سلسلة رِفعة لدفتر الرياضيات

رياضيات 5

اسم الطالبة ....

الفصل ....

اسم المعلمة.. :

حسابات المجموعة

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

حسناء كيلاني

سارة العتيبي

بسمة math

المؤلفين

- ابتسام عاتق الطاهري
- ساره خالد العتيبي
- حسناء حسن كيلاني
- شيخه راجح المرزوقي

سلسلة رفعة لدفتر الرياضيات–رياضيات5

تحت رقم إيداع 1444/966 وتاريخ 1444/01/27 هـ، ورقم ردمك 978-603-04-2351-4

جدول الحصص اليومي

	1	2	3	4	5	6	7	8
الأحد								
الأثنين								
الثلاثاء								
الأربعاء								
الخميس								

متابعة وتقييم الدفتر

اليوم والتاريخ	التقييم	الملاحظة

متابعة وتقييم الدفتر

الملاحظة	التقييم	اليوم والتاريخ

متابعة وتقييم الدفتر

اليوم والتاريخ	التقييم	الملاحظة

متابعة وتقييم الدفتر

اليوم والتاريخ	التقييم	الملاحظة

1

الفصل الأول

تحليل الدوال

2

الفصل الثاني

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

3

الفصل الثالث

المتطابقات والمعادلات المثلثية

4

الفصل الرابع

القطوع المخروطية

1 تحليل الدوال

- التهيئة للفصل الأول
- الدوال
- تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات
- الاتصال والنهايات
- القيم القصوى ومعدل متوسط التغير
- الدوال الرئيسية (الأم) والتحويلات الهندسية
- العمليات على الدوال وتركيب دالتين
- العلاقات والدوال العكسية

الموضوع: التهيئة للفصل الأول التاريخ:

- مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد:

1) $x > -3$

2) $x \leq -5$

3) $7 \geq x$

4) $-4 < x$

- حلّ كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

5) $y - 3x = 2$

6) $2x - y^2 = 7$

الموضوع: التهيئة للفصل الأول التاريخ:

● حلّ كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

7) $y^2 + 5 = -3x$

8) $9 + y^3 = -x$

● أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

9) 3y - 4, y=2

10) $5z - 2z^2 + 1, z = 5x$

الموضوع: **التهيئة للفصل الأول** التاريخ:

الموضوع: الدوال   التاريخ:

تحديد المجال جبرياً

- **كثيرة الحدود**
  - المجال/ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
- **الدالة الكسرية**
  - $\mathbb{R}$ − {أصفار المقام} \ المجال
- **الدالة الجذرية**
  - **الدليل زوجي**
    - **الجذر في البسط**
      - $0 \geq$ ما بداخل الجذر \ المجال
    - **الجذر في المقام**
      - $0 >$ ما بداخل الجذر \ المجال
  - **الدليل فردي**
    - **الجذر في البسط**
      - المجال/ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
    - **الجذر في المقام**
      - $\mathbb{R}$ − {أصفار المقام} \ المجال
- **الدالة الكسرية الجذرية** (الجذر في البسط)
  - {أصفار المقام} − $0 >$ ما بداخل الجذر \ المجال

الموضوع: الدوال التاريخ:

مثال 1 استعمال الصفة المميزة

تحقق من فهمك

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

1B) $x \leq -3$

1C) $-1 \leq x \leq 5$

تدرب

1) $x > 50$

4) $\{-3, -2, -1, \ldots\}$

الموضوع: الدوال التاريخ:

مثال 2 استعمال رمز الفترة

تحقق من فهمك

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

2A) $-4 \leq y < -1$

2B) $a \geq -3$

2C) $x > 9$ أو $x < -2$

تدرب

5) $-31 < x \leq 64$

8) $x \leq -45$ أو $x > 86$

الموضوع: الدوال التاريخ:

مثال 3 تحديد العلاقات التي تمثّل دوال

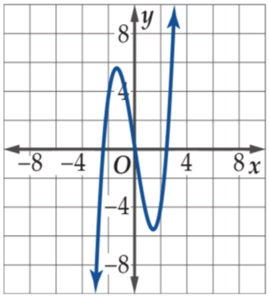
تحقق من فهمك في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C)



تدرب

13) $\frac{1}{x} = y$

الموضوع: الدوال التاريخ:

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

4A) $f(12)$

4B) $f(6x)$

4C) $f(-3a+8)$

تدرب

19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

a) $g(9)$

55) **تحدٍّ:** إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1) = 1, G(2) = 2, G(3) = 3$ و $G(x+1) = \frac{G(x-2)\,G(x-1)+1}{G(x)}$ لكل $x \geq 3$، فأوجد $G(6)$.

الموضوع: الدوال   التاريخ:

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$

5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

6) **سرعة:** إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \quad 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \quad 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

6A) $v(5)$

6B) $v(15)$

تدرب

حدّد مجال كل دالة مما يأتي:

26) $f(x) = \dfrac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$

الموضوع: الدوال

التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

53) **اكتشف الخطأ:** أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله: إن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. في حين قال سلمان: أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

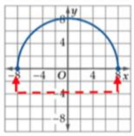
الموضوع: **الدوال** التاريخ:

الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات التاريخ:

تحليل الدالة بيانياً 1

المجال

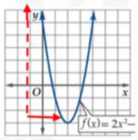
قيم x من أقصى يسار التمثيل البياني الى أقصى اليمين مع حذف نقاط عدم التعريف



المجال $=[-8,8]$

المدى

قيم y من أسفل التمثيل البياني الى الأعلى مع حذف نقاط عدم التعريف

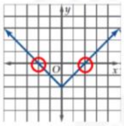


المدى $= [-3,\infty)$

أصفار الدالة (مقطعx)

الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور x

(قيم x تحت شرط $y = 0$)

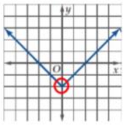


$x = 2, -2$

مقطعy

الإحداثي y لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور y

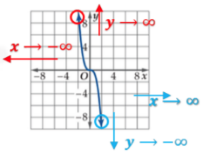
(قيم y تحت شرط $x = 0$)



$y = -2$

تحليل الدالة بيانياً 2

سلوك طرفي التمثيل البياني



$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

الدوال الزوجية والفردية

زوجية

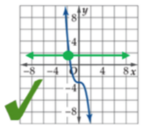
إذا حققت العبارة: $f(-x) = f(x)$

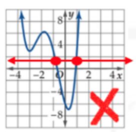
فردية

إذا حققت العبارة: $f(-x) = -f(x)$

هل الدالة لها دالة عكسية؟!

إذا حققت اختبار الخط الأفقي



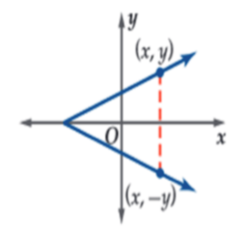


الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات التاريخ:

أنواع التماثل

حول محور x

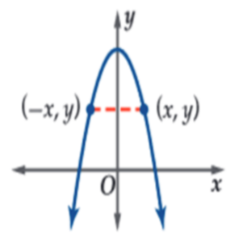
بتعويض $-y$ مكان y تعطي معادلة مكافئة



حول محور y

وهي دالة زوجية

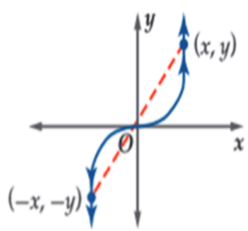
بتعويض $-x$ مكان x تعطي معادلة مكافئة



حول نقطة الأصل

وهي دالة فردية

بتعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y فتعطي معادلة مكافئة



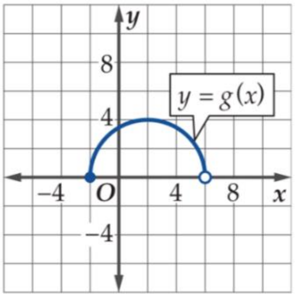
الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات التاريخ:

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

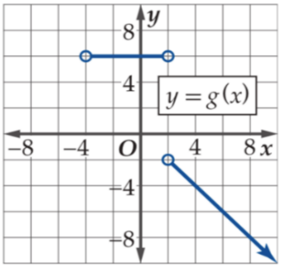
تحقق من فهمك

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .

(2A

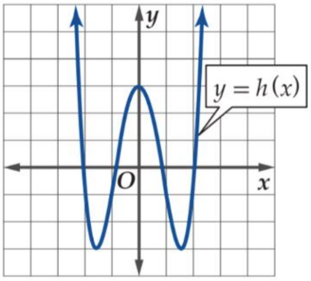


(2B

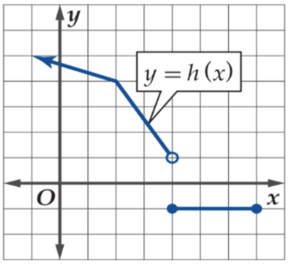


تدرب

(6



(9



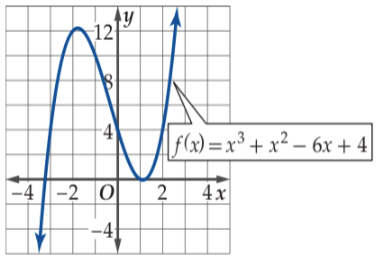
الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات التاريخ:

مثال 3 إيجاد المقطع y

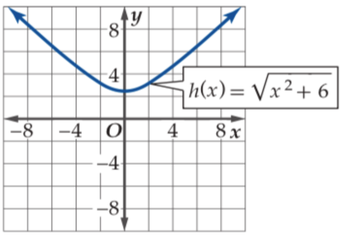
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:

3A)



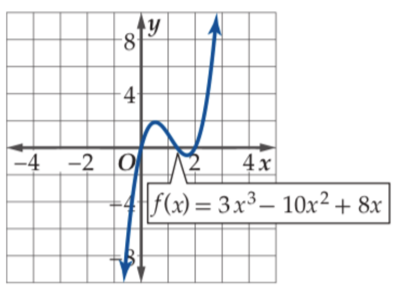
3B)



مثال 4 إيجاد الأصفار

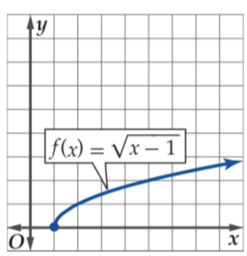
استعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.

