف الخطأ:** حل كل من سعيد وحسين نظامًا من معادلتين، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

حسين	سعيد
$11 = 7 + 2r$	$11 = 7 + 2r$
$7 = 9 - r$	$7 = 9 - r$
$18 = r$	$11 = 7 + 2r$
$11 = 7 + 2r$	$14 = 18 - r$
$11 = 7 + (18)2$	$25 = 25$
$11 = 7 + 36$	$1 = r$
$25 = 7$	$11 = 7 + 2r$
$\frac{25}{7} = \frac{7}{7}$	$11 = (1)7 + 2r$
$3,6 = r$	$11 = 7 + 2r$
الحل (٣, ٦, ١٨)	$4 = 2r$
	$\frac{4}{2} = \frac{2r}{2}$
	$2 = r$
	الحل (١, ٢)

- (٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظامًا من معادلتين يمكن حله بضرب إحدى معادليته في -٣، ثم جمع المعادلتين معًا.
- (٢٢) **تحذّر:** إذا كان حل النظام: $4x + 5y = 2$ ، $2x - 6y = 3$ هو (٣، أ)، فأوجد قيمة كل من: أ، ب موضحة خطوات الحل التي استعملتها.

- (٢٣) **اكتب:** وضح كيف تحدّد المتغير الذي ينبغي حذفه باستعمال الضرب.

تدريب على اختبار

- (٢٥) **احتمال:** بيّن الجدول أدناه نتائج رمي مكعب أرقام. فما الاحتمال التجريبي لظهور العدد ٣؟

النتائج	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار	٤	٨	٢	٠	٥	١

- (أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{5}{6}$

- (٢٤) ما الزوج المرتب الذي يمثل حل النظام الآتي؟

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -9 \\ -x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

- (أ) (٣، ٣) (ب) (-٣، ٣) (ج) (-٣، ١) (د) (٣، -١)

مراجعة تراكمية

حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف: (الدرس ٥-٣)

$$(٢٨) \quad ٦ = ز - ٢س$$

$$(٢٧) \quad ٩ = ٣ك + ٥س$$

$$(٢٦) \quad ٧ = ٦ق + ٥هـ$$

$$٣ = ٤ز - س$$

$$٣ = ٣ك + س$$

$$٩ = ٣هـ + ٦ق$$

حلّ كل متباينة فيما يأتي، ومثل مجموعة حلها بيانيًا: (مهارة سابقة)

$$(٣٢) \quad ٩ \leq |١ + ٢ر|$$

$$(٣١) \quad ١١ < |٩ + ٢و|$$

$$(٣٠) \quad ٥ > |١١ + ك|$$

$$(٢٩) \quad ٨ \geq |٥ - م|$$

(٣٣) إذا علمت أن د(س) = ٣س - ١، فما قيمة د(-٤)؟ (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

اكتب الصيغة التي تعبر عن الجملة في كلّ مما يأتي:

(٣٤) مساحة المثلث (م) تساوي نصف حاصل ضرب طول القاعدة (ل) في الارتفاع (ع).

(٣٥) محيط الدائرة (مح) يساوي حاصل ضرب ٢ في (ط) في نصف القطر (نق).

(٣٦) حجم المنشور القائم (ح) يساوي حاصل ضرب الطول (ل) في العرض (ع) في الارتفاع (أ).





تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين

لماذا؟

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالتعويض أو بالحذف.

والآن

- أحدد أفضل الطرق لحل نظام من معادلتين.
- أحل مسائل تطبيقية على أنظمة المعادلات الخطية.



قطع أحمد في طوافه حول الكعبة وسعيه بين الصفا والمروة أثناء أدائه العمرة مسافة ٣١٠٠ مترًا تقريبًا، وكانت مسافة طوافه كاملة مساوية لمسافة أحد أشواط السعي.

يعبر عن المسافة التي قطعها أحمد في طوافه وسعيه بالمعادلة: $s + 3100$ ، ويعبر عن العلاقة بين مسافة الطواف ومسافة السعي بالمعادلة $s = \frac{1}{7}s$ حيث s تمثل مسافة السعي، s مسافة الطواف.

يمكنك حل هذا النظام لإيجاد المسافة التي قطعها في كل من السعي، والطواف.

تحديد أفضل طريقة: تعلمت سابقًا خمس طرائق لحل أنظمة المعادلات الخطية، والجدول أدناه يبين أفضل حالة لاستعمال كل منها.

مفهوم أساسي	
حل نظام مكون من معادلتين خطيتين	
الطريقة	أفضل حالة لاستعمالها
التمثيل البياني	لتقدير الحلول؛ فالتمثيل البياني لا يعطي في الغالب حلًا دقيقًا.
التعويض	إذا كان معامل أحد المتغيرين في إحدى المعادلتين ١ أو -١.
الحذف باستعمال الجمع	إذا كان كل من معاملي أحد المتغيرين في المعادلتين معكوسًا جمعيًا للآخر.
الحذف باستعمال الطرح	إذا كان معامل أحد المتغيرين في المعادلتين متساويين.
الحذف باستعمال الضرب	إذا لم يكن أي من المعاملات (١) أو (-١)، وليس من السهل التخلص من أحد المتغيرين بجمع المعادلتين أو طرحهما.

تعد طريقتا التعويض والحذف من الطرائق الجبرية لحل أنظمة المعادلات، والطريقة الجبرية عادةً تعدُّ أفضل الطرق للحصول على إجابة دقيقة. أما التمثيل البياني باستعمال التقنيات أو بدونها فمناسب لتقدير الحل.



مثال ١

اختيار أفضل طريقة

حدّد أفضل طريقة لحل النظام الآتي، ثم حله:

$$٤س - ٤ص = ٨$$

$$٨س + ١٩ص = ١٩$$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

يمكن حل النظام في المثال (١)؛ بالحذف باستعمال الضرب، وذلك بضرب المعادلة الأولى في (٢)، ثم جمع المعادلتين لحذف المتغير س.

افهم:

لتحديد أفضل طريقة لحل نظام من معادلتين، انظر إلى معاملي كل حد.

خطط:

بما أن معاملي كل من المتغيرين س، ص في المعادلتين ليسا متساويين أو متعاكسين، إذن لا يمكنك استعمال الجمع أو الطرح لحذف أحد المتغيرين، وبما أن معامل ص في المعادلة الثانية هو (١) إذن يمكنك استعمال التعويض.

حل:

حل المعادلة الثانية بالنسبة إلى ص أولاً.

المعادلة الثانية

$$٨س + ١٩ص = ١٩$$

$$٨س + ١٩ص = ١٩ \quad \text{أضف } ٨س \text{ إلى كلا الطرفين.}$$

$$٨س + ١٩ص = ١٩ \quad \text{بسّط.}$$

والآن، عوض عن المتغير ص في المعادلة الأولى بـ $٨س + ١٩$.

المعادلة الأولى

$$٤س - ٤ص = ٨$$

عوض

$$٤س - ٤(٨س + ١٩) = ٨$$

خاصية التوزيع

$$٤س - ٣٢س - ٧٦ = ٨$$

بسّط.

$$٢٨س - ٧٦ = ٨$$

$$٢٨س - ٧٦ = ٨ \quad \text{أضف } ٧٦ \text{ إلى كلا الطرفين}$$

بسّط

$$٢٨س = ٨٤$$

اقسم كلا الطرفين على ٢٨

$$\frac{٢٨س}{٢٨} = \frac{٨٤}{٢٨}$$

بسّط

$$س = ٣$$

والآن عوض عن المتغير س في المعادلة الثانية بـ ٣

المعادلة الثانية

$$٨س + ١٩ص = ١٩$$

س = ٣

$$٨(٣) + ١٩ص = ١٩$$

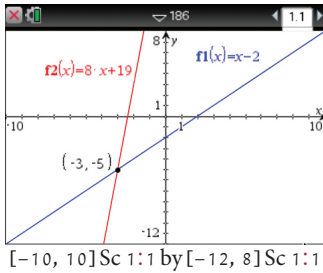
بسّط

$$٥ = ٥$$

فيكون حل هذا النظام هو $(٣, ٥)$.

تحقق:

استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire للتحقق من صحة الحل، وإن كانت طريقتك الجبرية في الحل صحيحة، فإن التمثيل البياني للمعادلتين سيتقاطع في النقطة $(٣, ٥)$.



تحقق من فهمك

$$(ب) \quad ٣س - ٤ص = ١٠$$

$$٥س + ٨ص = ٢$$

$$(د) \quad ٥س - ١٧ص = ١٧$$

$$٣س + ٢ص = ٥$$

$$(أ) \quad ٥س + ٧ص = ٢$$

$$٢س + ٧ص = ٩$$

$$(ج) \quad ٩س - ٩ص = ٩$$

$$٧س + ٧ص = ٧$$

تطبيق أنظمة المعادلات الخطية: من الضروري تفسير كل حل في سياق الموقف الذي تعرضه المسألة، عند تطبيق أنظمة المعادلات الخطية في المسائل.



الربط مع الحياة

هنالك أربعة أنواع من البطاريق ضمن القائمة المعرضة لخطر الانقراض، وهي التي تعيش بالقرب من المناطق المعمورة.

مثال ٢ من واقع الحياة

بطاريق: هناك ١٧ نوعاً من البطاريق في العالم، أكبرها البطريق الإمبراطور، وأصغرها بطريق جالاباجوس، ويبلغ مجموع طولي هذين النوعين ١٦٩ سنتيمتراً، ويزيد طول بطريق الإمبراطور على مثلي طول بطريق جالاباجوس بمقدار ٢٢ سنتيمتراً. أوجد طول كل منهما.

يعبر عن الطول الكلي للنوعين بالمعادلة جـ + ق = ١٦٩؛ حيث جـ طول البطريق الإمبراطور، ق طول بطريق جالاباجوس، والآن اكتب معادلة تمثل طول البطريق الإمبراطور.

التعبير اللفظي	طول بطريق الإمبراطور	=	٢٢ سم	زيادة على	مثلي طول جالاباجوس
المتغيرات	جـ	=	ق		
المعادلة	جـ	=	٢٢	+	٢ ق

أولاً: أعد كتابة المعادلة الثانية:

$$جـ = ٢٢ + ٢ ق$$

المعادلة الثانية

$$جـ - ٢ ق = ٢٢$$

اطرح ٢ ق من كلا الطرفين

والآن، يمكنك استعمال الحذف بالطرح لحل نظام المعادلتين.

$$جـ + ق = ١٦٩$$

المعادلة الأولى

$$جـ - ٢ ق = ٢٢$$

اطرح المعادلة الثانية

$$١٤٧ = ٣ ق$$

احذف جـ.

$$\frac{١٤٧}{٣} = \frac{٣ ق}{٣}$$

اقسم كلا الطرفين على ٣

$$٤٩ = ق$$

بسّط

والآن، عوض عن ق بـ ٤٩ في إحدى المعادلتين.

$$جـ = ٢٢ + ٢ ق$$

المعادلة الثانية

$$جـ = ٢٢ + ٢(٤٩)$$

$$٤٩ = ق$$

بسّط.

$$١٢٠ = جـ$$

وبذلك يكون طول البطريق الإمبراطور ١٢٠ سم، وطول البطريق جالاباجوس ٤٩ سم.

هل هذا الحل منطقي في سياق المسألة؟

تحقق من ذلك وفق المعطيات، مجموع طولي النوعين = ١٦٩ = ٤٩ + ١٢٠ سم، ٢٢ + ٢(٤٩) = ١٢٠ سم.

تحقق من فهمك



(٢) تطوع: تطوع سعيد لعمل خيري مدة ٥٠ ساعة، ويخطط ليتطوع ٣ ساعات في كل أسبوع من الأسابيع القادمة، أما أسامة فهو متطوع جديد يخطط ليتطوع ٥ ساعات في كل أسبوع؛ اكتب نظاماً من المعادلات وحله لإيجاد بعد كم أسبوع يصبح عدد الساعات التي تطوع بها كل من سعيد وأسامة متساوياً.

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٥-٥ : تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين ١٤٤٤ ٢٠٢٢

مثال ١

حدّد أفضل طريقة لحل كل نظام فيما يأتي، ثمّ حلّه:

$$\begin{aligned} (١) \quad & ٢س + ٣ص = ١١ \quad (٢) \quad ٣س + ٤ص = ١١ \quad (٣) \quad ٣س - ٤ص = ٥ \quad (٤) \quad ٣س + ٧ص = ٤ \\ & ٨س - ٥ص = ٩ \quad ٢س + ١ص = ١ \quad ٣س + ٢ص = ٣ \quad ٥س - ٧ص = ١٢ \end{aligned}$$

مثال ٢

(٥) **تسوّق:** اشترى عبدالله ٤ كراسات و ٣ حقائب بمبلغ ١٨١ ريالاً، واشترى عبدالرحمن كراسة وحقيبتين بمبلغ ٩٤ ريالاً.

(أ) اكتب نظاماً من معادلتين يمكنك استعماله لتمثيل هذا الموقف.

(ب) حدّد أفضل طريقة لحل هذا النظام.

(ج) حل النظام.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

حدّد أفضل طريقة لحل كل نظام فيما يأتي، ثمّ حلّه:

$$\begin{aligned} (٦) \quad & ٣س - ٤ص = ٥ \quad (٧) \quad ٥س + ٨ص = ١ \quad (٨) \quad ٣س + ٤ص = ٣ \\ & ٣س - ٦ص = ٥ \quad ٢س + ٨ص = ٦ \quad ٤س - ١ص = ١ \end{aligned}$$

مثال ٢

(٩) **سكان:** بلغ مجموع عدد سكان محافظتي خميس مشيط وبيشة (في أحد الأعوام) نحو ٧٢٠ ألفاً، فإذا علمت أن عدد سكان خميس مشيط يقل بمقدار ٨٠ ألفاً عن ثلاثة أمثال عدد سكان بيشة، فاكتب نظاماً من معادلتين وحله لإيجاد عدد سكان كل محافظة منهما.

(١٠) **آثار:** يبلغ مجموع مساحتي قصر ابن شعلان في القريات وقصر صاهود في الأحساء نحو ١٣٠٠٠ متر مربع، وتزيد مساحة قصر صاهود على مثلي مساحة قصر ابن شعلان بنحو ٤٠٠٠ متر مربع، أوجد مساحة كل قصر منهما.

(١١) تعرف نقطة التعادل بأنها النقطة التي يتساوى فيها الدخل مع المصاريف، فإذا دفعت دار النشر ١٣٢٠٠ ريال لإعداد كتاب و ٢٥ ريالاً تكاليف طباعة النسخة الواحدة، فما عدد النسخ التي يتعين بيعها لتخطي نقطة التعادل، علماً أنها تباع النسخة الواحدة بمبلغ ٤٠ ريالاً؟ فسر إجابتك.

الكتلة المعاد تدويرها (كجم)		المادة
صالح	محمد	
٩	٩	البلاستيك
١١٥	٣٠	الورق

(١٢) **تدوير:** يقوم محمد وصالح بتجميع الورق والبلاستيك المستعمل وبيعه من أجل إعادة تدويره كما في الجدول المقابل، وحصل محمد على ٣٣ ريالاً، وصالح على ٥٠ ريالاً مقابل ذلك.

(أ) عين المتغيرات، واكتب نظاماً من معادلتين خطيتين لهذا الموقف.

(ب) ما سعر الكيلوجرام الواحد من البلاستيك؟

(١٣) **مكتبات:** تقدم إحدى المكتبات عرضاً؛ فبيع الكتاب ذا الغلاف المقوى والمجلد بـ ٤٠ ريالاً والكتاب غير المجلد بـ ٣٠ ريالاً، فإذا دفع عبد الحكيم ٢٩٠ ريالاً ثمناً لـ ٨ كتب، فما عدد الكتب المجلدة التي اشتراها؟

(١٤) **قيادة سيارات:** قاد فارس سيارته مسافة ٩٠ كيلومتراً، وكان معدل سرعة السيارة (ب) كلم في الساعة، وفي رحلة العودة نقصت حركة السيارة، فأصبحت سرعة السيارة (٣/٤ ر) كلم في الساعة، فإذا استغرقت



الرابط مع الحياة

تعد المكتبات مراكز إشعاع معرفي، ومرافق مهمة للمعلومات تنتقي مصادرها وتنظمها وتتيحها لطلابها؛ سواء للدراسة، أو للبحث، أو للثقافة العامة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(١٥) **مسألة مفتوحة:** كوّن نظامًا من معادلتين يمثل موقفًا في الحياة، وصف الطريقة التي تستعملها لحل هذا النظام، ثم حله وفسر معناه.

(١٦) **تبرير:** في نظام من معادلتين إذا كان س يمثل الزمن المستغرق في قيادة دراجة هوائية، ص تمثل المسافة المقطوعة، وحل النظام هو (١، ٧)، فاستعمل هذه المسألة لمناقشة أهمية تحليل الحل وتفسيره في سياق المسألة.

(١٧) **تحذّر:** حل نظام المعادلتين الآتي باستعمال ثلاث طرائق مختلفة، ووضح خطوات الحل:

$$٤س + ص = ١٣$$

$$٦س - ص = ٧$$

(١٨) **اكتب سؤالاً:** يدّعي أحد الطلاب أن الحذف هو أفضل طريقة لحل أنظمة المعادلات، اكتب سؤالاً تبين فيه خطأ هذا الادّعاء.

(١٩) أي أنظمة المعادلات الآتية يختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى؟

$$\begin{aligned} ٣س - ص &= ١ \\ ١س + ٣ص &= ١ \end{aligned}$$

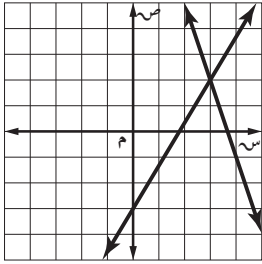
$$\begin{aligned} ٠س + ص &= ١ \\ ٥س = ٢ص \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٤س - ص &= ٢ \\ ٢ص &= ٤س \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ١س + ص &= ١ \\ ٣ص &= ١س \end{aligned}$$

(٢٠) **اكتب:** وضح متى يكون التمثيل البياني أفضل طريقة لحل نظام من معادلتين، ومتى تكون الطريقة الجبرية أفضل؟

تدريب على اختبار



(٢١) إذا كان $٥س + ٣ص = ١٢$ ، $٤س - ٥ص = ١٧$. فما قيمة ص؟

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ١ (د) ٣-

(٢٢) أي أنظمة المعادلات الآتية يمثل الشكل المجاور حلًا له؟

$$\begin{aligned} (د) \quad ٥س - ١٥ص &= ١٥ \\ ٣ص + ٢س &= ١٨ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ج) \quad ٥س - ١٥ص &= ١٥ \\ ٢ص + ٧س &= ١٨ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ب) \quad ١١س - ٣ص &= ١١ \\ ٢ص - ٤س &= ٥ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (أ) \quad ١١س - ٣ص &= ١١ \\ ٣ص - ٥س &= ٩ \end{aligned}$$

مراجعة تراكمية

حلّ كل نظام فيما يأتي مستعملًا طريقة الحذف: (الدرس ٥-٤)

$$(٢٥) \quad ٤س + ٢ص = ١٠$$

$$(٢٤) \quad ٤س + ٢ص = ٠$$

$$(٢٣) \quad ٣س + ص = ٣$$

$$٥س - ٣ص = ٧$$

$$٢س - ٣ص = ١٦$$

$$٣س - ٤ص = ١٢$$

(٢٦) حل المتباينة: $|٢س - ٣| \geq ٣$. (مهارة سابقة)

حلّ كل معادلة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(٢٨) \quad ١٩ = ١٠ + ٣س$$

$$(٢٧) \quad ٥ = ٤ت - ٧$$

(٢٩) حلّ المعادلة: $٢س + ٤ = ٦$ بيانيًا. (مهارة سابقة)



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٥-٥: تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين ٢٠٢٢ ٣١٤٤٤

(١٠) **اختيار من متعدد:** ما الزوج المرتب الذي يمثل حلًّا للنظام الآتي؟

$$٦س - ٤ص = ٦$$

$$٦س + ٣ص = ٠$$

(أ) (٦، ٥) (ب) (٦، ٥) (ج) (١، ٠) (د) (٤، -٨)

(ب) (٦، ٥) (ج) (١، ٠) (د) (٤، -٨)

(١١) **تسوّق:** اشترى فيصل ٨ كتب ومجلات لأبنائه بقيمة ١٧٥ ريالاً. فإذا كان ثمن الكتاب ٢٥ ريالاً، وثمان المجلة ٢٠ ريالاً، فما عدد كل من الكتب والمجلات التي اشتراها؟

(١٢) **حدائق:** لدى عبد الكريم ٤٢ مترًا من السياج لإحاطة حديقة، فإذا كانت مزرعته مستطيلة الشكل وطولها يساوي مثلي عرضها ناقص ٣ أمتار، فعرف المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين لإيجاد طول الحديقة وعرضها، ثم حل النظام باستعمال التعويض.



(١٣) **مجلات:** اشترك أحمد في المجلتين الرياضية والعلمية، فإذا تلقى هذا العام ٢٤ نسخة من كلتا المجلتين، وكان عدد نسخ المجلة العلمية أقل من مثلي عدد نسخ المجلة الرياضية بمقدار ٦، فعرف المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين لإيجاد عدد المجلات من كل نوع.

مثّل كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانيًا، وحدّد عدد حلوله، وإن كان له حل واحد فاكتبه:

(١) $٢س = ٢ص$

$٦س - ٦ص = ٠$

(٢) $٣س = ٣ص$

$٢س - ٢ص = ٩$

(٣) $٤س - ٤ص = ٤$

$١٠س + ١٠ص = ١٠$

(٤) $٤س + ٢ص = ٤$

$٢س + ٣ص = ١$

حلّ كلّاً من النظامين الآتين بالتعويض:

(٥) $٨س + ٨ص = ٨$

$٢س + ١٠ص = ١٠$

(٦) $٣س - ٤ص = ٣$

$٣س - ٢ص = ٥$

حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية بالحذف:

(٧) $١٣س + ١٣ص = ١٣$

$٥س - ٥ص = ٥$

(٨) $٣س + ٧ص = ٢$

$٣س - ٤ص = ١٣$

(٩) $٨س + ٨ص = ٨$

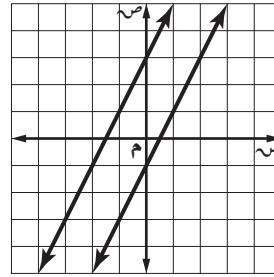
$٣س - ٤ص = ٤$



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة:

(١) أي المصطلحات الآتية يصف نظام المعادلتين الممثل بيانياً؟



(أ) متسق

(ب) متسق ومستقل

(ج) متسق وغير مستقل

(د) غير متسق

(٢) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام الآتي:

$$\text{ص} = 4 - \text{س}$$

$$3 - \text{س} = 1 - \text{ص}?$$

(أ) (٥، ٣)

(ب) (١، ٤)

(ج) (٢، ٥)

(د) (٢، ٦)

(٣) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام الآتي:

$$3 - \text{س} = 8 - \text{ص} = 50$$

$$3 - \text{س} = 5 - \text{ص} = 38?$$

(أ) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{8})$

(ب) (٤، ٦)

(ج) $(\frac{4}{9}, \frac{2}{7})$

(د) (٩، ٤)

(٤) ما حل المتباينة: $2 \leq \text{س} \leq 6$ ؟

(أ) $3 \leq \text{س}$

(ب) $3 \leq \text{س}$

(ج) $3 \geq \text{س}$

(د) $3 \geq \text{س}$

(٥) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام الآتي:

$$3 - \text{س} = 2 + \text{ص} = 2$$

$$2 - \text{س} = 2 - \text{ص} = 18?$$

(أ) (٣، ١)

(ب) (٤، ٧)

(ج) (٥، ٤)

(د) (٣، ٢)



إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٩) خرج سعيد بسيارته في رحلة، وبعد أن توقف عند إحدى الإشارات وجد أن عليه أن يقطع ١٢ كيلومترًا ليصبح ما قطعه مساويًا على الأقل لنصف المسافة الكلية البالغة ١٠٨ كيلومترات. فكم كيلومترًا على الأقل يكون قد قطع عند توقفه عند الإشارة؟

(١٠) يقدم متجرٌ خصمًا قيمته ١٥ ريالًا على جميع السلع، فإذا أراد سالم شراء سلعة يتراوح ثمنها ما بين ٤٥ ريالًا و ٨٩ ريالًا، فكم يتوقع أن يدفع ثمنًا لها؟

(١١) عدنان مجموعهما ٤١ والفرق بينهما ٩، فما العددين؟

(١٢) حل المتباينة $س \leq ١٠$ ، ثم مثل الحل بيانيًا.

(١٣) حل المتباينة $|س - ٣| \geq ٨$ ، ثم مثل الحل بيانيًا.

(١٤) حل المتباينة $١ < ٢ك - ٥ \leq ١٣$ ، ثم مثل الحل بيانيًا.

(٦) ما حل المتباينة $٥ > ٢س + ٥ > ٧$ ؟

(أ) $٠ < س < ٢$

(ب) $٥ < س < ٦$

(ج) $٠ < س < ٤$

(د) $٠ < س < ١$

(٧) ما متباينة القيمة المطلقة للتمثيل البياني الآتي؟



(أ) $|س + ١| > ٣$

(ب) $|س + ١| \geq ٣$

(ج) $|س + ١| \leq ٣$

(د) $|س + ١| < ٣$

(٨) مع أحمد وشقيقه ١٥ ريالًا يريدان أن يشتريا بها دفترين وعددًا من أقلام الرصاص، فإذا كان ثمن الدفتر ٦ ريالات و ثمن قلم الرصاص ٠,٧٥ ريال. فما أكبر عدد ممكن من أقلام الرصاص يمكنهما شراؤه؟

(أ) ٣

(ب) ٤

(ج) ٥

(د) ٦



إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضعاً خطوات الحل:

(١٥) **وجبات:** يبين الجدول أدناه ثمن وجبتي إفطار في أحد المطاعم.

الوجبة	الثمن (ريال)
٣ شطائر ، علبة عصير	١٣
٤ شطائر ، علبة عصير	١٤

(أ) اكتب نظاماً من معادلتين لتمثيل هذا الموقف.

(ب) حلّ النظام الذي كتبته، وفسّره في سياق المسألة.

(ج) ما المبلغ الذي يدفعه شخص اشترى شطيرتين وعلبة عصير؟

للمساعدة ..															
١٥	١٤	١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تجب عن السؤال
٥-٥	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٢-٥	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٢-٥	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٣-٥	مهارة سابقة	٣-٥	٢-٥	١-٥	فراجع الدرس ..

الفصل ٦

كثيرات الحدود

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أبسط عبارات تتضمن وحيدات الحد.
- أجد درجة كثيرة حدود، وأكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية، وأجمع، وأطرح، وأضرب كثيرات الحدود.

لماذا؟

🌍 **سباق الجري:** يمكن استعمال كثيرات الحدود لنمذجة العديد من مواقف الحياة الواقعية؛ مثل المسارات المنحنية التي يسلكها المتسابقون في سباق الجري.

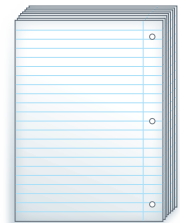
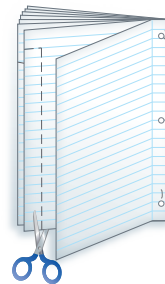
المفردات:

- وحيدة الحد ص (٥٠)
- رتبة المقدار ص (٥٩)
- كثيرة الحدود ص (٦٢)



كثيرات الحدود: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود، مبتدئاً بثمانى أوراق A4.

- ١ رتب الأوراق الثماني بعضها فوق بعض؛ لتكون كتيلاً.
- ٢ ثبّت الأوراق من جانبها الأيمن، وقص شريطاً من طرف كل صفحة بحيث يزيد كل شريط بمقدار ٣ سم على سابقه، كما في الشكل.
- ٣ سمّ غلاف المطوية "كثيرات الحدود"، وضع أرقام الدروس على الأشرطة، كما في الشكل.



منظم أفكار

المطويات



ضرب وحيدات الحد

لماذا؟



تحتوي كثير من الصيغ على وحيدات حد، فمثلاً صيغة قوة محرك السيارة بالحصان هي $ق = ك \left(\frac{ع}{٣٣٤} \right)^٣$ ؛ حيث تمثل: $ق$ قوة المحرك بالحصان، $ك$ كتلة السيارة بركابها، $ع$ سرعتها بعد مسيرها مسافة ربع ميل. من الواضح أن قوة المحرك بالحصان تزداد كلما ازدادت السرعة.

وحيدات الحد: تكون **وحيدة الحد** عددًا أو متغيرًا أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكون من حد واحد فقط.

فمثلاً الحد: $ك \left(\frac{ع}{٣٣٤} \right)^٣$ في صيغة حساب قوة محرك السيارة، هو وحيدة حد. أما العبارة التي تتضمن القسمة على متغير مثل: $\frac{أ}{ب}$ ، فليست وحيدة حد.

الثابت: هو وحيدة حد تمثل عددًا حقيقيًا. ووحيدة الحد ٣ هي مثال على عبارة خطية؛ لأن أس المتغير $س$ فيها ١ ، أما وحيدة الحد ٢ $س$ فليست عبارة خطية؛ لأن الأس عدد موجب أكبر من ١ .

١-٦

فيما سبق

درست إجراء العمليات على
العبارات الأسية.

والآن

- أضرب وحيدات الحد.
- أبسط عبارات تتضمن وحيدات الحد.

المفردات

وحيدة الحد

الثابت

تمييز وحيدات الحد

مثال ١

حدّد إذا كانت العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفّر إجابتك:

- (أ) ١٠ نعم؛ العدد ١٠ ثابت، لذا فهو وحيدة حد.
- (ب) $٢٤ + ف$ لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع، لذا فهي تحتوي على أكثر من حد.
- (ج) $هـ^٢$ نعم؛ تمثل هذه العبارة حاصل ضرب المتغير في نفسه.
- (د) $ل$ نعم؛ المتغيرات المنفردة وحيدات حد.

تحقق من فهمك

$$(أ) ٢٣ أ ب ج د$$

$$(د) \frac{م}{ن}$$

$$(أ) ٥ + س$$

$$(ج) \frac{س ص ع}{٢}$$

تذكّر أن العبارة التي على الصورة $س^٣$ التي تعبر عن نتيجة ضرب $س$ في نفسها ٣ مرة تُسمى قوة. ويُطلق على $س$ الأساس، وعلى ٣ الأس. وقد تستعمل كلمة قوة لتعني الأس أحيانًا.

$$٨١ = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^٤$$

أس
أساس



ويمكنك إيجاد حاصل ضرب القوى في المثالين الآتيين بتطبيق تعريف القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\begin{array}{c} \text{عوامل 3} \quad \text{عاملان} \\ \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{عوامل 3}} \times \underbrace{4 \times 4}_{\text{عاملان}} = 4^3 \times 4^2 \\ 3 + 2 = 5 \text{ عوامل} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{عاملان} \quad \text{عوامل 4} \\ \underbrace{2 \times 2}_{\text{عاملان}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{عوامل 4}} = 2^2 \times 2^4 \\ 2 + 4 = 6 \text{ عوامل} \end{array}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية ضرب القوى.

مفهوم أساسي **ضرب القوى** **مطوياتك** **أضف إلى**

التعبير اللفظي: لضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أسيهما.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ؛ وأي عددين صحيحين م، ن فإن: $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

أمثلة: $b^3 \times b^5 = b^{3+5} = b^8$ $b^6 \times b^4 = b^{6+4} = b^{10}$

مثال ٢ ضرب القوى

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(أ) $(3^6)(2^7)$

$$(3^6)(2^7) = (3^6 \times 2^7) = (2^7 \times 3^6)$$

$$(2^7 \times 3^6) =$$

$$= 12 \times 10^7$$

(ب) $(3^3 b^3)(4^3 b^3)$

$$(3^3 b^3)(4^3 b^3) = (3^3 \times 4^3)(b^3 \times b^3) = (4^3 \times 3^3)$$

$$(4^3 \times 3^3) = (3^3 \times 4^3) =$$

$$= 3^7 \times 4^3$$

تحقق من فهمك

(ب) $(-4^3 r^5)(-3^2 r^5)$

(أ) $(3^3 v^4)(7^3 v^4)$

جمع المعاملات والمتغيرات

اضرب القوى

بسّط

جمع المعاملات والمتغيرات

اضرب القوى

بسّط

إرشادات للدراسة

العدد ١ معاملاً وقوة

عندما لا يظهر أس المتغير أو معامل، يمكن افتراض أن كليهما يساوي ١؛ أي أن $s = 1$

يمكنك استعمال خاصية ضرب القوى لإيجاد قوة القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\begin{array}{c} \text{عوامل 3} \\ \underbrace{(4^3)(4^3)(4^3)}_{\text{عوامل 3}} = 4^9 \\ 3 + 3 + 3 = 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{عوامل 4} \\ \underbrace{(2^3)(2^3)(2^3)(2^3)}_{\text{عوامل 4}} = 2^{12} \\ 3 + 3 + 3 + 3 = 12 \end{array}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية قوة القوة.

مفهوم أساسي **قوة القوة** **مطوياتك** **أضف إلى**

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة القوة، اضرب الأسس.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ؛ وأي عددين صحيحين م، ن فإن: $(a^m)^n = a^{m \times n}$.

