الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

فيما سبق

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

الآن

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

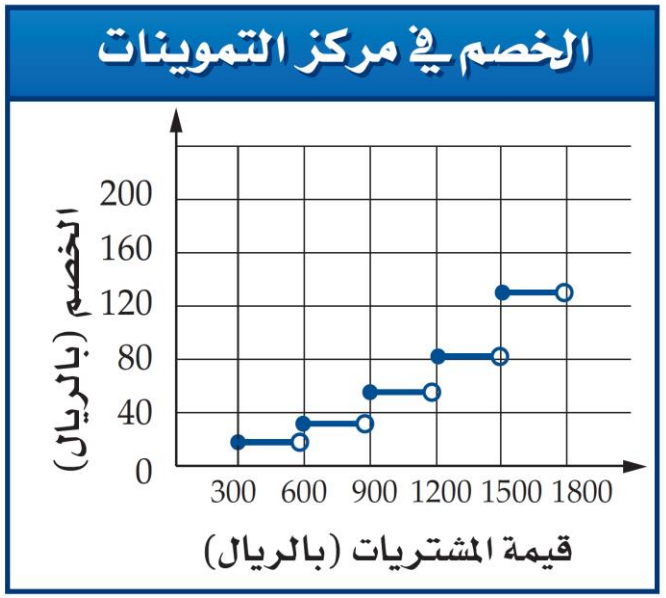
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

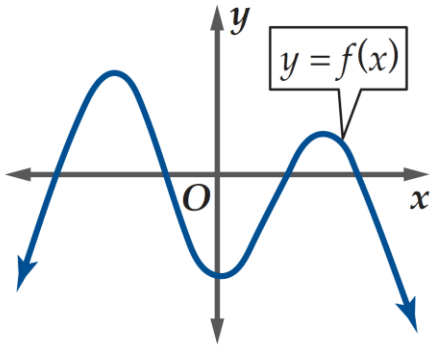
لمـــــاذا

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=900$, $x=600$.



الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات



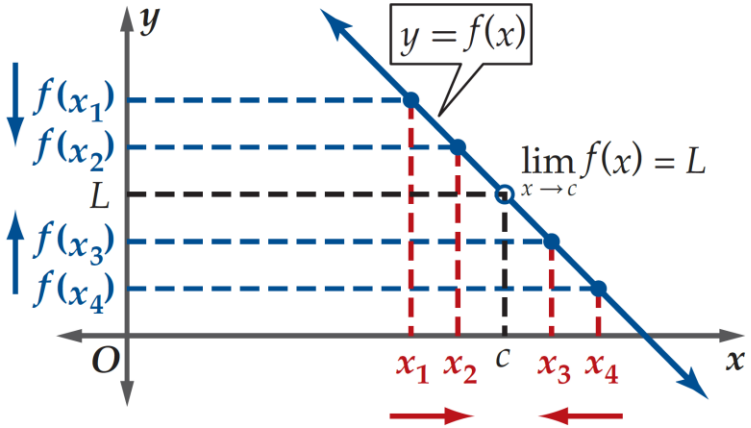
$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

مفهوم أساسي

النهايات



التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

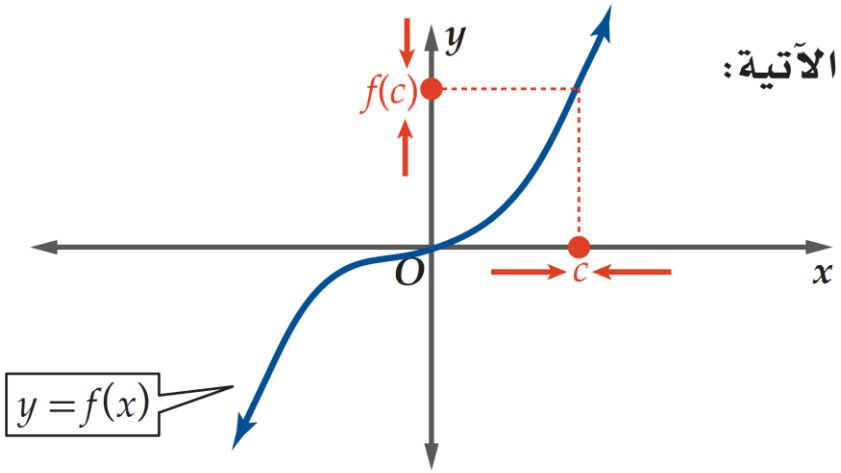
الرموز: نقول: إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

ملخص المفهوم

اختبار الاتصال



يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

الشرط١	
الشرط٢	
الشرط٣	
هل الدالة متصلة	

1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

الشرط١	
الشرط٢	
الشرط٣	
هل الدالة متصلة	

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تدرب

حدّد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$، عند $x = -5$.