4A)



تدرب

11)



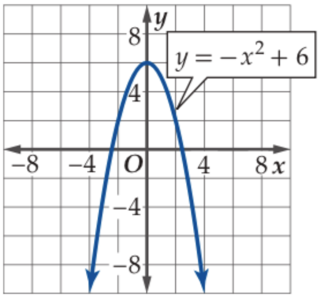
الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات التاريخ:

مثال 5 اختبار التماثل

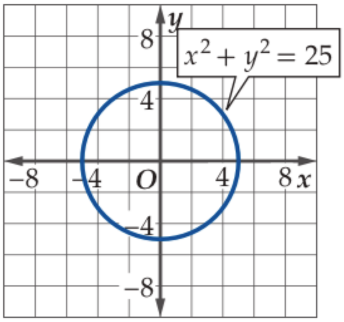
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا.

5A)

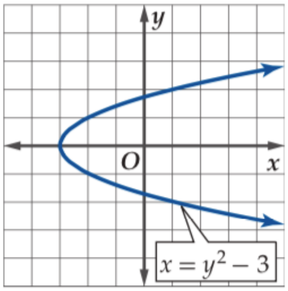


5B)



تدرب

18)



الموضوع: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات التاريخ:

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

تحقق من فهمك

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

6B) $g(x) = 4\sqrt{x}$

6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

تدرب

25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

تبرير: إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدّد ما إذا كانت الدالة $b(x)$ فردية، أم زوجية، أم غير ذلك في كل مما يأتي، وبرِّر إجابتك:

(60 $b(x) = a(-x)$

(61 $b(x) = -a(x)$

ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$، إذا كان مجالها $-2 < x < 3$ ؟

A $5 < f(x) < 9$

B $5 < f(x) < 10$

C $1 < f(x) < 9$

D $1 \le f(x) < 10$

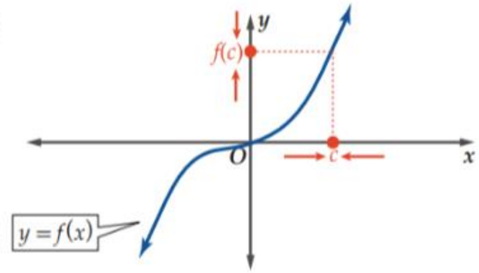
اختبار الاتصال

يقال أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط التالية :

1

$f(x)$ معرفة عند c

أي أن $f(c)$ موجودة .



3

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

2

$f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين

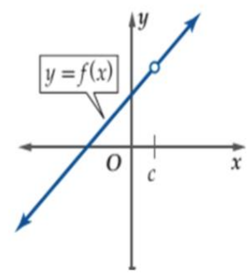
أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.

حالات عدم اتصال الدالة

قابل للإزالة

إذا تحققت الحالة التالية :

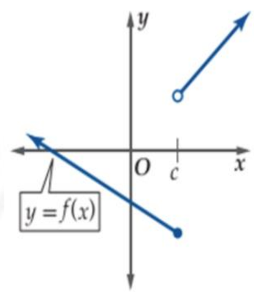
$$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$



قفزي

إذا تحققت الحالة التالية :

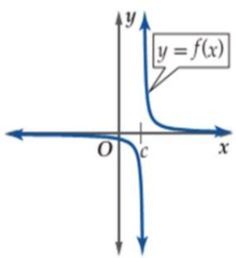
$$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$



لا نهائي

إذا تحققت الحالة التالية :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$



الموضوع: الاتصال والنهايات التاريخ:

مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

(1A $f(x) = x^3$

(1B $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

تدرب

(1 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، عند $x = -5$.

(2 $f(x) = \sqrt{x + 5}$ ، عند $x = 8$.

الموضوع: **الاتصال والنهايات** التاريخ:

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

2A) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$، عند $x = 0$.

2B) $f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , \quad x > 2 \\ 2 - x & , \quad x \le 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

تدرب

7) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , \quad x \le -6 \\ -x + 2 & , \quad x > -6 \end{cases}$ ، عند $x = -6$.

الموضوع: **الاتصال والنهايات** التاريخ:

مثال 3 إزالة عدم الاتصال

تحقق من فهمك

3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

تدرب

9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ ، $x = -3$

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

39) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^6}{x^5}$

الموضوع: الاتصال والنهايات التاريخ:

مثال 4 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

تحقق من فهمك

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

4B) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

مثال 5 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

تدرب

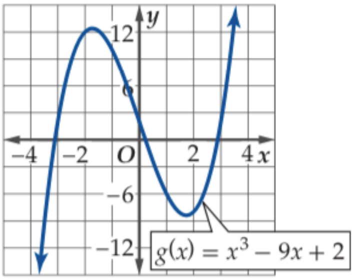
12) $f(x) = x^3 - x^2 - 3 , [-2, 4]$

الموضوع: الاتصال والنهايات التاريخ:

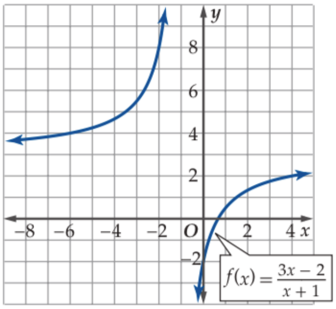
مثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

تحقق من فهمك استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا

(6A

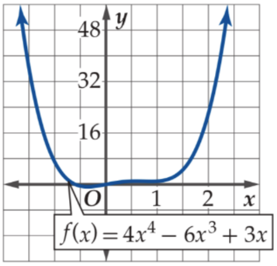


(7A

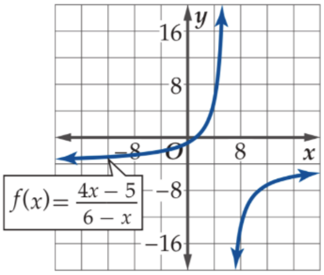


تدرب

(17



(20



الموضوع: الاتصال والنهايات التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

59) في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$؟

A $[6, 7]$

B $[7, 8]$

C $[8, 9]$

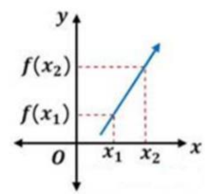
D $[9, 10]$

اطراد الدالة

متزايدة

كلما زادت قيم x تزداد قيم f(x)

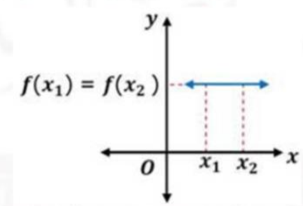
كلما اتجهنا لليمين يرتفع المنحنى)



ثابتة

كلما زادت قيم x لا تتغير قيم f(x)

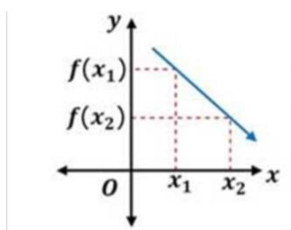
(كلما اتجهنا لليمين لا نخفض المنحنى ولا يرتفع)



متناقصة

كلما زادت قيم x تنقص قيم f(x)

(كلما اتجهنا لليمين ينخفض المنحنى)



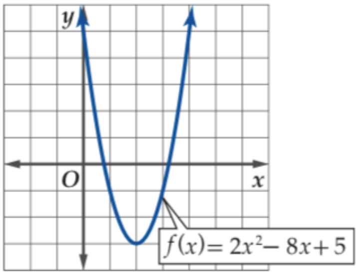
الموضوع: **القيم القصوى ومتوسط معدل التغير** التاريخ:

مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

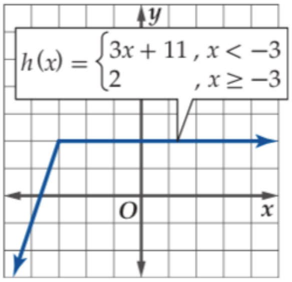
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًا.

(1A

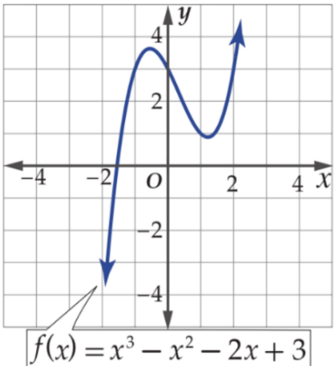


(1B



تدرب

(1



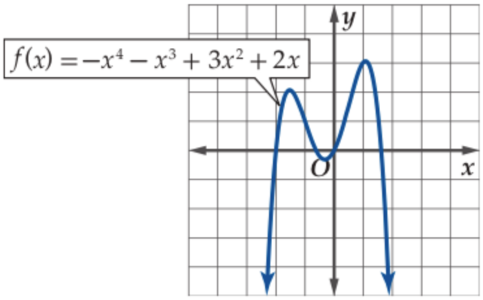
الموضوع: **القيم القصوى ومتوسط معدل التغير** التاريخ:

مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها

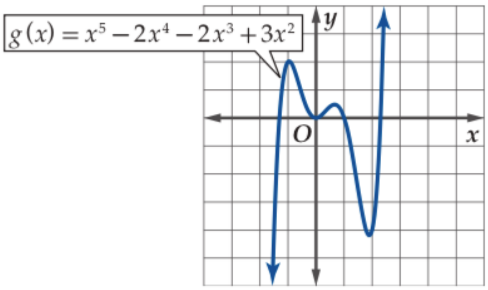
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًا.

(2A

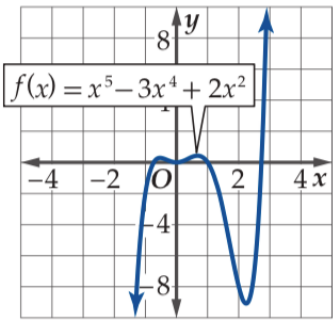


(2B



تدرب

(6



الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير   التاريخ:

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

تحقق من فهمك أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم:

3A) $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

3B) $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

تدرب

12) $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

الموضوع: **القيم القصوى ومتوسط معدل التغير** التاريخ:

مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

تحقق من فهمك

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

تدرب

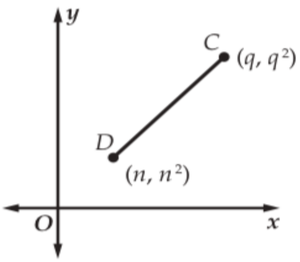
19) $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$

الموضوع: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

61) في الشكل أدناه، إذا كان $q \neq n$ ، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD .



A $q + n$

B $q - n$

C $\frac{q^2 + q}{n^2 - n}$

D $\frac{1}{q + n}$

62) يوجد للدالة $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ قيمة عظمى محلية ، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

C عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

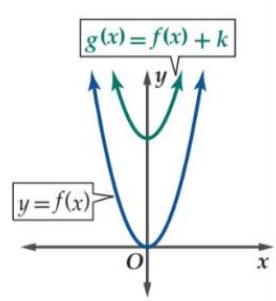
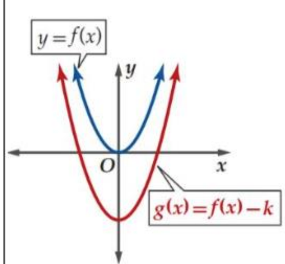
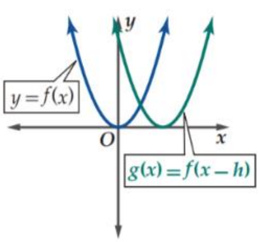
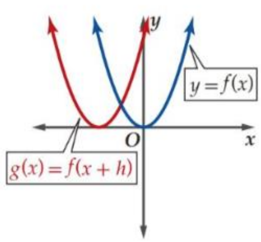
الموضوع: **القيم القصوى ومتوسط معدل التغير** التاريخ:

التحويلات الهندسية

قياسية	غير قياسية
تغير موقع المنحنى	تغير موقع المنحنى
ولا تغير أبعاده أو شكله .	تغير شكل المنحنى .
مثال: الانسحاب - الانعكاس	مثال: التمدد - تحويلات القيمة المطلقة

الانسحاب

تحويل ينقل منحنى الدالة فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة إلى أعلى أو أسفل ، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار.

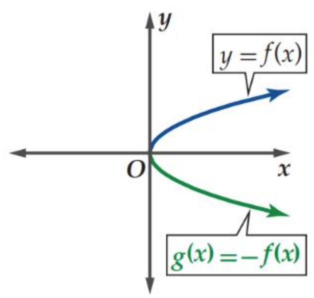
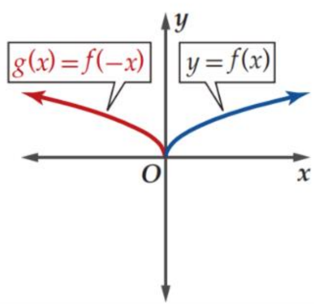
<table>
<tr><th colspan="4">الانسحاب</th></tr>
<tr><th colspan="2">رأسي</th><th colspan="2">أفقي</th></tr>
<tr><td colspan="2">$g(x) = f(x) + k$</td><td colspan="2">$g(x) = f(x - h)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">k خارج</td><td colspan="2">h داخل</td></tr>
<tr><td>(+) أعلى</td><td>(−) أسفل</td><td>(−) يمين</td><td>(+) يسار</td></tr>
<tr><td>$g(x) = f(x) + k$</td><td>$g(x) = f(x) - k$</td><td>$g(x) = f(x - h)$</td><td>$g(x) = f(x + h)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

الموضوع: **الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية** التاريخ:

الانعكاس

تحويل يكون لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدد .

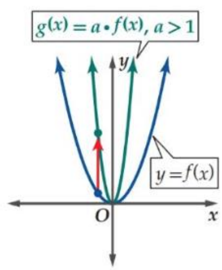
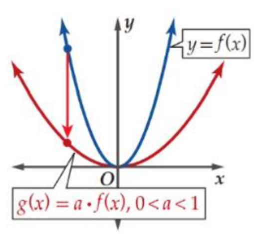
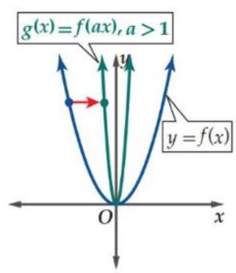
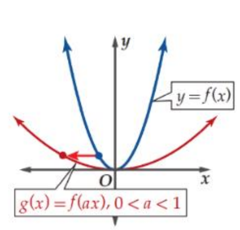
الانعكاس

الانعكاس حول محور x	الانعكاس حول محور y
(−) خارج	(−) داخل
$g(x) = -f(x)$	$g(x) = f(-x)$
	

التمدد

تحويل يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة .

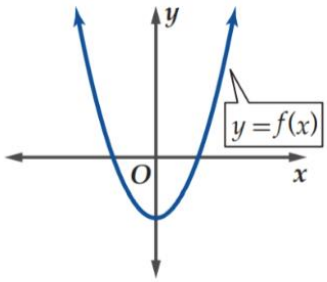
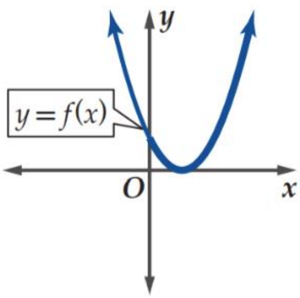
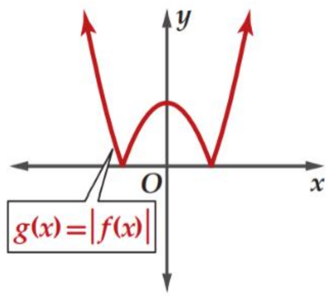
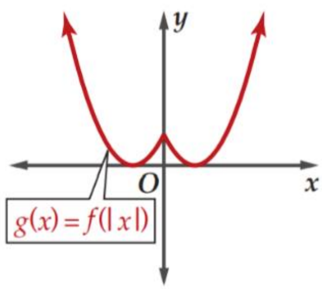
التمدد

رأسي		أفقي	
(a خارج الدالة)		(a داخل الدالة)	
$g(x) = a.f(x)$		$g(x) = f(a.x)$	
توسع	تضيق	توسع	تضيق
$a > 1$	$0 < a < 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$
اتجاه الحركة			
↑ ↓	↓ ↑	← →	→ ←
			

التوسع الرأسي ≈ التضيق الأفقي ، التضيق الرأسي ≈ التوسع الأفقي

الموضوع: **الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية** التاريخ:

التحويلات الهندسية لدوال القيمة المطلقة

<table>
<tr><th colspan="2">القيمة المطلقة</th></tr>
<tr><th>خارج</th><th>داخل</th></tr>
<tr><td>$g(x) = \lvert f(x) \rvert$</td><td>$g(x) = f(\lvert x \rvert)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">الرسم قبل التحويل</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">الرسم بعد التحويل</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">طريقة الرسم</td></tr>
<tr><td>نعكس كل جزء موجود تحت محور x
ونجعله فوق محور x
ثم نزيل السابق .</td><td>نزيل الجزء الموجود يسار محور y
ثم نعكس المتبقي فقط حول محور y .</td></tr>
</table>

الموضوع: **الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية** التاريخ:

مثال 1 وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)

تحقق من فهمك

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$

تدرب

4) $f(x) = x^2$

الموضوع: **الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية** التاريخ:

مثال 2 انسحاب منحنى الدالة

تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

2A) $h(x) = x^3 - 5$

2C) $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

تدرب

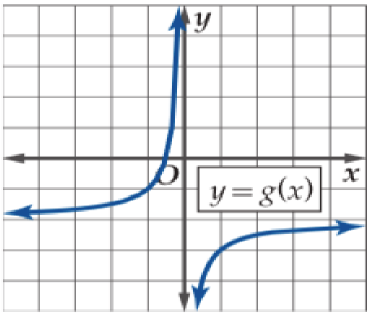
7) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

الموضوع: الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية التاريخ:

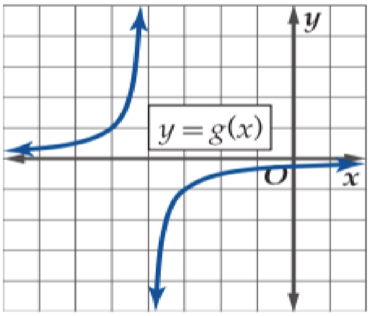
مثال 3 كتابة معادلات التحويل

تحقق من فهمك صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3A

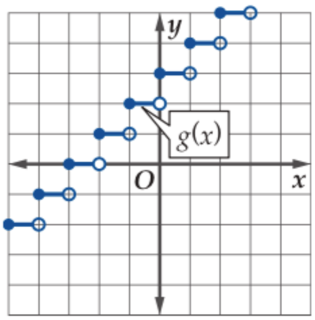


(3B

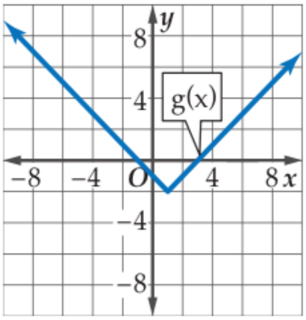


تدرب صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

(11



(14



الموضوع: الدوال الرئيسية ألأم والتحويلات الهندسية التاريخ:

مثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

تحقق من فهمك

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

(4A $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

(4B $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

تدرب

(15 $g(x) = 3|x| - 4$

مثال 5 تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانيًّا

تحقق من فهمك مثّل الدالة بيانيًّا:

5A) $$g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \le 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

تدرب

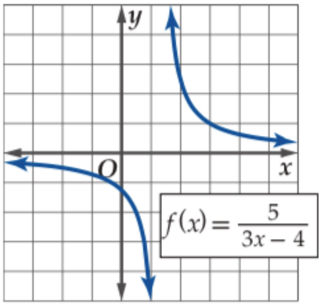
22) $$g(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < -6 \\ \frac{1}{x} & , \quad -6 \le x < 4 \\ 6 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

الموضوع: الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية التاريخ:

مثال 7 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل من الشكلين ادناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

7A)



تدرب

28) $f(x) = \frac{2}{x}$

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

50) **اكتشف الخطأ:** وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [x + 4]$. فقال محمد: أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار. وقال عبد الله: إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى أعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

تبرير: تحقّق ما إذا كانت كل من الجملتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة. وبرِّر إجابتك.

52) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(x) = |f(x)|$

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

$f+g$

$f(x) = x + 10 \qquad g(x) = \sqrt{x+1}$

$(f+g)(x) = x + 10 + \sqrt{x+1}$

مجال $f+g$ = مجال f ∩ مجال g

$= \mathbb{R} \cap [-1, \infty)$

$= [-1, \infty)$

$f-g$

$f(x) = x + 10 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+1}$

$(f-g)(x) = x + 10 - \sqrt{x+1}$

مجال $f-g$ = مجال f ∩ مجال g

$= \mathbb{R} \cap [-1, \infty)$

$= [-1, \infty)$

$f \circ g$

$f(x) = 2x - 3 \quad , \quad g(x) = 4x - 8$

$(f \circ g)(x) = 8x - 19$

مجال $f \circ g$ = مجال الدالة الناتجة ∩ مجال g

$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$

$= \mathbb{R}$

$f.g$

$f(x) = x + 10 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+1}$

$(f.g)(x) = x\sqrt{x+1} + 10\sqrt{x+1}$

مجال $f.g$ = مجال f ∩ مجال g

$= \mathbb{R} \cap [-1, \infty)$

$= [-1, \infty)$

$\frac{f}{g}$

$f(x) = x + 10 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+1}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+10}{\sqrt{x+1}}$

مجال $\frac{f}{g}$ = مجال f ∩ مجال g

$= \mathbb{R} \cap [-1, \infty) - \{-1\}$

$= (-1, \infty)$

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين التاريخ:

مثال 1 العمليات على الدوال

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A) $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B) $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

تدرب

1) $f(x) = x^2 + 4$

$g(x) = \sqrt{x}$

الموضوع: **العمليات على الدوال وتركيب دالتين** التاريخ:

مثال 2 تركيب دالتين

تحقق من فهمك أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = 5 - x^2$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4,\ g(x) = x + 2$

تدرب

11) $f(x) = 2x - 3$
$g(x) = 4x - 8$

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين التاريخ:

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

تحقق من فهمك حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

3A) $f(x) = \sqrt{x+1}\,, g(x) = x^2 - 1$

3B) $f(x) = \frac{5}{x}\,, g(x) = x^2 + x$

تدرب

15) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$g(x) = x^2 - 4$

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين　　　　التاريخ:

مثال 4 كتابة الدالة كتركيب دالتين

تحقق من فهمك أوجد دالتين g , f بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

4A) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

4B) $h(x) = \frac{1}{x+7}$

تدرب

22) $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

32) $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

الموضوع: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

82) إذا كان $f(2)=3, g(3)=2, f(3)=4, g(2)=5$، فما قيمة $[f \circ g](3)$؟

A 2

B 3

C 4

D 5

تحدّ: في كلٍّ مما يأتي، أوجد دالة f لا تساوي الدالة $I(x) = x$ بحيث تحقق الشرط المعطى.

70) $(f+f)(x) = x$

الموضوع: **العمليات على الدوال وتركيب دالتين** التاريخ:

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية

التاريخ:

متى تكون الدالة متباينة

المعادلات

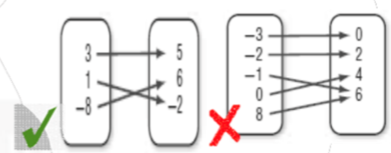
إذا كانت كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة لـ y ، ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x

$y = x^2 - 3$ ✗

$y = x^3 - 3$ ✓

المخطط السهمي

يصل لكل عنصر في المدى سهم واحد فقط



الأزواج المرتبة

عناصر المدى لا تتكرر

✓ $\{(-1,9),(2,13),(0,1)\}$

$\{(5,4),(-5,2),(9,3),(-1,4)\}$ ✗

الجدول

عناصر المدى لا تتكرر

x	y
0	5
-7	2
2	5

✗

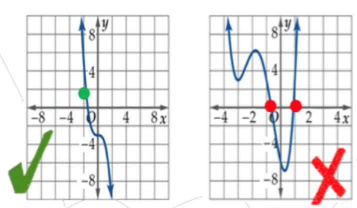
x	y
-3	4
1	-1
2	0

✓

بيانياً

هل الدالة لها دالة عكسية؟!

اختبار الخط الأفقي في الرسم البياني لا يمر إلا على نقطة واحدة



الموضوع: العلاقات والدوال العكسية التاريخ:

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

تحقق من فهمك مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$

تدرب

1) $y = x^2 + 6x + 9$

الموضوع: العلاقات والدوال العكسية التاريخ:

مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

تحقق من فهمك

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

(2A $f(x) = -16 + x^3$

(2C $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

تدرب

(14 $f(x) = \dfrac{x-6}{x}$

الموضوع: **العلاقات والدوال العكسية** التاريخ:

مثال 3 إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

تحقق من فهمك أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A) $f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

3B) $f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$

تدرب

20) $f(x) = 4x + 9$

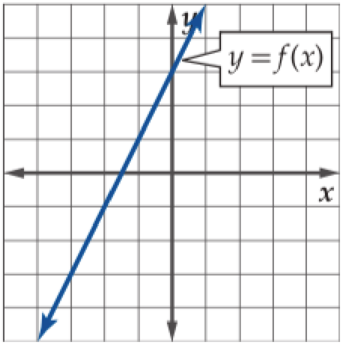
$g(x) = \frac{x - 9}{4}$

الموضوع: **العلاقات والدوال العكسية** التاريخ:

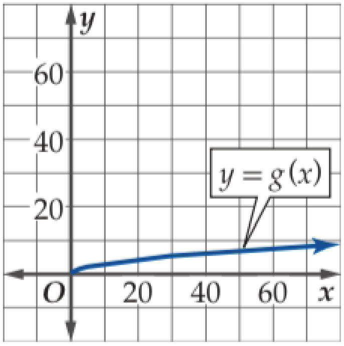
مثال 4 إيجاد الدالة العكسية بيانيًّا

تحقق من فهمك استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

4A)

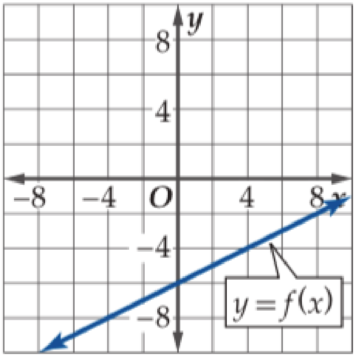


4B)



تدرب

27)



الموضوع: العلاقات والدوال العكسية التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرًا عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟

68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x-5}{2}$؟

A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

- التهيئة للفصل الثاني
- الدوال الأسية
- حل المعادلات والمتباينات الأسية
- اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
- خصائص اللوغاريتمات
- حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
- اللوغاريتمات العشرية

الموضوع: التهيئة للفصل الثاني التاريخ:

بسّط كل عبارة مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $a^4a^3a^5$

2) $(2xy^3z^2)^3$

3) $\dfrac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$

4) $\left(\dfrac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

5) **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. فإذا كانت كتلة جسم $7.5 \times 10^3 g$، وحجمه $1.5 \times 10^3 cm^3$، فما كثافته؟

14) **طعام:** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال. فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافًا إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$، موضحًا ماذا تعني.

الموضوع: التهيئة للفصل الثاني التاريخ:

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

6) $f(x) = 2x + 5$

8) $f(x) = -4x$

9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

12) $f(x) = x - 6$
$g(x) = x + 6$

13) $f(x) = 2x + 5$
$g(x) = 2x - 5$

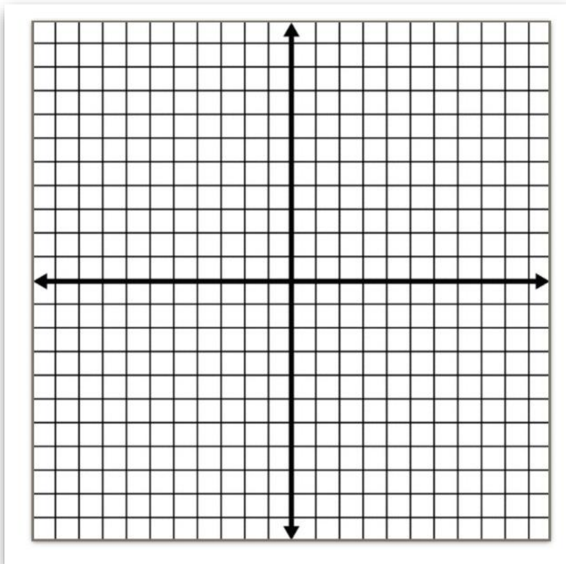
الموضوع: **التهيئة للفصل الثاني** التاريخ:

الموضوع: الدوال الأسية التاريخ:

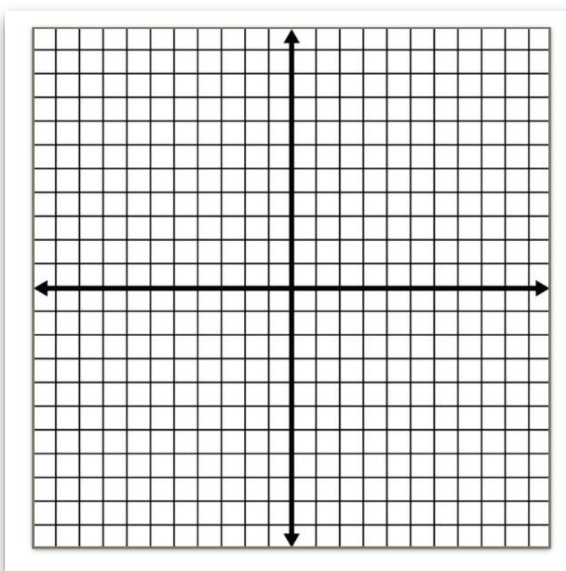
مثال 1 تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $b > 1$

تحقق من فهمك

1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.



1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

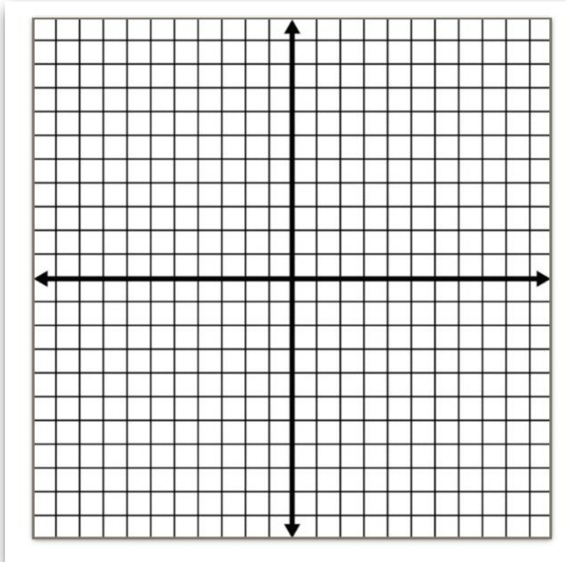


الموضوع: الدوال الأسية التاريخ:

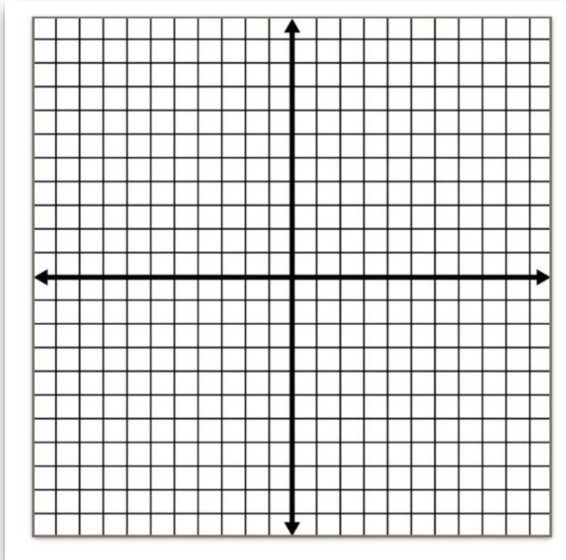
مثال 2 تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $0 < b < 1$

تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.