أمثلة: $(b^3)^5 = b^{3 \times 5} = b^{15}$ $(j^7)^6 = j^{7 \times 6} = j^{42}$

قوة القوة

بسط العبارة: $[{}^2({}^3{}_2)]^4$.

$${}^{\xi}(\mathbf{r} \times \mathbf{r} \mathbf{r}) = {}^{\xi}[\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{r})]$$

قوة القوة

$$\xi(62) =$$

بے

قوة القوة

$$8 \times 7 =$$

بہ

$$16VVV216 = {}^2\varepsilon 2 =$$

تحقق من فهمك

$$^{\xi}[\gamma(\gamma\gamma)](i\gamma)$$

(۳ب) ${}^2[{}^3({}^2{}_3)]$

ويمكنك استعمال خاصيتي ضرب القوى، وقوة القوة لإيجاد قوة حاصل الضرب. انظر نمط الأسس في المثلين الآتيين:

$$\begin{array}{l}
 \text{عوامل ۳} \\
 \overbrace{(\text{ع}^2 \text{ص}^2)(\text{ع}^2 \text{ص}^2)(\text{ع}^2 \text{ص}^2)}^{\text{عوامل ۳}} = \text{ع}^6 \text{ص}^6 \\
 (\text{ع}^2 \times \text{ع}^2 \times \text{ع}^2)(\text{ص} \times \text{ص} \times \text{ص}) = \\
 \text{ع}^6 \text{ص}^3 = 8 \text{ص}^3 \text{ع}^6 =
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{عوامل ۳} \\
 \overbrace{(\text{و} \text{ن})(\text{و} \text{ن})(\text{و} \text{ن})}^{\text{عوامل ۳}} = \text{و}^3 \text{ن}^3 \\
 (\text{و} \times \text{و} \times \text{و})(\text{ن} \times \text{ن} \times \text{ن}) = \\
 \text{و}^3 \text{ن}^3 =
 \end{array}$$

ويبين المثالان السابقان خاصية قوة حاصل الضرب.

مفهوم أساسي

قوة حاصل الضرب

أضف إلى

مطوياتك

التعبير اللفظي:

لإيجاد قوة حاصل الضرب، أوجد قوة كل عامل.

الرموز:

لأي عددین حقیقین أ، ب وأي عدد صحيح ن، فإن: $(أب)^ن = أ^ن ب^ن$.

مثال :

$$(-2 \text{ س } 3)^\circ = (-2)^\circ \text{ س } (3^\circ) = -32^\circ \text{ س } 15^\circ.$$

مثال ۴

قوة حاصل الضرب

هندسة : عبّر عن مساحة الدائرة على صورة وحيدة حد.

المساحة = ط نق^٢

مساحة الدائرة

$$= ط(٢س ص٢)$$

عَوَّضٌ عَنْ نَقَبِ ۲ س ص ۲

$$ط = (٢٢س٢ص٤)$$

قوة حاصل الضرب

$$= 4\text{س}^2\text{ص}^4\text{ط}$$

بسم

إذن، مساحة الدائرة تساوي $\frac{1}{2} \pi r^2$ ص $\frac{1}{2} \pi r^2$ ط وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

(١٤) عبّر عن مساحة المربع الذي طول ضلعه 3^s ص 2^t على صورة وحيدة حد.

٢٢ ص ٢

●

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تبسيط العبارات: يمكنك دمج الخصائص واستعمالها في تبسيط عبارات تتضمن وحيدات حد.

ارشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تتضمن أوضاعاً متداخلة، ابدأ أولاً بالعبارات من الداخل ثم انتقل إلى الخارج.

مفهوم أساسي

تبسيط العبارات

- لتبسيط عبارة تتضمن وحيدات حد، اكتب عبارة مكافئة لها على أن:
- يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة فقط.
 - لا تتضمن العبارة قوة قوة.
 - تكون جميع الكسور في أبسط صورة.

أضف إلى

مطوياتك

مثال ٥

تبسيط العبارات

بسط العبارة: $(3س ص٤)^2 (٢- ص٢)^3$

قوة القوة $(3س ص٤)^2 (٢- ص٢)^3 = ٦(٢- ص٢)^٢ (٣س ص٤)^٢$

قوة حاصل الضرب $(٣س ص٤)^٢ (٢- ص٢)^٢ = ٩س٢ ص٨ (٦٤) ص٦$

قوة القوة $٩س٢ ص٨ (٦٤) ص٦ = ٥٧٦س٢ ص١٤$

خاصية الإبدال

ضرب القوى

تحقق من فهمك

٥) بسط العبارة: $(\frac{١}{٢}أ ب٢)^٣ (٢- ب٤)^٢$

تأكد

مثال ١

حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك:

(١) ١٥ (٢) $٣- ٢$ (٣) $\frac{٥}{د}$ (٤) $١٥- ج٢$ (٥) $\frac{ج}{٢}$ (٦) $٩+ ب٧$

بسط كل عبارة مما يأتي:

المثالان ٢، ٣

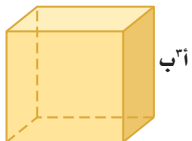
(٧) $ك(ك٣)$ (٨) $م(٢م)٤$ (٩) $٢ك٢(٩ك٤)$

(١٠) $(٥م٤)(٧ف٤)$ (١١) $[٢(٣٢)]٢$ (١٢) $(٣س ص٤)٦$

(١٣) $(٢ف٢ج٣ه٢)٣$ (١٤) $(٣ب٦ن٤)٤$ (١٥) $(٤أ٤ب٩ج٢)٢$

مثال ٤

(١٦) **هندسة:** مساحة سطح المكعب هي ٦ ض ٢ ، حيث ٦ مساحة سطحه، ض طول حرفه.



(أ) عبّر عن مساحة سطح المكعب المجاور على صورة وحيدة حد.

(ب) ما مساحة سطح المكعب إذا كان $أ = ٣$ ، $ب = ٤$

بسط كل عبارة مما يأتي:

مثال ٥

(١٧) $(٥س٢ ص٢)^٢ (٢س ص٣)^٣ (٤س ص٤)$ (١٨) $(٣د٢ن٣ج٢)٢ [٣(٢ب٢ن٣ج٢)]٢$

(١٩) $(٢ج٣ه٢)(٣ج٤ل٢)(٤ج٣ه٢)٢ (ج٣ه٢ل٢)٢$ (٢٠) $(٧أ٤ب٩ج٢)٢ [٢(٢ج٢)٢]٢$

مثال ١

حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك:

(٢١) ١٢٢ (٢٢) ٤٣ (٢٣) $٢ + ٢$

(٢٤) $\frac{٢-ج}{٤-هـ}$ (٢٥) $\frac{٥ك}{١٠}$ (٢٦) $٣ن + ٦م$

المثالان ٢، ٣

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(٢٧) $(٢ك)(٤ك٢)$ (٢٨) $(٦ص٦ع٩)(٦ص٤ع٢)$

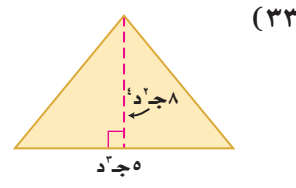
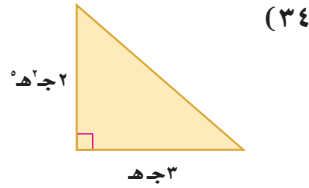
(٢٩) $(٤ان٢ج٢هـ)(٣ن٤ج٢هـ)$ (٣٠) $٢[٢(٢٢)]$

(٣١) $٢[٣(٢ص٢س)]$ (٣٢) $٤(٧ك٥)$

مثال ٤

هندسة:

عبّر عن مساحة كل من المثلثين الآتيين على صورة وحيدة حد:



مثال ٥

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(٣٥) $٣(٣٤)٤(٣٤٢)$ (٣٦) $٢(ج٢-٣ج٥)٢(ج٢-٣ج٥)$

(٣٧) $٢[٣(٢ج٢هـ-٣ج٢هـ)]٣$ (٣٨) $٢(٥ك٢م)٣[٢(٤ك٢م٤)]٢$

(٣٩) $(٢ر٥)٤(٧ب٣ر٤)٢(٦ب٣ر٤)$ (٤٠) $(٥أ٢ب٣ج٤)٢(٣أ٢ب٣ج٤)$

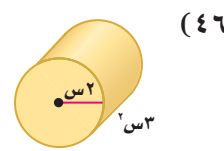
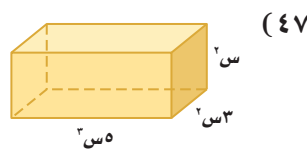
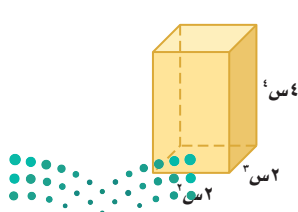
(٤١) $٢(٣س٥, ٥)$ (٤٢) $٣(ج٣-٤)$

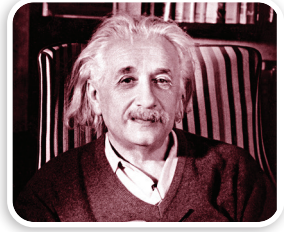
(٤٣) $٢(٢أ٤٥)$ (٤٤) $(٤٩م)٢(١٧ب)٢(١٣ب٤)$

(٤٥) $(٣أ٢ب٢ج٢)٢(٢أ٢ب٢ج٢)٢(٢أ٢ب٢ج٢)٢(٢أ٢ب٢ج٢)٢$

هندسة:

عبّر عن حجم كل مجسم مما يأتي على صورة وحيدة حد:





تاريخ الرياضيات

١٨٧٩م - ١٩٥٥م
يُعد ألبرت أينشتاين من أشهر العلماء في القرن العشرين. وقانونه $E=mc^2$ ، المعروف باسمه، حيث تمثل E الطاقة، m كتلة المادة، c سرعة الضوء، يُظهر أن الكتلة قد تتحول إلى طاقة قابلة للاستعمال إذا تسارعت على نحو كافٍ.

(٤٩) **طاقة:** يمكن تحويل الكتلة كاملة إلى طاقة باستعمال الصيغة $E=mc^2$. حيث: E هي الطاقة بالجول و m الكتلة بالكيلوجرام و c سرعة الضوء تبلغ 3×10^8 مليون متر لكل ثانية تقريبًا.

(أ) أكمل حسابات تحويل 3 كيلوجرامات كاملة من البنزين إلى طاقة.

(ب) ماذا يحدث للطاقة إذا أصبحت كمية البنزين مثلي ما كانت عليه؟

(٥٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة بعض نواتج القوى.

(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي واستعمل الآلة الحاسبة لإكماله:

القوة	4^3	3^3	2^3	1^3	0^3	-1^3	-2^3	-3^3	-4^3
القيمة									

(ب) **تحليلياً:** ما قيمتا 5^0 و 5^{-1} ؟ تحقق من تخمينك باستعمال الآلة الحاسبة.

(ج) **تحليلياً:** أكمل: لأي عدد غير صفري a ، وأي عدد صحيح n ، $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

(د) **لفظياً:** ما قيمة عدد غير الصفر مرفوع للأس صفر؟

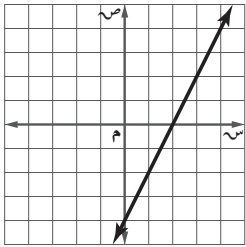
مسائل مهارات التفكير العليا

(٥١) **تحذّر:** بسّط العبارة $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ موضّحاً كل خطوة، علماً بأن: a ، b عدداً حقيقيين غير صفريين، n عددان صحيحان.

(٥٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث عبارات مختلفة يمكن تبسيطها إلى 6 .

(٥٣) **اكتب:** اكتب صيغتين تحوي كل منهما وحيدة حد. وفّر كيف تستعمل كلاّ منهما في مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار



(٥٥) **إجابة قصيرة:** إذا كان ميل المستقيم موجباً، ومقطعه الصادي سالباً، فماذا يحدث للمقطع السيني إذا ضوعف كل من المقطع الصادي والميل؟

(٥٤) أي العبارات الآتية ليست وحيدة حد؟

- (أ) $6-س$ ص (ب) $\frac{1}{4}$ ص
(ج) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ ص (د) $5-ج-هـ$ ص

مراجعة تراكمية

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والموازي للمستقيم المعطاة معادلته في كل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع: (مهارة سابقة)

(٥٨) $(-5, -4)$ ، $ص = \frac{1}{4}س + 1$

(٥٧) $(2, -1)$ ، $ص = 2س + 2$

(٥٦) $(3, 2)$ ، $ص = س - 6$

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

(٦١) $\frac{2}{3}س = 7$

(٦٠) $\frac{2}{5}ص = 10$

(٥٩) $28 = س - 7$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج القسمة في كل مما يأتي:



(٦٤) $42,3 \div (-6)$

(٦٣) $78 \div 3,1$

(٦٢) $64 \div (-8)$

(٦٧) $44,8 \div 9,6$

(٦٦) $32,5 \div (-2,5)$

(٦٥) $94,23 \div 5,1$

يمكنك استعمال تعريف القوى لإيجاد ناتج قوى قسمة وحيدات الحد، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{3^3}{3^4} = \frac{\overbrace{3 \times 3 \times 3}^{3 \text{ عوامل}}}{\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{3 \text{ عوامل}}} = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{3}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)$$

$$\frac{2^2}{2^3} = \frac{\overbrace{2 \times 2}^{2 \text{ عاملان}}}{\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2 \text{ عاملان}}} = \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\right)$$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة للمتغيرات

تطبق قوانين القوة على المتغيرات تمامًا كما تطبق على الأعداد. فمثلاً

$$\frac{3^2 2^7}{3^3 2^4} = \frac{3^2 (2^3)}{3^3 (2^4)} = \frac{3^2 (2^3)}{3^3 (2^4)}$$

مفهوم أساسي

قوى القسمة

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة ناتج قسمة، أوجد كلاً من قوة البسط وقوة المقام.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب ≠ صفر؛ وأي عدد صحيح م فإن: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

أمثلة: $\frac{4^3}{5^3} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$ $\frac{2^0}{3^0} = \left(\frac{2}{3}\right)^0$

مثال ٢

قوى القسمة

بسط العبارة: $\left(\frac{3^2 4^3}{5^7}\right)$

$$\frac{3^2 (4^3)}{5^7} = \left(\frac{3^2 4^3}{5^7}\right)$$

$$\frac{3^2 (2^6)}{5^7} =$$

$$\frac{2^6 9}{5^7} =$$

قوى القسمة

قوة حاصل الضرب

قوة القوة

تحقق من فهمك

(١٢) $\left(\frac{4^3 3^2}{5^7}\right)$ (ب) $\left(\frac{2^6 9}{5^7}\right)$ (ج) $\left(\frac{3^2 4^3}{5^7}\right)$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لاستكشاف عبارات مرفوعة للأس الصفرى مثل: 3^0 ، 5^0 ، ... ويوجد طريقتان لتفسير لماذا تعطي الآلة الحاسبة $3^0 = 1$

الطريقة ٢

تعريف القوى $\frac{3^3 \times 3^2 \times 3^1 \times 3^0}{3^3 \times 3^2 \times 3^1 \times 3^0} = \frac{3^3}{3^3} = 1$

بسط

الطريقة ١

ناتج قسمة القوى $\frac{3^3}{3^3} = 1$ بسط $3^0 = 1$

وبما أن للعبارة $\frac{3^3}{3^3}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن $3^0 = 1$ أي أن الأس الصفرى لأي عدد لا يساوي الصفر هو الواحد.



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٦-٢: قسمة وحيدات الحد - 2022

خاصية الأس الصفري

التعبير اللفظي: أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة صفر يساوي ١

الرموز: لأي عدد حقيقي a لا يساوي صفراً فإن: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$1 = \left(\frac{Y}{V}\right) \quad 1 = \left(\frac{C}{P}\right) \quad 1 = 10 \quad \text{أمثلة:}$$

مثال ۳

الأس الصفري

بسط كل عبارة مما يأتي، مفترضا أن المقام لا يساوي صفراً:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left(\frac{{}^2\text{ن}^4 \text{ك}^2 \text{ر}^2}{{}^3\text{ن}^9 \text{ك}^3 \text{ر}^2} - \right) \quad \text{ب) } \frac{{}^3\text{ص}^0}{{}^3\text{س}} \\ & \left(\frac{{}^2\text{ن}^4 \text{ك}^2 \text{ر}^2}{{}^3\text{ن}^9 \text{ك}^3 \text{ر}^2} - \right) \quad \text{ا} = \text{ا} = \text{ا} = \frac{{}^3\text{ص}^0}{{}^3\text{س}} = \frac{{}^3\text{ص}^0}{{}^3\text{س}} \quad \text{ا} = \text{ا} = \text{ا} = \frac{{}^3\text{ص}^0}{{}^3\text{س}} \\ & \text{اقسم القوى} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(۱۳) \frac{ب^۴ ج^۲ د^۲}{ب^۲ ج^۲} \quad (۳۳) \left(\frac{۲ن^۷ ج^۴ ه^۳}{۱۵ا^۳ ج^۹ ه^۶} \right)$$

إرشادات للدراسة

الأسس الصفري

انتبه للأقواس عند تبسيط
أي عبارة.

فالعبارة (٥س) تساوي ١
إلا أن العبارة ٥س = ٥

الأسس السالبة: قد تكون **الأسس سالبة** مثل: 3^{-2} ، $س^{-3}$ ، ...، ولاستقصاء معناها يمكنك تبسيط عبارات مثل $\frac{س^2}{س^5}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة ١

الطريقة ٢

$$\begin{array}{l} \text{نتیج قسمۃ القوى} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} \\ \text{بسط} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} \end{array}$$

بما أن للعبارة $\frac{s^2}{s}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن $s^{-3} = \frac{1}{s^3}$

مفهوم أساسي

خاصية الأسس السالبة

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي a لا يساوي الصفر، ولأي عدد صحيح n ، فإن مقلوب a^n هو a^{-n} ، ومقلوب a^{-n} هو a^n .

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر ، وأي عدد صحيح ن، فإن: $\frac{1}{n} = a^{-n}$ ، $\frac{1}{-n} = a^{-n}$.

أمثلة:

$$\frac{1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_1} = \varepsilon^{-2}$$

تُعد العبارة في أبسط صورة لها إذا احتوت على أسس موجبة فقط، وظهر كل أساس مرة واحدة فقط، ولا تتضمن قوى القوى، وأن تكون جميع الكسور الاعتيادية فيها في أبسط صورة.



مثال ۴

بسط كل عبارة مما يأتي، مفترضا أن المقام لا يساوي صفراً:

$$\frac{\text{ن}^{-5}\text{ف}^4}{\text{ر}^{-2}} \quad (أ)$$

اكتب العبارة على صورة حاصل ضرب كسور اعتيادية

$$\left(\frac{1}{r_-}\right)\left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{n}{1}\right) = \frac{f n}{r_-}$$

$$a_n = \frac{1}{n-a}, \quad \frac{1}{a_n} = n-a$$

$$\left(\frac{۲}{۱}\right)\left(\frac{۴}{۱}\right)\left(\frac{۱}{۵}\right) = \frac{۲۴}{۵}$$

اضرب

(ب) $\frac{2^2 \text{ د } 2 \text{ ب } 3 \text{ ج } 5}{10 \text{ د } 3 \text{ ب } 1 \text{ ج } 4}$

جمع القوى للأساس نفسه

$$\left(\frac{\overset{0-}{\text{جـ}}}{\underset{\text{جـ}}{\text{عـ}}}\right)\left(\frac{\overset{3}{\text{بـ}}}{\underset{\text{بـ}}{\text{اـ}}}\right)\left(\frac{\overset{2}{\text{دـ}}}{\underset{\text{دـ}}{\text{حـ}}}\right)\left(\frac{\overset{2}{\text{هـ}}}{\underset{\text{هـ}}{\text{زـ}}}\right)=\frac{\overset{0-}{\text{جـ}}\overset{3}{\text{بـ}}\overset{2}{\text{دـ}}\overset{2}{\text{هـ}}}{\underset{\text{جـ}}{\text{عـ}}\underset{\text{بـ}}{\text{اـ}}\underset{\text{دـ}}{\text{حـ}}\underset{\text{هـ}}{\text{زـ}}}$$

اقسم القوى، خاصية الأسس السالبة

$$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \text{ ج} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \text{ ب} \right) \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \text{ د} \right) \left(\frac{1}{5} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} د^5 ب^4 ج^1 -$$

بیت

خاصية الأسس السالبة

$$\left(\frac{1}{\text{ج}}$$

$$\frac{د.ب.ع}{٥٠} =$$

اضرب

تحقق من فهمك

(١٤) $\frac{\text{ف}^{-3} \text{ و س}^2}{\text{و ص}^{-6}}$

٤-٣ج-١-٣٢
٢-٥٣١٤ (ب٤)

٥ج- ٢٣ ٢م- ٦
 ٢٥ ٢م- ٤- ٢
 (٤ج)

تستعمل **رتبة المقدار** لمقارنة المقادير وتقدير الحسابات وإجرائها بسرعة، وتعتبر عن العدد مقرباً إلى أقرب قوى العشرة. فمثلاً العدد ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ مقرباً إلى أقرب قوى العشرة هو ١٠^{١١} أو ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠، لذا فإن رتبة المقدار ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ هي ١١.



تطبيق خواص الأسس

مثال ٥ من واقع الحياة

طول: افترض أن معدل طول الرجل ١,٧ متر، ومعدل طول النملة هو ٠,٠٠٨ متر. فكم مرة تقريباً يساوي طول الرجل بالنسبة لطول النملة؟

افهم: علينا إيجاد رتبة طول كل من الرجل والنملة، ثم إيجاد النسبة بينهما.

خطّ: قَرَّب كل طول إلى أقرب قوة للعدد ١٠، ثم أوجد نسبة طول الرجل إلى طول النملة.

حل: بما أن معدل طول الرجل قريب من ١ متر؛ لذا تكون رتبة طوله هي ١٠ أمتار.
وبما أن معدل طول النملة يساوي ٠,٠٠١ متر تقريباً؛ لذا فرتبة طول النملة هي ٣-١٠ أمتار.

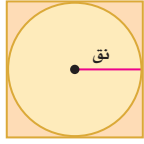
الربط مع الحياة

يوجد أكثر من ١٤٠٠٠ نوع من النمل في الكرة الأرضية. وبعضها يستطيع حمل أشياء كتلتها تعادل كتلة النملة ٥٠ مرة.

اقسم القوى

مثال ٥

(٢٦) **حواسيب:** وصلت سرعة معالج الحاسوب عام ١٤١٤ هـ إلى 10^8 عملية في الثانية تقريبًا. وازدادت هذه السرعة إلى أكثر من 10^{10} عملية في الثانية عام ١٤٣٨ هـ. فكم مرة يكون الحاسوب الجديد أسرع من القديم؟



(٢٧) **تمثيلات متعددة:** تستعمل الصيغة $م = ط \cdot نق^2$ لإيجاد مساحة الدائرة، وتستعمل الصيغة $م = ل^2$ لإيجاد مساحة المربع الذي طول ضلعه ل. استخدم الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:

- (أ) جبريًا: أوجد نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع.
 (ب) جبريًا: إذا ضرب كل من نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع في العدد ٢، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟
 (ج) جدولياً: أكمل الجدول المقابل.
 (د) تحليلياً: ما الاستنتاج الذي توصلت إليه؟

النسبة	مساحة المربع	مساحة الدائرة	نصف القطر
نق			
٢نق			
٣نق			
٤نق			
٥نق			



الربط مع الحياة

حواسيب: تتعدد أنواع الحواسيب من حيث طريقة عملها وحجمها وسرعتها. وكانت الحواسيب الإلكترونية في حجم غرفة كبيرة، وتستهلك طاقة مماثلة لما يستهلكه مئات الحواسيب الشخصية اليوم. بينما يمكن الآن صنع حواسيب داخل ساعة يد تأخذ طاقاتها من بطارية الساعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (٢٨) **تبرير:** هل المعادلة " $س \times س = س^٢$ " صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم غير صحيحة أبداً؟ فسر إجابتك.
 (٢٩) **مسألة مفتوحة:** أعط مثلاً لوحيدتي حد يكون ناتج قسمتهما ٢٤ أو ٣ .
 (٣٠) **تحذ:** استعمل خاصية قسمة القوى لتفسير المساواة $س^{-١} = \frac{1}{س}$.
 (٣١) **اكتب:** وضح كيف تستعمل خاصية قسمة القوى وخاصية قوى القسمة؟

تدريب على اختبار

- (٣٢) **هندسة:** ما محيط الشكل المجاور؟
 (أ) ٤٠ س
 (ب) ٨٠ س
 (ج) ١٦٠ س
 (د) ٤٠٠ س
- (٣٣) **بسّط العبارة:** $(٤ - ٢ \times ٥ \times ٦٤)^٣$
 (أ) $\frac{1}{٦٤}$
 (ب) ٦٤
 (ج) ٣٢٠
 (د) ١٠٢٤

مراجعة تراكمية

- (٣٤) **علم الأرض:** موجة زلزال قوته ٦ أكبر من موجة زلزال قوته ٤ بـ ١٠ مرات. وموجة زلزال قوته ٤ تساوي ١٠ أمثال موجة زلزال قوته ٣ فكم مرة تساوي موجة زلزال قوته ٦ موجة زلزال قوته ٣؟ (الدرس ٦-٢)
 حلّ كلّاً من المتباينات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)
 (٣٥) $٥(٦ - ٤) < ٤$ هـ
 (٣٦) $٢٢ \leq ٤(٨ - ب) + ١٠$
 (٣٧) $٥(٨ - ب) \geq ٣(١٠ + ب)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: بسّط كلّ عبارة فيما يأتي:



١٤٤١ هـ / ٢٠٢٠ م

Ministry of Education

الدرس ٦-٢: قسمة وحيدات الحد - ٢٠٢٢

(٤٠) $٤ ص + ٢ ص + ١٥ ص$

(٣٩) $١٥ - ٢ - ١٦$

(٣٨) $٣ س + ١٠ س$



كثيرات الحدود

لماذا؟



سجلت مبيعات الأجهزة الذكية عالمياً أرقاماً قياسية في المبيعات عام ٢٠١٧ م. ويمكن تمثيل عدد المبيعات بالمعادلة:

$$ع = -٢٧,٢ + ٤٩,٤ + ١٢٨,٧$$

علماً بأن ع تمثل عدد الأجهزة التي يتم بيعها بالملايين، ن تمثل عدد السنوات منذ عام ٢٠٠٥ م.

تمثل العبارة $-٢٧,٢ + ٤٩,٤ + ١٢٨,٧$ مثلاً على كثيرة حدود. ويمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل بعض المواقف.

درجة كثيرة الحدود: كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد. تُسمى كل وحيدة حد منها حداً في كثيرة الحدود. وبعض كثيرات الحدود تحمل أسماء خاصة. **ثنائية الحد** هي مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل، و**ثلاثية الحدود** هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل.

تميز كثيرات الحدود

مثال ١

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟	وحيدة حد / ثنائية حد / ثلاثية حدود
(أ) $٤ص - ٥س$	نعم؛ $٤ص - ٥س$ هي مجموع وحيدتي حد هما: $٤ص$ ، $-٥س$.	ثنائية حد
(ب) $٦,٥ -$	نعم؛ $٦,٥$ عدد حقيقي.	وحيدة حد
(ج) $٩ + ٣ - ٧$	لا؛ $٧ = ٣ - ٧$ ، وهي ليست وحيدة حد.	—
(د) $٣ + ٦س + ٤س + ٣س + ٥س + ٣$	نعم؛ $٣ + ٦س + ٤س + ٣س + ٥س + ٣$ مجموع ثلاثة حدود.	ثلاثية حدود

تحقق من فهمك

١ (أ) $٣ص - ٢ص + ٤ص - ١$

١ (د) $١٠س - ٤س + ٨س$

١ (ج) $٥س + ٧ف - ٦ك$

درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها. ودرجة الثابت غير الصفري تساوي صفراً. وليس للصفري درجة. أما **درجة كثيرة الحدود** فهي أكبر درجة لأي حد من حدودها. ولإيجاد درجة كثيرة حدود، يتعين عليك أولاً إيجاد درجة كل حد فيها. ويمكن تسمية بعض كثيرات الحدود اعتماداً على درجتها، فتسمى: ثلاثية الحدود، ثنائية الحدود، وحيدة الحد، ودرجة صفر: ثابتة، وذات الدرجة ١: خطية، وذات الدرجة ٢: تربيعية، وذات الدرجة ٣: تكعيبية.

مثال ٢ درجة كثيرة الحدود

أوجد درجة كثيرة الحدود $٧ - د - ٩ج - ٣د٢$
الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

درجة الحد $٣د٢ = ٣$ ، درجة الحد $- ٩ج = ١$ ، $٧ = ٠$
 درجة الحد $- ٧$ هي صفر.

الخطوة ٢: درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وتساوي ٣

تحقق من فهمك

(١٢) $٧س - ٣ص - ٢م - ٣ن - ٢م٢ - ٢ن٢ - ١٣$

كثيرات الحدود بالصورة القياسية: يمكنك كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب. ولاستخدام **الصورة القياسية لكثيرة الحدود** بمتغير واحد، اكتب الحدود بترتيب تنازلي بحسب درجتها. وعندما تُكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية، فإن معامل أول حد فيها يُسمى **المعامل الرئيس**.

الصورة القياسية: $٧ + ٢س + ٣س٢ - ٤س٣$
 أكبر درجة: ٣
 المعامل الرئيس: ٤

مثال ٣ الصورة القياسية لكثيرة الحدود

اكتب كثيرة الحدود $٥ص - ٩ - ٢ص٢ - ٤ - ٦ص٣$ بالصورة القياسية، وحدد المعامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

الدرجة: ٣ ٤ ٠ ١
 كثيرة الحدود: $٥ص - ٩ - ٢ص٢ - ٤ - ٦ص٣$

الخطوة ٢: اكتب الحدود بترتيب تنازلي لدرجاتها: $- ٤ - ٢ص٢ - ٦ص٣ + ٥ص - ٩$ فيكون المعامل الرئيس هو $- ٦$

تحقق من فهمك

(١٣) $٨ - ٢س٢ + ٤س٣ - ٣ص$ (ب) $٣ص + ٥ص٣ - ٢ص٢ - ٧ص٣ + ١٠$

ويمكنك استعمال كثيرات الحدود لتقدير القيم بين سنتين، وللتنبؤ بقيم الحوادث قبل وقوعها أيضًا.

مثال ٤ من واقع الحياة استعمال كثيرات الحدود

مصانع: تمثل المعادلة $٣ن - ٢ + ١٠$ عدد أطنان الأسمت بمئات الألوف التي أنتجها أحد المصانع من عام ١٤٣٣ هـ إلى ١٤٣٨ هـ، حيث ن عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فما عدد أطنان الأسمت المنتجة حتى بداية عام ١٤٣٥ هـ؟
 أوجد قيمة ن وعوض بها في المعادلة لإيجاد عدد أطنان الأسمت.

بما أن ن تمثل عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فإن: $١٤٣٣ - ١٤٣٥ = ن$

الربط مع الحياة

تعتبر المملكة العربية السعودية أكبر منتج للأسمت في منطقة الخليج، وصاحبة ثاني أكبر طاقة إنتاجية في الشرق الأوسط، وتعد صناعة الأسمت في المملكة من الأنشطة ذات الربحية العالية.



$$ع = 3n^2 - 2n + 10 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 3(2)^2 - 2(2) + 10 = 10 \quad n = 2$$

$$= 3(4) - 2(4) + 10 = 10 \quad \text{بسط}$$

$$= 12 - 4 + 10 = 18 \quad \text{اضرب وبسط}$$

بما أن ع بمئات الألوف، فإن عدد الأطنان المنتجة كان ١٨ مئة ألف، أو ١٨٠٠٠٠٠.

تحقق من فهمك

(أ) كم طنًا أُنتج عام ١٤٣٨ هـ؟

(ب) إذا استمر هذا النمط، فكم طنًا سيتم إنتاجه عام ١٤٤٨ هـ؟

تأكد

مثال ١ حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

$$(١) 2ص - 5 + 3ص^2 \quad (٢) 3س^2 \quad (٣) 5م^2ن^3 + 6 \quad (٤) 5ك - 4 + 6ك$$

مثال ٢ أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(٥) 3 - \quad (٦) 6ن^3 - 4 \quad (٧) 7ع - 4 \quad (٨) \frac{3}{4} \quad (٩) 12 - 7ك^2ن + 8ن \quad (١٠) 2أ^2ب^5 + 5 - أب \quad (١١) 6دن^3 + 3د^2ن^2 + 2د + 1$$

مثال ٣ اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدّد المعامل الرئيس فيها:

$$(١٢) 3ص + 3ص - 3ص^2 + 2 \quad (١٣) 4ع - 2ع^2 - 4ع^5 \quad (١٤) 12 + 4أ^3 - 5أ^2 - 1$$

مثال ٤ (١٥) **جامعات:** افترض أنه يمكن تمثيل عدد الطلاب المسجلين في جامعة من عام ١٤٣٠ هـ إلى ١٤٣٩ هـ بالمئات بالمعادلة $ن = 5س^2 + ١س + ٥$ ، حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤٣٠ هـ.

(أ) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٥ هـ؟

(ب) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٧ هـ؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

$$(١٦) 4س + \frac{3ص^2}{2س} \quad (١٧) 21 \quad (١٨) 2ج^2 - 4ج^3 \quad (١٩) 3د + 3د^3 - ج \quad (٢٠) 2أ - 4 \quad (٢١) 5ن^3 + 3نك^3$$

مثال ٢

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(٢٤) -٤$$

$$(٢٣) ٨ - ٣س$$

$$(٢٢) ١٣ - ٤أ + ٣٥ب$$

$$(٢٥) ١٧ج - ٢هـ \quad (٢٦) ١٠ + ٢ج - ٤د - ٦ج - ٢ع \quad (٢٧) ٥ص + ٧ - ٢ص - ٤ن$$

مثال ٣

اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدد المعامل الرئيس فيها:

$$(٣٠) ٤ - ٣ج - ٥ج - ٢ج$$

$$(٢٩) ٨ص + ٧ص٣$$

$$(٢٨) ٥س - ٢ + ٣س$$

$$(٣٣) ١٠ب - ٢ب - ٦ب$$

$$(٣٢) ١٣س - ٣س + ٧$$

$$(٣١) ٤د - ١ + ٢د$$

مثال ٤

(٣٤) **ألعاب نارية:** أطلق صاروخ ألعاب نارية من ارتفاع ١ م من الأرض وبسرعة ١٥٠ م/ث. ويمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ ع بعد ن ثانية بالمعادلة $١ + ٥٠ن + ٥٠٠ن^٢$

(أ) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٣ ثوانٍ؟

(ب) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٥ ثوانٍ؟



(٣٥) **مشروع:** يصمم طارق وعمر هيكل صاروخ، بحيث يكون الجزء العلوي منه على شكل مخروط، وجسمه على شكل أسطوانة نصف قطرها نق، كما في الشكل المجاور. إذا علمت أن حجم المخروط يساوي $\frac{1}{3} ط \times مربع نصف القطر (نق) \times الارتفاع (ع)$ ، وحجم الأسطوانة يساوي $ط \times مربع نصف القطر (نق) \times الارتفاع (ع)$.

