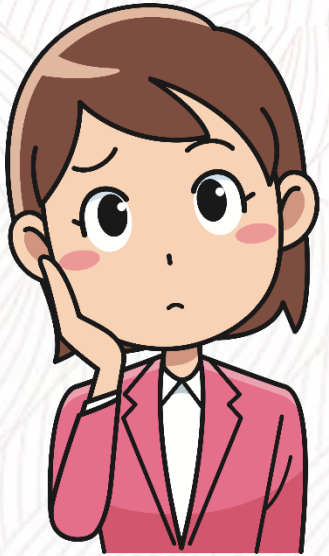
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

اثبات علاقات بين الزوايا

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633

سؤال للأذكياء



اشترى محمد ضعف ما
اشترى سعود وكان مجموع
ما أنفقاه هو ١١١ ريال
فكم أنفق سعود ؟؟؟

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633

فيما سبق

درسْتُ تعيين أزواج خاصة من الزوايا واستعملتها

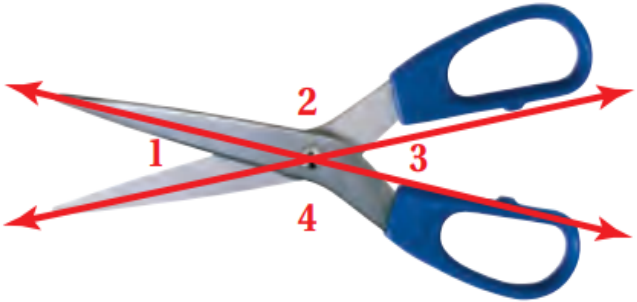
والآن

أكتب براهين تتضمن زوايا متتامة و زوايا متكاملة

أكتب براهين تتضمن زوايا متطابقة و قائمة

SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

لماذا؟



تلاحظ أن ∠1 بين شفرتَي المقص، و ∠2 بين الشفرة ومقبض المقص تشكلان زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم.
وبالمثل فإن ∠2 و ∠3 بين مقبضَي المقص تشكلان أيضا زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيمٍ.

في الشكل اذكر جميع أزواج الزوايا المتكاملة ؟

استعمل المنقلة لقياس ∠١ و ∠٢، ثم أوجد مجموع قياسيهما ؟

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

الزوايا المتتامة والمتكاملة: توضّح مسلّمة المنقلة العلاقة بين قياس الزوايا والأعداد الحقيقية.

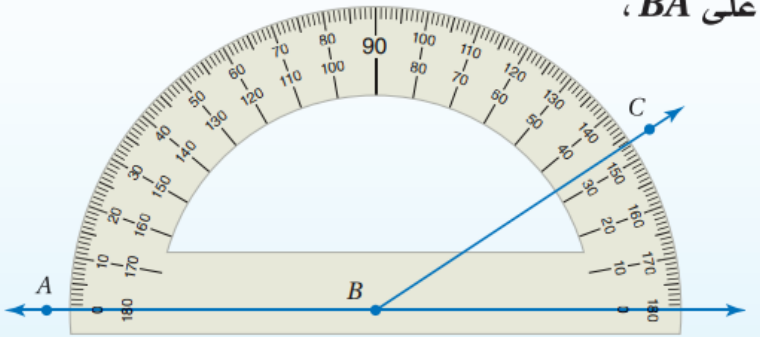
مسلمة 1.10

مسلّمة المنقلة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تستعمل المنقلة للربط بين قياس زاوية وعدد حقيقي يقع بين $0°$ و $180°$.

مثال: في $\angle ABC$، إذا انطبق صفر المنقلة على $\overrightarrow{BA}$، فإن العدد الذي ينطبق على $\overrightarrow{BC}$ يمثل قياس $\angle ABC$.



@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

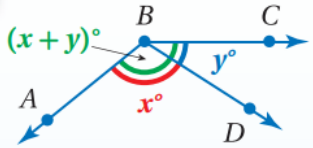
درست سابقًا مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، وتوجد علاقة مشابهة لها بين قياسات الزوايا.

مسلمة 1.11

مسلمة جمع قياسات الزوايا

تقع النقطة D داخل $\angle ABC$ إذا وفقط إذا كان

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

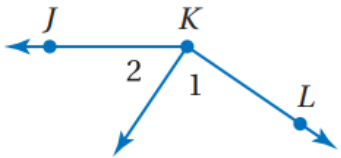


أضف إلى مطويتك

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

مثال ١ : استعمال مسلمة جمع قياسات الزوايا

إذا كان $m\angle JKL = 145°$, $m\angle 2 = 56°$ فأوجد $m\angle 1$. برّر خطوات حلّك.