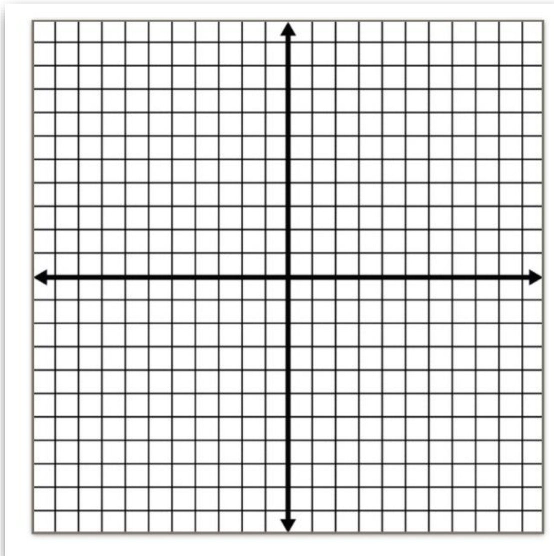
2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.



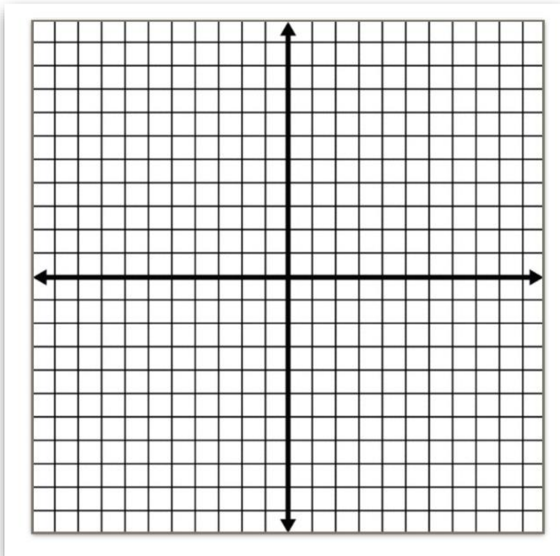
الموضوع: **الدوال الأسية** التاريخ:

تدرب

(1 $y = 2^x$ ، $2^{1.5}$



(3 $y = 2\left(\frac{1}{6}\right)^x$ ، $2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}$



الموضوع: الدوال الأسية التاريخ:

مثال 3 من واقع الحياة تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا

تحقق من فهمك

3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنويًّا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثِّل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

مثال 4 من واقع الحياة تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا

تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثِّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثِّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدِّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

الموضوع: الدوال الأسية	التاريخ:

تدرب

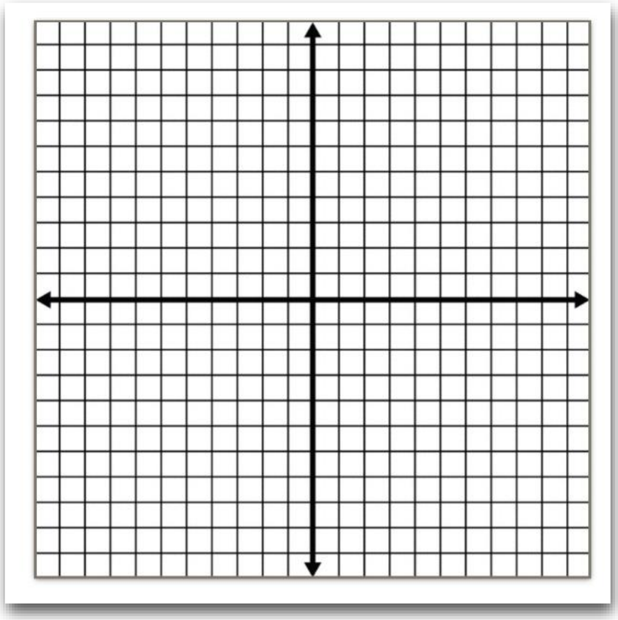
5) **حاسوب:** يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل النمو في انتشار الفيروس منذ البداية، ثم مثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة. (مثال 3)

الموضوع: الدوال الأسية التاريخ:

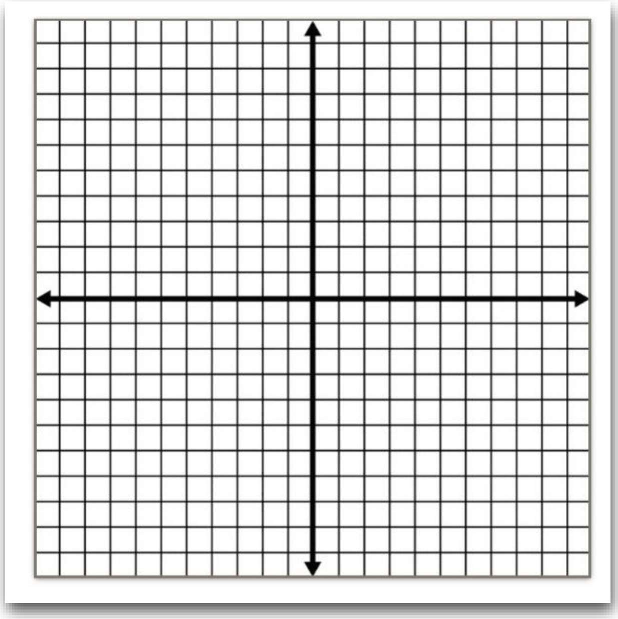
مثال 5 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

تحقق من فهمك

5A) $y = 2^{x+3} - 5$



5B) $y = 0.1(6)^x - 3$



الموضوع: **الدوال الأسية** التاريخ:

تدرب

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها، ومداها: (مثال 5)

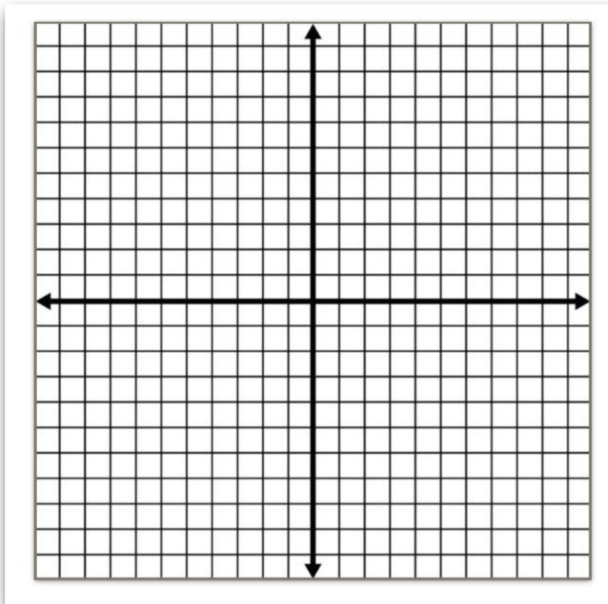
7) $f(x) = 2(3)^x$

الموضوع: الدوال الأسية التاريخ:

مثال 6 تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا

تحقق من فهمك

6) $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$



تدرب

13) $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$

الموضوع: الدوال الأسية التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ ؟

A 3 C 1

B 2 D 0

41) إذا كانت $g(x) = 4x$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ فما قيمة $(fog)\ (2)$ ؟

A $\sqrt{3}$ C 3

B $4\sqrt{3}$ D 8

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات الأسية** التاريخ:

مثال 1 حل المعادلات الأسية

تحقق من فهمك

1A) $4^{2n-1} = 64$

1B) $5^{5x} = 125^{x+2}$

مثال 2 من واقع الحياة كتابة دالة أسّية

تحقق من فهمك

2) **إعادة تصنيع:** أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1436 هـ ، وفي عام 1440 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1436 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1481 هـ؟

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات الأسية** التاريخ:

تدرب

1) $8^{4x+2} = 64$

6) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات الأسية** التاريخ:

مثال 3 الربح المركب

تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12% ، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنواتٍ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

مثال 4 حل المتباينات الأسية

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B) $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات الأسية** التاريخ:

تدرب

(15 $4^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$

(17 $625 \geq 5^{a+8}$

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات الأسية** التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

52) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $8 = 7 + 7^{x-1}$؟

A -1 **C** 1

B 0 **D** 2

53) إذا كانت $f(x) = 5x$، فما قيمة $f[f(-1)]$؟

A -25 **C** 5

B -5 **D** 25

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات الأسية** التاريخ:

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية التاريخ:

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

تحقق من فهمك

1A) $\log_4 16 = 2$

1B) $\log_3 729 = 6$

مثال 2 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

2A) $4^3 = 64$

2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

مثال 3 إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$

الموضوع: **اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية** التاريخ:

تدرب

1) $\log_8 512 = 3$

10) $16^{\frac{3}{4}} = 8$

24) $\log_4 \frac{1}{64}$

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية التاريخ:

مثال 4 استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

تحقق من فهمك

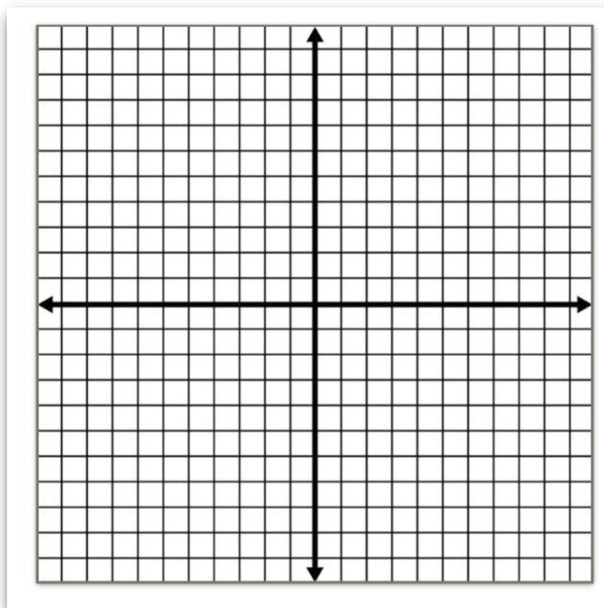
4A) $\log_9 81$

4B) $3^{\log_3 1}$

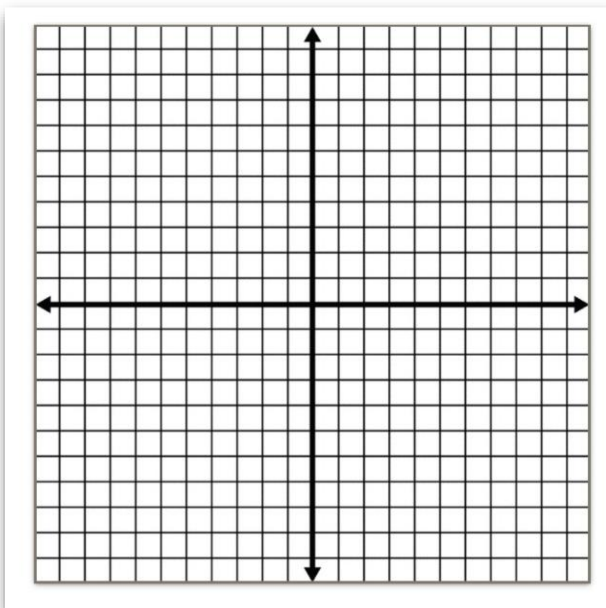
مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \log_2 x$