(أ) اكتب كثيرة حدود تمثل حجم الصاروخ.

(ب) إذا كان ارتفاع جسم الصاروخ ٨ سم، وارتفاع الجزء العلوي منه ٦ سم، ونصف قطر القاعدة ٣ سم، فما حجم الصاروخ؟



الربط مع الحياة

يتكون مكوك الفضاء من ثلاثة أجزاء: عربة مدارية للطاقم، وخزان خارجي للوقود، وجهازي دفع صاروخين يعملان بالوقود الصلب. وتبلغ كتلة المكوك بالكامل ٤,٤ ملايين رطل عند انطلاقه.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٦) **تحديد:** إذا كان س عددًا صحيحًا، فاكتب كثيرة حدود تمثل العدد الصحيح الفردي، وفسر ذلك.

(٣٧) **تبرير:** وضح إذا كانت العبارة: "يمكن أن تكون درجة ثنائية الحد صفرًا" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ وفسر إجابتك.

(٣٨) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالاً على ثلاثية حدود تكعيبية.

(٣٩) **اكتب:** فسر كيف تكتب كثيرة حدود على الصورة القياسية، وكيف تحدد المعامل الرئيس فيها؟



تدريب على اختبار

- (٤١) ما قيمة ص التي تحقق نظام المعادلات أدناه؟
- $$2س + ص = ١٩, ٤س - ٦ص = -٢$$
- (أ) ٥ (ب) ٨ (ج) ٧ (د) ١٠

- (٤٠) إجابة قصيرة: إذا كان لديك بطاقة تخفيض بقيمة ٨ ريالاً من أحد المتاجر، واشترت أرزاً بـ ٩٥, ٩٥ ريالاً، وعلبة جبن بـ ٩٥, ١٥ ريالاً. فكم تدفع مقابل ذلك؟

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً: (الدرس ٦-٢)

$$(٤٢) \frac{١٠(٤٠)(٨-١)}{١٠(٤٠)(٨-١)} \quad (٤٣) \frac{١٠(٤٠)(٨-١)}{١٠(٤٠)(٨-١)} \quad (٤٤) \frac{١٠(٤٠)(٨-١)}{١٠(٤٠)(٨-١)} \quad (٤٥) \frac{١٠(٤٠)(٨-١)}{١٠(٤٠)(٨-١)}$$

(٤٦) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٣) والمعامد للمستقيم ص = س بصيغة الميل والمقطع. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كل عبارة فيما يأتي إن أمكن، وإلا فاكتب "في أبسط شكل":

$$(٤٧) ٧ب + ١٤ب - ١٠ب \quad (٤٨) ٥ت + ١٢ت - ٨ت \quad (٤٩) ٣ص + ٢ص + ٤ص - ٢ص \quad (٥٠) ٧ه - ٧س + ٨ك \quad (٥١) ٢ن + ٣ن + ٣ن \quad (٥٢) ٢ل + ٢ل + ٢ل$$





٤-٦ جمع كثيرات الحدود وطرحها

تمثيل كثيرات الحدود



حدود متشابهة

تمثل الحدود المتشابهة على صورة بطاقات لها نفس المساحة والشكل.



يمكن تكوين الزوج الصفري بتجميع قطعة واحدة ومَعكوسها. ويمكنك حذف الزوج صفراً أو إضافته دون تغيير كثيرة الحدود.

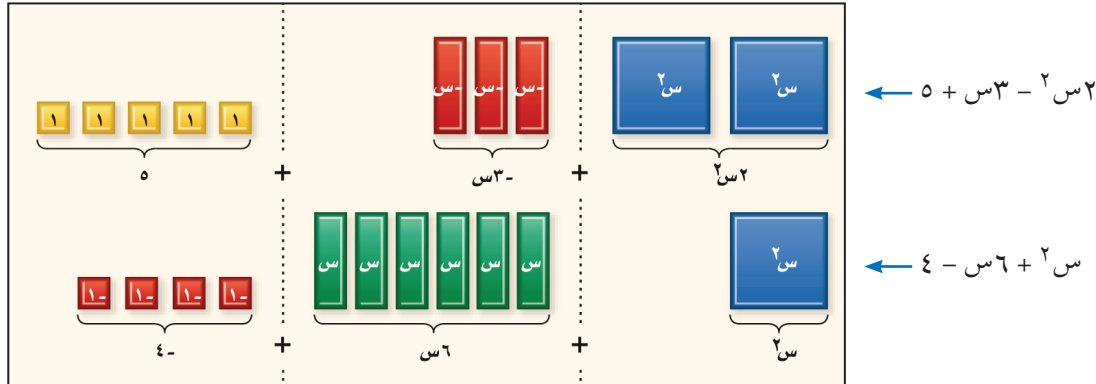
تُسمى وحيدات الحد مثل $٣س$ ، $٢س$ حدوداً متشابهة؛ لأن لها المتغير والأس نفسيهما. ويمكنك تمييز الحدود المتشابهة عند استعمال بطاقات الجبر - انظر الجدول المجاور.

نشاط ١

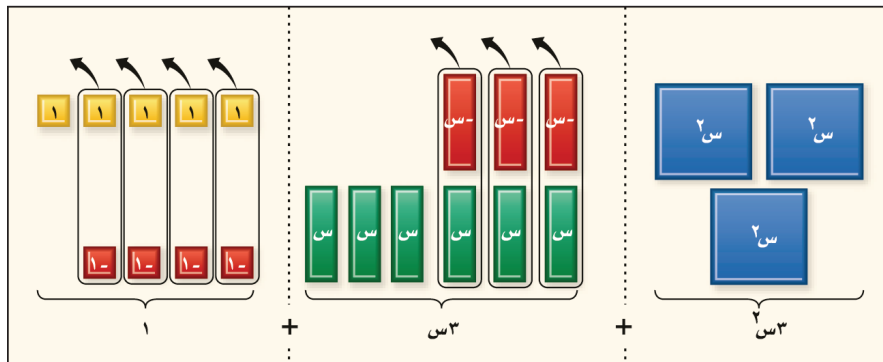
جمع كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(٢س٢ - ٣س + ٥) + (٢س٢ + ٦س - ٤)$.

الخطوة ١: مثل كلاً من كثيرتي الحدود.



الخطوة ٢: جَمع الحدود المتشابهة، وحذف الأزواج الصفرية.



الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

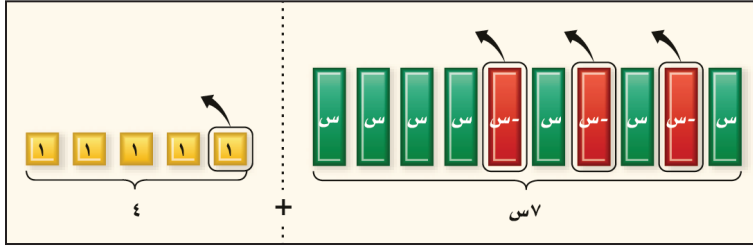
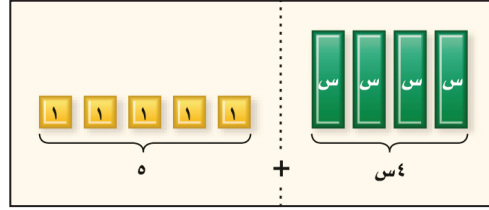
$$١ + ٣س٣ + ٢س٣ = (٢س٢ + ٦س - ٤) + (٢س٢ - ٣س + ٥)$$



نشاط ٢ طرح كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(٥ + س٤) - (١ + س٣)$.

الخطوة ١: مثل كثيرة الحدود: $٥ + س٤$



الخطوة ٢: لطرح $١ + س٣$ عليك حذف ٣ بطاقات $(- س)$ الحمراء، وبطاقة ١ صفراء. يمكنك حذف بطاقة ١، وبما أنه لا توجد بطاقات $(- س)$. أضف ٣ أزواج صفرية من البطاقات $س$ و $(- س)$ ، ثم احذف ٣ بطاقات $(- س)$.

الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

$$٤ + س٧ = (١ + س٣) - (٥ + س٤)$$

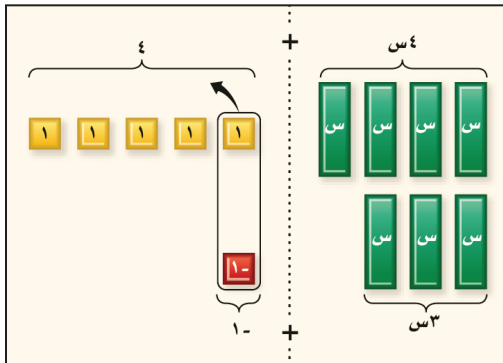
تذكر أنه يمكنك طرح عدد بإضافة نظيره الجمعي أو معكوسه. وبالمثل يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة معكوسها.

نشاط ٣ طرح كثيرات الحدود باستعمال النظير الجمعي

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج: $(١ + س٣) - (٥ + س٤)$.

$$٥ + س٤$$

$$\begin{aligned} &\text{معكوس} \\ &\text{هو } ١ + س٣ - \\ &\text{س٣} - ١. \end{aligned}$$



الخطوة ١: لإيجاد الفرق بين $٥ + س٤$ ، $١ + س٣$ ، أضف $٥ + س٤$ إلى معكوس $١ + س٣$

الخطوة ٢: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

$$٤ + س٧ = (١ + س٣) - (٥ + س٤)$$

لاحظ أن الناتج هذا هو نفسه ناتج النشاط ٢.

التمثيل والتحليل

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد المجموع أو الفرق لكل مما يأتي:

$$(١) (٦ + س٢ - ٢س٣) + (٢ - س٥ + ٢س٤)$$

$$(٢) (٢س٢ + ٨س + ١) - (٢س٤ - س٤ - ٢س٤)$$

$$(٣) (-٤س٤ + ٢س) - (س٥ + ٢س)$$

(٤) **اكتب:** أوجد ناتج $(٤س٤ - ٢س - ٣) - (٢س + ١)$ باستعمال طريقتي النشاطين ٢ و ٣. ومثل ذلك بمخطط، ثم فسّر كيف تستعمل الأزواج الصفيرية في كل حالة.





جمع كثيرات الحدود وطرحها

لماذا؟



يمكن تمثيل العدد التقريبي لحجاج الداخل (١٤) وحجاج الخارج (٢٤) بمئات الألوف من عام ١٤٣٥ هـ إلى ١٤٣٨ هـ بالمعادلتين:
 $١٩٣١ = ١٠٠٠ - ٣٠٠ + ٢٨٤١$, $١٨٠٨ + ٢٠٠ + ٦٠٠ + ٧٠٠$
 $٢٦٧٥ = ١٠٠٠ - ٣٠٠ + ١٠٠٠ + ٩٧٠ + ١٧٠$
 حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤٣٥ هـ.

إن إجمالي عدد الحجاج تقريباً يمثل بـ $١٤ + ٢٤$

جمع كثيرات الحدود: يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المتشابهة، ويمكن جمع كثيرتي حدود باستعمال الطريقة الأفقية أو الرأسية.

فيما سبق

درستُ كتابة كثيرات الحدود بالصورة القياسية.

والآن

- أجمع كثيرات حدود.
- أطرح كثيرات حدود.

جمع كثيرات الحدود

مثال ١

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

$$(١) \quad (٢س٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س + ٦س٢)$$

الطريقة الأفقية

$$(٢س٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س + ٦س٢)$$

جمع الحدود المتشابهة

$$[٢س٢ + ٥س - ٧] + [٣ - ٤س + ٦س٢]$$

اجمع الحدود المتشابهة

$$= ٨س٢ + ١س - ٤$$

الطريقة الرأسية

$$٢س٢ + ٥س - ٧$$

رتب الحدود المتشابهة عمودياً واجمع

$$٣ - ٤س + ٦س٢$$

$$= ٨س٢ + ١س - ٤$$

$$(ب) \quad (٣ص + ٥ - ٣ص) + (٤ص - ٢ص + ٨ + ٣ص)$$

الطريقة الأفقية

$$(٣ص + ٥ - ٣ص) + (٤ص - ٢ص + ٨ + ٣ص)$$

جمع الحدود المتشابهة

$$[٣ص + ٥ - ٣ص] + [٤ص - ٢ص + ٨ + ٣ص]$$

اجمع الحدود المتشابهة

$$= ٨ + ٤ص - ٢ص + ٥$$

الطريقة الرأسية

$$٣ص + ٥ - ٣ص$$

أضف الحد ٠ص للمساعدة على ترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها

$$٨ + ٤ص - ٢ص + ٥$$

$$= ٨ + ٤ص - ٢ص + ٥$$



رتب الحدود المتشابهة عمودياً واجمعها

٧٠ الفصل ٦ : كثيرات الحدود

جمع كثيرات الحدود وطرحها

مثال ٣ من واقع الحياة

متجر إلكترونيات: تمثل المعادلتان أدناه عدد الهواتف المحمولة هـ، وعدد آلات التصوير الرقمية ك التي بيعت في ش شهر لمتجر بيع إلكترونيات: هـ = ٧ش + ١٣٧، ك = ٤ش + ٧٨

(أ) اكتب معادلة تمثل المبيعات الكلية (ن) من الهواتف وآلات التصوير شهرياً.

اجمع كثيرتي الحدود هـ، ك.

المبيعات الكلية = مبيعات الهواتف المحمولة + مبيعات آلات التصوير الرقمية

$$ن = ٧ش + ١٣٧ + ٤ش + ٧٨$$

عوض

$$= ١١ش + ٢١٥$$

اجمع الحدود المتشابهة.

$$\text{المعادلة هي: } ن = ١١ش + ٢١٥$$

(ب) استعمل المعادلة للتنبؤ بعدد الهواتف المحمولة وآلات التصوير الرقمية التي ستباع في ١٠ أشهر.

$$ن = ١١(١٠) + ٢١٥$$

عوض عن ش بـ ١٠

$$= ٣٢٥ = ٢١٥ + ١١٠$$

بسط

لذا فإنه سيتم بيع ٣٢٥ هاتفًا محمولاً وآلة تصوير رقمية في ١٠ أشهر.

تحقق من فهمك

(٣) استعمل المعلومات السابقة لكتابة معادلة تمثل الفرق (ف) بين مبيعات الهواتف المحمولة وآلات التصوير شهرياً ثم استعمل المعادلة للتنبؤ بالفرق في المبيعات الشهرية في ٢٤ شهراً.



الربط مع الحياة

مع تطوّر التقنيات السريعة، تشهد السوق ارتفاعاً كبيراً في مبيعات آلات التصوير الرقمية والهواتف المحمولة.

تأكد

المثالان ٢، ١ أوجد ناتج كلّ مما يأتي:

$$(١) (٦س٣ - ٤) + (٢س٣ + ٩) \quad (٢) (٣ج٢ - ٢ج٢ + ٥ج٢ - ٦) - (ج٢ + ٢ج٢)$$

$$(٣) (٨ص - ٤ص٢) + (٣ص - ٩ص٢) \quad (٤) (٤ع٣ - ٨) - (٤ع٣ + ٣ع٣ - ٥)$$

$$(٥) (٣د٣ - ٢د٣ + ٨د٢ + ٤د) + (٢د - ١٢د + ٣د) \quad (٦) (٣ن٣ - ٥ن + ٢ن) - (٣ن٣ + ٢ن٣ - ٨)$$

مثال ٣

(٧) **إجازة:** يتوزّع العدد الكلي للطلاب (ك) الذين يسافرون خلال الإجازة إلى مجموعتين: مجموعة تسافر إلى المنطقة (ف) بالطائرة، والمجموعة الأخرى تسافر إلى المنطقة (د) بالسيارة، ويمكن تمثيل العدد الكلي بالآلاف للطلاب (ك) الذين سافروا خلال الإجازة، وعدد الطلاب (ع) الذين سافروا للمنطقة (ف) بالمعادلتين: ك = ١٤ن + ٢١، ع = ٨ن + ٧، حيث (ن) عدد السنوات منذ عام ١٤٢٥ هـ.

(أ) اكتب المعادلة التي تمثل عدد الطلاب (ل) الذين توجّهوا إلى المنطقة د في هذه الفترة.

(ب) كم طالباً يُتوقع أن يتوجهوا إلى المنطقة د في عام ١٤٤٢ هـ؟

(ج) كم طالباً يُتوقع أن يسافروا في عام ١٤٤٥ هـ؟



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٦-٤: جمع كثيرات الحدود وطرحها ٢٠٢٢

تدرب وحل المسائل

المثالان ٢، ١ أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(٨+ح٢+٢ح١)-(١١+ح١-٣ح٣) \quad (٩) \quad (٢-٢ص٤+ص٢)+(٥+ص) \quad (٨)$$

$$(11) \quad (1 + s - s^2 - s^3) - (1 + s - s^2 - s^3) = 0$$

(١٢) (٤-٥+٢)+(٦-١٢+٣) (١٣) (٣-٢س+١ص)+(٣-٢س+١ص)

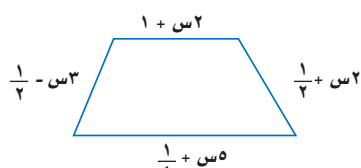
$$(١٤) \quad (٢أ٦ + أ٢) + (٣أ٢ - أ٢أ٤ + أ٢أ٥ - أ٢أ٦) + (١٥) \quad (أ٢أ٧ - أ٢أ٨ + أ٢أ٩ - أ٢أ١٠ + أ٢أ١١ - أ٢أ١٢)$$

$$(\varepsilon + n_9 - {}^2n_3 - {}^3n_4) + (n_5 - {}^2n_4) - (10 - n_3 + {}^3n_3) \quad (16)$$

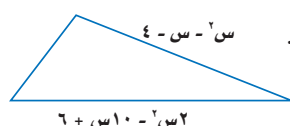
(١٧) **مبيعات:** يُقدَّر متجر بيع إلكترونيات أن تكلفة س وحدة من أجهزة التلفاز LCD بالريال تُعطى بالعبارة $42 - 1s + 2(128 + s) + 100$ ، وأن الربح من بيع س تلفازاً هو ٧٥س، حيث س بين صفر و ٨٠٠

أ) اكتب كثيرة حدود تمثل سعر بيع س وحدة.

(ب) ما سعر بيع ٧٥٠ تلفازاً؟



(١٨) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثل محيط الشكل المجاور.



(١٩) هندسة: تمثّل العبارة $3س - ٧س + ٢$ محيط الشكل المقابل.

اكتب كثيرة حدود تمثل قياس الضلع الثالث.



الربط مع الحياة

معدل العمر الافتراضي

لجهاز التلفاز LCD هو

٦٠٠٠ ساعة. مما يعنى

استعماله مدة ٢٠ سنة أو أكثر إذا

عمل أقل من ٨ ساعات يوميًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٠) **اكتشف الخطأ:** يجد كل من ثامر وسلطان ناتج: $(٢س - س) - (٣س + ٣س - ٢)$. فأيهما كانت

إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سلطان

$$\begin{aligned} & (٢-١س٣+س٣)-(س١-١س٢) \\ & (٢+١س٣-س٣-)+(س١-١س٢)= \\ & \quad \quad \quad ٢+, س٤-, ١س - = \end{aligned}$$

ثامن

$$\begin{aligned} & (2-3s+3s)-(2s-s) \\ & (2-3s+3s-)+(2s-s)= \\ & \quad 2-s-5s= \end{aligned}$$

(٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرتي حدود الفرق بينهما $٢س^٣ - ٧س + ٨$.

تبرير: (٢٢) أوجد مثلاً مضاداً للعبارة الآتية: «طرح كثيرات الحدود عملية إبدالية».

(٢٣) **اكتب:** صف كيف تجمع كثيرتي حدود وتطرحهما باستعمال الطريقتين الرأسية والأفقية.

وأي الطريقتين هي الأسهل في نظرك؟ ولماذا؟



تدريب على اختبار

(٢٥) إجابة قصيرة: ما محيط مربع طول ضلعه $(٣ + ٢)$ وحدة؟

(٢٤) يمكن التعبير عن ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بالرموز: $س، س + ١، س + ٢$. ما مجموع هذه الأعداد الثلاثة؟

- (أ) $س(س + ١)(س + ٢)$ (ب) $س + ٣$
(ج) $س + ٣$ (د) $س + ٣$

مراجعة تراكمية

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦-٣)

(٢٦) ٢٥ (٢٧) $٣ + ٦$ و (٢٨) $٢ + ٣أب - ٣أ + ٦أ٤$ (٢٩) $٦ - ك + ٤ك + ٣ك٢ + ٣ك٣$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-١)

(٣٠) $٣(٢ - ن)$ (٣١) $(٨ - ٤ع)(٥ع٤)$ (٣٢) $(٦ص - ٢ص٢)(٢ص٢ - ٣ص٢)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلّ ممّا يأتي:

(٣٣) $ل(٥ل)(٧ل)$ (٣٤) $٣(٢ - ن)(٢ - ن٣)$
(٣٥) $(٥ت٥ف٢)(١٠ت٣ف٤)$ (٣٦) $(٨ - ٤ه٤ه٥)(٥ه٤ه٤)$
(٣٧) $٣(٢٣)$ (٣٨) $٢(٣٢)$
(٣٩) $٣(٢٤مك٣)(٣ - ٣مك٢)$ (٤٠) $(٦صع٢)(٢ص٢ع٢ز٢)$



الفصل ٦ اختبار منتصف الفصل

الدروس من ٦-١ إلى ٦-٤

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى وحيدة حدّ، أو ثنائية حدّ، أو ثلاثية حدود:

(الدرس ٦-٣)

(١١) $3x^2 - 2$

(١٢) $4x^2 + 3x + 2$

(١٣) $\frac{3x}{5x}$

(١٤) $3x - 3$

(١٥) $3x^2$

(١٦) $2x^3 - 4x + 1$

(١٧) **كثافة سكانية:** الجدول أدناه يبيّن كثافة عدد السكان في

إحدى المدن. (الدرس ٦-٣)

الكثافة شخص / ميل مربع	عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠ م	العام
١	٠	١٩٤٠
١,٧	٣٠	١٩٧٠
٧,٢	٥٠	١٩٩٠
١١,٤	٦٠	٢٠٠٠

(أ) إذا كانت الدالة: $D(x) = 0,005x^2 - 127x + 1$

تمثل الكثافة السكانية، حيث x عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠ م، فحدّد نوع كثيرة الحدود.

(ب) حدّد درجة كثيرة الحدود.

(ج) استعمل الدالة لتوقع الكثافة السكانية لعام ٢٠٣٠ م مبيّنًا خطوات الحل.

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

(١٨) $(8x^2 - 9x + 5) + (2x^2 - 2x + 3)$

(١٩) $(5x^3 - 3x^2 + 7x - 3) - (2x^3 + 3x - 3)$

(٢٠) $(7x^4 - 2x^2 - 2) - (2x^3 + 2x)$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس ٦-١)

(١) $(3x^2)(4x^5)$

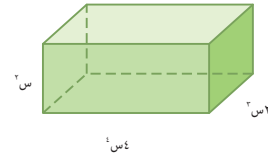
(٢) $(2x^3)^2$

(٣) $[(2x^3)(3x^2)]^3$

(٤) $(6x^3 - 3x^2)(3x^3 - 3x^2)$

(٥) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسم أدناه في صورة

وحيدة حدّ: (الدرس ٦-١)



(ج) $8x^{24}$

(أ) $6x^9$

(د) $7x^{24}$

(ب) $8x^9$

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

(الدرس ٦-٢)

(٦) $\left(\frac{3x^2}{6}\right)^3$

(٧) $\frac{2x^2}{6x}$

(٨) $\frac{7x^4}{3x^3}$

(٩) $\frac{4x^2 - 2x}{5}$

(١٠) **علم الفلك:** يُقدّر علماء الفلك رتبة عدد النجوم في الكون

بـ 10^{21} ، ورتبة عدد النجوم في درب التبانة بحوالي 100

مليار، فكم مرة تساوي رتبة عدد النجوم في الكون من رتبة

عدد نجوم درب التبانة؟ (الدرس ٦-٢)





ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

لماذا؟



يريد نادٍ رياضي بناء قاعة خاصة بالتمارين الرياضية، على أن يزيد طولها على ثلاثة أمثال عرضها بـ ٣ أمتار. ولمعرفة مساحة أرض القاعة لتغطيتها بسجاد خاص بالتمارين الرياضية نضرب عرض القاعة في طولها؛ أي أن مساحة أرض القاعة تعطى بالعلاقة ض (٣ + ٣).

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد.

والآن

■ أضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

■ أحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدات حد في كثيرات حدود.

مثال ١

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $3س - ٢(٧س - ٤)$.

الطريقة الأفقية:

$$\begin{aligned} & 3س - ٢(٧س - ٤) \\ & = 3س - ٢(٧س) + ٢(٤) \\ & = 3س - ١٤س + ٨ \\ & = -١١س + ٨ \end{aligned}$$

العلاقة الأصلية

خاصية التوزيع

اضرب

بسّط

الطريقة الرأسية:

$$\begin{array}{r} ٧س - ٤ \\ \times ٢ \\ \hline ١٤س - ٨ \end{array}$$

خاصية التوزيع

اضرب

تحقق من فهمك

$$(١١) \quad ٢٥ - ٢(٤ - ١٢ + ٧) \quad (ب) \quad ٦ - ٣(٤ - ٢ - ٩ + ٥)$$

ويمكنك استعمال الطريقة نفسها أكثر من مرة لتبسيط عبارات تتكون من عدة حدود.

مثال ٢

تبسيط العبارات

بسّط $٢(٥ - ٢٤ + ١٥) - (٢٠ + ٢٢)$.

العلاقة الأصلية

خاصية التوزيع

اضرب

$$\begin{aligned} & ٢(٥ - ٢٤ + ١٥) - (٢٠ + ٢٢) \\ & = ٢(٥) - ٢(٢٤) + ٢(١٥) - ٢٠ - ٢٢ \\ & = ١٠ - ٤٨ + ٣٠ - ٢٠ - ٢٢ \\ & = ١٠ - ٤٨ - ١٠ \\ & = -٤٨ \end{aligned}$$



وزارة التعليم

Ministry of Education

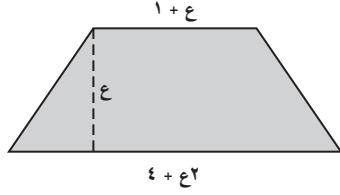
تحقق من فهمك

$$(١٢) ٣(٥س٢ + ٢س٤ - ٤س٣) - (٤س٢ + ٢س٤ - ٣س٣)$$

$$(٢) ١٥ن(١٠ص٣ + ٥ص٢ - ٢ص٤) - (٢ص٤ + ٢ص٣)$$

ويمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود عند حل مسائل من واقع الحياة .

مثال ٣ من اختبار



لوحة جدارية: غُطيت لوحة جدارية على شكل شبه منحرف بورق ذهبي. فإذا كان ارتفاع اللوحة ٤٤ سم. فكم ستمتراً مربعاً من الورق الذهبي نحتاج إليه؟ ثم مثل الإجابة على نموذج الإجابة المعطى.

اقرأ الفقرة:

يطلب السؤال إيجاد مساحة شبه منحرف طولاً قاعدتيه ع + ١، ع٢ + ٤ وارتفاعه ع.

حل الفقرة:

اكتب معادلة تمثل مساحة شبه المنحرف.

لتكن ق١ = ع + ١، ق٢ = ع٢ + ٤، ع = ارتفاع شبه المنحرف.

مساحة شبه المنحرف

$$م = \frac{١}{٢}ع(ق١ + ق٢)$$

$$\frac{١}{٢}ع[(٤ + ع٢) + (١ + ع)]$$

اجمع ثم بسّط

$$\frac{١}{٢}ع(٥ + ع٣)$$

خاصية التوزيع

$$\frac{٣}{٢}ع٣ + \frac{٥}{٢}ع$$

$$ع = ٤٤$$

$$\frac{٣}{٢}(٤٤) + \frac{٥}{٢}(٤٤)$$

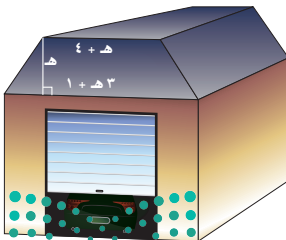
بسّط

$$= ٣٠١٤$$

إذن نحتاج إلى ٣٠١٤ سم^٢ من الورق الذهبي.

تحقق من فهمك

(٣) **مرآب:** يمثل الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب المجاور شكل شبه منحرف. إذا كان ارتفاع شبه المنحرف ١,٧٥ متر، فأوجد مساحة الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب.



إرشادات للاختبار

الصيغ والقوانين

تزود بعض الاختبارات الوطنية والعالمية الطلاب بورقة تحتوي الصيغ والقوانين الأكثر استعمالاً. ويمكن الرجوع إليها قبل بدء حل المسألة عند عدم التأكد من الصيغة أو القانون المطلوب.

حل معادلات تتضمن كثيرة حدود : تستطيع استعمال خاصية التوزيع لحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدة حد بكثيرة حدود.

مثال ٤ معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

حل المعادلة: $٢(٥-أ) + ٣(٢+أ) + ٨ = ٨ + (٦+أ) + ٢(٤+أ) + ٥٠$

المعادلة الأصلية	$٥٠ + (٤ - أ٦)٢ + (١ + أ٤)٨ = ٨ + (٦ + أ٢)٣ + (٢ - أ٥)٢$
خاصية التوزيع	$٥٠ + ٨ - ١٢أ + ٨ + ٤أ = ٨ + ١٨ + ٦أ + ٤ - ١٠أ$
اجمع الحدود المتشابهة	$٥٠ + ١٦ - ١٢أ = ٨ + ١٤ + ٦أ - ١٠أ$
اطرح ١٦ من كلا الطرفين	$٥٠ + ١٦ - = ٨ + ١٤ - ١٠أ + ٦أ$
أضف ١٦ إلى كلا الطرفين	$٥٠ = ٨ + ١٤ - ٤أ$
اطرح ٨ من كلا الطرفين	$٤٢ = ٢٤ - ٤أ$
اقسم كلا الطرفين على ٤	$٢ = أ$

تحقق :

بسط	$٥٠ + (٤ - أ٦)٢ + (١ + أ٤)٨ = ٨ + (٦ + أ٢)٣ + (٢ - أ٥)٢$
اضرب	$٥٠ + [٤ - (٢)٦](٢)٢ + [١ + (٢)٤]٨ = [٦ + (٢)٢](٢)٣ + [٢ - (٢)٥](٢)٢$
اجمع	$٥٠ + (٨)٤ + (٩)٢ = ٨ + (١٠)٦ + (٨)٤$
	$٥٠ + ٣٢ + ١٨ = ٨ + ٦٠ + ٣٢$
	$١٠٠ = ١٠٠$ ✓

تحقق من فهمك ✓

$$١٢ + (١ + س)٢ + (٨ + س) = ٧ + (٤ + س)٢$$

$$١٦ - د٩ = (٤ - د)د - (٣ + د)د$$

إرشادات للدراسة

جمع الحدود المتشابهة

إذا أردت تبسيط عبارة تحوي الكثير من الحدود، فقد يساعدك على ذلك وضع دوائر حول أحد مجموعات الحدود المتشابهة ومستطيلات حول عناصر مجموعة أخرى، ومثلثات حول عناصر مجموعة ثالثة، وهكذا.

تأكد

مثال ١

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١) \quad ٥٠ - (٣٠ + ٢٠ - ٤) \quad (٢) \quad ٦ - (٣ + ٤ - ١٠ + ٢ - ١)$$

$$(٣) \quad ٣ - (٣ - ٢) \quad (٤) \quad ٢ - (٢ + ٣ - ١٠ + ٢ - ١)$$

مثال ٢

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$(٥) \quad ٥ - (٤ + ١٠ + ٢) \quad (٦) \quad ٣ - (٣ + ٤ + ١٠ - ٢)$$

$$(٧) \quad ٢ - (٢ - ٣) \quad (٨) \quad ٢ - (٢ - ٣)$$

مثال ٣

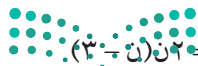
(٨) **تلفاز:** اشترى أحمد تلفازًا جديدًا. ارتفاع شاشته يساوي نصف عرضها، بالإضافة إلى ٥ بوصات، وعرضها ٣٠ بوصة. أوجد ارتفاع الشاشة بالبوصات.

مثال ٤

حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

$$(٩) \quad ٦ - (١١ - ٢) = ٧ - (٢ - ٢)$$

$$(١١) \quad ١٠ - (٣ + ١) + (٦ - ١) = ٣٥ - (٥ - ١) + (٧ + ١)$$



مثال ١

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١٢) \text{ ب } (ب^٢ - ١٢ب + ١) \quad (١٣) \text{ ج } ٢ (٥ج - ٣ج - ١٥ج + ٢ج + ٢)$$

$$(١٤) \text{ ب } ٢ ر (٢ب + ٢ر + ٥ب - ١٥ب) \quad (١٥) \text{ ن } ٤ ل (٢ل - ٢ل - ١٠ل + ٢ل + ٤)$$

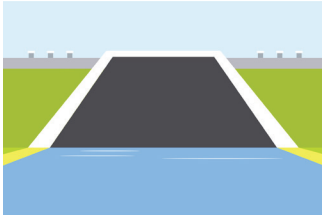
مثال ٢

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(١٦) \text{ أ } (٨أ + ٢أ + ٤) + (٣س - ٢س) \quad (١٧) \text{ أ } (٨أ + ٢أ + ٤) + (٣س - ٢س)$$

$$(١٨) \text{ د } ٤ (٥د - ١٢) + ٧ (د + ٥) \quad (١٩) \text{ ج } ٩ (٢ج - ٢ج + ٢ج) + (٣ج + ٤)$$

$$(٢٠) \text{ ن } ٤ (٢ن - ٢ب - ٣ن + ٢ب + ٥ن) + ٤ (٦ن - ٢ب - ٢ن + ٣ب)$$



مثال ٣

(٢١) **سدود:** واجهة سد على شكل شبه منحرف. طول قاعدتها السفلية

مثلاً ارتفاعها. وقاعدتها العليا أقل من $\frac{1}{5}$ ارتفاعها بـ ١٠ أمتار.