الشرط١	
الشرط٢	
الشرط٣	
هل الدالة متصلة	

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

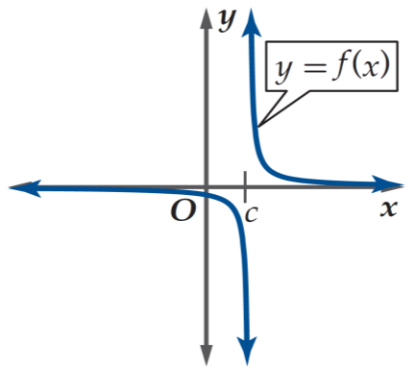
إن التمثيل البياني **للدالة غير المتصلة** يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال. وفيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي

أنواع عدم الاتصال

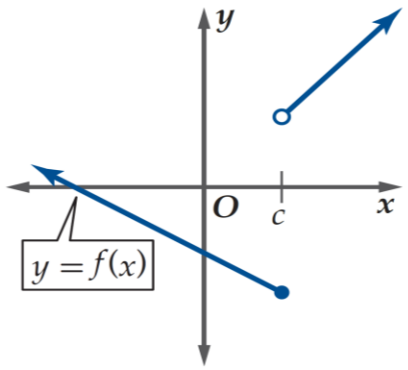
للدالة عدم اتصال لانهائي عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



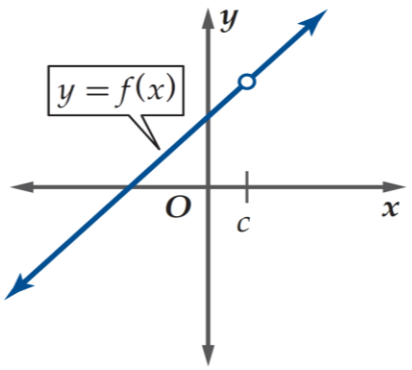
للدالة عدم اتصال قفزي عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة عدم اتصال قابل لإزالة عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تحقق من فهمك

حدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

(2A $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

(2B $f(x)=\begin{cases} 5x+4 & , \quad x>2 \\ 2-x & , \quad x\le 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$

(3 $h(x)=\frac{x^2-36}{x+6}$ ، عند $x=-6$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

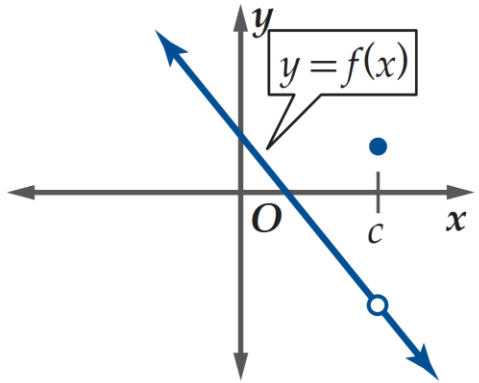
تدرب

حدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

7) $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & , \quad x \le -6 \\ -x+2 & , \quad x > -6 \end{cases}$ ، عند $x=-6$.