5B) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

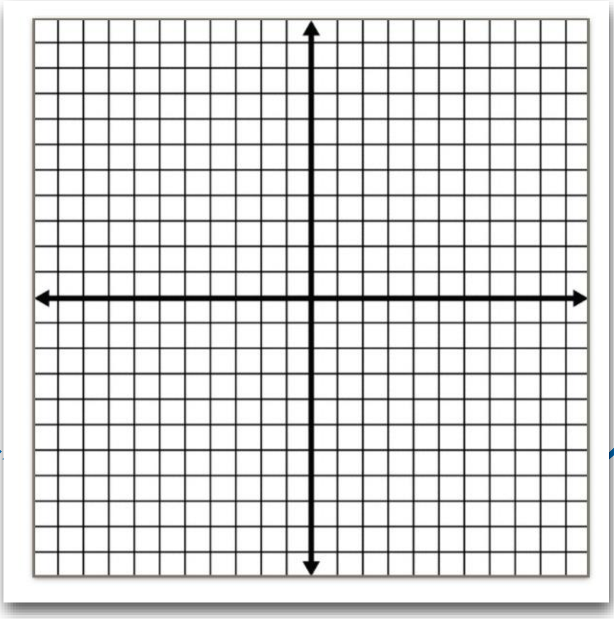


الموضوع: **اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية** التاريخ:

تدرب

(22 $\log_{10} 0.01$

(32 $f(x) = \log_3 x$

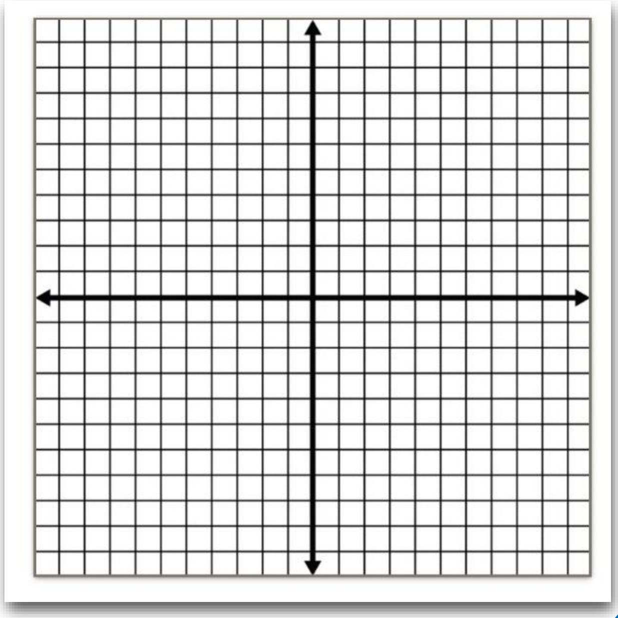


الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية التاريخ:

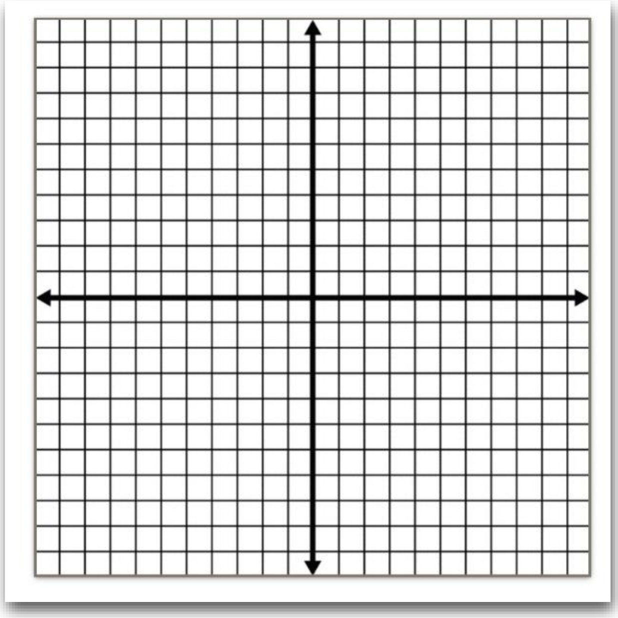
مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

تحقق من فهمك

6A) $f(x) = 2 \log_3 (x - 2)$



6B) $f(x) = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5$



مثال 7 من واقع الحياة إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

الموضوع: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 2

70) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟

A 5 **B** $\frac{1}{5}$ **C** $-\frac{1}{5}$ **D** -5

71) ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$ ؟

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

الموضوع: **اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية** التاريخ:

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات　　　　　　التاريخ:

مثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

مثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

2) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

تدرب

1) $\log_4 15$

8) $\log_4 \frac{4}{3}$

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات التاريخ:

مثال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

مثال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

تحقق من فهمك

5A) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B) $\log_7 \sqrt[6]{49}$

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

تحقق من فهمك

6A) $\log_{13} 6a^3bc^4$

6B) $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

6C) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات التاريخ:

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

تحقق من فهمك

7A) $-5\log_2(x+1)+3\log_2(6x)$

7B) $\log_3(2x-1)-\frac{1}{4}\log_3(x+1)$

تدرب

13) $\log_5 49$

19) $\log_2\sqrt[5]{32}$

24) $\log_9 6x^3y^5z$

الموضوع: خصائص اللوغاريتمات التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

64) ما قيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$ ؟

A $\log_5 2$ **C** $\log_5 3$

B $\log_5 0.5$ **D** 1

65) ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x+1) + 3$؟

A 3 **C** 1

B 2 **D** 0

الموضوع: **خصائص اللوغاريتمات** التاريخ:

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية   التاريخ:

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

تحقق من فهمك

1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

مثال 2 على اختبار

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

A -3 B -1 C 5 D 15

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

3A) $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B) $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية** التاريخ:

تدرب

(6 $\log_6 \frac{1}{36} = x$

(11 $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

(12 $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية** التاريخ:

مثال 4 حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

تحقق من فهمك

4A) $\log_4 x \geq 3$

4B) $\log_2 x < 4$

مثال 5 حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

تحقق من فهمك

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (x + 4) \leq \log_5 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

الموضوع: **حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية** التاريخ:

تدرب

17) $\log_5 x > 3$

23) $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$

الموضوع: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $\log_4 x - \log_4 (x - 1) = \frac{1}{2}$؟

A $-\frac{1}{2}$ **C** -2

B $\frac{1}{2}$ **D** 2

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية التاريخ:

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

تحقق من فهمك

1A) $\log 7$

1B) $\log 0.5$

مثال 2 من واقع الحياة حل معادلات لوغاريتمية

تحقق من فهمك

2) هزات أرضية: ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

مثال 3 حل معادلات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

تحقق من فهمك

3A) $3^x = 15$

3B) $6^x = 42$

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية التاريخ:

مثال 4 حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B) $4^{y} < 5^{2y+1}$

مثال 5 استعمال صيغة تغيير الأساس

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

مثال 6 استعمال صيغة تغيير الأساس

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة.

الموضوع: **اللوغاريتمات العشرية** التاريخ:

تدرب

12) $6^x = 40$

27) $\log_2 16$

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية   التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

47) أي العبارات الآتية تمثل $f\,[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3,\ g(x) = x - 5$؟

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

48) أي مما يأتي يمثّل حلًّا للمعادلة $125 = 27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}$؟

A -4

B -2

C 2

D 4

الموضوع: **اللوغاريتمات العشرية** التاريخ:

خصائص اللوغاريتمات

$2^{log_2 6} = 6$

$log_5 5^8 = 8$

صيغة تغيير الأساس

$log_5 3 = \frac{log_a 3}{log_a 5}$

$log_b(-9) \notin \mathbb{R}$

$log_b 0 \notin \mathbb{R}$

$log_b 1 = 0$

$log_4 x = log_4 8 \Leftrightarrow x = 8$

لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتم عوامله

$log_6(5 \times 7) = log_6 5 + log_6 7$

لوغاريتم حاصل القسمة هو طرح لوغاريتم عوامله

$log_5 \frac{12}{3} = log_5 12 - log_5 3$

متباينات log

$log_3 x > 7 \Leftrightarrow x > 3^7$

$log_3 x < 7 \Leftrightarrow 0 < x < 3^7$

$log_3 x > log_3 2 \Leftrightarrow x > 2$

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية

التاريخ:

حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية

معادلة أسيّة

الأساس = الأساس

الأس = الأس

$2^{x-5} = 64$

$2^{x-5} = 2^6$

$x - 5 = 6$

$x = 6 + 5$

$x = 11$

الأساس ≠ الأساس

بأخذ log للطرفين ثم حل المعادلة

$4^x = 17$

$log\ 4^x = log\ 17$

$x\ log\ 4 = log\ 17$

$x = \frac{log\ 17}{log\ 4} \approx 2.04$

معادلة لوغاريتمية

log في طرف واحد من المعادلة

تحويلها إلى معادلة أسية ، ثم حل المعادلة

$\log_x 81 = 4$

$x^4 = 81$

$x^4 = 3^4$

$x = 4$

log في طرفين من المعادلة

حذف log من الطرفين ثم حل المعادلة

$\log_8(2x+1) = \log_8 21$

$2x + 1 = 21$

$2x = 21 - 1$

$2x = 20$

$x = 10$

الموضوع: اللوغاريتمات العشرية التاريخ:

3 المتطابقات والمعادلات المثلثية

- تهيئة الفصل الثالث
- المتطابقات المثلثية
- اثبات صحة المتطابقات المثلثية
- المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
- حل المعادلات المثلثية

الموضوع: تهيئة الفصل الثالث   التاريخ:

- حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

(1 $-16a^2 + 4a$

(2 $5x^2 - 20$

- حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

(6 $x^2 + 6x = 0$

(7 $x^2 + 2x - 35 = 0$

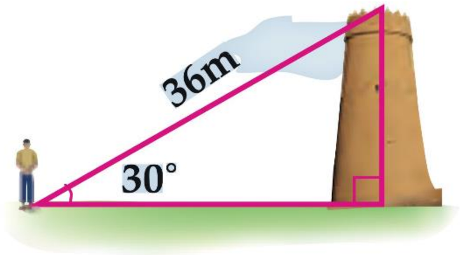
الموضوع: تهيئة الفصل الثالث التاريخ:

- **أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:**

11) $\sin 45°$

12) $\cos 225°$

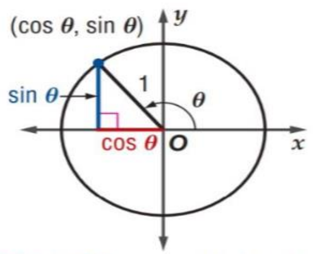
- **15)** **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



الموضوع: **تهيئة الفصل الثالث** التاريخ:

الموضوع: **المتطابقات المثلثية** التاريخ:

متطابقات فيثاغورس



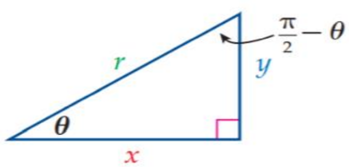
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

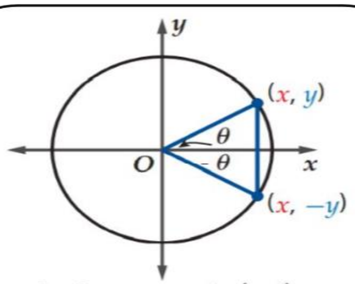
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية



$\sin\theta = y$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\cos(-\theta) = x$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية** التاريخ:

المتطابقات المثلثية

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \sin B\cos A$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A.\tan B}$$

متطابقات المقلوب

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية التاريخ:

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$

1B) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

تدرب

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0° < \theta < 90°$

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية** التاريخ:

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

تحقق من فهمك بسّط العبارة :

(2A $\dfrac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{\sec^2\theta}$

(2B $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

تدرب بسِّط كل عبارة مما يأتي:

(13 $\sin\theta\,(1+\cot^2\theta)$

(18 $\csc\theta-\cos\theta\,\cot\theta$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية** التاريخ:

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

تحقق من فهمك **الاستضاءة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة . $\tau = Fr\sin\theta$
أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

تدرب

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W\sec\theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لِـ W.

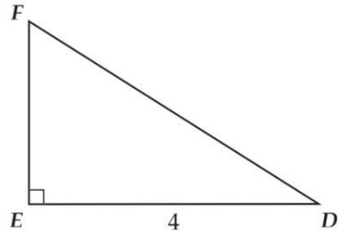
b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80 , \theta = 40° , A = 0.75$. $S = 1000\ W/m^2$ (قرِّب إلى أقرب جزء من مئة).

الموضوع: **المتطابقات المثلثية** التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D = 0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5 **C** 3.2

B 4 **D** 10

40) إذا كان $\sin x = m$ وَ $0 < x < 90°$ ، فما قيمة $\tan x$؟

A $\frac{1}{m^2}$

B $\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\frac{1-m^2}{m}$

D $\frac{m}{1-m^2}$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية**	التاريخ:

الموضوع: إثبات صحة المتطابقات المثلثية التاريخ:

إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين ، وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta = 1$

الحل :

نبدأ من الطرف الأيسر ← $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta$

$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

ونصل إلى الطرف الأيمن ← $= 1$

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تحول كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta \tan\theta$

الحل :

$\cot\theta \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= 1$$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= 1$$

بعد فك كل طرف بشكل منفصل نصل إلى نفس النتيجة .

اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها .
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب وجيب التمام فقط ثم بسط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة ، لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

الموضوع: إثبات صحة المتطابقات المثلثية   التاريخ:

مثال 1 إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

تحقق من فهمك أثبت أن المعادلة

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

تدرب

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

7) $\tan\theta = \dfrac{\sec\theta}{\csc\theta}$

الموضوع: إثبات صحة المتطابقات المثلثية التاريخ:

مثال 2 على اختبار

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

تدرب

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$ ؟

(مثال 2) D

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

الموضوع: إثبات صحة المتطابقات المثلثية التاريخ:

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

تحقق من فهمك أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

تدرب أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

13) $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

21) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو -1 :

27) $\sin\theta\csc(-\theta)$

28) $\sin^2(-\theta)+\cos^2(-\theta)$.

الموضوع: إثبات صحة المتطابقات المثلثية التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

56) اختيار من متعدد : أي مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$ ، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟ D

A $\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

B $\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta\sin\theta$

D $\tan\theta\csc\theta$

57) سؤال ذو إجابة قصيرة : أثبت أن المعادلة التالية تمثّل متطابقة:

$\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$

الموضوع: **إثبات صحة المتطابقات المثلثية** التاريخ:

الموضوع:المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

متطابقات المجموع

1

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$

الحل :

$$\sin 75° = \sin(30°+45°)$$

$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 105°$

الحل :

$$\cos 105° = \cos(60°+45°)$$

$$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 105°$

الحل :

$$\tan 105° = \tan(60°+45°)$$

$$= \frac{\tan 60° + \tan 45°}{1-\tan 60° \tan 45°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-(\sqrt{3})(1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}}{1-3}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$= -2-\sqrt{3}$$

الموضوع:المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

متطابقات الفرق

1

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$

الحل :

$$\sin 15° = \sin(60° - 45°)$$

$$= \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 15°$

الحل :

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$$

$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

3

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 120°$

الحل :

$$\tan 120° = \tan(180° - 60°)$$

$$= \frac{\tan 180° - \tan 60°}{1 + \tan 180° \tan 60°}$$

$$= \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + (0)(\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{1}$$

$$= -\sqrt{3}$$

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية

تحقق من فهمك دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

1A) $\sin 15°$

1B) $\cos (-15°)$

تدرب

3) $\cos 75°$

5) $\sin 135°$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما** التاريخ:

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متطابقات المجموع والفرق

تحقق من فهمك إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2\sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

تدرب

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120°\,t)$. **(مثال 2)**

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

الموضوع: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما التاريخ:

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

(3A $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

(3B $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

تدرب

(10 $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

(14 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما** التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

(43

ما القيمة الدقيقة للعبارة:

$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\sqrt{3}$

44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان $\cos\theta + 0.3 = 0$ حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$.

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما** التاريخ:

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها** التاريخ:

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{-1}{3}$

$90° < \theta < 180°$

الحل :

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

أولًا: نوجد $\sin\theta$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2$$

$$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$$

$$\sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ثانيًا: نوجد $\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}}{9}$$

$\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -3$

$90° < \theta < 180°$

الحل :

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2(-3)}{1-(-3)^2}$$

$$= \frac{-6}{-8}$$

$$= \frac{3}{4}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

$\cos 2\theta$

1

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\theta = \frac{2}{3}$
$0° < \theta < 90°$

الحل :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$= \frac{5}{9} - \frac{4}{9}$$
$$= \frac{1}{9}$$

2

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{-1}{3}$
$90° < \theta < 180°$

الحل :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1$$
$$= 2\left(\frac{1}{9}\right) - 1$$
$$= \frac{-7}{9}$$

3

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$
$90° < \theta < 180°$

الحل :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$= 1 - 2\left(\frac{16}{25}\right)$$
$$= \frac{-7}{25}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$
$270° < \theta < 360°$

الحل :

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

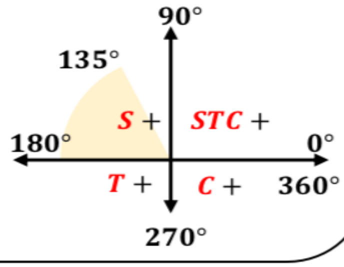
إنطاق المقام:

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\sin\frac{\theta}{2}$ موجبة



$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$
$270° < \theta < 360°$

الحل :

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

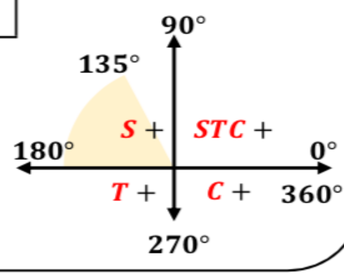
إنطاق المقام :

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\cos\frac{\theta}{2}$ سالبة



الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$

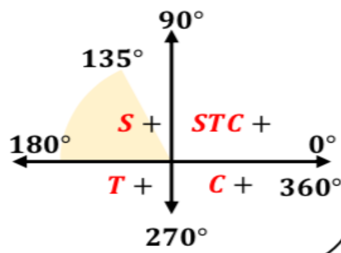
$270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\tan\frac{\theta}{2}$ سالبة



$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

إثبات صحة المتطابقات

نستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما وكذلك المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات .

مثال

أثبت صحة المتطابقة :

$$\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

الحل :

الطرف الأيمن

$$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\,\sin\theta\,\cos\theta}$$

$$= \frac{1-1+2\sin^2\theta}{2\,\sin\theta\,\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta}{2\,\sin\theta\,\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta$$

الطرف الأيسر

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها** التاريخ:

مثال 1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$

تدرب

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta$،

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}\ ; 0° < \theta < 90°$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها** التاريخ:

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\cos \theta = -\frac{1}{3}; 90° < \theta < 180°$:

2A) $\cos 2\theta$

2B) $\tan 2\theta$

تدرب

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\cos 2\theta, \tan 2\theta$ ،

21) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها** التاريخ:

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

تدرب

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}\ ; 270° < \theta < 360°$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها** التاريخ:

مثال 4 من واقع الحياة التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

تحقق من فهمك

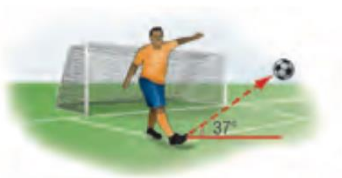
يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17 \sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$ ، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة **g** عندما $L = 45°$.