أ) اكتب عبارة لإيجاد مساحة هذه الواجهة.

ب) إذا كان ارتفاع السد ٦٠ مترًا، فأوجد هذه المساحة.

مثال ٤

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

$$(٢٢) ٧ (٢ن + ٥ - ٩) + ن = ن (٧ - ٢) + ١٣$$

$$(٢٣) ٥ (٤ع + ٦) - (٢ع - ٤) = ٧ع (٤ + ٤) - (٢ع - ٤) - ٤٨$$

$$(٢٤) ٩ج (١١ - ١) + (١٠ج - ٣) = ٣ج (٥ + ٥) + ج (٦ - ٣) - ٣٠$$

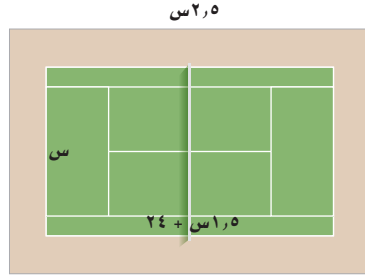
$$(٢٥) ٢ن (٥ - ٢) - (١٠ن - ٢ن + ٣) = ٨ن (٤ + ٤) + (٢ن - ٧)$$

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(٢٦) \text{ ن } ٢ (٣٠ب + ٩ب - ١٢) \quad (٢٧) \text{ ر } \frac{٣}{٥} (١٠ر + ٥ر + ١٥ر)$$

$$(٢٨) - ٢س (٢ع + ٤س + ٣س) + ٢س (٥س + ٣س) + ٣س (٣س + ٤س + ٤س)$$





(٢٩) **تنس أرضي:** يبني نادي التنس ملعباً جديداً يحيط به ممر منتظم، كما في الشكل المجاور.

(أ) اكتب عبارة تمثل مساحة ملعب التنس.

(ب) اكتب عبارة تمثل مساحة الممر.



الربط مع الحياة

يستخدم لاعبو التنس الأرضي مضارب لدفع أو صد كرة صغيرة مجوفة، فوق شبكة عرضية تنصّف ملعباً مستطيلاً. وتعتمد المهارة في هذه الرياضة، على التناسق بين حركات اليدين والعينين، وذكاء اللاعب في توقّع اتجاه الكرة.

(٣٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

(أ) **جدولياً:** اكتب ثلاث وحيدات حد مختلفة الدرجات وثلاث كثيرات حدود مختلفة الدرجات، ثم حدد درجة كل وحيدة حد وكثيرة حدود، واضرب وحيدات الحد في كثيرات الحدود، وحدد درجة ناتج الضرب. وأخيراً سجّل نتائجك في الجدول على النحو الآتي:

وحيدة الحد	الدرجة	كثيرة الحدود	الدرجة	ناتج ضرب وحيدة الحد في كثيرة الحدود	الدرجة

(ب) **لفظياً:** خمن درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ما درجة ناتج ضرب وحيدة حد من الدرجة أ، في كثيرة حدود من الدرجة ب؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣١) **تحديد:** أوجد قيمة ب التي تجعل $٣س + ٤س + ٢س + ٣س - ٢س = ١٢س + ٦س + ١٠س$

(٣٢) **تبرير:** هل توجد قيمة للمتغير س تجعل العبارة: $٢(٢ + س) = ٢س + ٢٢$ صحيحة؟ وإذا كان كذلك، فأوجد هذه القيمة. وفّر إجابتك.

(٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب وحيدة حد وكثيرة حدود باستعمال المتغير نفسه، وأوجد ناتج ضربهما.

(٣٤) **اكتب:** صف خطوات ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

تدريب على اختبار

(٣٦) إذا كانت $٥س + ٧ص = ب$ ، $٢ص - ٣س = أ$ ، فأوجد $أ + ب$

(أ) $٢س - ٩ص$ (ج) $٢س + ٩ص$

(ب) $٣ص + ٤س$ (د) $٢س - ٥ص$

(٣٥) يبيع محل ملابس م بنظلاً، قميصاً أسبوعياً، فإذا كان ثمن القميص ٨٠ ريالاً، والبنظال ١٢٠ ريالاً. فأأي العبارات الآتية تمثل المبلغ الذي يحصل عليه المحل ثمناً لذلك؟

(أ) $٨٠م + ١٢٠ن$ (ج) $٢٠٠(م + ن)$

(ب) $١٢٠م + ٨٠ن$ (د) $٩٦٠٠م ن$

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كل مما يأتي: (الدرس ٦ - ٤)

$$(37) (3^2 + 2^2 + 1) - (2 - 6) \quad (38) (3^2 - 2^2 + 1) - (2 - 6) \quad (39) (3^2 - 2^2 + 1) - (2 - 6)$$

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦ - ٣)

$$(40) 12x \quad (41) 10 - \quad (42) 3x^2 - 5x^3$$

بسّط كلًا مما يأتي: (الدرس ٦ - ١)

$$(43) 3x^2 - (2x^2 - 3x) \quad (44) 3x^2 - (2x^2 - 3x) \quad (45) 3x^2 - (2x^2 - 3x)$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلًا مما يأتي:

$$(46) 3x^2 - (2x^2 - 3x) \quad (47) 3x^2 - (2x^2 - 3x) \quad (48) 3x^2 - (2x^2 - 3x)$$

$$(49) 3x^2 - (2x^2 - 3x) \quad (50) 3x^2 - (2x^2 - 3x) \quad (51) 3x^2 - (2x^2 - 3x)$$





٦-٦ ضرب كثيرات الحدود

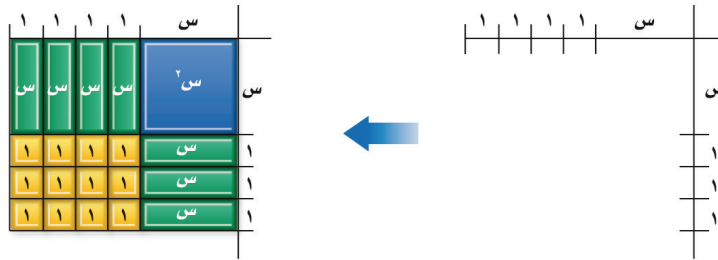
يمكنك استعمال بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب ثنائيي حد.

نشاط ١ ضرب ثنائيي حد

نشاط ١

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(س + ٤)(س + ٣)$.

حدّد بعدي المستطيل: $س + ٣$ ، $س + ٤$ كما في الشكل الأول أدناه، ثم استعمل بطاقات الجبر، لإكمال المستطيل كما في الشكل الثاني.



يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة $س^٢$ ، ٧ بطاقات $س$ ، ١٢ بطاقة ١

وعليه تكون مساحة المستطيل تساوي $س^٢ + ٧س + ١٢$

إذن $(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + ٧س + ١٢$

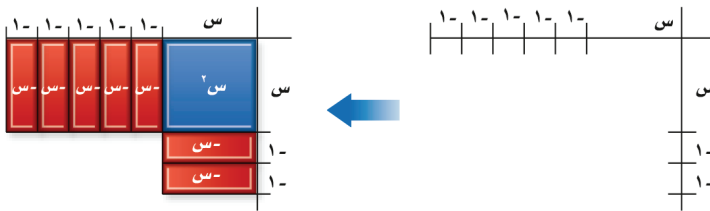
نشاط ٢ ضرب ثنائيي حد

نشاط ٢

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(س - ٢)(س - ٥)$.

الخطوة ١: حدّد بعدي المستطيل $س - ٢$ ، $س - ٥$

ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو موضح في الشكل المقابل.



الخطوة ٢: حدّد هل ستستعمل ١٠ بطاقات ١، أو ١٠ بطاقات -١ لتكملة المستطيل.

بما أن مساحة كل بطاقة ١ هو ناتج ضرب -١ في -١، لذا املا الفراغ بـ ١٠ بطاقات ١ لتكملة المستطيل.

يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة $س^٢$ ، ٧ بطاقات - $س$ ، ١٠ بطاقات ١

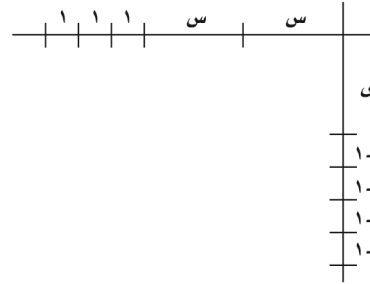
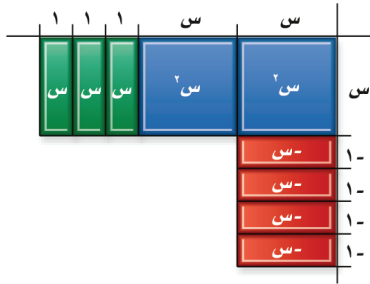
فتكون مساحة المستطيل $س^٢ - ٧س + ١٠$.

لذا فإن $(س - ٢)(س - ٥) = س^٢ - ٧س + ١٠$

نشاط ٣

ضرب ثنائي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(س - ٤)(س + ٣)$.



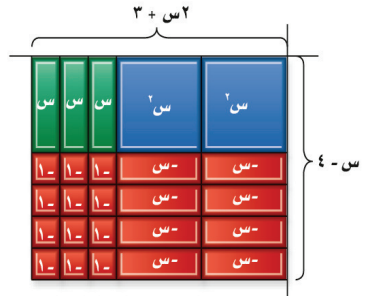
الخطوة ١: حدّد بُعدي المستطيل

س - ٤، ٣ + س. ثم

استعمل بطاقات الجبر لتبدأ

بتكوين المستطيل كما هو

موضح في الشكل المجاور.

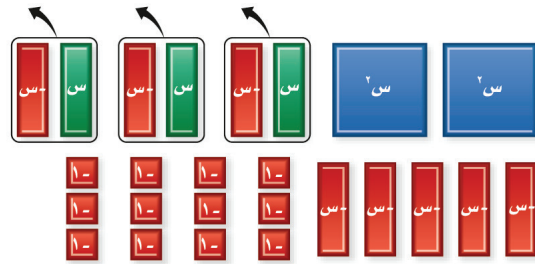


الخطوة ٢: حدّد أي بطاقات الجبر س أم - س ستستعمل. وأي البطاقات ١ أم - ١

ستستعمل لتكملة المستطيل. البطاقة - س هي حاصل ضرب س في - ١.

والبطاقة - ١ هي حاصل ضرب ١ في - ١. استعمل للمستطيل ثماني

بطاقات - س، وثلاث بطاقات س و١٢ بطاقة - ١.



الخطوة ٣: أعد ترتيب البطاقات لتبسيط كثيرة الحدود التي كونتها،

ولاحظ أن ٣ أزواج صفيرية تشكّلت من ٣ بطاقات س،

و ٣ بطاقات - س. ويوجد بطاقتان س، و ٥ بطاقات

- س، و ١٢ بطاقة - ١، إذن

$(س - ٤)(س + ٣) = ٣س + ٢س - ٥س - ١٢$.

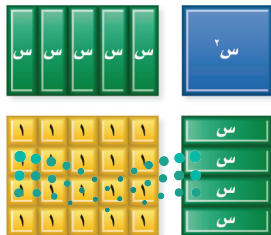
التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب كلّ مما يأتي:

$$(١) (س + ١)(س + ٤) \quad (٢) (س - ٣)(س - ٢) \quad (٣) (س + ٥)(س - ١)$$

$$(٤) (س + ٢)(س + ٣) \quad (٥) (س - ١)(س - ٢) \quad (٦) (س + ٤)(س - ٢)$$

(٧) هل العبارة $(س + ٣)(س + ٥) = س^٢ + ١٥س + ١٥$ صواب أم خطأ؟ تحقّق من إجابتك باستعمال بطاقات الجبر.



(٨) اكتب: بيّن الشكل المجاور تمثيلاً لـ $(س + ٤)(س + ٥)$ مقسماً إلى ٤ أجزاء. فسّر كيف يظهر هذا التمثيل

استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج الضرب.



ضرب كثيرات الحدود

لماذا؟

لخياطة ثوب نستخدم قطعة من القماش مستطيلة الشكل. ويُحدّد بعدها بناءً على طول صاحب الثوب وعرضه. فإذا كان طول قطعة القماش المراد تفصيلها كثوب لأيمن يساوي طول أيمن ع زائد ١٨٠ سم، أو $ع + ١٨٠$ وعرض القطعة يساوي نصف طول أيمن مضافاً إليه ٢٧ سم، أو $ع + \frac{١}{٢}$. ولإيجاد المساحة التقريبية لقطعة القماش، فإنك تحتاج لإيجاد ناتج $(ع + ١٨٠)(ع + \frac{١}{٢})$.

فيما سبق

درست ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

والآن

- أضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع.
- أضرب ثنائيي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

المضردات

طريقة التوزيع بالترتيب

العبارة التربيعية

مثال ١ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلّ مما يأتي:

$$(١) (٣ + س)(٥ + س)$$

الطريقة الرأسية

اضرب في س

$$٣ + س$$

$$٥ + س$$

$$٢س + ٣س$$

اضرب في ٥

$$٣ + س$$

$$٥ + س$$

$$٢س + ٣س$$

اجمع الحدود المتشابهة

$$٣ + س$$

$$٥ + س$$

$$٢س + ٣س$$

$$١٥ + ١٠س$$

$$١٥ + ١٠س$$

$$١٥ + ١٣س + ٢س$$

$$١٥ + ١٣س + ٢س = (٣ + س)(٥ + س)$$

الطريقة الأفقية:

$$(٣ + س)(٥ + س) = (٥ + س)٣ + (٥ + س)س$$

$$١٥ + ١٣س + ٢س =$$

$$١٥ + ١٣س + ٢س =$$

اكتبها كمجموع ناتجي ضرب

خاصية التوزيع

اجمع الحدود المتشابهة

$$(ب) (٢ - س)(٤ + س)$$

الطريقة الرأسية:

اضرب في ٣س

$$٢ - س$$

$$٤ + س$$

$$٢س - ٣س$$

اضرب في ٤

$$٢ - س$$

$$٤ + س$$

$$٢س - ٣س$$

اجمع الحدود المتشابهة

$$٢ - س$$

$$٤ + س$$

$$٢س - ٣س$$

$$٨ - ٤س$$

$$٨ - ٤س$$

$$٨ - ٤س = (٢ - س)(٤ + س)$$

$$٨ - ٤س = (٢ - س)(٤ + س)$$

الطريقة الأفقية:

$$\begin{aligned} (س - ٢)(٢ + ٣س) &= (س - ٢)(٢ + ٣س) - (٢ + ٣س)٢ \\ &= ٣س^٢ + ٤س - ٦س - ٨ \\ &= ٣س^٢ - ٢س - ٨ \end{aligned}$$

اكتبها كفرق بين حاصل ضرب
خاصية التوزيع
اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(١) (٤ + م)(٥ + م) \quad (٢) (٥ - ص)(٢ + ص)$$

وتُسمى الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائي حد **بطريقة التوزيع بالترتيب**.

أضف إلى
مطويتك

مفهوم أساسي

طريقة التوزيع بالترتيب

التعبير اللفظي

لضرب ثنائي حد، أوجد ناتج جمع كل من: ضرب الحدين الأولين، وضرب الحدين في الطرفين، وضرب الحدين الأوسطين، وضرب الحدين الآخرين بالترتيب.

مثال

ناتج ضرب
الحدين الآخرين

↓

$(٢ -) (٤)$

ناتج ضرب
الحدين الأوسطين

↓

$(س) (٤)$

ناتج ضرب الحدين
في الطرفين

↓

$(٢ -) (س)$

ناتج ضرب
الحدين الأولين

↓

$(س) (س)$

$$\begin{aligned} (٢ -) (٤) + (س) (٤) + (٢ -) (س) + (س) (س) &= (٢ - س) (٤ + س) \\ ٨ - ٤س + ٢س - ٢س^٢ &= \\ ٨ - ٢س + ٢س^٢ &= \end{aligned}$$

قراءة الرياضيات

كثيرات الحدود كعوامل:

تُقرأ العبارة $(س + ٤)(س - ٢)$ على الصورة س زائد ٤ مضروباً في س ناقص ٢

مثال ٢ طريقة التوزيع بالترتيب

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١) (٧ - ٢ص)(٥ + ٣ص)$$

$$\begin{aligned} (٧ - ٢ص)(٥ + ٣ص) &= (٧ - ٢ص)(٥ + ٣ص) + (٥ + ٣ص)٥ \\ &= ٣٥ + ٢١ص - ١٠ص - ٦ص^٢ \\ &= ٣٥ + ١١ص - ٦ص^٢ \end{aligned}$$

طريقة التوزيع بالترتيب
اضرب
اجمع الحدود المتشابهة

$$(٢) (٤ - أ)(٥ - ٢أ)$$

$$(٤ - أ)(٥ - ٢أ)$$

$$\begin{aligned} (٤ - أ)(٥ - ٢أ) &= (٤ - أ)(٥ - ٢أ) + (٥ - ٢أ)٥ \\ &= ٢٠ - ٨أ - ١٠أ + ٢أ^٢ \\ &= ٢٠ - ١٨أ + ٢أ^٢ \end{aligned}$$

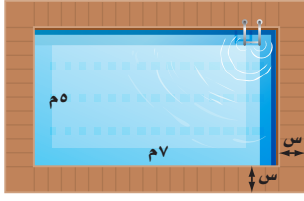
طريقة التوزيع بالترتيب
اضرب
اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

$$(١) (٥ - ب)(٢ + ٣ب) \quad (٢) (٥ - ٢ص)(٦ - ص)$$

لاحظ أنه عند ضرب عبارتين خطيتين، تكون النتيجة عبارة تربيعية. **العبارة التربيعية** هي عبارة ذات متغيرين من الدرجة الثانية. ونتيجة ضرب ثلاث عبارات خطية، هي عبارة من الدرجة الثالثة. ويمكنك استعمال طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد عبارة تمثل مساحة مستطيل أعطي بعدهاء على صورة ثنائي حد.

مثال ٣ من واقع الحياة التوزيع بالترتيب



بركة سباحة: يحيط ممر ببركة سباحة مستطيلة الشكل. إذا كان عرض الممر هو ٥ متر. فاكُتب عبارة تمثل مساحة سطح البركة والممر معاً.

افهم: المطلوب كتابة عبارة لمساحة سطح البركة والممر حولها.

خطّط: استعمل صيغة مساحة المستطيل بعد تحديد طول البركة وعرضها بالإضافة إلى عرض الممر.

حل: بما أن الممر منتظم من جميع جهات البركة، فإن طول المستطيل الممثل للبركة والممر يزيد على طول البركة بمقدار ٢س، وكذلك العرض؛ لذا يمكن تمثيل الطول بـ ٧ + ٢س والعرض بـ ٥ + ٢س

$$\text{المساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

$$= (٧ + ٢س)(٥ + ٢س)$$

$$= ٢س(٥ + ٢س) + (٧)(٥ + ٢س) = ١٠س + ٤س^٢ + ٣٥ + ١٤س$$

$$= ٤س^٢ + ٢٤س + ٣٥$$

$$= ٤س^٢ + ٢٤س + ٣٥$$

لذا تكون المساحة الكلية للممر والبركة معاً هي ٤س^٢ + ٢٤س + ٣٥

تحقق: اختر قيمة لـ س وعوّضها في العبارتين (٧ + ٢س)(٥ + ٢س)، ٤س^٢ + ٢٤س + ٣٥ ستجد أن النتيجة هي نفسها لكنتا العبارتين.

تحقق من فهمك

(٣) إذا كان طول البركة ٩ م وعرضها ٧ م. فأوجد مساحة سطح البركة والممر معاً.

ضرب كثيرات الحدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع أيضاً لإيجاد ناتج ضرب كثيرتي حدود.

مثال ٤ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلّ مما يأتي:

$$(٥ + ٢س)(٥ - ٣س - ٢س^٢)$$

$$= (٥ + ٢س)(٥ - ٣س - ٢س^٢)$$

$$= ٥(٥ - ٣س - ٢س^٢) + ٢س(٥ - ٣س - ٢س^٢)$$

$$= ٢٥ - ١٥س - ١٠س^٢ + ١٠س - ٦س^٢ - ٤س^٣$$

$$= ٢٥ - ٤س - ١٦س^٢ - ٤س^٣$$

$$(٢ص٢ + ٣ص - ١)(٣ص - ٢ص + ٥)$$

$$= (٢ص٢ + ٣ص - ١)(٣ص - ٢ص + ٥)$$

$$= ٢ص(٣ص - ٢ص + ٥) + ٣ص(٣ص - ٢ص + ٥) - ١(٣ص - ٢ص + ٥)$$

$$= ٦ص^٢ - ٤ص + ١٥ص + ٩ص - ٦ص + ١٥ص - ٣ص + ٥ص - ٣ص + ٢ص - ٥ص$$

$$= ٦ص^٢ - ٤ص - ١١ص + ٢ص$$

تحقق من فهمك

$$(١٤ - ٣س)(٥ - ٢س + ٧س - ٨)$$

$$(٤م^٢ - ٢م + ٣)(٥ + ٧م - ٨م^٢)$$



Ministry of Education

الدرس ٦-٦: ضرب كثيرات الحدود ٢٥٢٢



الربط مع الحياة

تعتمد تكلفة بركة السباحة على عدة عوامل. منها: كون البركة فوق مستوى سطح الأرض، أو دون مستوى سطحها، ونوع المادة المستعملة في تبليطها.

إرشادات للدراسة

ضرب كثيرات الحدود

عند ضرب كثيرة حدود تحوي م حدّاً في أخرى تحوي ن حدّاً، سيكون ناتج الضرب قبل التبسيط كثيرة حدود تحوي م × ن حدّاً، وفي المثال (١٤) ناتج الضرب يحوي ٦ = ٣ × ٢ حدود قبل التبسيط.

المثالان ٢، ١ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١) (٥ + س)(٢ + س) \quad (٢) (٢ - ص)(٤ + ص) \quad (٣) (٧ - ب)(٣ + ب)$$

$$(٤) (٣ + ن)(٩ + ن) \quad (٥) (١ - هـ)(٨ - هـ) \quad (٦) (٩ + أ)(٥ - أ)$$



مثال ٣ (٧) إطار صورة: صمّم خالد إطارًا للصورة كما في الشكل المجاور. فإذا كان الإطار منتظمًا من جميع جهاته، فاكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للصورة والإطار معًا.

مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(٨) (٣ - ٢ص٤)(٢ + ٧ص٢ + ٧ص٢)$$

$$(٩) (٥ + س٤ - ٢س)(٤ - ٣س + ٢س٣)$$

تدرب وحل المسائل

المثالان ٢، ١ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١٠) (٥ - ص٣)(٤ - ص٣) \quad (١١) (٥ - د٦)(٧ - د٤) \quad (١٢) (٥ + م٣)(٣ + م٢)$$

$$(١٣) (٥ - ن١٢)(٥ + ن١٢) \quad (١٤) (٧ + ر٥)(٧ - ر٥) \quad (١٥) (٨ + ل٤)(٥ - ل٦)$$

مثال ٣ (١٦) حديقة: يحيط ممر عرضه س بحديقة مستطيلة الشكل، طولها ٨ أمتار، وعرضها ٦ أمتار اكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للحديقة والممر.

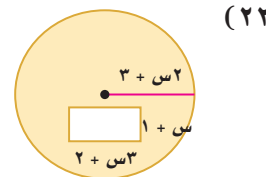
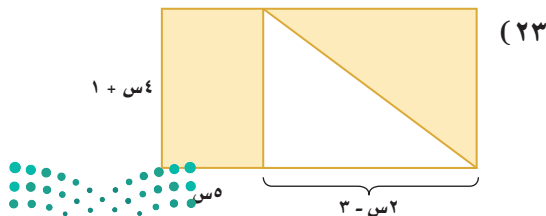
مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١٧) (١١ - ص٢)(٢ + ص٣ - ٢ص٣) \quad (١٨) (٧ + أ٤)(٧ - أ٢ + ٢أ٩)$$

$$(١٩) (١ - س٥ + ٢س٥)(١ + س٦ - ٢س٦) \quad (٢٠) (٢ - ع٥ - ٢ع٦)(٢ - ع٣ - ٣ع٣)$$

$$(٢١) بسّط العبارة: (٢ + م) + (٦ - م٣ + ٢م) + (٤ + م٢ - ٢م)$$

هندسة: اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:



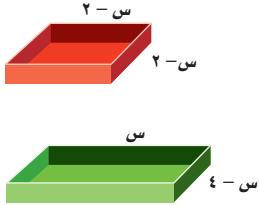
(٢٤) **كرة طائرة:** تمثل العبارتان: (٧ص - ٥) متر، (٨ص + ٢) متر بعدي ملعب كرة طائرة.

(أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الملعب.

(ب) إذا كان طول ملعب كرة طائرة ١٨ م، فأوجد مساحته.

(٢٥) **هندسة:** اكتب عبارة تمثل مساحة مثلث طول قاعدته ٢س + ٣، وارتفاعه ٣س - ١

(٢٦) **قوالب:** تسمح القوالب المختلفة بصنع ألواح شوكولاتة مربعة أو مستطيلة الشكل كما هو مبين جانبًا.



(أ) ما قيم س الممكنة؟ فسّر إجابتك.

(ب) أيّ الشكلين مساحته أكبر؟

(ج) ما الفرق بين مساحتي القالبين؟

(٢٧) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال قاعدة مربع مجموع حدين.

العبارة	(العبارة) ٢
س + ٥	
٣ص + ١	
ع + ك	

(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي وأكمله.

(ب) لفظياً: اكتب جملة توضح كيفية الحصول على مربع مجموع حدين.

(ج) رمزياً: اكتب عبارة تمثل مربع مجموع الحدين أ + ب.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٨) **تبرير:** وضح إذا كانت العبارة "يمكن استعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائية حد في ثلاثية حدود" صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً، وفسّر إجابتك.

(٢٩) **تحّد:** أوجد ناتج: (س + ٢س) (س - ١ - ٢س - ١س + س ن).

(٣٠) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائية وثلاثية حدود تتضمن كل منهما متغيراً واحداً، ثم أوجد ناتج ضربهما.

(٣١) **اكتب:** لخص الطرق التي يمكن استعمالها لضرب كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

(٣٣) **إجابة قصيرة:** أي نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً مكعبه أكبر منه؟



(٣٢) ما ناتج ضرب العبارتين: ٢س - ٥، ٣س + ٤؟

(أ) ٥س - ١ (ج) ٦س - ٢٠

(ب) ٦س - ٢ - ٧س - ٢٠ (د) ٦س + ٢ - ٧س - ٢٠

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي: (الدرس ٦ - ٤)

$$(٣٤) \quad (١٠ + ٢١٣ -) + (٥ - ٢١٧) \quad (٣٥) \quad (٨ - ٢٢ -) + (٤ - ٢٦ -) \quad (٣٦) \quad (٣ + ١٣ + ٤ أ ب -) - (٢ ب + ٥ أ + ٨ أ ب)$$

بسِّط كلاً من العبارات الآتية: (الدرس ٦ - ١)

$$(٣٧) \quad (٤ - ٢ -) ٣ - ٣ - (٢ - ٣ -) ٤ \quad (٣٨) \quad (٣ - ٢ -) ٢ - ٣ - (٢ - ٣ -) ٢ \quad (٣٩) \quad (٣ - ٣ -) ٢ + (٣ - ٥ -) ٢$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسِّط كلاً مما يأتي:

$$(٤٠) \quad (٢ - ٢ -) ٣ - ٣ - (٢ - ٣ -) ٤ \quad (٤١) \quad (٢ - ٢ -) ٢ + (٢ - ٦ -) ٣$$





حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

لماذا؟



يريد محمد تثبيت لوحة الرمي بالسهم إلى لوح خشبي مربع الشكل. فإذا كان نصف قطر لوحة السهم هو (نق + ١٢)، فما مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه؟
يعرف محمد أن قطر لوحة السهم هو $٢(نق + ١٢)$ ، فيكون طول كل ضلع من أضلاع المربع يساوي $٢(نق + ١٢)$. ولإيجاد مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه، فإن عليه إيجاد مساحة المربع. $م = (٢(نق + ١٢))^٢$

فيما سبق

درست ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

- أجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما.
- أجد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما.

مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما: بعض أزواج ثنائيات الحد، كالمربعات مثل $٢(نق + ١٢)$ لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معينة. واستعمال هذه القاعدة يسهل من عملية إيجاد ناتج الضرب. فمربع المجموع $٢(أ + ب) = (أ + ب)(أ + ب)$ هو أحد نواتج الضرب تلك.

$$\begin{array}{c} \text{ب}^٢ + ٢أب + أ^٢ = (أ + ب)^٢ \\ \text{ب}^٢ + ٢أب + أ^٢ = (أ + ب)(أ + ب) \end{array}$$

أضف إلى

مطوياتك

مربع مجموع حدين

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: مربع $(أ + ب)$ هو مربع أ زائد مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافاً إليه مربع ب.

$$\text{الرموز: } ٢(أ + ب) = (أ + ب)(أ + ب) = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$$

$$\text{مثال: } ٢(٤ + س) = (٤ + س)(٤ + س) = ٤س + ٢س + ٨س + ١٦$$

مربع مجموع حدين

مثال ١

أوجد ناتج: $٢(٥ + س٣)$.

مربع المجموع

$$٥ = ب, ٣ = أ$$

بسط. باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، وتحقق من حلك

$$٢٥ + ٣٠س + ٩س^٢ =$$

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$١(ب) (٣ + ٤ص)$$

$$١(أ) (٨ج + ٣د)$$

ولإيجاد قاعدة مربع الفرق بين حدين، اكتب أ- ب على صورة أ + (-ب)، وربّع الناتج باستعمال قاعدة مربع مجموع حدين.

مربع مجموع حدين

$$(أ - ب)^2 = [أ + (-ب)]^2 = أ^2 + ٢(أ)(-ب) + (-ب)^2$$

بسط

$$= أ^2 - ٢أب + ب^2$$

أضف إلى

مطويتك

مربع الفرق بين حدين

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: مربع (أ - ب) هو مربع ناقص مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافاً إليه مربع ب.

$$(أ - ب)^2 = (أ - ب)(أ - ب) = أ^2 - ٢أب + ب^2$$

الرموز:

$$(س - ٣)^2 = (س - ٣)(س - ٣) = س^2 - ٦س + ٩$$

مثال:

تنبيه

مربع الفرق بين حدين

تذكر أن ناتج (س - ٧) لا يساوي س^٢ - ٧^٢ أو س^٢ - ٤٩، وأن
 $(س - ٧)^2 = (س - ٧)(س - ٧) = س^2 - ١٤س + ٤٩$

مربع الفرق بين حدين

مثال ٢

أوجد ناتج: (٢س - ٥ص)^٢.

مربع الفرق

$$(أ - ب)^2 = أ^2 - ٢أب + ب^2$$

$$أ = ٢س، ب = ٥ص$$

$$(٢س - ٥ص)^2 = (٢س)^2 - ٢(٢س)(٥ص) + (٥ص)^2$$

بسط

$$= ٤س^2 - ٢٠سص + ٢٥ص^2$$

تحقق من فهمك

$$(٢ب - (أ - ٢ب)^2$$

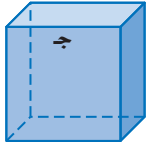
$$(١٢ - ٦ب - ١)^2$$

يُسمى ناتج مربع المجموع أو مربع الفرق بين حدين بالمربع الكامل أو ثلاثي الحدود الذي يشكل مربعاً كاملاً. ويمكنك استعمال هذه القواعد لإيجاد أنماط لحل مسائل من واقع الحياة.

مربع الفرق بين حدين

مثال ٣ من واقع الحياة

فيزياء: طول ضلع مكعب الألمنيوم أقل من طول ضلع مكعب نحاس بـ ٤ سم. اكتب معادلة تمثل مساحة سطح مكعب الألمنيوم بدلالة طول ضلع مكعب النحاس.



ليكن جـ طول ضلع مكعب النحاس، إذن طول ضلع مكعب الألمنيوم جـ - ٤

مساحة سطح المكعب

$$مساحة السطح = ٦ل^2$$

عوّض عن ل بـ (ج - ٤)

$$مساحة السطح = ٦(ج - ٤)^2$$

مربع الفرق

$$مساحة السطح = ٦[ج^2 - ٨ج + ١٦]$$

بسط

$$مساحة السطح = ٦ج^2 - ٤٨ج + ٩٦$$

تحقق من فهمك

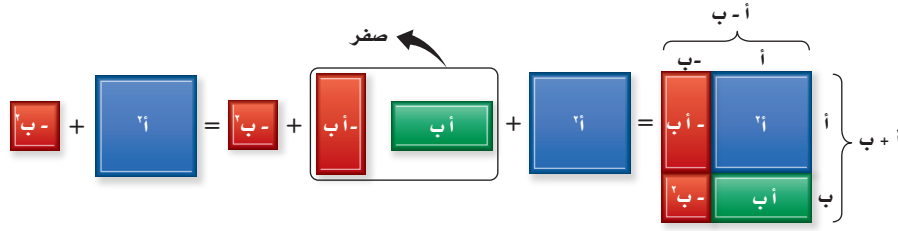
(٣) **حديقة:** لدى عماد حديقة، طولها وعرضها ٣ مترًا، ويريد إضافة ٣ أمتار إلى كل من الطول والعرض.

(أ) بيّن كيف يمكن التعبير عن مساحة الحديقة الجديدة بمربع ثنائية حد.

(ب) أوجد مربع ثنائية الحد السابقة.



ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما : سنرى الآن ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، $(أ + ب)(أ - ب)$. تذكر أنه يمكن كتابة $أ - ب$ على الصورة $أ + (-ب)$.



لاحظ أن كلاً من الحدين الأوسطين هو معكوسٌ جمعي للآخر، ومجموعهما صفر. لذا فإن $(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - أب + أب - ب^2 = أ^2 - ب^2$.

إرشادات للدراسة

أنماط: عند استعمال أي من هذه القواعد فإن $أ$ ، $ب$ قد يكونان عددين، أو متغيرين، أو عبارتين بأعداد ومتغيرات.