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات



لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تحقق من فهمك

3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تدرب

أعد تعريف كل دالة مما يأتي عند قيمة x المعطاة؛ لتصبح الدالة متصلة

9) $x = -3 \text{ ، } f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

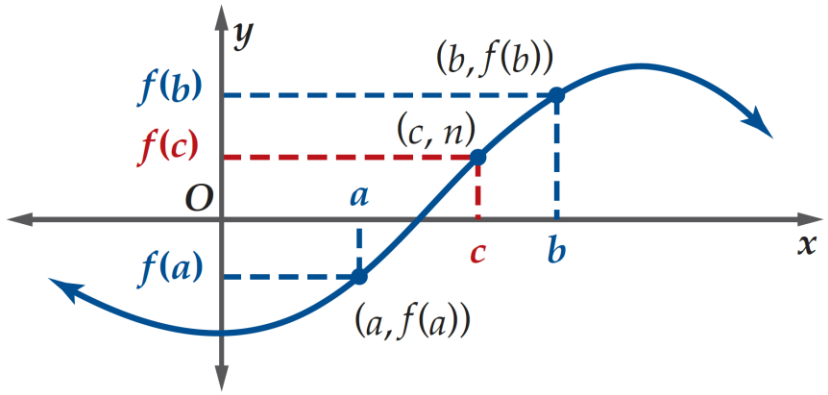
الأدوات

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a ($\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$) ، ومتصلة من اليسار عند b ($\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$) . ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

نظرية

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.



نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تحقق من فهمك

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

4B $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

x									
$f(x)$									

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تحقق من فهمك

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التى تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

5B $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

x									
$f(x)$									

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تدرب

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التى تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

12) $f(x) = x^3 - x^2 - 3\,,\,[-2, 4]$

x									
$f(x)$									

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

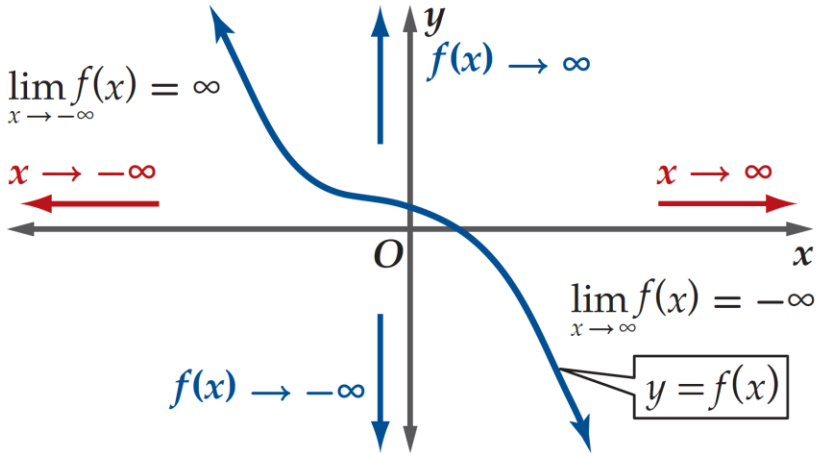
سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$



أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.

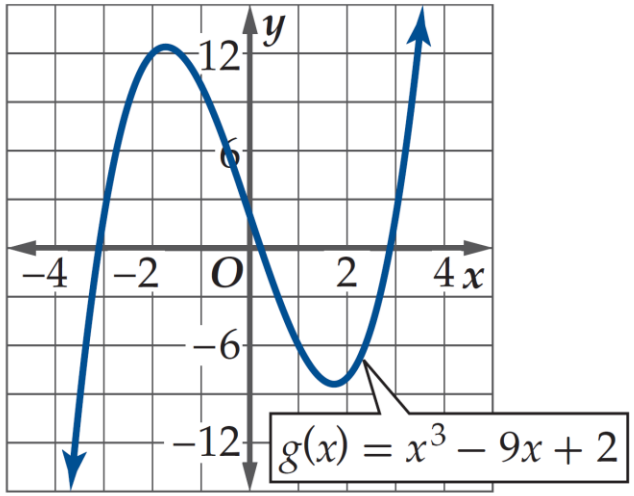
الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تحقق من فهمك

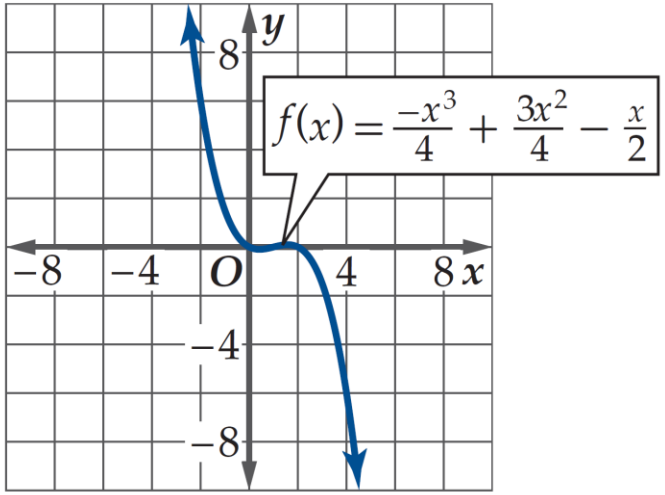
استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني.