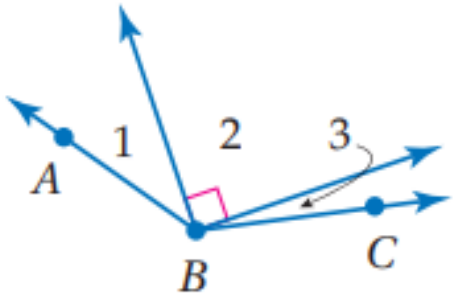


$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle JKL$	مسلّمة جمع قياسات الزوايا
$m\angle 1 + 56° = 145°$	عوّض $m\angle 2 = 56°$, $m\angle JKL = 145°$
$m\angle 1 + 56° - 56° = 145° - 56°$	اطرح 56 من الطرفين
$m\angle 1 = 89°$	بسّط

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

تحقق من فهمك ١

1) إذا كان $m\angle ABC = 131°$, $m\angle 1 = 23°$، فأوجد $m\angle 3$.
برِّر خطوات حلّك.



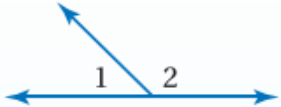
@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATH IS LIVE

يمكن استعمال مسلمة جمع قياسات الزوايا مع علاقات أخرى على الزوايا؛ لإثبات نظريات تتعلق بالزوايا.

نظريتان

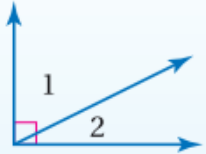
أضف إلى مطويتك

1.3 **نظرية الزاويتين المتكاملتين:** إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإنهما متكاملتان.



مثال: $\angle 1, \angle 2$ متجاورتان على مستقيمٍ، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

1.4 **نظرية الزاويتين المتتامتين:** إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإن الزاويتين تكونان متتامتين.



مثال: ضلعا الزاويتين المتجاورتين $\angle 1, \angle 2$ غير المشتركين يشكلان زاويةً قائمةً، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

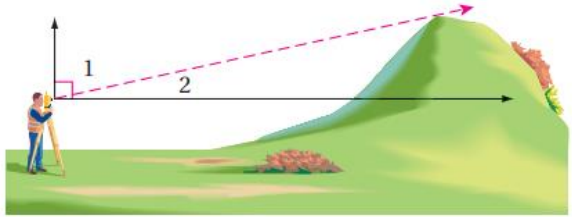
مثال ٢ : استعمال خصائص الزوايا المتكاملة أو المتتامة

مَسْح الأراضي: قام مسّاح بقياس الزاوية بين خط نظره إلى قمة تلة، والمستقيم الرأسي فكانت $73°$ تقريبًا. ما قياس الزاوية بين خط نظره والخط الأفقي؟ برّر خطوات الحل.

افهم: ارسم شكلًا يوضح المسألة. قاس المسّاح الزاوية بين خط نظره والخط الرأسي؛ لذا ارسم نصف المستقيم الرأسي والأفقي من النقطة التي يشاهد منها المسّاح التلة، ثم سمّ الزوايا الناتجة. وكما تعلم فإن نصفَي المستقيمين (الأفقي والرأسي) يكوّنان زاويةً قائمةً.

حُل: بما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة فإنهما متتامتان. تعريف الزاويتين المتتامتين

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	تعريف الزاويتين المتتامتين
$73° + m\angle 2 = 90°$	$m\angle 1 = 73°$
$73° + m\angle 2 - 73° = 90° - 73°$	اطرح 73 من الطرفين
$m\angle 2 = 17°$	بسّط



قياس الزاوية بين خط نظر المساح وخط الأفق $17°$

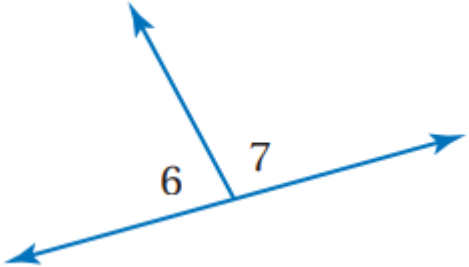
تحقق: تعلم أنه يجب أن يكون ناتج جمع قياسَي $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي $90°$

✓ $17° + 73° = 90°$

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

تحقق من فهمك؟

2) في الشكل المجاور، $\angle 6$ و $\angle 7$ متجاورتان على مستقيم. إذا كان:
$m\angle 6 = (3x + 32)^\circ$ و $m\angle 7 = (5x + 12)^\circ$ ،
فأوجد قيمة $m\angle 7$, $m\angle 6$, x. برّر خطوات الحل.