أضف إلى

مطوياتك

مفهوم أساسي

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما
التعبير اللفظي: ناتج ضرب $(أ + ب)$ ، $(أ - ب)$ هو مربع $أ$ ناقص مربع $ب$.
الرموز: $(أ + ب)(أ - ب) = (أ - ب)(أ + ب) = (أ + ب)^2 - ب^2$

مثال ٤

أوجد ناتج: $(٣ + ٢س)(٣ - ٢س)$.

حاصل ضرب المجموع في الفرق

$$٣ = أ، ٢س = ب$$

بسّط

$$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$$

$$(٣ + ٢س)(٣ - ٢س) = (٣ - ٢س)(٣ + ٢س) = ٣^2 - (٢س)^2$$

$$= ٩ - ٤س^٢$$

تحقق من فهمك

$$(٤ب - ٤ج)(٤ب + ٤ج)$$

$$(٢ + ٣ن)(٢ - ٣ن)$$

تأكد

أوجد ناتج كل مما يأتي:

المثالان ١، ٢

$$(٣ + ٢ص)(٣ - ٢ص)$$

$$(٢ - ١١أ)(٢ + ١١أ)$$

$$(١ + ٥س)(١ - ٥س)$$

$$(٦ + ٣ج)(٦ - ٣ج)$$

$$(٥ - ٤هـ)(٥ + ٤هـ)$$

$$(٤ - ٣م)(٤ + ٣م)$$

٧) ألعاب: تحوي لعبة القرص الطائر قرصًا على شكل دائرة نصف قطرها $(٤ + س)$ سم.

مثال ٣

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة القرص الطائر.

ب) إذا كان قطر القرص الطائر ٢٤ سم، فما مساحته؟ (ط ≈ ١٤ ، ٣).

أوجد ناتج كل مما يأتي:

مثال ٤

$$(١٠ - ٦ص)(١٠ + ٦ص)$$

$$(٩ - ٥س)(٩ + ٥س)$$

$$(٨ - ٣أ)(٨ + ٣أ)$$

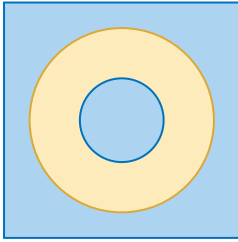
وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٦-٧: حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود ٢٠٢٢

المثالان ٢، ١ أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\begin{array}{lll} (١٣) (٧+هـ)^2 & (١٢) (٦-ب)(٦-ب) & (١١) (١٠+أ)(١٠+أ) \\ (١٤) (٦+س)^2 & (١٥) (٨-م)^2 & (١٦) (٩-٢ص)^2 \\ (١٧) (٣+ب)^2 & (١٨) (٥-٢ن)^2 & (١٩) (٨-٤ن)^2 \end{array}$$

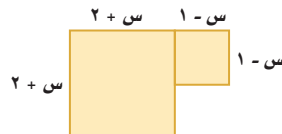


مثال ٣ (٢٠) مصارعة: تكون سجادة المصارعة في العادة مربعة الشكل، طول ضلعها ١٢ مترًا تقريبًا، وتحتوي على دائرتين كما في الشكل المجاور. افترض أن نصف قطر الدائرة الداخلية (ر) متر، وأن نصف قطر الدائرة الخارجية يزيد على نصف قطر الدائرة الداخلية بـ ٣ أمتار. اكتب عبارة تمثل مساحة الدائرة الكبرى. (ب) اكتب عبارة تمثل مساحة جزء المربع خارج الدائرة الكبرى.

مثال ٤ أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\begin{array}{ll} (٢١) (٣+ل)(٣-ل) & (٢٢) (٤-س)(٤+س) \\ (٢٣) (٢ك+٥ر)(٢ك-٥ر) & (٢٤) (٣أ+٧ب)(٣أ-٧ب) \\ (٢٥) (٥ص+٧) & (٢٦) (٨-١٠أ) \\ (٢٧) (٣ن+١٢)(٣ن-١٢) & (٢٨) (٤+ب) \\ (٢٩) (٣ك-٥ر) & (٣٠) (٢ج-٩د) \\ (٣١) (٣أ-٤ب)(٣أ+٤ب) & (٣٢) (٥ص-٢) \\ (٣٣) (٢أ٨-٣ب٩)(٢أ٨+٣ب٩) & (٣٤) (٨+٣ك) \\ (٣٥) (٤-ص) & (٣٦) (٥ص-٢ع٧)(٥ص+٢ع٧) \\ (٣٧) (٣+م)(٣-٢م)(٤+م) & (٣٨) (٥+ر)(٢-ر)(٥-ر) \end{array}$$

(٣٩) هندسة: اكتب كثيرة حدود تمثل مساحة الشكل أدناه.

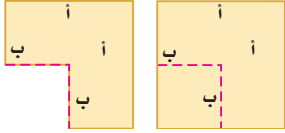


أوجد ناتج كل مما يأتي:

(٤٠) $(ج + د)(ج + د)(ج + د)$ (٤١) $(ب - أ)^3$ (٤٢) $(ج + د)(ج - د)(ج + د)$

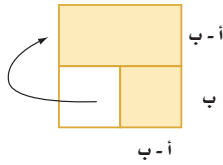
(٤٣) $(ك - م)(ك + م)(ك - م)$ (٤٤) $(ن - ب)^2(ن + ب)$ (٤٥) $(ك + ر)^2(ك - ر)$

(٤٦) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة قاعدة تمثل حاصل ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، ابدأ بورقة مربعات. وارمز إلى طول كل ضلع في المربع بالرمز أ، ثم ارسم مربعاً صغيراً في إحدى زواياه، وارمز إلى طول ضلعه بالرمز ب.

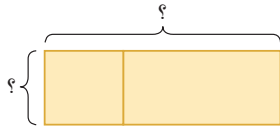


(أ) عددياً: أوجد مساحة كل مربع.

(ب) حسيًا: قص المربع الصغير من الزاوية. ما مساحة الشكل المتبقية؟



(ج) تحليلياً: افصل المستطيل الصغير السفلي، ثم دوّره واسحبه إلى جوار المستطيل العلوي. ما طول المستطيل في التمثيل الجديد؟ وما عرضه؟ وما مساحته؟



(د) تحليلياً: ما القاعدة التي توصلت إليها من الفقرتين ب، ج؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٧) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى فيما يأتي:

$(ج + د)(ج + د)$

$(ج + د)(ج + د)$

$(ج + د)(ج - د)$

$(ج - د)(ج - د)$

(٤٨) **تحّد:** هل يوجد قاعدة لمكعب المجموع $(أ + ب)^3$ ؟

(أ) استقص إجابة هذا السؤال بإيجاد ناتج: $(أ + ب)(أ + ب)(أ + ب)$.

(ب) استعمل القاعدة التي وجدتها في الفرع أ لإيجاد ناتج: $(س + ٢)^3$.

(٤٩) **تبرير:** أوجد قيمة ج التي تجعل من العبارة $٢٥س - ٩٠س + ج$ مربعاً كاملاً.

(٥٠) **اكتب:** صف كيف تجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بين حدين، وكيف تجد ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما.



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٦-٧: حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود ٢٠٢٢

تدريب على اختبار

٥١) ما ناتج ضرب $(3-2)$ $(3-2)$ ؟

أ) $9+112+24$ ج) $9-112-24$

ب) $9+24$ د) $9+112-24$

٥٢) يقطع مروان مسافة ٦ كلم في م دقيقة بسيارته. كم دقيقة سيحتاج إليها لقطع ٣٠ كلم بهذا المعدل؟

أ) $\frac{3}{15}$ م ج) ٥ م

ب) ١٨٠ م د) $\frac{2}{5}$

مراجعة تراكمية

٥٣) أوجد ناتج $(4-3)(2-7)$: (الدرس ٦-٦)

٥٤) بسّط العبارة $3(2-4) + 2(\frac{1}{4} - 3)$: (الدرس ٦-٥)

٥٥) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(1, 1)$ ، $(4, 7)$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلاً من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

١٦٥ (٥٩)

٩٠٠ (٥٨)

١٢٠ (٥٧)

٤٠ (٥٦)

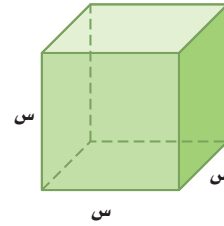


بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(١) $(٢س٧)(٨س٧)$

(٢) $(٥أ٧بج٢)(٦أ٢بج٢)$

(٣) اختيار من متعدد: عبّر عن حجم المجسم أدناه كوحدة حد:



(أ) $٣س$

(ج) $٦س٣$

(ب) $٦س$

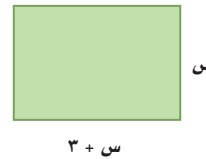
(د) $٦س٦$

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

(٤) $(٧ + س) + (٥س - ٢س٣)$

(٥) $(٧م - ٨ن٢ + ٣ن) - (٤م٢ + ٢ن٢ - ٣ن)$

(٦) اختيار من متعدد: ترغب نوال في شراء سجاد لغرفتين في منزلها أبعادهما مبيّنة أدناه. فما المساحة الكلية للمنطقة التي ستُغطى بالسجاد؟



(أ) $٢س٣ + ٣س$

(ب) $٢س٣ + ٣س - ٥$

(ج) $٢س٢ + ٦س - ١٠$

(د) $٨س + ١٢$

بسّط كل عبارة فيما يأتي، مفترضاً أن أي مقام لا يساوي صفراً:

(٧) $\frac{٨س٦ص٦}{٢س}$

(٨) $\left(\frac{٢٤ب٣}{٦ج٦}\right)$

(٩) $\frac{٢س٧ص٧}{٨س}$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(١٠) $(١٠ - أ٢ + أ٢)$

(١١) $(٥ + أ٣)(٥ - أ٢)$

(١٢) $(٣ - س)(٣س + ٥ - س٢)$

(١٣) $٢(٣ + س)$

(١٤) $(٥ - ب٢)(٥ + ب٢)$

(١٥) هندسة: منشور رباعي قاعدته مستطيلة وأبعاده هي:

س، س + ٣، ٢س + ٥

(أ) أوجد حجم المنشور بدلالة س.

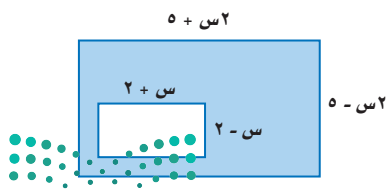
(ب) أوجد حجم المنشور بتعويض قيمتين لـ س، وكيف تقارن بين الحجمين؟

حل كل معادلة فيما يأتي:

(١٦) $٥(٢ - ن) = (٢ + ن٣ - ٢ن٢)$

(١٧) $٣س٣ = (٢ + س)٣ - (٢س - ٢)$

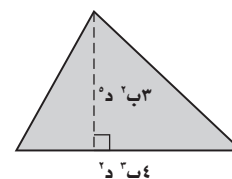
(١٨) هندسة: اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي:



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

(١) عبّر عن مساحة المثلث أدناه في صورة وحيدة حد؟



(أ) $١٢ ب' د'$ (ج) $٦ ب' د'$

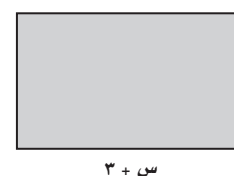
(ب) $١٢ ب' د'$ (د) $٦ ب' د'$

(٢) بسّط العبارة $\left(\frac{٢٤ ل' ٥}{٤ س' ٣}\right)^٣$

(أ) $\frac{٨ ل' ٥}{٣ س' ٧}$ (ج) $\frac{٨ ل' ٥}{٣ س' ٧}$

(ب) $\frac{٨ ل' ٥}{٣ س' ٧}$ (د) $\frac{٨ ل' ٥}{٣ س' ٧}$

(٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه $٩ - ٢$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟



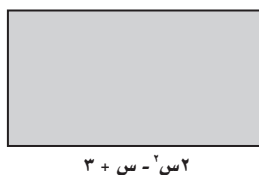
(أ) $٣ + س$ (ج) $٩ - س$

(ب) $٩ + س$ (د) $٣ - س$

إرشادات للاختبارات

سؤال ٢: استعمل قوانين الأسس لتبسيط العبارة، وتذكر أنه لإيجاد أس الأس، نضرب الأسس.

(٤) عبّر عن محيط المستطيل أدناه بصورة كثيرة حدود.



(أ) $٣ س - ٤ س + ٧$

(ب) $٣ س + ٧ + ٢ س$

(ج) $٦ س - ٨ س + ١٤$

(د) $٦ س - ٤ س + ٧$

(٥) أوجد ناتج طرح: $(٥ + ٢٣ + ٣٤ - ٢) - (٢ - ٦ + ٧٢)$

(أ) $٧ - ٦ + ٢٤ + ٣٤$

(ب) $٧ - ٦ + ٢٤ + ٣٤$

(ج) $٣ + ٦ + ٢٤ + ٣٤$

(د) $٣ - ٦ + ٢٤ + ٣٤$

(٦) بسّط العبارة: $\frac{٢ ل' ٣ - ٤ ل' ٣}{٤ ل' ٣ - ٤ ل' ٣}$

(أ) $\frac{٦ ل' ٣}{٦ ل' ٣}$ (ج) $٢ ل'$

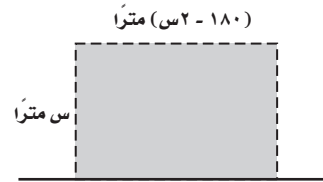
(ب) $\frac{٦ ل' ٣}{٦ ل' ٣}$ (د) $٢ ل'$



إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) يريد مزارع زراعة قطعة الأرض المستطيلة المبينة في الشكل:



(أ) اكتب كثيرة حدود تعبر عن مساحة الأرض.

(ب) أوجد مساحة قطعة الأرض، إذا كان عرضها ٤٠ متراً.

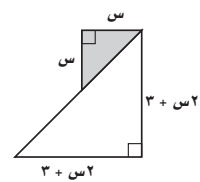
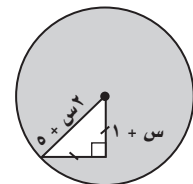
(٨) اكتشف المختلف: أي العبارات التالية مختلفة؟ فسّر إجابتك.

$$(٣م - ٢ن) (٣م + ٢ن)$$

$$(٣م + ٢ن) (٣م + ٢ن)$$

$$(٣م - ٢ن) (٣م + ٢ن)$$

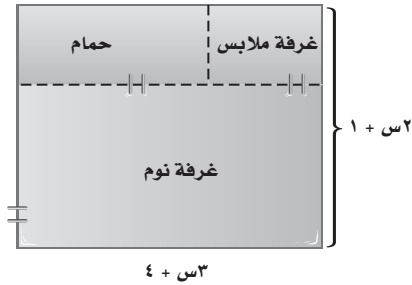
اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:



إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحاً خطوات الحل:

(١١) المخطط التالي يبين تفاصيل جناح نوم:



(أ) أوجد مساحة الجناح كاملاً.

(ب) إذا كان عرض غرفة الملابس س، وطولها س + ١، فأوجد مساحة غرفة الملابس.

(ج) أوجد مساحة الحمام.

(د) أوجد مساحة غرفة النوم.

للمساعدة ..

إذا لم تجب عن السؤال

فراجع الدرس ..

١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
٦-٦	٧-٦	٦-٦	٧-٦	٥-٦	٢-٦	٤-٦	٤-٦	٧-٦	٢-٦	١-٦

وزارة التعليم

Ministry of Education

٩٧٢٢ - ١٤٤٤ الفصل ٦: الاختبار الترمي

التحليل والمعادلات التربيعية

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد وكثيرات الحدود.

والآن

- أحلّ وحيدات الحد.
- أحلّ ثلاثيات الحدود.
- أحلّ الفرق بين مربعين.
- أحلّ معادلات تربيعية.

لماذا؟

 **هندسة عمارة:** يمكن استعمال المعادلات التربيعية لنماذج إنشاءات هندسية كأقواس مداخل بعض المباني الضخمة مثل مدخل مطار الملك خالد الدولي في الرياض.

المفردات:

- الصيغة التحليلية ص (١٠٠)
- تحليل كثيرة الحدود ص (١٠٤)
- المعادلة التربيعية ص (١١٥)
- كثيرة الحدود الأولية ص (١٢٣)

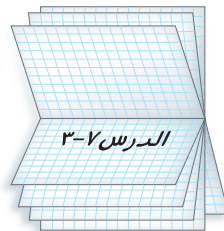


منظم أفكار

المطويات

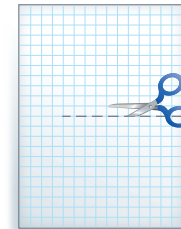
التحليل والمعادلات التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول التحليل والمعادلات التربيعية، مبتدئاً بأربع أوراق مربعات.

٢ **أدخل** الورقتين الأوليين خلال الورقتين الأخريين، وسمّ الورقة الأولى "التحليل والمعادلات التربيعية"، وسمّ الصفحات الأخرى بأرقام الدروس، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

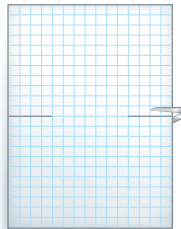


١ **اطو** الأوراق الأربعة من المنتصف عرضياً، وقصّ ٥ سم بدءاً من طرفي خط الطي لأول ورقتين، وقصّ الورقتين الأخريين من المركز، وتوقّف على بعد ٥ سم من طرفيها.

الورقتان الأخريتان



الورقتان الأوليتان





التهيئة للفصل ٧

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة:

$$٦س(-٣س - ٥س - ٥س + ٢س + ٣س), \text{ ثم بسّطها.}$$

$$٦س(-٣س - ٥س - ٥س + ٢س + ٣س)$$

$$= ٦س(-٣س) + ٦س(-٥س) + ٦س(-٥س) + ٦س(٢س) + ٦س(٣س)$$

$$= -١٨س - ٣٠س - ٣٠س + ١٢س + ١٨س$$

$$= -٤٨س + ٣٠س + ١٢س$$

اختبار سريع

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦ - ٥)

$$(١) أ(٥ + ٢) (٢) ٢(٣ + س)$$

$$(٣) ن(٣ - ٢) (٤) ٦(٥ - ٢س + ٦)$$

(٥) **مال:** ذهب خمسة أصدقاء إلى متنزه ترفيهي، فاشترى كل منهم بطاقة دخول بـ ٩ ريال، وعلبة عصير بـ ٣ ريال، وشطيرة بـ ٦ ريال. فاكتب عبارة تمثّل المبلغ الإجمالي الذي دفعوه جميعاً.

مثال ٢

أوجد ناتج الضرب: $(٣ + س)(٢ - ١)$.

$$(٣ + س)(٢ - ١) \quad \text{العبارة الأصلية}$$

$$= ٣(٢) + س(٢) + ٣(-١) + س(-١) \quad \text{طريقة التوزيع بالترتيب}$$

$$= ٦ + ٢س - ٣ - س$$

$$= ٣ + س \quad \text{اضرب}$$

$$= ٣ + س \quad \text{اجمع الحدود المتشابهة}$$

أوجد ناتج الضرب في كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦ - ١)

$$(٦) (٢ + س)(٥ - ١)$$

$$(٧) (٤ + س)(١ - ١)$$

$$(٨) (٣ - ٢)(٤ + ١٥)$$

$$(٩) (٤ - س)(٥ + ١)$$

$$(١٠) (٤ + س)(٧ + ١)$$

$$(١١) (٢ - ١٩)(٦ + ١)$$

(١٢) **مفّرش مائدة:** مفّرش مائدة مستطيل الشكل إذا كان طوله $(٢س + ٣)$ ، وعرضه $(١ + س)$ ، فاكتب عبارة تمثّل مساحته.

مثال ٣

أوجد ناتج: $(٨ + ص)٢$.

$$(٨ + ص)٢ = ٨٢ + ٢(٨)(ص) + ص٢ \quad \text{مربع مجموع حدّين}$$

$$= ٦٤ + ١٦ص + ص٢ \quad \text{بسّط}$$

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦ - ٧)

$$(١٣) (٣ - ١)٢$$

$$(١٤) (٥ + س)٢$$

$$(١٥) (٣ - ٢ص)٢$$

$$(١٦) (٢س + ٥ص)(٢س - ٥ص)$$

(١٧) **تصوير:** صورة بُعداها: $(٦ + س)$ سم،

$(٦ - س)$ سم. فما مساحتها؟



تحقق من فهمك

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحد الآتية:
(أ) ٦ ص ٣، ١٨ ص ع (ب) ١١ أ، ٢١ أ ب (ج) ٣٠ ك، ٣٠ ر، ٥٠ ك، ٢٠ ر

مثال ٣ من واقع الحياة إيجاد (ق. م. أ)

زهور: لدى نورة ٢٠ وردة و ٣٠ زنبقة لعمل باقات زهور. فما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن عملها دون ترك أي زهرة؟ وما عدد زهور كل نوع في كل باقة؟

أوجد (ق. م. أ) للعددين ٢٠ و ٣٠

٢٠ = ٥ × ٢٢ = ٥
اكتب تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية

٣٠ = ٥ × ٣ × ٢ = ٥
العاملان الأوليان المشتركان هما: ٥، ٢

(ق. م. أ) للعددين ٢٠ و ٣٠ هو ٥ × ٢ = ١٠؛ لذا يمكن لنورة عمل ١٠ باقات.

بما أن ٢ × ١٠ = ٢٠، ٣ × ١٠ = ٣٠؛ لذا فستحتوي كل باقة على وردتين و ٣ زنابق.

تحقق من فهمك

(٣) ما أكبر قيمة يمكن أن تمثل الطول المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتهما ٨٤ سم^٢، ٧٠ سم^٢، علمًا بأن بُعدي كل منهما عدنان كليان؟

تأكد

مثال ١

حلّل كلّ وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًا:

(١) ١٢ ج هـ^٢ (٢) ٣٨ ر ب^٢ ن^٢

(٣) ١٧ س ص^٣ ع^٢ (٤) ٢٣ أ ب^٣

المثالان ٢، ٣

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحد الآتية:

(٥) ٢٤ ج د^٣، ٤٨ ج د^٢ (٦) ٧ ج هـ، ١١ م ب

(٧) ٨ س ص^٢، ٣١ س ص^٣ (٨) ١٠ أ ب، ٢٥ أ

(٩) **هندسة:** ما أكبر قيمة يمكن أن تمثل العرض المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتهما ١٥ سم^٢، ١٦ سم^٢، علمًا بأن بُعدي كل منهما عدنان كليان.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

حلّل كل وحيدة حدّ فيما يأتي تحليلًا تامًا:

(١٢) ٢٢ ج هـ^٣ ب^٢

(١١) ٣٥ أ ج^٣ ب^٢

(١٠) ٩٥ س ص^٢

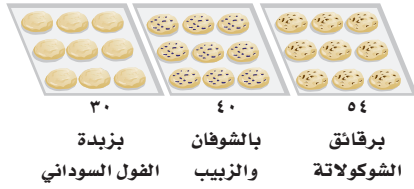
(١٥) ١٢١ أ ب ج هـ^٣ ز^٢

(١٤) ١٠٠ ك ر^٤

(١٣) ٨١ ن ب^٥

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد مما يأتي:

- (١٦) ٢٥س٣، ٤٥س٤، ٦٥س٢ (١٧) ٢٦ع٢، ٣٢ع٣، ٤٤ع٤
 (١٨) ٣٠ج٥، ٤٢ج٢، ٦٦ج١
 (١٩) ١٢ك٢، ٨ر٢، ١٦ر١ (٢٠) ٤٢أ٢، ٢٦أ١، ٣١أ١
 (٢١) ١٥ر٢، ٣٥ر١، ٧٠ر١



(٢٢) **كعك:** يريد حامد وضع العدد نفسه من كل نوع من الكعك في كل كيس، بحيث يحتوي الكيس على أنواع الكعك جميعها. ما أكبر عدد ممكن من الأكياس يلزمه؟

(٢٣) **هندسة:** مساحة مثلث ٢٨ سم^٢، كم يمكن أن يكون طول كل من قاعدته وارتفاعه بالأعداد الكلية؟

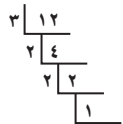
(٢٤) **كتب:** بكم طريقة تستطيع أسماء تنظيم ٣٦ كتاباً على رفين على الأقل، بحيث يوضع على كل رف العدد نفسه من الكتب، ولا يقل عن ٤؟

(٢٥) **معلبات:** بكم طريقة يستطيع سعيد ترتيب ٨٠ علبة على أربعة رفوف على الأقل، بحيث يكون عدد العلب متساوياً على كل رف ولا يقل عن ٥؟

(٢٦) **تبرع:** اشترى صقر مجموعة اللوازم المدرسية التالية: ٢٠ قلم رصاص، ١٥٠ ورقة ملونة، ١٢٠ ملف أوراق، ويريد وضعها في حزم متماثلة؛ ليتبرع بها لأكبر عدد ممكن من الطلاب. كم حزمة يمكنه عملها؟ وكم قطعة من كل نوع ستكون في كل حزمة؟

(٢٧) **نظرية الأعداد:** العددان الأوليان التوأمين هما عدداً أوليان فرديان متتاليان. أول زوجين منهما هما: ٣ و ٥، ٥ و ٧. اكتب الأزواج الخمسة التالية لهما.

(٢٨) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال طريقة تحليل عدد إلى عوامله الأولية.



العدد ١٢ يكتب على الشكل
 عند تحليله لعوامله الأولية

(أ) **تحليلياً:** انسخ مخطط السلم المبين جانباً ٦ مرات، وسجّل في الجزء العلوي الأيمن من كل شكل عدداً كلياً، بحيث يكون اثنان منها أوليين.

(ب) **تحليلياً:** اختر عاملاً أولياً لأحد الأعداد. وسجّل العامل إلى يسار هذا العدد في الشكل، ثم قسّم العددين واكتب الناتج تحت العدد، كرر الخطوات السابقة حتى يصبح ناتج القسمة ١. وأضف أو احذف أجزاءً من الشكل إذا تطلّب الأمر ذلك، ثم كرر هذه العملية مع جميع الأعداد.

(ج) **لفظياً:** ما التحليل للعوامل الأولية لكل عدد من الأعداد الستة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٩) **تحذ:** أوجد أصغر زوج من الأعداد يحقق الشروط الآتية: (ق. م. أ) للعددين يساوي ١١، أحدهما زوجي والآخر فردي، وأحدهما ليس من مضاعفات الآخر.

(٣٠) **تبرير:** المضاعف المشترك الأصغر (م. م. أ) لعددين أو أكثر هو أصغر عدد يكون مضاعفاً لكل عدد منها. اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين (ق. م. أ) و (م. م. أ) لعددين أو أكثر.

(٣١) **تبرير:** هل العبارة "القاسم المشترك الأكبر لأي وحدتي حد لا يساوي ١ أبداً" صحيحة أم خاطئة؟
ادعم إجابتك بمثال أو مثال مضاد.

وحيدة الحد	التحليل إلى العوامل الأولية
١٥ أ ^٣ ب ج ^٣	
٦ ب ^٣ ج د ^٣	
١٢ ج د ^٢ ف	
٢٢ د ^٢ ف ل ^٢	
٣٠ ف ل ^٢ هـ	

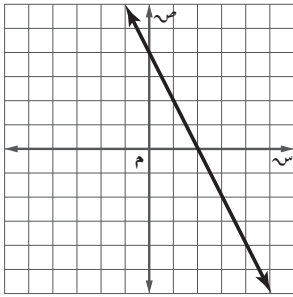
(٣٢) **تحّد:** يُسمّى العدّان الصحيحان أو وحدتا الحدّ أوليين فيما بينهما، إذا كان (ق. م. أ.) لهما هو العدد ١. انقل الجدول المجاور، ثم أكمله لتحّد أزواج وحدات الحدّ التي تكون أولية فيما بينها.

(٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث وحدات حد على أن يكون (ق. م. أ.) لها ٦ ص^٣. فسّر إجابتك.

(٣٤) **اكتب:** عرّف التحليل إلى العوامل الأولية بكلماتك الخاصة، وفسّر كيف تحلّل وحيدة الحدّ إلى عواملها الأولية، وكيف يساعدك هذا التحليل على تحديد (ق. م. أ.) لوحيدتي حدّ أو أكثر.

تدريب على اختبار

(٣٧) ما معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم المُبيّن في الشكل؟



- (أ) ص = ٢س + ٤
(ب) ص = ٢س - ٥
(ج) ص = $\frac{1}{4}$ س - ٦
(د) ص = $\frac{1}{4}$ س + ٣

(٣٥) ما قيمة هـ في المعادلة ٤هـ - ٢٧ = ١٩ + ٢هـ؟

- (أ) ٤ -
(ب) ٤
(ج) ٢٣
(د) ٤٦

(٣٦) إجابة قصيرة: أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (١، -٢)، (٥، -١).

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٧)

- (٣٨) (أ - ٤)^٢ (٣٩) (ج + ٦)^٢ (٤٠) (٥ - ع)^٢
(٤١) (ن - ٣)(ن + ٣) (٤٢) (ص + ٢)^٢ (٤٣) (٧ - د)(٧ + د)

أوجد ناتج الضرب في كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٦)

- (٤٤) (٢م - ٣)(٣ + م + ٤) (٤٥) (٥ - هـ)(٢ - هـ - ٣) (٤٦) (٩ + ن)(٢ + ن) (٤٧) (١ - ر)(٨ - ر - ٦) (٤٨) (٣ + ف)(٣ + ك) (٤٩) (١ + ن)(٢ + ن)(٤ - ن)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة ممّا يأتي:



- (٥٢) هـ - ٦ هـ - ٥
(٥٥) ٣ع - ٦س

- (٥١) $\frac{1}{4}$ د (٦ + د)^٢
(٥٤) ٥ ص - ١٠

- (٥٠) ٢ (٤س - ٧)
(٥٣) ٩م - ٩ب



استعمال خاصية التوزيع

لماذا؟



تُحدّد أجرة متجر حسب مساحته. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة $م = ٦, ١ \text{ ض } ٦ + ٢ \text{ ض } ٦$ ، حيث تمثل ض عرض المتجر بالأمتار، ويمكننا استعمال التحليل إلى العوامل وخاصية الضرب الصفري لإيجاد أبعاد المتجر الممكنة.

استعمال خاصية التوزيع في التحليل: استعملت خاصية

التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود كما في المثال الآتي:

$$٥٠(٧ + ٤) = ٥٠(٧) + ٥٠(٤) = ٣٥٠ + ٢٠٠ = ٥٥٠$$

ويمكنك الاستفادة من ذلك في العمل عكسيًا للتعبير عن كثيرة الحدود بصورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد، وكثيرة الحدود.

$$٦, ١ \text{ ض } ٦ + ٢ \text{ ض } ٦ = ٦(١ + ٢) \text{ ض } ٦$$

كذلك $٥٠(٧ + ٤)$ يمثل تحليل ثنائية الحدّ $٢٠٠ + ٣٥٠$. ويشتمل **تحليل كثيرة الحدود** تحليلها إلى عواملها الأولية.

٧-٢

فيما سبق

درست إيجاد (ق.م.أ) لمجموعة من وحدات الحد.

والآن

- استعمل خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود.
- أحلّ معادلات تربيعية على الصورة: $أس^٢ + بس + ج = ٠$

المفردات

تحليل كثيرة حدود

التحليل بتجميع الحدود

خاصية الضرب الصفري

مثال ١ استعمال خاصية التوزيع في التحليل

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

(أ) $٢٧ص + ١٨ص$

أوجد (ق.م.أ) لجميع الحدود.

حلّ كل حد.

ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

$$٢٧ص = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ص$$

$$١٨ص = ٢ \times ٣ \times ٣ \times ص$$

$$(ق.م.أ) = ٣ \times ٣ \times ص = ٩ص$$

اكتب كل حدّ على صورة حاصل ضرب (ق.م.أ) في باقي العوامل. واستعمل خاصية التوزيع لإخراج (ق.م.أ).

أعد كتابة كل حدّ باستعمال (ق.م.أ).

خاصية التوزيع.

$$٢٧ص + ١٨ص = ٩ص(٣ + ٢)$$

$$= ٩ص(٢ + ٣)$$

(ب) $٢٤أ - ١٨أ + ٢أ$

حلّ كل حدّ.

ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

$$٢٤أ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣ \times أ$$

$$١٨أ = ٢ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times أ$$

$$٢أ = ٢ \times أ$$

$$(ق.م.أ) = ٢ \times أ = ٢أ$$

$$٢٤أ - ١٨أ + ٢أ = ٢أ(١٢ - ٩ + ١) = ٢أ(٤ - ٢ + ١)$$

$$= ٢أ(٤ - ٢ + ١)$$



وزارة التعليم

Ministry of Education

2022 - 1444

خاصية التوزيع

تحقق من فهمك

(أ) $١٥ - ٣$ (ب) $٧٢ ن + ٢١ ل - ٢ ن$

تُسمَّى الطريقة التي تُستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكوّن من أربعة حدود أو أكثر **التحليل بتجميع الحدود**؛ لأن الحدود تُجمع بطريقة معينة، ثم يحلّل كل تجميع، ثم تطبق خاصية التوزيع لإخراج عامل مشترك.

أضف إلى

مطوّبتك

التحليل بتجميع الحدود

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود، إذا توافرت جميع الشروط الآتية:

- تتكوّن كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر.
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معاً عوامل مشتركة.
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعي للآخر.

الرموز: $أس + ب س + أص + ب ص = (أس + ب س) + (أص + ب ص)$

$$= س(أ + ب) + ص(أ + ب)$$

$$= (س + ص)(أ + ب)$$

المثال ٢ التحليل بتجميع الحدود

مثال ٢

حلّ: $٤ ك + ٨ ر + ٣ ك + ٦$

$$٤ ك + ٨ ر + ٣ ك + ٦$$

$$= (٤ ك + ٨ ر) + (٣ ك + ٦)$$

$$= ٤ ر(٢ + ك) + ٣(ك + ٢)$$

$$= (٢ + ك)(٤ ر + ٣)$$

العبارة الأصلية

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلّ كل تجميع بإخراج (ق.م.أ.)

خاصية التوزيع

لاحظ أنّ $(٢ + ك)$ عامل مشترك لـ $٤ ر(٢ + ك)$ و $٣(ك + ٢)$.