(6A



من اليمين	
من اليسار	

(6B



من اليمين	
من اليسار	

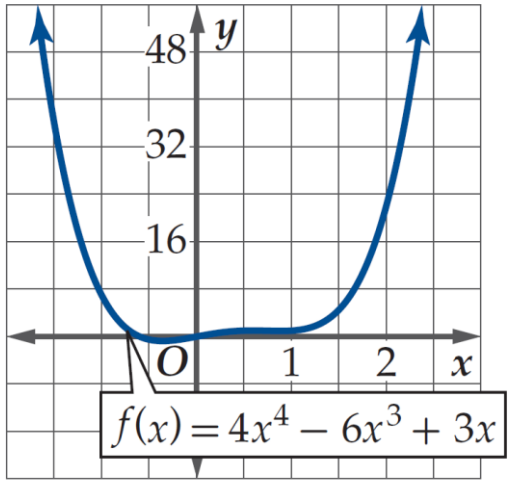
الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تدرب

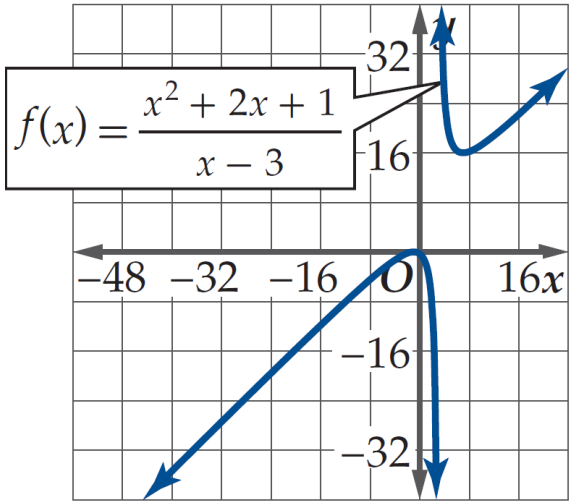
استعمل التمثيل البيانى للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني.

(17



من اليمين	
من اليسار	

(19



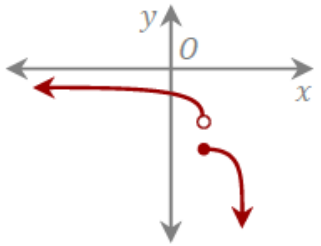
من اليمين	
من اليسار	

الصف	المادة	الفصل	الدرس	التاريخ	موضوع الدرس
٣ث	ريض٣-١	١	٣		الاتصال والنهايات

الأدوات

تحصيلي

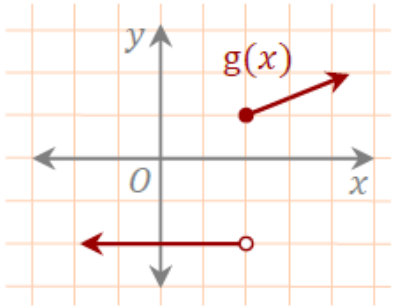
التمثيل البياني يمثل دالة غير متصـــلة، ما نوع عدم الاتصال؟



Ⓐ لا نهائي Ⓑ نقطي

Ⓒ قفزي Ⓓ قابل للإزالة

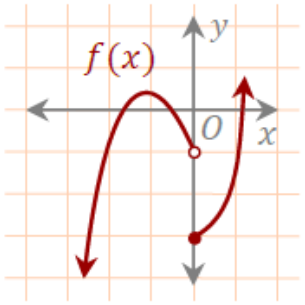
في الشـــكل ما نوع عدم الاتصـــال للدالة $g(x)$ عند النقطة $x = 2$ ؟



Ⓐ انفصالي Ⓑ لا نهائي

Ⓒ قفزي Ⓓ قابل للإزالة

يمكن وصف سلوك الطرف الأيسر للدالة $f(x)$ في الشكل بـ ..



Ⓐ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ Ⓑ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Ⓒ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ Ⓓ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$