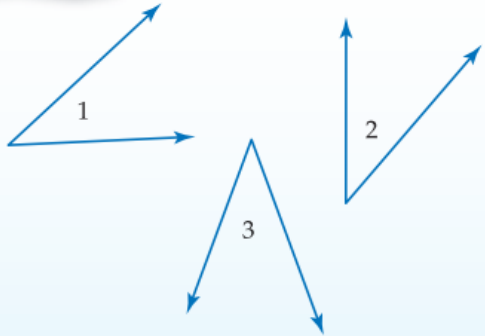
@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATH IS LIVE

تطابق الزوايا: إن الخصائص الجبرية التي تنطبق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها، تنطبق أيضًا على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

نظرية 1.5

أضف إلى مطويتك

خصائص تطابق الزوايا



خاصية الانعكاس للتطابق

$\angle 1 \cong \angle 1$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

خاصية التعدي للتطابق

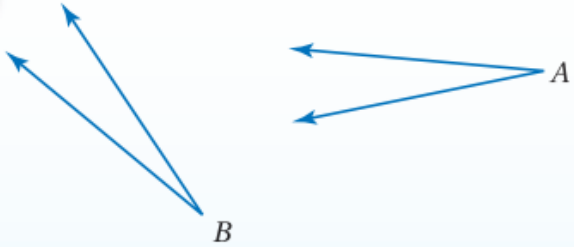
إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$ ، وكانت $\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

برهان

أضف إلى مطويتك

خاصية التماثل للتطابق



المعطيات: $\angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\angle B \cong \angle A$

برهان حر:

تعلم من المعطيات أن $\angle B \cong \angle A$. ومن تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle A = m\angle B$، وباستعمال خاصية التماثل للمساواة يكون $m\angle B = m\angle A$، وعليه فإن $\angle B \cong \angle A$ من تعريف تطابق الزوايا.

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

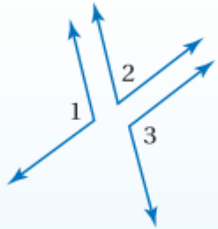
يمكنك تطبيق الخصائص الجبرية لإثبات نظريات على تطابق الزوايا تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.

نظريتان

أضف إلى مطويتك

1.6 نظرية تطابق المكمّلات:

الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

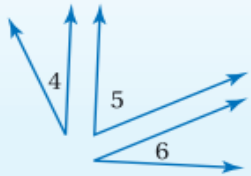


مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$،

وكان $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

1.7 نظرية تطابق المتممات:

الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.



مثال: إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90°$

و $m\angle 5 + m\angle 6 = 90°$ ، فإن $\angle 4 \cong \angle 6$.

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

برهان

أضف إلى مطويتك

إحدى حالات نظرية تطابق المكملات

المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان.

$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.

المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

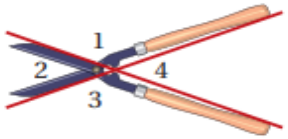
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.	1) معطيات
2) $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°, m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	2) تعريف الزاويتين المتكاملتين
3) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3) بالتعويض
4) $m\angle 1 = m\angle 2$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $\angle 1 \cong \angle 2$	5) تعريف تطابق الزوايا

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

مثال ٣ : برهن تستعمل فيها نظريتا تطابق المكملات أو المتممات

أثبت أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس 2 و 4 في الشكل المجاور متطابقتان.



المعطيات: $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 4$

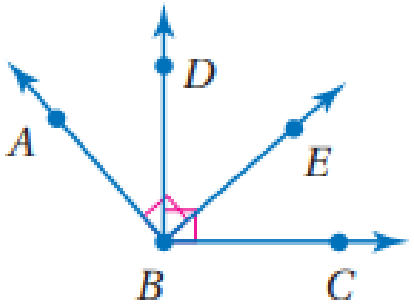
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.	**1)** معطيات
2) $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم. $\angle 3$ و $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم.	**2)** تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.	**3)** نظرية الزاويتين المتكاملتين
4) $\angle 4 \cong \angle 2$	**4)** نظرية تطابق المكملات

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

تحقق من فهمك ٣

3) في الشكل المجاور $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان.
أثبت أن $\angle EBC \cong \angle ABD$.