تحقق من فهمك

حلّ كلاً من كثيرات الحدود الآتية :

(أ) $٥ ن - ٥ ن - ر - ٥$ (ب) $٣ ن ك + ١٥ ك - ٤ ن - ٢٠$

من المفيد معرفة متى تكون إحدى ثنائيتي الحد نظيراً جمعياً للآخرى. فمثلاً $٦ - أ = ١ - (أ - ٦)$

المثال ٣ التحليل بتجميع الحدود (العوامل نظائر جمعية)

مثال ٣

حلّ: $٢ م ك - ١٢ م + ٧ ك - ٤٢$

$$٢ م ك - ١٢ م + ٧ ك - ٤٢$$

$$= (٢ م ك - ١٢ م) + (٧ ك - ٤٢)$$

$$= ٢ م(ك - ٦) + ٧(ك - ٦)$$

$$= (ك - ٦)[٢ م + ٧]$$

$$= (ك - ٦)(٢ م + ٧)$$

$$= (٦ - ك)(٧ + ٢ م)$$

العبارة الأصلية

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة.

حلّ كل تجميع بإخراج (ق.م.أ.).

$$٦ - ك = ١ - (ك - ٦)$$

خاصية التجميع

خاصية التوزيع

إرشادات للدراسة

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٧-٢: استعمال خاصية التوزيع - ٢٠٢٢

تحقق من فهمك

حلّ كلاً من كثيرات الحدود الآتية :

$$(٣) \text{ ب) } ٣ - ٢ - ٢ - ٢ + ١٨ + ٢٧$$

$$(١٣) \text{ جـ } ٢ - ٢ + ٨ - ٤$$

حلّ المعادلات بالتحليل : يمكنك حلّ بعض المعادلات بالتحليل .

$$٠ = (٠, ٢٥) \quad ٠ = (٠)٣١٢ - \quad ٠ = (٢ - ٢) \quad ٠ = (٠)٣$$

انظر إلى الجمل الآتية: لاحظ أن أحد العاملين على الأقل في كلّ حالة يساوي صفراً. وتبيّن هذه الأمثلة **خاصية الضرب الصفري**.

أضف إلى

مطويتك

خاصية الضرب الصفري

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفراً، فيجب أن يكون أحدهما على الأقل صفراً.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان أ ب = ٠، فإن أ = ٠ أو ب = ٠، أو أن كليهما يساوي صفراً.

سبق أن تعلمت أن حلّ المعادلة أو جذرها هو أيّ قيمة للمتغير تجعلها صحيحة.

حلّ المعادلات

مثال ٤

حلّ كلاً من المعادلات الآتية وتحقق من صحة الحل :

$$(١) \text{ أ) } ٠ = (١٥ - ٣)(٦ + ٢)$$

$$٠ = (١٥ - ٣)(٦ + ٢)$$

$$٠ = ١٥ - ٣ \quad \text{أو} \quad ٠ = ٦ + ٢$$

$$١٥ = ٣ \quad ٦ = -٢$$

$$٥ = ٣ \quad ٣ = -٢$$

الجذران هما -٣، ٥

تحقق: عوض عن د بكلّ من -٣، ٥ في المعادلة الأصلية.

$$٠ = (١٥ - ٣)(٦ + ٢)$$

$$٠ = (١٥ - ٣)(٦ + ٢)$$

$$٠ \stackrel{?}{=} [١٥ - (٥)٣][٦ + (٥)٢]$$

$$٠ \stackrel{?}{=} [١٥ - (٣-)٣][٦ + (٣-)٢]$$

$$٠ \stackrel{?}{=} (١٥ - ١٥)(٦ + ١٠)$$

$$٠ \stackrel{?}{=} (١٥ - ٩-)(٦ + ٦-)$$

$$٠ \stackrel{?}{=} (٠)١٦$$

$$٠ \stackrel{?}{=} (٢٤-)(٠)$$

$$\checkmark ٠ = ٠$$

$$\checkmark ٠ = ٠$$

$$(ب) \text{ جـ } ٣ = ٢ - \text{جـ}$$

$$\text{جـ } ٣ = ٢ - \text{جـ}$$

$$\text{جـ } ٣ - ٢ = \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = (٣ - \text{جـ})$$

$$\text{جـ} = ٣ - \text{جـ} \quad \text{أو} \quad ٠ = ٣ - \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = ٣$$

الجذران هما ٣، ٠

المعادلة الأصلية

اطرح ٣ جـ من كل طرف للحصول على صفر في أحد طرفي المعادلة.

حلّ باستعمال (ق.م.أ) للحصول على الصورة أ ب = ٠

خاصية الضرب الصفري

حلّ كلّ معادلة

تحقق بتعويض كل من صفر، ٣ بدلاً من جـ



تحقق من فهمك

(أ) $3(ن + 2) = 0$ (ب) $8ب - 40 = 0$ (ج) $4س - 10 = 0$

مثال ٥ من واقع الحياة استعمال التحليل

رمي السهم: يمكن تمثيل ارتفاع سهم بالمعادلة $ه = ٥ - ٢ن + ٢٠$ ، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني. إذا أهمل ارتفاع رامي السهم، بعد كم ثانية يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه؟ عندما يصل السهم إلى الأرض $ه = 0$

المعادلة الأصلية

$$ه = ٥ - ٢ن + ٢٠$$

عوض عن ع بـ ٠

$$٠ = ٥ - ٢ن + ٢٠$$

حلّ بإخراج (ق.م.أ)

$$٠ = ٥ - (٢ن + ٤)$$

خاصية ضرب الصفري

$$٠ = ٥ - ٢ن - ٤$$

حلّ كل معادلة

$$٠ = ٢ن - ٩$$

اقسم كل حد على -١

$$٤ = ن$$

يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه بـ ٤ ثوانٍ.

تحقق من فهمك

(٥) **قفز الأرنب:** يمكن تمثيل قفزة الأرنب بالمعادلة $ه = ٥ - ٢ن + ٢٠$ ، حيث تمثل (ع) ارتفاع القفزة بالمتر، و(ن) الزمن بالثواني. أوجد قيمة ن عندما $ه = 0$ صفراً.



الربط مع الحياة

يتطلب رمي السهم أو الرمي بالقوس تركيزاً عالياً ومهارة ودقة في التصويب؛ لضمان إصابة الهدف.

تأكد

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

(١) $٢١ب - ١٥أ$ (٢) $١٤ج - ٢ب$ (٣) $١٢ك + ٢ل + ٢ك + ٢ل$

حلّ كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

(٤) $٢ن + ٨م + ١٦$ (٥) $٧س - ٧ص + ٩ع - ٦ب$ (٦) $١٥ج - ١٠ب - ١٥ج$

حلّ كلاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

(٧) $٣ك(١٠ + ك) = ٠$ (٨) $٤(٢ + م) - ٣(٩ - م) = ٠$ (٩) $٢ر = ١٤$

(١٠) **صواريخ:** أطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ثانية. وتمثل المعادلة $ه = ٤٢ - ٥ن + ٢$ ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

(أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟

(ب) حلّ المعادلة $٤٢ - ٥ن = ٢$

(ج) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٧-٢: استعمال خاصية التوزيع - ٢٠٢٢

مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

$$(١١) \quad ١٦ن - ٤٠ص \quad (١٢) \quad ٣٠ف + ٥٠س$$

$$(١٣) \quad ٢ك٤ + ٢ك \quad (١٤) \quad ٥ع١٠ + ٢ع$$

$$(١٥) \quad ٢أ٤ + ٢أ٢ - ١٠أب \quad (١٦) \quad ٥ج٢ف - ١٥ج٢ف + ٥ج٢ف٣$$

المثالان ٢، ٣: حل كل من كثيرات الحدود الآتية:

$$(١٧) \quad ١٦أ - ٢٤أ - ٢٤أ \quad (١٨) \quad ١٠هـ - ٥ل - ٢هـ$$

$$(١٩) \quad ٢س - ٢س - ٢س + ٢ص \quad (٢٠) \quad ٢٤ن - ٢٤ص - ١٨ن + ٤ص - ٣$$

$$(٢١) \quad ٣د - ٣د - ٣٥د + ٢١د \quad (٢٢) \quad ١٢ر + ٢ر٨$$

$$(٢٣) \quad ٢١ن - ٣هـ - ٣٥هـ + ٥ \quad (٢٤) \quad ٩٦ف + ١٢ل + ٨ف + ٩٦$$

$$(٢٥) \quad ٥ب - ٢٥ب + ٢ر - ١٠ \quad (٢٦) \quad ١٢ن - ٣و + ٨و - ٣ن$$

$$(٢٧) \quad ٥جف٢ + ٥جف٢ + ١٥جف \quad (٢٨) \quad ٨١ف - ٩ف + ٩ف - ٨١$$

$$(٢٩) \quad ١٨ر٣ن + ١٢ر٢ن - ٢ر٦ن \quad (٣٠) \quad ١٦ج - ٢٤ج - ٢هـ - ٣$$

مثال ٤

حل كل من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(٣١) \quad ٣ب(٩ - ٢٧) = ٠ \quad (٣٢) \quad ٢ن(٣ + ٣ن) = ٠ \quad (٣٣) \quad (٤ + ٤٨)(٤ + ٤٨) = ٠$$

$$(٣٤) \quad (٧س + ٣)(٣ - ٦س) = ٠ \quad (٣٥) \quad ٣ب - ٢ب = ٠ \quad (٣٦) \quad ٢أ = ٤أ$$

مثال ٥

(٣٧) **فروسية:** يمكن تمثيل ارتفاع قفزة فرس في سباق الحواجز بالمعادلة $٥ن + ٢ = ٥٠$ ؛ حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني.

- (أ) اكتب عبارة تمثل الارتفاع على صورة حاصل ضرب عوامل.
- (ب) أوجد قيم ن عندما $٥ = ٠$ ؟

(ج) ما الارتفاع الذي يكون عليه الفارس بعد ٣ ثوانٍ من بداية القفز؟ وهل هذا ممكن؟ فسّر إجابتك.

(٣٨) **هندسة عمارة:** يمكن تمثيل إطار قوس بوابة بالمعادلة $١ - ١٢س + ٢س = ٠$ ؛ حيث س، ص بالستمتري. ومحور السينات يمر بطرفي القوس على الأرض.

(أ) كَوّن جدولاً لارتفاع القوس إذا كان $٠ = ٢٠، ٤٠، ٦٠، ٨٠، ١٠٠$ سم.

(ب) مثل نقاط الجدول في المستوى الإحداثي، وصل بين النقاط لتكوّن منحنى يمثل القوس.

(ج) ما أقصى ارتفاع لقوس البوابة؟



الربط مع الحياة

حقق فريق الفروسية في المملكة المركز الثاني في بطولة العالم للفروسية للفردى قفز الحواجز عام ٢٠١٠م.



؟	؟
؟	س ^٢
؟	٦-

(٣٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة طريقة الصندوق

للتحليل، ممثلاً لتحليل س^٢ + س - ٦، اكتب أول حد في الزاوية اليمنى العليا من الصندوق، ثم اكتب آخر حد في الزاوية السفلى اليسرى.

(أ) **تحليلياً:** حدّد عددين ناتج ضربهما -٦، وناتج جمعهما ١.

(ب) **رمزياً:** اكتب كل عامل منهما في المربع الفارغ، متضمناً المتغير وإشارته الموجبة أو السالبة.

(ج) **تحليلياً:** أوجد عوامل كل صف وعمود في الصندوق، ثم أوجد عوامل س^٢ + س - ٦.

(د) **لفظياً:** صف كيف تستعمل طريقة الصندوق لتحليل س^٢ - ٣س - ٤٠.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة ٢م^٢ = ٤م. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

حمد	راشد
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ = ٤م
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ - ٤م = ٠
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ - ٤م = ٠
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ - ٤م = ٠
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ - ٤م = ٠
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ - ٤م = ٠
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ - ٤م = ٠
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ - ٤م = ٠
٢م ^٢ = ٤م	٢م ^٢ - ٤م = ٠

(٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرة حدود بأربعة حدود، يمكن تحليلها بتجميع الحدود، ثم حلّها.

(٤٢) **تبرير:** في المعادلة جـ = أ^٢ - أ ب، ما قيم أ، ب التي تجعل جـ = ٠؟

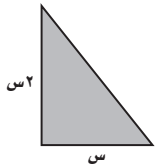
(٤٣) **اكتب:** وضح كيف تحل معادلة تربيعية باستعمال خاصية الضرب الصفري.

تدريب على اختبار

(٤٤) أي مما يأتي يمثل عاملاً لكثيرة الحدود:
٢ع^٦ - ٣ع^٣ - ٢ع^٢ + ٤ع^٤؟

- (أ) ١ + ع^٢ (ب) ٢ - ع^٣
(ج) ٢ + ع (د) ١ - ع^٢

(٤٥) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث القائم الزاوية المبين أذناه ٥ سم سم^٢، فما ارتفاعه؟



- (أ) ٢ سم (ب) ٥ سم
(ج) ٨ سم (د) ١٠ سم



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٧-٢: استعمال خاصية التوزيع - ٢٠٢٢

مراجعة تراكمية

أوجد (ق.م.أ) لكل مجموعة وحيدات حدود مما يأتي: (الدرس ٧ - ١)

(٤٦) $٣٠أ^٢، ٥٠أب^٢$ (٤٧) $٨ج^٢د^٣، ١٦ج^٣د$ (٤٨) $٤ص، ١٨ص^٢، ٦ص^٣$

بسّط كلّ عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦ - ١)

(٤٩) $(أب^٤)(أب^٢)$ (٥٠) $(٧ج^٣د^٤)(٤ج^٣د)$ (٥١) $(٩صص^٧)^٢$ (٥٢) $[٣(٢٤)^٢]$

(٥٣) حلّ المتباينة $٣ص - ٤ < ٣٧$ ، وتحقق من صحة الحل. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كلّ مما يأتي:

(٥٤) $(٢ + ب)(٥ + ب)$ (٥٥) $(٤ + د)(١٠ + د)$ (٥٦) $(١ - ع)(٨ - ع)$
(٥٧) $(٩ + ج)(٣ - ج)$ (٥٨) $(٧ - س)(٦ - س)$ (٥٩) $(٢ - هـ)(١١ + هـ)$





تحليل ثلاثية الحدود

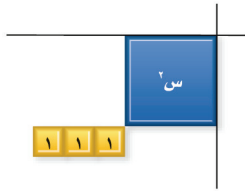
يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحليل ثلاثية الحدود. فإذا مثلت كثيرة الحدود مساحة مستطيل مُكوّن من بطاقات الجبر، فإن بعديه يمثلان عاملين لكثيرة الحدود، أما إذا لم يكن بالإمكان تكوين مستطيل يمثل ثلاثية الحدود، فإن ثلاثية الحدود تكون غير قابلة للتحليل.

نشاط ١

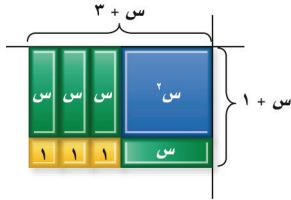
تحليل العبارة: $س^٢ + ب س + ج$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^٢ + ٤س + ٣$

الخطوة ١: مثل $س^٢ + ٤س + ٣$ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع البطاقة $س^٢$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ كما في الشكل المجاور، لتكوّن مستطيلاً. بما أن ٣ عدد أولي، فإنه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمستطيل بطريقة واحدة، هي ١ في ٣.



الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات $س$ ، فيكون بذلك

عرض المستطيل $س + ١$ ، وطوله $س + ٣$

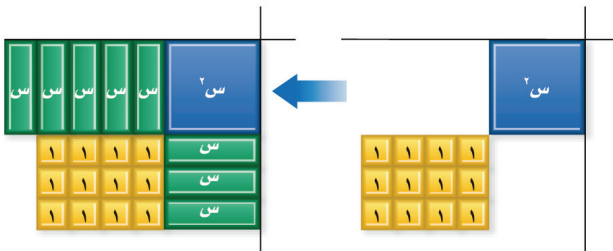
إذن: $س^٢ + ٤س + ٣ = (س + ٣)(س + ١)$.

نشاط ٢

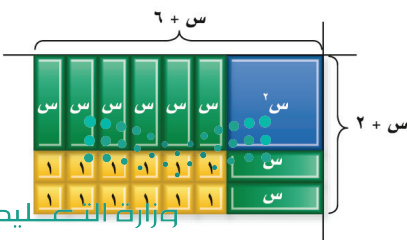
تحليل العبارة: $س^٢ + ب س + ج$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^٢ + ٨س + ١٢$

الخطوة ١: مثل $س^٢ + ٨س + ١٢$ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^٢$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ لتكوّن مستطيلاً. وبما أن $١٢ = ٣ \times ٤$ ، فحاول إنشاء مستطيل أبعاده ٣ و ٤، وحاول إكمال الشكل العام لمستطيل باستعمال بطاقات $س$ ، ثم لاحظ أن هناك بطاقات إضافية.



الخطوة ٣: رتبّ بطاقات العدد ١ بمستطيل أبعاده ٢ و ٦ ثم أكمل المستطيل،

وفي هذه الحالة تكون قد استعملت جميع بطاقات $س$ لتكوين

المستطيل. ويكون عرض المستطيل $س + ٢$ ، وطوله $س + ٦$

إذن $س^٢ + ٨س + ١٢ = (س + ٦)(س + ٢)$.

نشاط ٣

تحليل العبارة: $س^2 - ب س + ج$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^2 - ٥س + ٦$

الخطوة ١: مثل $س^2 - ٥س + ٦$

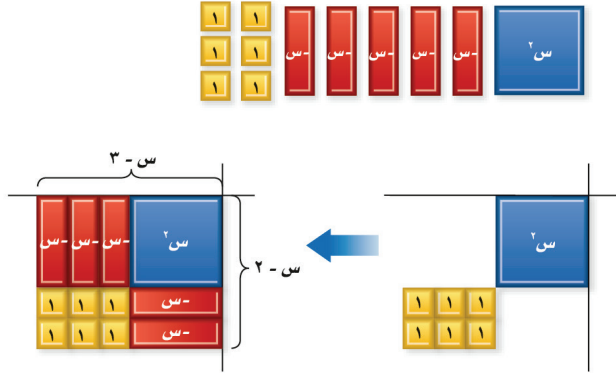
الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^2$ في زاوية لوحة الضرب.

ورتب البطاقات ١ لتكون مستطيلاً أبعاده ٢ و ٣

الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات $س$. فيكون

بذلك عرضه $س - ٢$ ، وطوله $س - ٣$

إذن $س^2 - ٥س + ٦ = (س - ٢)(س - ٣)$



نشاط ٤

تحليل العبارة: $س^2 - ب س - ج$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^2 - ٤س - ٥$

الخطوة ١: مثل $س^2 - ٤س - ٥$

الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^2$ في زاوية لوحة الضرب،

ورتب بطاقات العدد ١ لتكون مستطيلاً أبعاده ١ و ٥

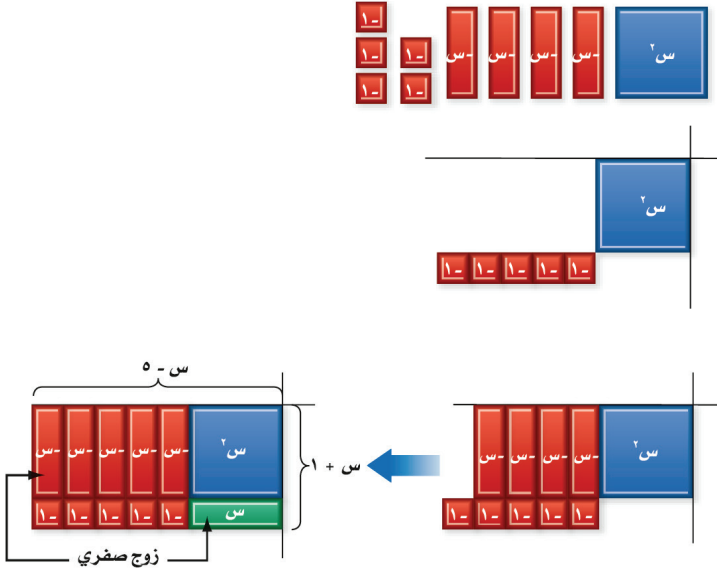
الخطوة ٣: ضع البطاقات $س$ كما في الشكل. وتذكر أنه

يمكنك إضافة أزواج صفيرية دون تغيير قيمة

كثيرة الحدود. وفي هذه الحالة، أضف زوجاً

صفرياً من البطاقات $س$ ، $س$.

لذا فإن $س^2 - ٤س - ٥ = (س + ١)(س - ٥)$



التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لتحليل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

(٤) $س^2 - ٧س + ١٢$

(٣) $س^2 + ٣س - ٤$

(٢) $س^2 + ٦س + ٨$

(١) $س^2 + ٣س + ٢$

استعمل الرسم بمخطط لتبين إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي قابلة للتحليل أم لا:

(٧) $س^2 - ٤$

(٦) $س^2 - ٥س - ٦$

(٥) $س^2 + ٣س + ٦$

(٩) **اكتب** كيف يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحديد إذا كانت ثلاثية حدود قابلة للتحليل؟

(٨) $س^2 - ٤س - ٤$



المعادلات التربيعية: $س^2 + ب س + ج = ٠$

لماذا؟



بركة سباحة سطحها مستطيل الشكل، يُراد وضع سياج حولها طوله ٢٤ م. إذا كانت مساحة سطح البركة ٣٦ م^٢، فما بعدها؟

لحل هذه المسألة يجب إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦ ومجموعهما يساوي ١٢ (نصف محيط البركة).

تحليل $س^2 + ب س + ج$: تعلمت كيف تضرب ثنائيي حدّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، على أن تكون كل ثنائية حد منهما عاملاً لنتائج الضرب. ويمكن استعمال نمط ضرب ثنائيي الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود.

$$(س + ٣)(س + ٤) = س^2 + ٧س + ١٢ \quad \text{طريقة التوزيع بالترتيب}$$

$$س^2 + ٧س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤) \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$س^2 + ٧س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤) \quad \text{بسط}$$

لاحظ أن معامل الحد الأوسط ٧ هو مجموع العددين ٣ و ٤، والحد الأخير ١٢ هو ناتج ضربهما.

لاحظ القاعدة الآتية في الضرب:

$$(س + ٣)(س + ٤) = س^2 + ٧س + ١٢$$

$$(س + م)(س + ن) = س^2 + (م + ن)س + م ن \quad \text{لتكن } م = ٣, ن = ٤$$

$$س^2 + (م + ن)س + م ن = (س + م)(س + ن) \quad \text{الإبدال (+)}$$

$$س^2 + ب س + ج = (س + م)(س + ن) \quad \text{ب = م + ن, ج = م ن}$$

لاحظ أن معامل الحد الأوسط هو مجموع م و ن، والحد الأخير هو ناتج ضربهما.

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $س^2 + ب س + ج$.

فيما سبق

درست ضرب ثنائيات الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

■ أحلّ ثلاثية حدود على الصورة:

$$س^2 + ب س + ج = ٠$$

■ أحلّ المعادلات على الصورة:

$$س^2 + ب س + ج = ٠$$

المضردات

المعادلة التربيعية

أضف إلى

مطوياتك

تحليل $س^2 + ب س + ج$

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^2 + ب س + ج$ ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب، وناتج ضربهما ج، ثم اكتب $س^2 + ب س + ج$ على الصورة $(س + م)(س + ن)$.

الرموز: $س^2 + ب س + ج = (س + م)(س + ن)$ ، حيث م + ن = ب، م ن = ج

مثال: $س^2 + ٦س + ٨ = (س + ٢)(س + ٤)$. لأن ٢ + ٤ = ٦، ٢ × ٤ = ٨

يكون لعاملي ج الإشارة نفسها عندما تكون موجبة. ويعتمد كون العاملين موجبين أو سالبين على إشارة



خمن وتحقق

عند تحليل ثلاثية حدود،
اعمل تخميناً مدروساً،
وتحقق من المعقولة، ثم
عدّل التخمين حتى تصل
إلى الإجابة الصحيحة.

مثال ١

تحليل $س^٢ + ب س + ج$ عندما يكون ب، ج موجبين

حلّ: $س^٢ + ٩س + ٢٠$.

بما أن ج، ب موجبان في ثلاثية الحدود، $ب = ٩$ ، $ج = ٢٠$. لذا يجب إيجاد عاملين موجبين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠. كوّن قائمة عوامل العدد ٢٠، وأوجد العاملين اللذين مجموعهما ٩.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
٢٠، ١	٢١
١٠، ٢	١٢
٥، ٤	٩

العاملان الصحيحان هما ٤، ٥

اكتب القاعدة

$$م = ٤، ن = ٥$$

$$س^٢ + ٩س + ٢٠ = (س + م)(س + ن)$$

$$= (س + ٤)(س + ٥)$$

تحقق: يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين لتحصل على العبارة الأصلية.

طريقة التوزيع بالترتيب

$$(س + ٤)(س + ٥) = س^٢ + ٥س + ٤س + ٢٠$$

بسط.

$$= س^٢ + ٩س + ٢٠ ✓$$

تحقق من فهمك

حلّ كلّاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

$$(أ) س^٢ + ٩س + ٢٠$$

$$(ب) س^٢ + ١٠س + ٩$$

إذا كانت ب سالبة، وج موجبة في ثلاثية الحدود، استعمل ما تعرفه عن ضرب ثنائيي الحد؛ لتقليص قائمة العوامل الممكنة.

مثال ٢

تحليل $س^٢ + ب س + ج$ عندما تكون ب سالبة، ج موجبة

حلّ: $س^٢ - ٨س + ١٢$

بما أن ج موجبة، و ب سالبة في ثلاثية الحدود، $ب = -٨$ ، $ج = ١٢$ لذا يجب إيجاد عاملين سالبين مجموعهما -٨ وحاصل ضربهما ١٢

عوامل العدد ١٢	مجموع العاملين
١٢، -١	-١٣
٦، -٢	-٨
٤، -٣	-٧

العاملان الصحيحان هما -٢، -٦

اكتب القاعدة

$$م = -٢، ن = -٦$$

$$س^٢ - ٨س + ١٢ = (س + م)(س + ن)$$

$$= (س - ٢)(س - ٦)$$

تحقق: مثل المعادلتين: $ص = س^٢ - ٨س + ١٢$ ، $ص = (س - ٢)(س - ٦)$

بياناً على الشاشة نفسها. بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية

الحدود حُللت بصورة صحيحة. ✓

تحقق من فهمك

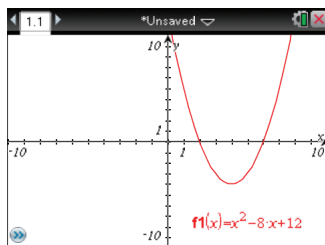
حلّ كلّاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

$$(أ) س^٢ - ٢١س + ٢٢$$

$$(ب) س^٢ - ١١س + ٢٨$$

إيجاد العوامل

عندما تجد العوامل
الصحيحة فليس هناك
ضرورة لاختبار العوامل
الأخرى. فمثلاً، العاملان
الصحيحان في المثال ٢ هما:
-٢ و -٦، لذا فلا داعي
لاختبار العاملين:
-٣ و -٤



عندما تكون جـ سالبة، يكون لعاملها إشارتان مختلفتان. ولتحدد أي عامل منهما موجب وأيها سالب، انظر إلى إشارة ب؛ فالعامل الذي له القيمة المطلقة الكبرى له إشارة ب نفسها.

مراجعة المفردات

القيمة المطلقة

تمثل القيمة المطلقة للعدد
ن المسافة بين العدد
والصفر على خط الأعداد.
وتكتب على الصورة |ن|.

مثال ٣ تحليل س^٢ + ب س + ج عندما تكون ج سالبة

حلّ كل كثيرة حدود فيما يأتي:

(أ) س^٢ + ٢س - ١٥

في ثلاثية الحدود هذه ب = ٢، ج = -١٥ وبما أن ج سالبة. فإن م وَ ن عدداً مختلفان في الإشارة. وبما أن ب موجبة، فالعامل الذي قيمته المطلقة أكبر يكون موجباً.

اكتب أزواجاً من عوامل العدد -١٥، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالباً والآخر موجباً، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما ٢.

عوامل العدد -١٥	مجموع العاملين
١٥، ١-	١٤
٣، ٥-	٢

العاملان الصحيحان هما ٣، ٥

اكتب القاعدة

م = ٣، ن = ٥

طريقة التوزيع بالترتيب

بسّط

$$\begin{aligned} \text{س}^2 + ٢\text{س} - ١٥ &= (\text{س} + ٣)(\text{س} - ٥) \\ &= (\text{س} - ٥)(٣ + \text{س}) \\ \text{تحقق: } (٣ - \text{س})(٥ + \text{س}) &= \text{س}^2 + ٢\text{س} - ١٥ \\ &= \text{س}^2 + ٢\text{س} - ١٥ \quad \checkmark \end{aligned}$$

(ب) س^٢ - ٧س - ١٨

في ثلاثية الحدود هذه ب = -٧، ج = -١٨. إذن م أو ن سالبة، وليس كلاهما. وبما أن ب سالبة، فالعامل ذو القيمة المطلقة الكبرى يكون سالباً.

اكتب أزواجاً من عوامل -١٨، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالباً والآخر موجباً، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما -٧.

عوامل العدد -١٨	مجموع العاملين
١٨، ١-	١٧-
٩، ٢-	٧-
٦، ٣-	٣-

العاملان الصحيحان هما ٩، ٢

اكتب القاعدة

م = ٩، ن = ٢

$$\begin{aligned} \text{س}^2 - ٧\text{س} - ١٨ &= (\text{س} + ٩)(\text{س} - ٢) \\ &= (\text{س} - ٢)(٩ + \text{س}) \end{aligned}$$

تحقق: مثّل المعادلتين ص = س^٢ - ٧س - ١٨،

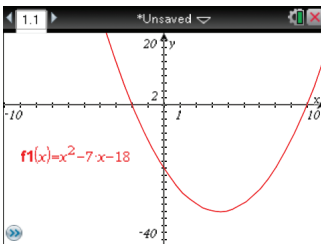
ص = (س + ٩)(س - ٢) بياناً على الشاشة نفسها،

بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُلّت بصورة صحيحة. ✓

تحقق من فهمك

(أ٣) ص^٢ + ١٣ص - ٤٨

(ب٣) ر^٢ - ٢ر - ٢٤



حلّ المعادلات بالتحليل: يمكن كتابة **المعادلات التربيعية** على الصورة القياسية $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ويمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري

مثال ٤

حل المعادلة بالتحليل

حل المعادلة: $س^2 + ٦س = ٢٧$ ، وتحقق من صحة الحل.

المعادلة الأصلية

اطرح ٢٧ من كلا الطرفين

حلّل إلى عوامل

خاصية الضرب الصفري

حل كل معادلة

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$س^2 + ٦س - ٢٧ = ٠$$

$$(س - ٣)(س + ٩) = ٠$$

$$س - ٣ = ٠ \quad \text{أو} \quad س + ٩ = ٠$$

$$س = ٣ \quad \text{أو} \quad س = -٩$$

تحقق: عوّض عن س بكل من ٣، -٩ في المعادلة الأصلية.

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$٢٧ \stackrel{?}{=} (-٩)^2 + ٦(-٩)$$

$$✓ \quad ٢٧ = ٨١ - ٥٤$$

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$٢٧ \stackrel{?}{=} (٣)^2 + ٦(٣)$$

$$✓ \quad ٢٧ = ٩ + ١٨$$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$٤ب) \quad س^2 + ٣س - ١٨ = ٠$$

$$١٤ا) \quad ع^2 - ٣ع - ٧٠ = ٠$$

حل المسألة بالتحليل

مثال ٥ من واقع الحياة



تصميم: يصمّم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة عن عرضها بـ ٢ بوصة. ومساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطّط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض × الطول

حل: بما أن عرض اللوحة = عرض اللوحة، فيكون طول اللوحة = عرض + ٢ + ٤ = ٦ + عرض

اكتب المعادلة

اضرب

اطرح ٦١٦ من كل طرف

حلل

خاصية الضرب الصفري

حل كل معادلة

$$٦١٦ = (٦ + عرض) عرض$$

$$٦١٦ = عرض^2 + ٦عرض$$

$$٠ = ٦١٦ - عرض^2 - ٦عرض$$

$$٠ = (٢٨ - عرض)(٢٢ + عرض)$$

$$عرض + ٢٨ = ٠ \quad \text{أو} \quad عرض - ٢٢ = ٠$$

$$عرض = -٢٨ \quad \text{أو} \quad عرض = ٢٢$$

بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة.

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المساحة = $(٢٢ + ٦)٢٢ = ٦١٦$ بوصة مربعة، وهي مساحة اللوحة. ✓

تحقق من فهمك



٥ هندسة: متوازي أضلاع ارتفاعه أقل من قاعدته بـ ١٨ سم، ومساحته ١٧٥ سم^٢. فبما إرتفاعه؟



الربط مع الحياة

تصمّم بعض اللوحات الإعلانية لاستخدامها مرة واحدة لمناسبة معينة، وإن كان الغرض من اللوحة الاستخدام لفترة طويلة، فيجب مراعاة المواد المصنوعة منها لتقاوم عوامل الجو.

الأمثلة ١ - ٣

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(1) \text{ س}^2 + 14\text{س} + 24 \quad (2) \text{ ص}^2 - 7\text{ص} - 30$$

$$(3) \text{ ن}^2 + 4\text{ن} - 21 \quad (4) \text{ م}^2 - 15\text{م} + 50$$

مثال ٤

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(5) \text{ س}^2 - 4\text{س} - 21 = 0 \quad (6) \text{ ن}^2 - 3\text{ن} + 2 = 0 \quad (7) \text{ س}^2 - 15\text{س} + 54 = 0$$

$$(8) \text{ س}^2 + 12\text{س} - 32 = 0 \quad (9) \text{ س}^2 - 2\text{س} - 72 = 0 \quad (10) \text{ س}^2 - 10\text{س} - 24 = 0$$

مثال ٥

(١١) **إطار صورة:** اشترت لطيفة إطارًا للصورة، إلا أن الصورة كانت أكبر من الإطار، لذا فإنها بحاجة إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه، على أن تصبح مساحتها نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بُعدا الصورة الأصلية ١٢، ١٦ سم. فما بُعدا الصورة المصغرة؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(12) \text{ س}^2 + 17\text{س} + 42 \quad (13) \text{ ص}^2 - 17\text{ص} + 72 \quad (14) \text{ أ}^2 + 8\text{أ} - 48$$

$$(15) \text{ ن}^2 - 2\text{ن} - 35 \quad (16) 44\text{ه} + 15\text{ه} - 2\text{ه} \quad (17) 40\text{س} - 22\text{س} + \text{س}^2$$

مثال ٤

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(18) \text{ س}^2 - 7\text{س} + 12 = 0 \quad (19) \text{ ص}^2 + \text{ص} - 20 = 0 \quad (20) \text{ س}^2 - 6\text{س} = 27$$

$$(21) \text{ ج}^2 + 10\text{ج} + 9 = 0 \quad (22) \text{ ن}^2 - 120 = 7\text{ن} \quad (23) \text{ ه}^2 + 48 = 16\text{ه}$$

مثال ٥

(٢٤) **هندسة:** مساحة مثلث ٣٦ سم^٢، ويزيد ارتفاعه ٦ سم على طول قاعدته. فما ارتفاعه؟ وما طول قاعدته؟

(٢٥) **هندسة:** تمثّل العبارة $(\text{س}^2 - 4\text{س} - 12)$ سم^٢ مساحة مستطيل طوله $(\text{س} + 2)$ سم. فما عرضه؟

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(26) \text{ ك}^2 + 11\text{ك} + 18\text{ر} \quad (27) \text{ س}^2 - 6\text{س} + \text{ص} + 5\text{ص}^2 \quad (28) \text{ أ}^2 + 10\text{أ} - 39\text{ب}$$

(٢٩) **سباحة:** يزيد طول حوض سباحة دولي مستطيل الشكل ٢٩ مترًا عن عرضه، ومساحة سطحه ١٠٥٠ م^٢.

(أ) عرّف متغيرًا، واكتب معادلة تمثل مساحة سطحه.

(ب) حل المعادلة.

(ج) فسّر الإجابتين، وهل هناك معنى لكل منهما؟



(٣٠) **هندسة:** اكتب عبارة تمثل محيط المستطيل الذي مساحته $m = s^2 + 13s - 90$.

(٣١) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال، طريقة التحليل عندما يكون المعامل الرئيس للعبارة التربيعية لا يساوي ١.

(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي، ثم أكمله:

ضرب ثنائيي حد	ناتج ضرب ثنائيي الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب	أ $s^2 + b s + c$	م X ن	أ X ج
$(s+3)(s+4)$	$s^2 + 3s + 4s + 12$	$s^2 + 7s + 12$	٢٤	٢٤
$(s+3)(s+5)$				
$(s+4)(s+5)$				
$(s+3)(s-4)$				

(ب) تحليلياً: كيف يرتبط العددان م، ن بالعدد أ، ج؟

(ج) تحليلياً: كيف يرتبط العددان م، ن بالعدد ب؟

(د) لفظياً: صف إجراءً يمكن استعماله لتحليل كثيرة حدود على الصورة $As^2 + Bs + C$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٢) **اكتشف الخطأ:** حلل كل من خليل وماجد العبارة: $s^2 + 6s - 16$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

خليل

$$s^2 + 6s - 16 = (s-2)(s+8)$$

ماجد

$$s^2 + 6s - 16 = (s+2)(s-8)$$

تحذ: أوجد جميع قيم ه التي تجعل كل كثيرة حدود في كل مما يأتي قابلة للتحليل باستعمال الأعداد الصحيحة:

(٣٥) $s^2 - 8s + ه$ ، ه < ٠

(٣٤) $s^2 + هs + 14$

(٣٣) $s^2 + هs - 19$

(٣٦) **تحذ:** حلل العبارة: $(s-4)(s+2) + 3(s-5) - 70$.

تدريب على اختبار

(٣٨) إذا كان الفرق بين ٢١ والعدد ن هو ٦، فما المعادلة التي تبين هذه العلاقة؟

(ج) $6 = n + 21$

(أ) $6 = n - 21$

(د) $21 - n = 6$

(ب) $21 = n + 6$

(٣٧) **هندسة:** ما العبارة التي تمثل طول المستطيل في الشكل المجاور؟

$$\left. \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 18 - 3s - 2s = m \end{matrix}$$

(ج) $s - 6$

(د) $s - 5$

(أ) $s + 5$

(ب) $s + 6$

مراجعة تراكمية

حلّ كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي: (الدرس ٧ - ٢)

$$(٣٩) \quad ٢م^٣ل - ١٦م^٢ل + ٨م \quad (٤٠) \quad ٢أس + ٦سج + ب + أ + ٣بج \quad (٤١) \quad س^٢ - س - ص - س + ص + ص^٢$$

(٤٢) **تبليط:** يريد خالد تبليط غرفة معيشة بُعدها ٤٢٠ سم، ولديه قطع بلاط أبعادها ٢٠ سم × ٢٠ سم، ٣٠ سم × ٣٠ سم، ٢٠ سم × ١٥ سم، ٢٢ سم × ٣٠ سم. فأَيّ الأنواع يمكنه استعمالها دون قص أي قطعة؟ فسّر إجابتك. (الدرس ٧ - ١)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي:

$$(٤٣) \quad ٦م - س - ٤م + ٣س - ٢ر \quad (٤٤) \quad ٣أس - ٦ب س + ٨ب - ٤أ \quad (٤٥) \quad ٢د^٢ج + ٢فج + ٤د^٢ه + ٤فه$$



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٧-٣: المعادلات التربيعية: س + ب س + ج - 1444 - 1442



حلّل كل وحيدة حدّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا: (الدروس ١-٧)

(١) $١٦س٣ص٢$

(٢) $٣٥ب٣ج٤$

(٣) $٢٠م٢ن٢$

(٤) $١٣س٣ص٣$

(٥) **مساحة ممرّ:** تبلغ مساحة ممرّ $١٢م٢$ ، أوجد جميع أزواج الأعداد الكلية التي يمكن أن تمثل طولًا وعرضًا للممرّ.

(الدروس ١-٧)

أوجد (ق.م.أ) لكل مجموعة وحيدات حدّ فيما يأتي:

(٦) $١٠ب٢٠ب٢٥$

(٧) $١٣ج٢٥د$

(٨) $٢١ب٣٥ب٥٦ج٣$

(٩) **ترتيب:** يريد عامل ترتيب ٢٤ زوجًا من الأحذية على أرفف محلّ، بحيث يضع نفس عدد الأزواج على كل رفّ، ويضع على الأقل ٤ أزواج على كل رفّ، ويستخدم رفين على الأقل، اذكر عدد الأزواج الممكنة على كل رفّ، وعدد الأرفف.

(الدروس ١-٧)

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود التالية:

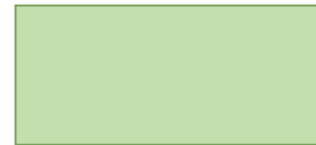
(الدروس ٢-٧)

(١٠) $٩س٣ص٣$

(١١) $١٢ب٢ج١٨ج$

(١٢) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه تساوي $٣س٢ + ٦س - ١٢$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟

(الدروس ٢-٧)



س $٢ + ٢س - ٤$

(أ) وحدتان (ج) ٤ وحدات

(ب) ٣ وحدات (د) ٦ وحدات

حلّل كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي: (الدروس ٢-٧)

(١٣) $٤٠ + ٥٥ج$

(١٤) $٣س٢ + ٦س + ٢س$

(١٥) $٥ب٢ - ٢٥ب - ٥$

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدروس ٣-٧)

(١٦) $٢س(٥ - ٥) = ٠$

(١٧) $٦ب٢ - ٣ب = ٠$

(١٨) $١٥ = ٢ج$

حلّل كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي: (الدروس ٣-٧)

(١٩) $٢س٤ - ٢١س$

(٢٠) $٢س١٠ + ٢٤س$

(٢١) $٢س٤ + ٢١س$

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدروس ٣-٧)

(٢٢) $١٤ = ٢س٥ - ٢س$

(٢٣) $١٨س - ٣س٢ = ٠$

(٢٤) $١٠س = ٢س + ٢٤س$

(٢٥) **اختيار من متعدد:** يزيد طول مستطيل على عرضه بمقدار

٢سم، فما طول المستطيل، إذا كانت مساحته $٤٨سم٢$ ؟

(أ) $٤٨سم$ (ج) $٦سم$

(ب) $٨سم$ (د) $٢سم$





المعادلات التربيعية: أس^٢ + ب س + ج = ٠

لماذا؟

فيما سبق

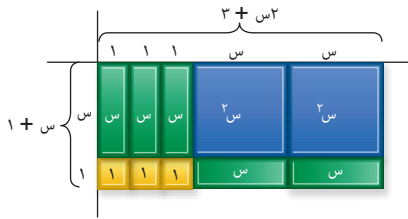
درست تحليل ثلاثية حدود
على الصورة أس^٢ + ب س + ج = ٠

والآن

- أحل ثلاثية حدود على الصورة:
أس^٢ + ب س + ج = ٠
- أحل معادلات على الصورة:
أس^٢ + ب س + ج = ٠

المضردات

كثيرة الحدود الأولية



يمكن تمثيل مسار الأرجوحة في مدينة الألعاب بالعلاقة
٥ن^٢ - ٢ن + ٣٠؛ حيث (ن) زمن الحركة. وتحليل هذه العبارة
إلى عواملها يساعد المسؤول عن التشغيل على معرفة الوقت
الذي تستغرقه أرجحتها في المرة الأولى.

تحليل أس^٢ + ب س + ج = ٠: حللت في الدرس السابق

عبارات تربيعية على الصورة: أس^٢ + ب س + ج = ٠، أ = ١.

ستطبق في هذا الدرس طرق تحليل عبارات تربيعية فيها أ ≠ ١.
في الشكل المجاور بعدا المستطيل المكوّن من بطاقات الجبر هما
(س + ١)، (٣ + س)، وهما عاملا ٢س^٢ + ٥س + ٣.

يمكنك استعمال طريقة التحليل بتجميع الحدود لتحليل هذه
العبارة.

الخطوة ١: طبق القاعدة:

$$٢س^٢ + ٥س + ٣ = ٢س^٢ + م س + ن س + ٣.$$

الخطوة ٢: أوجد عددين ناتج ضربهما ٢ × ٣ = ٦ ومجموعهما ٥.

عوامل العدد ٦	مجموع العاملين
١، ٦	٧
٣، ٢	٥

الخطوة ٣: استعمل التجميع لإيجاد العوامل.

اكتب القاعدة

$$٣ = ن، ٢ = م$$

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

(س + ١) عامل مشترك

$$٢س^٢ + ٥س + ٣ = ٢س^٢ + م س + ن س + ٣$$

$$= ٢س^٢ + ٢س + ٣س + ٣$$

$$= (٢س^٢ + ٢س) + (٣س + ٣)$$

$$= ٢س(س + ١) + ٣(س + ١)$$

$$= (٢س + ٣)(س + ١)$$

$$إذن: ٢س^٢ + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١).$$

مفهوم أساسي

تحليل أس^٢ + ب س + ج = ٠

التعبير اللفظي:

لتحليل ثلاثية حدود على الصورة أس^٢ + ب س + ج = ٠، أوجد عددين صحيحين
م، ن مجموعهما يساوي ب، وناتج ضربهما أ ج، ثم اكتب أس^٢ + ب س + ج
على الصورة أس^٢ + م س + ن س + ج = ٠، ثم حلّل بتجميع الحدود.

$$٥س^٢ - ١٣س + ٦ = ٥س^٢ - ١٠س - ٣س + ٦$$

مثال:

$$= ٥س(س - ٢) + (٣ - س)(٢ - س)$$

$$= (٥س - ٢)(٣ - س)$$

وزارة التعليم

Ministry of Education

مثال ١ تحليل أس^٢ + ب س + ج

حلّ كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

$$(أ) \quad ٧س^٢ + ٢٩س + ٤$$

في ثلاثية الحدود أعلاه، $٧ = أ$ ، $٢٩ = ب$ ، $٤ = ج$. أوجد عددين ناتج ضربهما $٧ \times ٤ = ٢٨$ ، ومجموعهما ٢٩ . كوّن قائمة بأزواج من عوامل العدد ٢٨ ، وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ٢٩ .

عوامل العدد ٢٨	مجموع العوامل
٢٨، ١	٢٩
العوامل الصحيحة ١، ٢٨	
استخدم القاعدة.	
$٧س^٢ + ٢٩س + ٤ = ٧س^٢ + م س + ن س + ٤$	
$٧س^٢ = ٧س^٢ + ١س + ٢٨س + ٤$	
$= (٧س^٢ + ١س) + (٢٨س + ٤)$	
$= س(٧س + ١) + ٤(٢٨س + ١)$	
$= (س + ٧)(٤س + ١)$	

$$(ب) \quad ٣س^٢ + ١٥س + ١٨$$

(ق.م.أ) للحدود $٣س^٢$ ، $١٥س$ ، ١٨ ، هو ٣. حلّ بإخراج العامل ٣.

$$\begin{aligned} ٣س^٢ + ١٥س + ١٨ &= ٣(س^٢ + ٥س + ٦) \\ &= ٣(س + ٢)(س + ٣) \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(أ) \quad ٦س^٢ + ٢٢س - ٨$$

$$(ب) \quad ٦س^٢ + ٢٢س - ٨$$

مثال ٢ تحليل أس^٢ - ب س + ج

حلل كثيرة الحدود $٣س^٢ - ١٧س + ٢٠$.

في ثلاثية الحدود أعلاه $٣ = أ$ ، $١٧ = ب$ ، $٢٠ = ج$. وبما أن ب سالبة، فإن م + ن ستكون سالبة أيضًا، وبما أن ج موجبة، فإن م ن ستكون موجبة. لتحديد م، ن كوّن قائمة بالعوامل السالبة لـ $٢٠ = ج$ وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ١٧ .

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
٢٠، -٣	-٣٢
١٠، -٤	-٢٣
٥، -١٢	-١٩
١، -٢٠	-١٧

العاملان الصحيحان هما -٥، -١٢

$$١٢ = -١٢، ٥ = -٥$$

$$\begin{aligned} ٣س^٢ - ١٧س + ٢٠ &= ٣س^٢ - ١٢س - ٥س + ٢٠ \\ &= (٣س^٢ - ١٢س) + (-٥س + ٢٠) \\ &= ٣س(س - ٤) + (-٥)(س - ٤) \\ &= (٣س - ٥)(س - ٤) \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(أ) \quad ١٠س^٢ - ٣٥س + ٣٠$$

$$(ب) \quad ١٠س^٢ - ٣٥س + ٣٠$$



تُسمَّى كثيرة الحدود التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة **كثيرة حدود أولية**.

تحديد كثيرة الحدود الأولية

مثال ٣

حلّ العبارة: $٤س^٢ - ٣س + ٥$ إن أمكن باستعمال الأعداد الصحيحة، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

في ثلاثية الحدود السابقة $٤ = أ$ ، $٣ = ب$ ، $٥ = ج$.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
١-، ٢٠-	٢١-
٥-، ٤-	٩-
١٠-، ٢-	١٢-

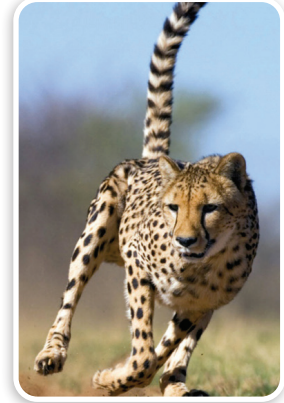
وبما أن ب سالبة، فإن م + ن سالبة. وبما أن ج موجبة فإن م ن موجبة، لذا يكون كل م و ن سالبًا. كوّن قائمة بأزواج عوامل العدد ٢٠. وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ٣-.

لا يوجد عاملان مجموعهما ٣-. لذا لا يمكن تحليل العبارة التربيعية باستعمال الأعداد الصحيحة. لذا فالعبارة التربيعية $٤س^٢ - ٣س + ٥$ أولية.

تحقق من فهمك

$$(ب) ٢س^٢ + ٣س - ٥$$

$$(١٣) ٧ + ر - ٢ر^٢$$



الربط مع الحياة

الفهد هو أسرع حيوان في العالم؛ حيث تبلغ سرعته ١١٢ كلم / ساعة، ويمكن أن تصل سرعته من صفر إلى ٦٤ كلم / ساعة في ٣ خطوات واسعة خلال ثوانٍ فقط.

حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

مثال ٤ من واقع الحياة

حياة برية: افترض أن فهدًا يقفز نحو فريسته بسرعة ابتدائية رأسية مقدارها ١١ مترًا/ثانية. فكم يبقى الفهد في الهواء قبل وصوله إلى فريسته التي ترتفع عن الأرض ٢ متر؟

معادلة الارتفاع

$$٠ = ع - ٤.٩١١، ل.$$

اطرح ٢ من كلا الطرفين

اضرب كلا الطرفين في -١

حلّ

خاصية الضرب الصفري

حل كل معادلة

$$ل = ٥ - ٤.٩١١ + ن$$

$$٢ = ٥ - ٤.٩١١ + ن$$

$$٠ = ٥ - ٤.٩١١ + ن$$

$$٠ = ٥ - ٤.٩١١ + ن$$

$$٠ = (٥ - ٤.٩١١) + ن$$

$$٠ = ٥ - ٤.٩١١ + ن \text{ أو } ٠ = ن - ٤.٩١١$$

$$٤.٩١١ = ن$$

$$\frac{١}{٥} = ن$$

الإجابتان $\frac{١}{٥}$ و ٢ ثانية، يحتاج الفهد إلى $\frac{١}{٥}$ ثانية للوصول إلى ارتفاع ٢ م في أثناء صعوده، وإلى ثانيتين في الهواء للوصول إلى الفريسة.

تحقق من فهمك

(٤) **فيزياء:** قذف شخص كرة إلى الأعلى من سطح بناية ارتفاعها ٢٠ م. والمعادلة

$$ع = ٥ - ٤.٩١١ + ١٦ + ٢٠ = ن$$

تمثل ارتفاع الكرة (ع) بالأمتار بعد (ن) ثانية. فإذا سقطت الكرة على شرفة ارتفاعها ٤ م عن الأرض، فكم ثانية بقيت الكرة في الهواء؟

تنبيه

إشارة السالب

حافظ على (العدد -١) معامل $ن^٢$ ، الذي تم إخراجها خلال التحليل، أو اضرب كلا الطرفين في -١ بدلًا من ذلك.

الأمثلة ١ - ٣

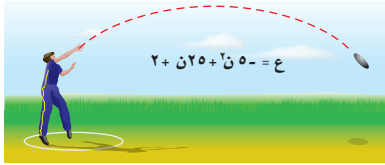
حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(١) \quad ٥٦ + ٢س٢ + ٢س٣ - ٤ \quad (٢) \quad ٥س٥ - ٢س٣ + ٤ \quad (٣) \quad ٢٠س١١ - ٢س٣ + ٤$$

مثال ٤

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(٤) \quad ٠ = ٩س٢ + ٩س٢ + ٩س٢ \quad (٥) \quad ٠ = ٨س٣ - ٢س١٠ + ٨س٣ \quad (٦) \quad ٠ = ٣٠س٢ - ٢س١٧ + ٣٠س٢$$



(٧) **رمي القرص:** يرمي خالد القرص المعدني كما في

الشكل المجاور.

(أ) ما الارتفاع الابتدائي للقرص؟

(ب) بعد كم ثانية يصل القرص إلى الارتفاع نفسه الذي قذف منه؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(٨) \quad ٢٤س٥ + ٢س٣٤ + ٢٤ \quad (٩) \quad ٧٠س٤ + ٢س٣٨ + ٧٠ \quad (١٠) \quad ٩س٢ - ٢س٣ - ٩ \quad (١١) \quad ١٠س٤ - ٢س١٣ + ١٠ \quad (١٢) \quad ٦س٢ + ٢س٣ + ٦ \quad (١٣) \quad ٤٥س١٢ + ٢س٦٩ + ٤٥ \quad (١٤) \quad ٧س٤ - ٢س٥ + ٧ \quad (١٥) \quad ٢٤س٥ + ٢س٢٣ + ٢٤ \quad (١٦) \quad ١٥س٣ - ٢س٨ + ١٥$$

مثال ٤

(١٧) **صيد:** أطلق صياد طلقة نارية ارتفاعها تمثله المعادلة $٤س٢ - ٩س٢ + ٢٠س٢ = ٠$. بعد كم ثانية تصل الطلقة إلى الأرض؟

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(١٨) \quad ٠ = ١٨س٢ + ٩س٢ - ١٨ \quad (١٩) \quad ٠ = ١٥س٤ + ١٧س٢ + ١٥ \quad (٢٠) \quad ١٦س٣ - ٢س٢٦ + ١٦ = ٠ \quad (٢١) \quad ١٥س٢ - ٢س١٣ + ١٥ = ٠ \quad (٢٢) \quad ٢س٣ - ٢س٥ + ٢ = ٠ \quad (٢٣) \quad ٣٠س٤ - ٢س١٩ + ٣٠ = ٠$$

(٢٤) **نظرية الأعداد:** ستة أمثال مربع العدد س مضافًا إليها ١١ مثلاً للعدد يساوي ٢. ما القيم الممكنة لـ س؟

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(٢٥) \quad ٢٠س٦ - ٢س٢٣ - ٢٠ \quad (٢٦) \quad ١٤س٤ - ٢س١٥ - ١٤ \quad (٢٧) \quad ٨س٥ - ٢س١٨ + ٨$$



$$(٢٨) \quad ٣٥س٦ - ٢س٣١ + ٣٥ \quad (٢٩) \quad ١٢س٤ - ٢س٥ + ١٢ \quad (٣٠) \quad ١٢س١٢ - ٢س٢٠ + ١٢$$

(٣١) **تخطيط:** خططت بلدية إحدى المدن لبناء متنزه جديد مستطيل الشكل، يمكن التعبير عن مساحته بالعلاقة: $٦٦٠س^٢ + ٥٢٤س + ٨٥$. حلّل هذه العبارة لإيجاد ثنائيّتي حدّ بمعاملات أعداد صحيحة تمثّل البعدين الممكنين للمتنزه. وإذا كانت $س = ٨$ ، فما محيط المتنزه؟



الربط مع الحياة

هيأت أمانة منطقة الرياض
٣٦٢ مشروعاً بيئياً وترفيهياً
موزعة على مختلف أحياء
مدينة الرياض على مساحة
تتجاوز نصف مليار متر مربع.

(٣٢) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة. تحليل أنواع خاصة من كثيرات الحدود.

(أ) **هندسياً:** ارسم مربعاً طول ضلعه أ. ثم ارسم داخله مربعاً أصغر يشترك معه في أحد الرؤوس، طول ضلعه ب. ما مساحة كل من المربعين؟

(ب) **هندسياً:** قصّ المربع الصغير. ما مساحة المنطقة الباقية؟

(ج) **تحليلياً:** ارسم خطاً قطرياً بين رأس المربع الكبير ورأس المربع الصغير في الشكل المتبقي. وقصّ على طول هذا الخط للحصول على قطعتين متطابقتين، ثم أعد ترتيب القطعتين لتشكلاً مستطيلاً. ما بُعدا المستطيل الناتج؟

(د) **تحليلياً:** اكتب مساحة المستطيل على صورة ناتج ضرب ثنائيّتي حد.

(هـ) **لفظياً:** أكمل العبارة أ^٢ - ب^٢ = لماذا هذه العبارة صحيحة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٣) **اكتشف الخطأ:** حلّ كلّ من زكريا وسامي المعادلة $٦س^٢ - ٢س = ١٢$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

سامي	زكريا
$١٢س^٢ - ٢س = ١٢$	$١٢س^٢ - ٢س = ١٢$
$١٢ = (١س - ١)س$	$٠ = ١٢ - ٢س - ١س$
$١٢ = ١س - ١س^٢$ أو $١٢ = ١س$	$٠ = (٣س + ٤)$
$١٣ = ١س$ أو $١٣ = ١س$	$٠ = ٣س - ٣$ أو $٠ = ٣س + ٤$
	$٣ = ٣س$ أو $٣ = ٣س$

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية بمعاملات حدودها أعداد صحيحة على أن يكون: $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، حلين لها. فسّر ذلك.

(٣٥) **اكتب:** فسّر كيف تحدد القيم التي يجب اختيارها لـ م و ن عند تحليل كثيرة الحدود على الصورة $أس^٢ + ب س + ج$



تدريب على اختبار

(٣٧) ما مجموعة حل المعادلة $س^2 + ٢س - ٢٤ = ٠$ ؟

(ج) $\{٨, ٣-\}$

(د) $\{٦, ٤-\}$

(أ) $\{٦, ٤-\}$

(ب) $\{٨, ٣-\}$

(٣٦) إجابة قصيرة: لدى سلمى أختان: إحداهما أكبر منها بـ ٨ سنوات، والأخرى أصغر منها بستين، وناتج ضرب عمري أختيها ٥٦. فكم سنة عمر سلمى؟

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٧-٣)

$$(٤٠) ع^٢ + ١٥ع + ٣٦$$

$$(٣٩) س^٢ - ٥س - ٢٤$$

$$(٣٨) س^٢ - ٩س + ١٤$$

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٢)

$$(٤٣) ١٠س^٢ - ٢٠س = ٠$$

$$(٤٢) (٢ص + ٦)(ص - ١) = ٠$$

$$(٤١) أ(أ - ٩) = ٠$$

(٤٤) حلّ المتباينة المركبة $٢ + ١٢ < ك$ و $ك + ٢ \geq ١٨$ ، ثم مثّل مجموعة الحل على خط الأعداد. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

$$(٤٨) \sqrt{١٠٠}$$

$$(٤٧) \sqrt{١٢١}$$

$$(٤٦) \sqrt{٦٤}$$

$$(٤٥) \sqrt{١٦}$$





المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

لماذا؟

يستعمل مصممو الجرافيك الفن والرياضيات لتصميم صور وأشرطة فيديو. ويستعملون المعادلات لتكوين أشكال وخطوط على الحاسوب. ويساعد التحليل إلى العوامل على تحديد أبعاد الأشكال وطريقة ظهورها.



فيما سبق

درست تحليل ثلاثية حدود إلى ثنائيتي حد.

والآن

- أحل ثنائية حد على صورة فرق بين مربعين.
- أحل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين.

المضردات

الفرق بين مربعين

أضف إلى

مطوياتك

الفرق بين مربعين

مفهوم أساسي

الرموز: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ أو $(a - b)(a + b)$

أمثلة: $25 - 4 = (5 + 2)(5 - 2)$ أو $(5 - 2)(5 + 2)$

$64 - 9 = (8 + 3)(8 - 3)$ أو $(8 - 3)(8 + 3)$

تحليل الفرق بين مربعين

مثال ١

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

(أ) $16a^2 - 9b^2$

اكتب العبارة على صورة $a^2 - b^2$

تحليل الفرق بين مربعين

$16a^2 - 9b^2 = (4a + 3b)(4a - 3b)$

(ب) $121b^2 - 4a^2$

اكتب العبارة على صورة $a^2 - b^2$

تحليل الفرق بين مربعين

$121b^2 - 4a^2 = (11b + 2a)(11b - 2a)$

(ج) $27j^3 - 3k^3$

بما أنه يوجد عامل مشترك بين الحدود، لذا حلل بإخراج (ق. م. أ.) أولاً، ثم أكمل بطرق التحليل الأخرى.

حلل بإخراج (ق. م. أ.)

اكتب على الصورة $a^2 - b^2$

تحليل الفرق بين مربعين.

$27j^3 - 3k^3 = 3j^3(9 - k^3)$

$= 3j^3[(3)^3 - (k)^3]$

$= 3j^3(3 + k)(3 - k)$

تحقق من فهمك

(أ) $64h^2 - 9v^2$

(ب) $49v^3 + 9s^3$

(أ) $81j^2 - 4$

(ج) $9s^3 - 4s$



تنبيه

مجموع مربعين

لا يمكن تحليل مجموع المربعين $أ^2 + ب^2$ إلى $(أ+ب)(أ-ب)$. فمجموع المربعين هو كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

قد تحتاج إلى تحليل كثيرة حدود تحليلًا تامًا، باستعمال التحليل أكثر من مرة. وهذا ينطبق أيضًا على الفرق بين مربعين.

مثال ٢ تطبيق التحليل أكثر من مرة

حل كل كثيرة حدود مما يأتي:

(أ) $ب^4 - ١٦$

اكتب $ب^4 - ١٦$ على صورة $أ^2 - ب^2$.

تحليل الفرق بين مربعين

$$ب^4 - ١٦ = (ب^2)^2 - ٤^2 = (ب^2 + ٤)(ب^2 - ٤)$$

$$= (ب^2 + ٤)(ب + ٢)(ب - ٢)$$

لاحظ أن العامل $ب^2 - ٤$ هو فرق بين مربعين أيضًا.

$$= (ب^2 + ٤)(ب + ٢)(ب - ٢)$$

$$= (ب^2 + ٤)(ب + ٢)(ب - ٢)$$

(ب) $٦٢٥ - س^٤$

اكتب $٦٢٥ - س^٤$ على صورة $أ^2 - ب^2$.

تحليل الفرق بين مربعين

$$٦٢٥ - س^٤ = (٢٥)^2 - (س^٢)^2 = (٢٥ + س^٢)(٢٥ - س^٢)$$

$$= (٢٥ + س^٢)(٢٥ - س^٢)$$

$$= (٢٥ + س^٢)(٢٥ - س^٢)$$

$$= (٢٥ + س^٢)(٢٥ - س^٢)$$

اكتب $٢٥ - س^٢$ على صورة $أ^2 - ب^2$.

تحليل الفرق بين مربعين

تحقق من فهمك

(ج) $٨١ - س^٤$

(د) $٤٤ - ب^٤$

(هـ) $١ - ص^٤$

وتطبق أحيانًا أكثر من طريقة لتحليل كثيرة حدود تحليلًا تامًا.

مثال ٣ تطبيق طرق مختلفة

حل كل كثيرة حدود مما يأتي:

(أ) $٥س^٥ - ٤٥س$

حلل بإخراج (ق. م. أ).

اكتب $٥س^٥ - ٤٥س$ على صورة $أ^2 - ب^2$.

تحليل الفرق بين مربعين

$$٥س^٥ - ٤٥س = ٥س(س^٤ - ٩) = ٥س(س^٢ + ٣)(س^٢ - ٣)$$

$$= ٥س(س^٢ + ٣)(س^٢ - ٣)$$

$$= ٥س(س^٢ + ٣)(س^٢ - ٣)$$

لاحظ أن $س^٢ - ٣$ ليس فرقًا بين مربعين؛ لأن ٣ ليس مربعًا كاملاً.

(ب) $٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$

العبارة الأصلية

التحليل بإخراج (ق. م. أ).

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة

حل كل تجمع

$٣ + س$ عامل مشترك

تحليل الفرق بين مربعين

$$٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١ = ٧س^٢(س + ٣) - ٧(س + ٣)$$

$$= ٧(س^٢ + ٣ - س - ٣) = ٧(س^٢ - س)$$

$$= ٧(س^٢ - س) = ٧س(س - ١)$$

$$= ٧(س^٢ - س) = ٧س(س - ١)$$

$$= ٧(س^٢ - س) = ٧س(س - ١)$$

$$= ٧(س^٢ - س) = ٧س(س - ١)$$

تحقق من فهمك

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

- (أ) $٢ص - ٥٠$
 (ب) $٦س - ٩٦$
 (ج) $٢م^٣ + م^٢ - ٥٠م - ٢٥$
 (د) $٣ر + ٢ر + ١١ر + ٦٦$

حل معادلات بالتحليل: يمكنك بعد التحليل تطبيق خاصية الضرب الصفري على المعادلة المكتوبة على صورة ناتج ضرب عدة عوامل يساوي صفرًا.

مثال ٤ من اختبار

ما القيمة الموجبة لـ $س$ التي تحقق المعادلة $ص = س^٢ - \frac{٩}{١٦}$ ، إذا كانت $ص = ٠$ ؟
 (أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) صفر (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٩}{٤}$

اقرأ الفقرة:

عوّض عن $ص$ بـ صفر، ثم حل المعادلة.

حل الفقرة:

المعادلة الأصلية
 عوّض عن $ص$ بـ صفر
 اكتب على صورة $أ - ب^٢$
 تحليل الفرق بين مربعين
 خاصية الضرب الصفري
 الإجابة الصحيحة جـ

$$\begin{aligned} ص &= س^٢ - \frac{٩}{١٦} \\ ٠ &= س^٢ - \frac{٩}{١٦} \\ ٠ &= س^٢ - \left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ \\ ٠ &= (س - \frac{٣}{٤})(س + \frac{٣}{٤}) \\ ٠ &= س - \frac{٣}{٤} \quad \text{أو} \quad ٠ = س + \frac{٣}{٤} \\ س &= \frac{٣}{٤} \quad \text{أو} \quad س = -\frac{٣}{٤} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

(٤) حلّ المعادلة: $١٨س^٣ = ٥٠س$ ؟

- (أ) $٠، \frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}، \frac{٥}{٣}$ (ج) $\frac{٥}{٣}، \frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٣}، \frac{٥}{٣}$

إرشادات للدراسة

استعمال طريقة أخرى
 يمكن استعمال طريقة
 أخرى للحل بتعويض
 البدائل في المعادلة.