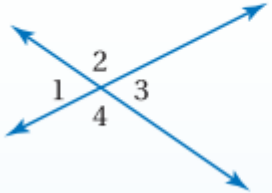


@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATH IS LIVE

نظرية 1.8

أضف إلى مطويتك

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس



الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

مثال: $\angle 1 \cong \angle 3$
$\angle 2 \cong \angle 4$

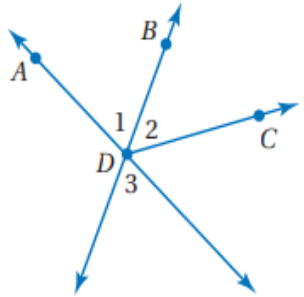
@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

مثال ٤ : استعمال الزوايا المتقابلة بالرأس

أثبت أنه إذا كان $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$

المعطيات: $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$

المطلوب: $\angle 3 \cong \angle 2$



العبارات	المبررات
1) $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$.	1) معطيات
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	2) تعريف منصف الزاوية
3) $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس.	3) تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس
4) $\angle 1 \cong \angle 3$	4) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
5) $\angle 3 \cong \angle 2$	5) خاصية التعدي للتطابق
6) $\angle 3 \cong \angle 2$	6) خاصية التماثل للتطابق

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL

تحقق من فهمك ٣

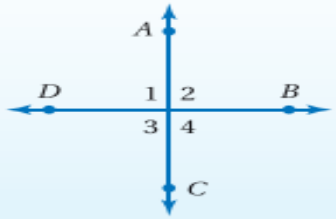
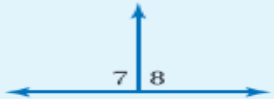
4) إذا كانت $\angle 3$ و $\angle 4$ متقابلتين بالرأس، وكان $m\angle 3 = (6x + 2)^\circ$ و $m\angle 4 = (8x - 14)^\circ$، فأوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$. برِّر خطوات حلّك.

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

أضف إلى مطويتك

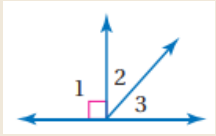
نظريات

نظريات الزاوية القائمة

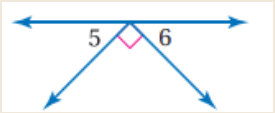
النظرية	مثال
1.9 يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونان أربع زوايا قائمة. **مثال:** إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$ ، فإن $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة	
1.10 جميع الزوايا القائمة متطابقة. **مثال:** إذا كانت $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$، جميعها قائمة، فإن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$.	
1.11 المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة. **مثال:** إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 2 \cong \angle 4, \angle 3 \cong \angle 4, \angle 1 \cong \angle 3$	
1.12 إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال:** إذا كانت $\angle 5 \cong \angle 6$ ، وكانت $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتين، فإن $\angle 5$ و $\angle 6$ قائمتان.	
1.13 إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، وكانتا متطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال:** إذا كانت $\angle 7$ و $\angle 8$ متجاورتين على مستقيم، وكانت $\angle 8 \cong \angle 7$ فإن $\angle 7$ و $\angle 8$ قائمتان.	

@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

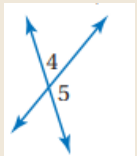
$m\angle 2 = x°, m\angle 3 = (x-16)°$ **(1**



$m\angle 5 = m\angle 6$ **(6**



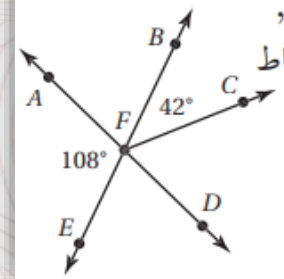
$m\angle 4 = (3(x-1))°, m\angle 5 = (x+7)°$ **(2**



@luna_xr36
t.me/lunaaaxr633
SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

تدريب تقويمي

30) في الشكل المجاور إذا كانت النقاط F ,E, B تقع على استقامة واحدة، وكذلك النقاط A ,F ,D ، فأوجد قياس $\angle CFD$



A 66°	**C** 108°
B 72°	**D** 138°

31) إذا كانت النسبة بين قياسَي زاويتين متتامتين هي 4:1 فما قياس الزاوية الصغرى؟

A 15°	**C** 24°
B 18°	**D** 36°

@luna_xr36

t.me/lunaaaxr633

SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE

الواجب المنزلي

دمتم بسعادة
أحبتي

@luna_xr36

t.me/lunaaaxr633

SAJA AL FAISAL
MATE IS LIVE