تأكد

الأمثلة ٣-١ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

- (١) $٩س - ٢$
 (٢) $٢٥ - ٢٤$
 (٣) $٢ل - ٣ل٦٢$
 (٤) $٨١ - و$
 (٥) $٢د - ٣٢ف$
 (٦) $٢٠ر - ٤٥ن$
 (٧) $٢٥٦ن - ٤ج$
 (٨) $٢ج + ٣ج + ٢ج - ٣$
 (٩) $٣ن + ٢ن + ٢ن - ٤٨$

مثال ٤

(١٠) **سيارات:** قد يكون الأثر الذي تتركه عجلات السيارة ناجمًا عن وقوفها المفاجئ. والمعادلة $\frac{١}{٤}ع = ٢ف$ تعبّر عن سرعة السيارة التقريبية (ع) بالميل/ساعة، علمًا بأن (ف) هو طول الأثر الذي تتركه العجلات بالقدم على سطح جاف. إذا كان طول أثر العجلات ٥٤ قدمًا، فكم كانت سرعة السيارة؟

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٥-٧: المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين - ٢٠٢٢

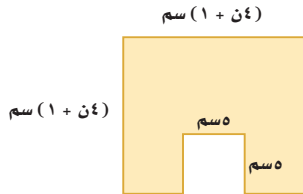
الأمثلة ٣-١

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

- (١٢) $١٢١ - ٢$ ل $٤ - ٣$ ر
(١٣) $٦ - ٤$ ن $٦ - ٤$ ن
(١٤) $٢ - ٩$ ن $٢ - ٩$ ن
(١٥) $٢ - ٣٢$ د $٢ - ٣٢$ د
(١٦) $١٠٠ - ٣$ هـ $١٠٠ - ٣$ هـ
(١٧) $٢٥٦ - ٤$ هـ $٢٥٦ - ٤$ هـ
(١٨) $٨١ + ن - ١٦٢ - ٢$ ن $٨١ + ن - ١٦٢ - ٢$ ن
(١٩) $٢ - ٤$ ص $٢ - ٤$ ص
(٢٠) $٧ - ٤$ ل $٧ - ٤$ ل
(٢١) $٦ - ٤$ هـ $٦ - ٤$ هـ
(٢٢) $٢٠ - ٣$ هـ $٢٠ - ٣$ هـ
(٢٣) $١٢٨ - ٢$ ف $١٢٨ - ٢$ ف
(٢٤) $١٩٢ - ٣$ ر $١٩٢ - ٣$ ر
(٢٥) $١٠ - ٣$ ك $١٠ - ٣$ ك
(٢٦) $٨ - ٣$ ج $٨ - ٣$ ج
(٢٧) $٣ - ٥$ ل $٣ - ٥$ ل
(٢٨) $٧ + ن - ٣$ ن $٧ + ن - ٣$ ن
(٢٩) $٥٠٠ + ر - ٣$ ر $٥٠٠ + ر - ٣$ ر
(٣٠) $٢٤٣ + ٣$ م $٢٤٣ + ٣$ م
(٣١) $٨١ - م - ٣٦ - ٢$ م $٨١ - م - ٣٦ - ٢$ م
(٣٢) $٣٠٠ - م - ٣٧٥ - ٢$ م $٣٠٠ - م - ٣٧٥ - ٢$ م
(٣٣) $٢١٦ - ٢$ س $٢١٦ - ٢$ س
(٣٤) $١٥ + م - ١٢ + ٣$ م $١٥ + م - ١٢ + ٣$ م

مثال ٤

(٣٥) هندسة: يمثل الشكل المجاور مربعاً قُطِعَ منه مربع آخر.



(أ) اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة المظللة.

(ب) أوجد بُعدي مستطيل له مساحة المنطقة المظللة نفسها، مفترضاً أنهما يُمثّلان بثنائيتي حد.

(٣٦) مبانٍ: أراد زياد بناء ملحق في باحة منزله الخلفية، بُعده ٨ م، ٨ م.

ثم قرّر تقليص طول أحد البعدين وزيادة البعد الآخر بالعدد نفسه من الأمتار. فإذا كانت مساحة الملحق بعد تقليصه تساوي ٦٠ م^٢، فما بُعده؟

(٣٧) كتب: نشرت إحدى دور النشر كتاباً جديداً، وتمثّل المعادلة $٢٥ - ٢م + ١٢٥$ م مبيعات الكتاب،

حيث (ع) تمثّل عدد النسخ المباعة، و (م) عدد الأشهر التي بيع فيها الكتاب.

(أ) في أي شهر يُتوقع أن تنفذ النسخ المعروضة من الكتاب؟

(ب) متى وصلت المبيعات إلى ذروتها؟

(ج) ما عدد النسخ المباعة في الذروة؟



الربط مع الحياة

على الرغم من انتشار الإنترنت في معظم المنازل وأماكن العمل ليكون وسيلة للبحث والاطلاع، إلا أن البعض لا يزال يفضل تكوين معلوماته من قراءة الكتب وارتداد المكتبات.



تذكر أن تجعل أحد طرفي
المعادلة صفراً قبل حل
المعادلة بالتحليل .

حل كل معادلة مما يأتي بالتحليل، ثم تحقق من صحة الحل:

$$(٣٩) \quad ١٠٠ = ٢٥س٢$$

$$(٣٨) \quad ١٢١ = ٢س٣٦$$

$$(٤١) \quad ١٦ = ٢ب \frac{١}{٤}$$

$$(٤٠) \quad ٠ = \frac{٩}{١٦} - ٢ص٤$$

$$(٤٣) \quad ٠ = ٨١ - ٢د٩$$

$$(٤٢) \quad ٠ = \frac{١}{٣٥} - ٨١س٢$$

(٤٤)  **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة ثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً.

(أ) **جدولياً:** انسخ الجدول أدناه وأكملة بتحليل كل ثلاثية حدود، ثم اكتب أول وآخر حد في كثيرة الحدود على صورة مربعات كاملة.

كثيرة الحدود	تحليل كثيرة الحدود	الحد الأول	الحد الأخير	الحد الأوسط
$٩س٢ + ١٢س + ٤$	$(٣س+٢)(٣س+٢)$	$٤س٢ = (٢س)٢$	$٩ = ٣٣$	
$٩س٢ - ٢٤س + ١٦$				
$٤س٢ - ٢٠س + ٢٥$				
$١٦س٢ + ٢٤س + ٩$				

(ب) **تحليلياً:** اكتب الحد الأوسط في كل كثيرة حدود باستعمال الجذور التربيعية للمربعات الكاملة للحددين الأول والأخير.

(ج) **جبرياً:** اكتب قاعدة لثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً.

(د) **لفظياً:** ما الشروط الواجب توافرها في ثلاثية حدود لتصنف على أنها مربع كامل؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٥) **اكتشف الخطأ:** حللت كل من هلا ومنى العبارة الآتية، فأيهما إجابتها صحيحة؟ فسّر ذلك.

منى

$$١٦س٢ - ٤س٢٥ = (٤س٢ - ٥س)(٤س٢ + ٥س)$$

هلا

$$١٦س٢ - ٤س٢٥ = (٥س - ٤س)(٥س + ٤س)$$

(٤٦) **تحّد:** بسّط العبارة: $٩ - (٣+ك)٢$ بتحليلها بالفرق بين مربعين.

(٤٧) **تحّد:** حلّل: $٨١ - ١٦س$

(٤٨) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. وأعط مثلاً مضاداً للتحقق من إجابتك: "أي ثنائية حد جميع حدودها مربعات كاملة قابلة للتحليل".

(٤٩) **مسألة مفتوحة:** أعط مثلاً لثنائية حد نحتاج عند تحليلها تحليلاً تاماً إلى تكرار قاعدة الفرق بين مربعين، ثم حلّها.

(٥٠) **اكتب:** لماذا لا تتضمن قاعدة الفرق بين مربعين حدّاً متغيّراً في الوسط؟

تدريب على اختبار

(٥٢) أي مما يأتي يمثل مجموع حلّي المعادلة $س^2 + 3س = ٥٤$ ؟

- (أ) ٣ (ب) ٢١
(ج) ٣ (د) ٢١

(٥١) إذا كان أحد جذري المعادلة $س^2 + ١٣س = ٢٤$ هو ٨- فما الجذر الآخر؟

- (أ) $٣ - \frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣} - ٣$
(ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $٣ - \frac{٢}{٣}$

مراجعة تراكمية

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي، وإذا لم يمكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة، فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٤)

- (٥٣) $س^٢ - ١٧س + ١٤$ (٥٤) $١٥ + ٢٣س - ٢٥س^٢$ (٥٥) $١٠س^٢ - ٢٠س + ١٠س^٢$

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلّك: (الدرس ٧-٣)

- (٥٦) $١٨ - ٢س = ٩$ (٥٧) $١٠ + ٢س = ١٧$ (٥٨) $٢٢س - ٢س = ٩٦$

أوجد ناتج كلاً مما يأتي: (الدرس ٦-٧)

- (٥٩) $(س + ٣)(س + ٣)$ (٦٠) $٢(س - ٥)$ (٦١) $٢(١ - س)$ (٦٢) $(٥ + س)(٥ + س)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

- (٦٣) $٢(٦ - س)$ (٦٤) $(٢ - س)(٢ - س)$ (٦٥) $(٣ + س)(٣ + س)$
(٦٦) $٢(٥ - س)$ (٦٧) $٢(١ - س)$ (٦٨) $(٥ + س)(٥ + س)$





المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

لماذا؟

يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة $0 = 5t^2 + 0t$ ، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي (0) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.



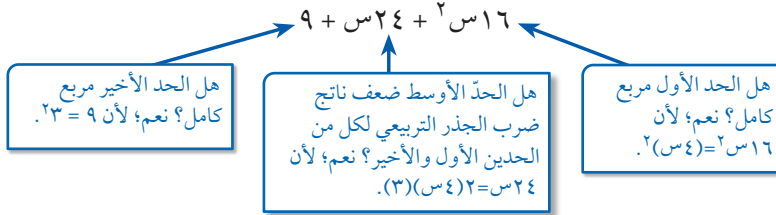
تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل: تعلمت قاعدة مفكوك ثنائي الحدود $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. تذكر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

تكون نواتج الضرب هذه على صورة **مربع كامل لثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملاً.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلاً ثلاثية الحدود $16s^2 + 24s + 9$ تشكل مربعاً كاملاً، كما هو موضح أدناه.



أضف إلى

مطوياتك

مفهوم أساسي

تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعاً كاملاً

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{الرموز:}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$16s^2 + 24s + 9 = (4s + 3)^2 \quad \text{أمثلة:}$$

$$16s^2 - 24s + 9 = (4s - 3)^2$$

مثال ١

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعاً كاملاً وتحليلها

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها.

(أ) $٩ + ١٢ص + ٤ص^٢$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٤ص = (٢ص)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٩ = ٣^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $٢(٢ص)(٣)$ ؟ نعم، $١٢ص = ٢(٢ص)(٣)$.

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة $٩ + ١٢ص + ٤ص^٢$ ثلاثية حدود تشكّل مربعاً كاملاً.

$٩ + ١٢ص + ٤ص^٢ = (٢ص + ٣)^٢$ اكتب العبارة على صورة $أ٢ + ب٢ + ب٢$

$٢(٣ + ٢ص) =$ حلّل باستعمال القاعدة

(ب) $٩س - ٢س٦ + ٤$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٩س = (٣س)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٤ = ٢^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $٢(٣س)(٢)$ ؟ لا، $٦س \neq ٢(٣س)(٢)$.

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود $٩س - ٢س٦ + ٤$ لا تشكّل مربعاً كاملاً.

تحقق من فهمك

(أ) $٩ص + ٢٤ص + ١٦$ (ب) $٢٥ + ١٠أ + ٢أ٢$

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تاماً إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لا يمكن تحليلها فإنها تكون أولية.

ملخص المفهوم	طرق التحليل	أضف إلى مخطوبتك
الخطوات	عدد الحدود	أمثلة
الخطوة ١: حلّل بإخراج (ق. م. أ.)	أي عدد	$٤س + ٢س٦ - ٢س = ٢س(٢س + ٣ - ١)$
الخطوة ٢: تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقاً بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.	٢ أو ٣	$٩س - ٢س٦ + ٤ = (٣س - ٢)^٢$ $١٦س + ٢٤ص + ٩ = (٤ص + ٣)^٢$
الخطوة ٣: طبق أنماط التحليل لـ $٢س + ب٢ + ج٢$ أو $٢س + ب٢ + ج٢$ أو بتجميع الحدود.	٣ أو ٤	$٨س + ١٢ص - ٢س = (٢س - ٣)(٢س + ٦)$ $١٢ص + ٩ص + ٦ص + ٦ = (٣ص + ٢)(٤ص + ٣)$ $٣ص(٤ص + ٣) + ٢ص(٣ + ٤) = (٣ص + ٢)(٤ص + ٣)$

مثال ٢ التحليل التام

حلّل كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب "أولية":
(أ) $٨٠ - ٥س^٢$

الخطوة ١: (ق. م. أ.) للحددين $٥س^٢$ ، ٨٠ هو ٥ ، حلّل بإخراج (ق. م. أ.).

الخطوة ٢: بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقاً بين مربعين.

$$\begin{aligned} ٥س^٢ - ٨٠ &= ٥(س^٢ - ١٦) \\ ٥س^٢ - ٨٠ &= ٥(س^٢ - ٤^٢) \\ ٥س^٢ - ٨٠ &= ٥(س - ٤)(س + ٤) \end{aligned}$$

تحليل الفرق بين مربعين

(ب) $٣٥ - ٩س^٢ - ٦س$

الخطوة ١: (ق. م. أ.) للحدود: $٩س^٢$ ، $٦س$ ، ٣٥ هو ١.

الخطوة ٢: بما أن ٣٥ ليس مربعاً كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعاً كاملاً.

الخطوة ٣: حلّل باستعمال النمط $٩س^٢ + ٦س + ٣٥$. هل يوجد عدنان ناتج ضربهما $٩(٣٥ - ٣٥)$ ، أو $٣١٥ - ٦س$ ومجموعهما $٦ - ٣١٥$ ؟ نعم، ٢١ و ١٥ ناتج ضربهما $٣١٥ - ٦س$ ومجموعهما $٦ - ٣١٥$.

$$\begin{aligned} ٩س^٢ - ٦س - ٣٥ &= ٩س^٢ + ٢١س - ٣٥ - ٦س \\ ٩س^٢ - ٦س - ٣٥ &= ٩س^٢ + ٢١س - ٣٥ - ٦س \\ ٩س^٢ - ٦س - ٣٥ &= (٩س^٢ + ٢١س - ٣٥) - ٦س \\ ٩س^٢ - ٦س - ٣٥ &= (٣ - ٥س)(٣ + ٥س) - ٦س \\ ٩س^٢ - ٦س - ٣٥ &= (٣ - ٥س)(٣ + ٥س) - ٦س \\ ٩س^٢ - ٦س - ٣٥ &= (٣ - ٥س)(٣ + ٥س) - ٦س \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(١٢) \quad ٣٢ - ٢س^٢ \quad (ب) \quad ٢س^٢ + ٥س - ٢٥$$

إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك،

يمكنك التحقق من

إجابتك من خلال:

- استعمال طريقة التوزيع

بالترتيب.

- استعمال خاصية التوزيع

- تمثيل كلّ من العبارة

الأصلية وتحليلها بالرسم

والمقارنة بينهما.

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة: عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

مثال ٣ حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

حل المعادلة: $٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ = ٠$

المعادلة الأصلية

أضف ٦٤ إلى الطرفين

تحقق إن كانت ثلاثية الحدود $٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤$ تمثل مربعاً كاملاً

حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل
اكتب $(٨ - ٣س)^٢$ كحاصل ضرب عاملين.

$$٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ = ٠$$

$$٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ + ٠ = ٠$$

$$(٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤) + ٠ = ٠$$

$$(٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤) = ٠$$

$$(٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤) = ٠$$

$$\begin{aligned} 3س - 8 &= 0 \\ 3س &= 8 \\ س &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

ضع أحد العوامل المتكررة = 0
أضف 8 إلى كلا الطرفين
اقسم كلا الطرفين على 3

تحقق من فهمك

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

$$(أ) 3س^2 + 11س + 6 = 0 \quad (ب) 3س^2 - \frac{4}{3}س + \frac{4}{9} = 0$$

سبق أن حللت معادلات مثل $3س^2 - 16س = 0$ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضاً استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

$$\begin{aligned} 3س^2 - 16س &= 0 \\ 3س^2 - 16س &= 0 \\ 3س^2 - 16س &= 0 \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
أضف 16 إلى كلا الطرفين
خاصية الجذر التربيعي

تذكر أنه يوجد جذران تربيعيان لـ 16، هما 4 و -4. لذا فإن مجموعة الحل هي $\{-4, 4\}$. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ $\{\pm 4\}$.

قراءة الرياضيات

الجذر التربيعي

يقرأ $\pm \sqrt{16}$ موجب أو سالب الجذر التربيعي لـ 16

أضف إلى

مطويتك

خاصية الجذر التربيعي

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعية على الصورة $س^2 = ن$ ، نأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي $ن \geq 0$ ، إذا كان $س^2 = ن$ فإن $س = \pm \sqrt{ن}$.

مثال: $س^2 = 25$

$$س = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

إذا كانت $ن$ في المعادلة $س^2 = ن$ ، ليست مربعاً كاملاً، فتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي، لذا استعمال الآلة الحاسبة. أما إذا كانت $ن$ مربعاً كاملاً فستحصل على إجابة دقيقة.

استعمال خاصية الجذر التربيعي

مثال 4

حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$(أ) (س - 6)^2 = 81$$

$$(س - 6)^2 = 81$$

$$س - 6 = \pm \sqrt{81}$$

$$س - 6 = \pm 9$$

$$س = 6 \pm 9$$

$$س = 6 + 9 \text{ أو } س = 6 - 9$$

$$س = 15 \text{ و } س = -3$$

الجذران هما 15 و -3

المعادلة الأصلية

خاصية الجذر التربيعي

$$9 \times 9 = 81$$

أضف 6 إلى كلا الطرفين

افصل المعادلة إلى معادلتين

بسط



تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$(ب) \quad ١٢ = ٢(٦ + س)$$

المعادلة الأصلية

$$١٢ = ٢(٦ + س)$$

خاصية الجذر التربيعي

$$س + ٦ = \pm \sqrt{١٢}$$

اطرح ٦ من كلا الطرفين

$$س = \pm \sqrt{١٢} - ٦$$

الجذران هما $س = \sqrt{١٢} - ٦$ ، $س = -\sqrt{١٢} - ٦$.

باستعمال الآلة الحاسبة، $س = \sqrt{١٢} - ٦ \approx -٢,٥٤$ ، $س = -\sqrt{١٢} - ٦ \approx -٩,٤٦$.

تحقق من فهمك

$$(ب٤) \quad ٢٦ = ٢(٣ + ع)$$

$$(أ٤) \quad ١٢١ = ٢(١٠ - أ)$$

مثال ٥ من واقع الحياة حل المعادلة

فيزياء: أسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة $س = -٥٠ + ع^٢$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي (ع) بالمتري، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

عند مستوى الأرض، $ع = ٠$ والارتفاع الابتدائي ٦٨ ، إذن $س = ٦٨$

المعادلة الأصلية

$$ع = -٥٠ + ع^٢$$

عوض عن ع بصفر، وعن ع بـ ٦٨

$$٠ = -٥٠ + ٦٨$$

اطرح ٦٨ من كلا الطرفين

$$-٦٨ = -٥٠ + ع^٢$$

اقسم على -٥٠

$$١٣,٦ = ع^٢$$

خاصية الجذر التربيعي

$$\pm ٣,٧ \approx ع$$

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.

تحقق من فهمك

(٥) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا أسقطت من سطح مبنى ارتفاعه نصف الارتفاع المذكور أعلاه.



تاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي

(١٥٦٤م - ١٦٤٢م)

كان جاليليو أول من أثبت أن الأجسام المختلفة الكتلة تسقط بالسرعة نفسها، وذلك بإسقاط جسمين مختلفي الكتلة من قمة برج بيزا المائل في إيطاليا عام ١٥٨٩ ميلادية.



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٧-٦ : المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة - ٢٠٢٢

مثال ١

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّها:

$$(١) \quad ٢٥س + ٦٠ + ٣٦ \quad (٢) \quad ٦س + ٣٠ + ٣٦$$

مثال ٢

حلّ كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب "أولية":

$$(٣) \quad ٢س - س - ٢٨ \quad (٤) \quad ٦٤س + ٦٤ \quad (٥) \quad ٩س + ٩س - ١٦$$

المثالان ٣، ٤

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(٦) \quad ٣٦س = ٢٤ \quad (٧) \quad ٦٤ص - ٢٤٨ + ١٨ = ٩ \quad (٨) \quad ٤٧ = ٢(٥ + ع)$$

مثال ٥

(٩) **طلاء:** سقطت فرشاة الدهان من نايف أثناء قيامه بطلاء غرفة نومه، من ارتفاع ٢ م. استعمل المعادلة $ع = ٥ - ن$ لإيجاد العدد التقريبي للشواني التي تستغرقها الفرشاة للوصول إلى الأرض.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّها:

$$(١٠) \quad ٤س - ٤٢س + ١١٠ \quad (١١) \quad ١٦س - ٥٦س + ٤٩ \quad (١٢) \quad ٨١س - ٩٠س + ٢٥$$

مثال ٢

حلّ كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب "أولية":

$$(١٣) \quad ٢٤د + ٣٩د - ١٨ \quad (١٤) \quad ٨س + ١٠س - ٢١$$

$$(١٥) \quad ٢ب + ١٢ب - ٢٤ \quad (١٦) \quad ١٦أ - ٢١١ب$$

$$(١٧) \quad ١٢م - ٢٢م - ٧٠ \quad (١٨) \quad ٨ج - ٨٨ج + ٢٤٢$$

$$(١٩) \quad ٤و - ٢و \quad (٢٠) \quad ١٢ل - ٣ل$$

$$(٢١) \quad ١٦ك - ٤٨ك + ٣٦ك \quad (٢٢) \quad ٤ن + ١٠ن - ٨٤$$

$$(٢٣) \quad ٢أ - ٢أ - ٢أ + ٣أ + ٢أ \quad (٢٤) \quad ٢ر - ٣ر - ٧٢ر + ٣٦$$

$$(٢٥) \quad ٣ك - ٢٤ك + ٤٨ك \quad (٢٦) \quad ٢ج - ٢ج - ٣ه + ٤ه$$

$$(٢٧) \quad ٨ص - ٢٠٠ع$$

المثالان ٣، ٤

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(٢٨) \quad ٠ = ٣٦ + م - ٢٤ \quad (٢٩) \quad ٧ = ٢(٤ - ص)$$

$$(٣٠) \quad ٠ = \frac{٢٥}{٤٩} + \frac{١٠}{٧} + أ \quad (٣١) \quad ٠ = \frac{٩}{١٦} + س - \frac{٣}{٢}$$

$$(٣٢) \quad ٢٥ = ١٦ + س + ٨ \quad (٣٣) \quad ١٨٠ = ٦٠ - ٢س$$

$$(٣٤) \quad ٤٠٠ = ٨٠ - ٢س \quad (٣٥) \quad ٩ - ٥٤س = ٨١س$$

$$(٣٦) \quad ١٥ = ١ + ج - ٤$$



مثال ٥ (٣٧) فيزياء: أسقط بالون ماء في تجربة من نافذة في المدرسة. ارتفاعها ٩ م. ما الزمن الذي يستغرقه البالون ليصل إلى الأرض؟ قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

(٣٨) هندسة: مُثِّلَت مساحة مربع بالعبارة $٩س^٢ - ٤٢س + ٤٩$. أوجد طول ضلع المربع.

(٣٩) هندسة: إذا كانت العبارة $٨ص^٣ + ٤٠ص^٢ + ٥٠ص$ تمثل حجم منشور رباعي قاعدته مستطيلة. فأوجد أبعاد المنشور الممكنة على صورة كثيرات الحدود بمعاملات أعداد صحيحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٠) اكتشاف الخطأ: حلَّ منشور وفصل العبارة $س^٨ - س^٤$ تحليلًا تامًا، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

فصل

$$س^٨ - س^٤ = س^٤(س^٤ - ١) = س^٤(س^٢ + ١)(س - ١)(س + ١)$$

منصور

$$س^٨ - س^٤ = س^٤(س^٤ - ١) = س^٤(س^٢ - ١)(س^٢ + ١)$$

(٤١) تحدّ: حلَّ $س^٦ + س^٤ + س^٢ + س^٠$ تحليلًا تامًا.

(٤٢) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة ثلاثية حدود تشكل مربعًا كاملاً يكون معامل الحد الأوسط سالبًا والحد الأخير كسرًا اعتياديًا، ثم حلّ المعادلة.

(٤٣) تبرير: اكتب مثالاً مضادًا للعبارة:

"لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ثلاثة حلول حقيقية دائمًا".

(٤٤) اكتب: فسّر كيف تحلّل كثيرة حدود تحليلًا تامًا.

(٤٥) حدّد ثلاثية الحدود التي تختلف عن كثيرات الحدود الأخرى فيما يأتي، وفسّر إجابتك:

$$٨١ + س - ٣٦س^٢$$

$$١٠ + س + ٢٥س^٢$$

$$٤ + س + ١٠س^٢$$

$$١٦ + س - ٢٤س^٢$$

(٤٦) اكتب: فسّر كيف تحدّد إذا كانت ثلاثية الحدود تشكل مربعًا كاملاً.

تدريب على اختبار

(٤٨) هندسة: إذا كان محيط دائرة $\frac{٦٠}{٥}$ وحدة، فما مساحتها؟

(أ) $\frac{٣٠}{٥}$ وحدة مربعة

(ب) $\frac{١٢}{٥}$ وحدة مربعة

(ج) $\frac{٩}{٢٥}$ وحدة مربعة

(د) $\frac{٣٠}{٢٥}$ وحدة مربعة

(٤٧) حلّ المعادلة $(٣ - س)^٢ = ٢٥$.

(ج) $١٤، ٤$

(د) $١٤، -٤$

(أ) $٢، -٨$

(ب) $٨، ٢$



حلّل كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية": (الدرس ٧ - ٥)

(٤٩) $٤س٢ - ٨١ص٢$ (٥٠) $١ - ١٠٠ل٢$ (٥١) $٢٠ - ٣أ٢$ (٥٢) $١ - ٢٥ن٢$

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، و تحقق من صحة الحل: (الدرس ٧ - ٤)

(٥٣) $٠ = ٩٠ + ٤٨س٢$ (٥٤) $٢٨ = ١٤س٢ + ١٤س١$ (٥٥) $٤٨ = ١٠س٢ - ٢س٢$

(٥٦) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٥) (٣، -٢). (مهارة سابقة)

مهارة سابقة:

أوجد ميل المستقيم المارّ بكلّ زوج من النقاط في كلّ ممّا يأتي:

(٥٧) (١، ٢) (٣، ٥)

(٥٨) (١، ٥) (٤، ٥)

(٥٩) (٣، ٢) (٣، ٨)



حلّل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًا:

(١) $25س^2ص^4$ (٢) $١٧أب^2$

(٣) $١٨ج^٥د^٣$

(٤) **حديقة:** زرع مالك ١٤٠ نبتة مرتبة على صورة مستطيل في حديقة منزله. فبكم طريقة يمكنه ترتيبها ليكون لديه على الأقل ٤ صفوف، وعدد النباتات نفسه في كل صف، على ألا يقل عن ٦ نباتات.

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد فيما يأتي:

(٥) $٢أ، ٢٨أ، ١٦أ^٣$ (٦) $٧ج، ٢٤د$

(٧) $٥٠ج^٢هـ، ١٢٠جـهـ$ (٨) $٨ك^٢ر، ٣٦ك ر$

(٩) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه $٢س^٢ - ١٥س - ١٥$ وحدة مربعة، فما عرضه؟



$٥س + ٢$

(أ) $٥س -$ (ج) $٣س -$

(ب) $٣س +$ (د) $٢س - ٣$

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(١٠) $٥سص - ١٠س$

(١١) $٧أب + ١٤أب^٢ + ٢١أ^٢ب$

حلّل كلّاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(١٢) $٤س + ٨س + ٢س + ٢$

(١٣) $١١٠أ - ٥٠أ - ٥$

حل كلّ معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

(١٤) $ص(ص - ١٤) = ٠$

(١٥) $٣س(س + ٦) = ٠$

(١٦) $١١٢ = ٢أ$

(١٧) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في فرش غرفة مساحتها

(س - ٩) متر مربع بالسجاد، إذا كان عرض الغرفة

(س - ٣) مترًا، فما طولها بالأمتار؟

(أ) $٣س -$ (ج) $٣س +$

(ب) $٩س -$ (د) ٣

حلّل كلّاً من ثلاثيات الحدود الآتية:

(١٨) $٢س + ٧س + ٦$ (١٩) $٢س - ٣س - ٢٨$

(٢٠) $١٠س - ٢س - ٣$ (٢١) $١٥س + ٧س - ٢$

(٢٢) $٢٥س - ٢$ (٢٣) $٨١س - ٢$

(٢٤) $٩س - ٢س + ١٢س + ٤$ (٢٥) $٢٥س + ٤٠س + ٢٥$

حلّل كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

(٢٦) $٢س - ٤س = ٢١$ (٢٧) $٢س - ٢س - ٢٤ = ٠$

(٢٨) $٦س - ٥س - ٦ = ٠$ (٢٩) $٢س - ١٣س + ٢٠ = ٠$

(٣٠) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُعدّ عاملاً من عوامل

$١ - ٤$ عند تحليلها تحليلًا تامًا؟

(أ) $١س -$ (ج) $س$

(ب) $١س -$



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

(١) جهِّز زياد الأعداد المدوَّنة في الجدول لكل نوعٍ من أنواع الكعك، إذا أراد وضع العدد نفسه من كل نوعٍ من الكعك في كل سلةٍ، بحيث تحوي السلة أكبر عددٍ ممكن من كل نوع من أنواع الكعك جميعها، فما عدد السلال اللازمة؟
"تلميح: لا يشترط استخدام جميع قطع الكعك".

نوع الكعك	العدد
بالشوكولاتة	٥٤
بالفراولة	٤٥
بالفواكة	٣٦
بالكراميل	٦٠

- (أ) ١٨ (ب) ١٦
(ج) ١٢ (د) ١٠

(٢) باستعمال المعلومات في السؤال ١، كم قطعة كعكٍ من كل نوعٍ ستحتوي كل سلةٍ؟

- (أ) ٢ (ب) ٣
(ج) ٤ (د) ٦

(٣) حلِّل: $م + ن + ٥ - م - ٣ - ن - ١٥$

- (أ) $(٣ - م) (٥ - ن)$ (ب) $(٣ - ن) (٥ + م)$
(ج) $(٥ - م) (٣ + ن)$ (د) $(٣ - م) (٥ + ن)$

(٤) أيٌّ ممَّا يأتي يمثل حلًّا للمعادلة: $٦س + ١١٢ = ٠$ ؟

- (أ) -١٤ (ب) -٨
(ج) ٦ (د) ١٢

إرشادات للاختبارات

سؤال ٤: يمكن التحقق من الحل بتعويض العدد في المعادلة؛ للحصول على جملة رياضية صحيحة.

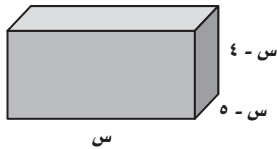
(٥) أيٌّ من كثيرات الحدود الآتية، كثيرة حدود أولية؟

- (أ) $٥س + ٣٤س + ٢٤$
(ب) $٤س + ٢٢س + ١٠$
(ج) $٤س + ٣٨س + ٧٠$
(د) $٥س + ٣س + ٤$

(٦) أيٌّ ممَّا يأتي لا يُعدُّ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $٥٤س - ٨٠س$ ؟

- (أ) ٥ (ب) $٣س - ٤س$
(ج) $٢س - ٥س$ (د) $٣س + ٤س$

(٧) إذا كان حجم متوازي المستطيلات أدناه يساوي ٥٦ س ستمتراً مكعباً،



فأيٌّ من الأعداد التالية، لا يمثل بُعداً لمتوازي المستطيلات؟

- (أ) ٦ سم (ب) ٧ سم
(ج) ٨ سم (د) ١٢ سم

(٨) عند تحليل كثيرة الحدود: $٩س - ٢٠س + ٢٠$ ، نحصل على:

- (أ) $(٢ - ص) (١٠ - ص)$
(ب) $(٤ - ص) (٥ - ص)$
(ج) $(٢ - ص) (٧ - ص)$
(د) $(٥ - ص) (٢ + ص)$



إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحاً خطوات الحل:

(١٥) المعادلة: $ع = -١٦ن + ٢٠٠$ تمثّل ارتفاع كرة تمّ ركلها من الأرض لأعلى.

(أ) عبّر عن الارتفاع بصورة كثيرة حدود بعد تحليلها تحليلًا تامًّا.

(ب) في أي وقت يكون ارتفاع الكرة عن الأرض مساويًا للصفر؟ وضح معنى ذلك.

(ج) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ ومتى يكون ذلك؟



أدرب

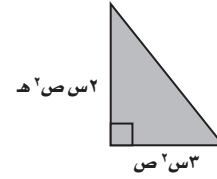
من خلال الإجابة عن الأسئلة؛ حتى أعزّز ما اكتسبته من مهارات، وأسعى إلى توظيفها في الحياة اليومية، وتوجيهها نحو اكتساب الخبرات وتوسيع المدارك، مما يزيد من فرص التعلم مدى الحياة.

أنا طالبٌ معدٌّ للحياة، ومنافسٌ عالميًّا.

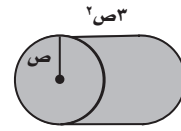
إجابات قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

عبّر عن كلّ ممّا يأتي في صورة وحيدة حدّ.



(٩) مساحة المثلث:



(١٠) حجم الأسطوانة:

بسّط كلّ عبارة ممّا يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$$(١١) \frac{٣ن^٢}{م}$$

$$(١٢) \left(\frac{٣ج - ٢هـ}{س^٢} \right)^٣$$

$$(١٣) \left(\frac{٩س^٢ص^٣ - ٥س^٣ص^٢}{٢ص^٢ص^٣} \right)$$

(١٤) المعادلة: $ع = -١٦ن + ٤٠ + ٣$ تمثّل ارتفاع بالون فوق سطح الأرض بالقدم بعد $ن$ ثانية من إطلاقه، أوجد ارتفاعه بعد ثانيتين من إطلاقه.

للمساعدة ..

إذا لم تجب عن السؤال

فراجع الدرس ..

١٥	١٤	١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تجب عن السؤال
٤-٧	٢-٦	٢-٦	٢-٦	٢-٦	١-٦	١-٦	٣-٧	٦-٧	٥-٧	٤-٧	٣-٧	٢-٧	١-٧	١-٧	فراجع الدرس ..

وزارة التعليم

Ministry of Education

الفصل ٧: الاختبار التكويني - 1442 - ٢٠٢٢