تدرب

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها $37°$ مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها $52\ ft/s$. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\ ft/s^2$، وَ v تُمثّل السرعة الابتدائية



a) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة؟

الموضوع: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها التاريخ:

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

تحقق من فهمك أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

تدرب

14) $\tan\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها** التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

43) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $0 < \theta < 90°$; $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

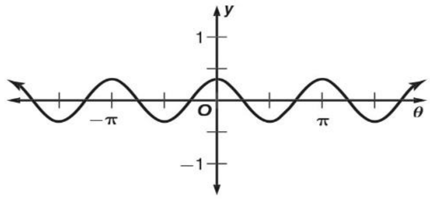
A $2 - \sqrt{3}$

B $\sqrt{3} - 2$

C $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًا في الشكل أدناه هي



A $y = 3 \cos 2\theta$

B $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$

C $y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$

D $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$

الموضوع: **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها** التاريخ:

حل المعادلات المثلثية

المعادلات المثلثية

هي **معادلات** تتضمن دوالًا **مثلثية** وتكون صحيحة عند **قيم محددة** للمتغير .

حل المعادلات على فترة معطاة

مثال

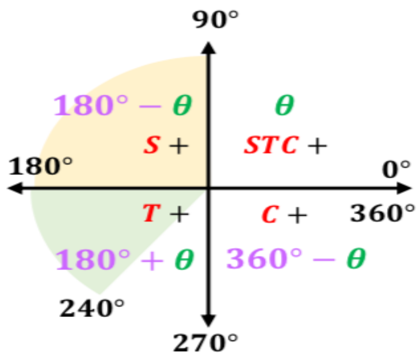
حَل المعادلة :

$$\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \;;\; 0^\circ \le \theta \le 240^\circ$$

الحل :

cos سالبة

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\theta = 30^\circ$	الزاوية θ تقع في الربع الثاني والربع الثالث	
نوجد الزوايا في الفترة من خلال الزوايا المرجعية	نعوض بالزوايا المرجعية في الفترات المحددة	
إذن :	الربع الثالث	الربع الثاني
حل المعادلة :	$180^\circ + \theta$	$180^\circ - \theta$
$150^\circ , 210^\circ$	$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$	$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

حل المعادلات المثلثية

المعادلات المثلثية بدون فترة محددة

تحل المعادلات المثلثية عادة ، لقيم المتغير في الفترة $[0\,,2\pi]$ بالراديان أو $[0°\,,360°]$ بالدرجات . كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة لذلك فالحلول تختلف باختلاف الفترات .

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

مثال

حل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان .

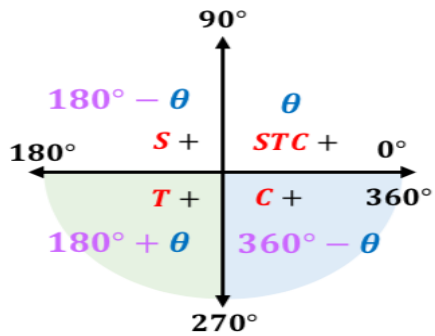
الحل :

$$\frac{2\sin\theta}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

sin سالبة

$$\theta = 30°$$



	إذن الزاوية θ تقع في الربع الثالث و الربع الرابع نعوض بالزوايا المرجعية في الفترات المحددة	نوجد الزوايا في الفترة من خلال الزوايا المرجعية
الربع الثالث $180° + \theta$ $180° + 30° = 210°$ نحولها لـ الراديان $210° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{7\pi}{6}$	**الربع الرابع** $360° - \theta$ $360° - 30° = 330°$ نحولها لـ الراديان $330° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{11\pi}{6}$	ولأنها بدون فترة فلها عدد لانهائي من الحلول وتكتب بالقاعدة : $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ $\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$ $k \in Z$

الموضوع: حل المعادلات المثلثية التاريخ:

حل المعادلات المثلثية

الحلول الدخيلة

بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل مثل المعادلة : $\cos\theta = 4$ ليس لها حل ، لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$.

كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية ، وتسمى مثل هذه الحلول حلولاً دخيلة .

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

مثال

حل المعادلة : $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

الحل :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 4 - 3$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

متطابقة

لها عدد لا نهائي من الحلول

لأن جميع قيم θ تمثل حلولاً لها.

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

مثال

حل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات

$$\sin\theta\ \cot\theta - \cos^2\theta = 0$$

الحل :

$$\sin\theta\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \cos^2\theta = 0$$

$$\cos\theta - \cos^2\theta = 0$$

$$\cos\theta\ (1 - \cos\theta) = 0$$

$\cos\theta = 0$ أو $1 - \cos\theta = 0$

$$\cos\theta = 0$$

إذن $\theta = 90°, 270°$

$$1 - \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 1$$

إذن $\theta = 0°, 360°$

وكلاهما حلان دخيلان ، لأن $\cot\theta$ عندها غير معرفة .

حل المعادلة :

$$90° + 180°\ k$$

الموضوع: **حل المعادلات المثلثية** التاريخ:

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

تحقق من فهمك حل كل معادلة مما يأتي

1A) حُلّ المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

1B) $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$

تدرب حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها :

1) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

تحقق من فهمك

2A) حُلّ المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُلّ المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

تدرب

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات:

11) $2\sin^2\theta - 1 = 0$

12) $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

الموضوع: **حل المعادلات المثلثية** التاريخ:

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

تحقق من فهمك **الاستضاءة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الموضوع: حل المعادلات المثلثية التاريخ:

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

تحقق من فهمك حل كل معادلة مما يأتي:

4) $\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$

تدرب حل كل معادلة مما يأتي:

18) $2\sin^2 \theta = 1; 90° < \theta < 270°$

15) $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$ لجميع قيم θ

الموضوع: **حل المعادلات المثلثية** التاريخ:

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

تحقق من فهمك حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0$

5B) $\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0$

تدرب حل كل معادلة مما يأتي:

21) $\tan \theta - \sin \theta = 0$ لجميع قيم θ

الموضوع: **حل المعادلات المثلثية** التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta \tan^2\theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ **B** $\frac{7\pi}{4}$ **C** 2π **D** $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَلّ المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟

A $30°$ أو $150°$ **C** $210°$ أو $330°$

B $60°$ أو $120°$ **D** $240°$ أو $300°$

الموضوع: **حل المعادلات المثلثية** التاريخ:

4 القطوع المخروطية

- التهيئة للفصل الرابع
- القطوع المكافئة
- القطوع الناقصة والدوائر
- القطوع الزائدة
- تحديد أنواع القطوع المخروطية

الموضوع: التهيئة للفصل الرابع التاريخ:

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$

2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$

4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$

الموضوع: التهيئة للفصل الرابع التاريخ:

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$

10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$

13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

الموضوع: التهيئة للفصل الرابع التاريخ:

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

14) $x^2 + 8x$

15) $x^2 - 18x$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

16) $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$

17) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

الموضوع: **التهيئة للفصل الرابع** التاريخ:

الموضوع: القطوع المكافئة

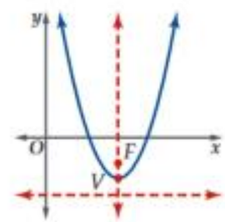
التاريخ:

القطع المكافئ

القطع مفتوح رأسيًا

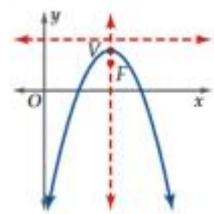
الصورة القياسية $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

مفتوح للأعلى



$c > 0$

مفتوح للأسفل

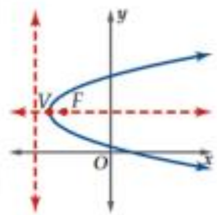


$c < 0$

القطع مفتوح أفقيًا

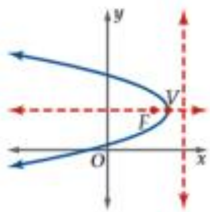
الصورة القياسية $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

مفتوح لليمين



$c > 0$

مفتوح لليسار



$c < 0$

الموضوع: القطوع المكافئة التاريخ:

مثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًّا

تحقق من فهمك

1A) $8(y + 3) = (x - 4)^2$

1B) $2(x + 6) = (y + 1)^2$

تدرب

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $(x - 3)^2 = 12(y - 7)$

2) $(x + 1)^2 = -12(y - 6)$

الموضوع: القطوع المكافئة التاريخ:

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ

تحقق من فهمك

2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8\ (y - 6)$، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x , y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

تدرب

7) **لوح تزلُّج:** صمَّم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y - 2)$، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

الموضوع: القطوع المكافئة التاريخ:

مثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

تدرب

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$

10) $y^2 + 33 = -8x - 23$

الموضوع: القطوع المكافئة

التاريخ:

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

تحقق من فهمك

4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(-2, 9)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

تدرب

16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

الموضوع: القطوع المكافئة التاريخ:

مثال 5 كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

تدرب

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(مثال 5)

24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3); (-5, -5)$

25) $y^2 = \frac{1}{5}(x-4); (24, 2)$

الموضوع: القطوع المكافئة التاريخ:

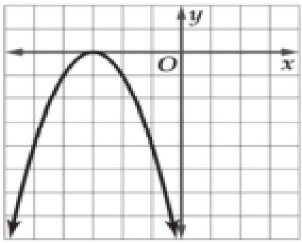
مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

49) إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

A $x^{-\frac{1}{4}}$ B $\sqrt{x^3}$ C $x^{\frac{3}{4}}$ D $\sqrt{x^5}$

50) ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانبًا؟



A $y = x$

B $y = |x|$

C $y = \sqrt{x}$

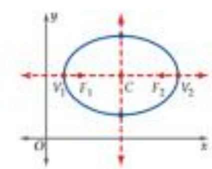
D $y = x^2$

القطع الناقص والزائد

القطع الناقص

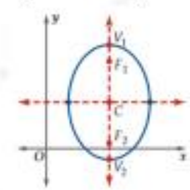
مفتوح أفقيًا

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



مفتوح رأسيًا

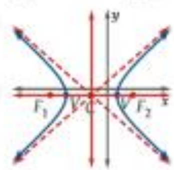
$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



القطع الزائد

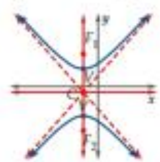
مفتوح أفقيًا

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



مفتوح رأسيًا

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر التاريخ:

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًّا

تحقق من فهمك

1A) $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

1B) $x^2+4y^2+4x-40y+103=0$

تدرب

1) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

تدرب

5) الرأسان $(-7, -3)$, $(13, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3)$, $(-5, -3)$

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر التاريخ:

مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

تحقق من فهمك حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

تدرب

10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر التاريخ:

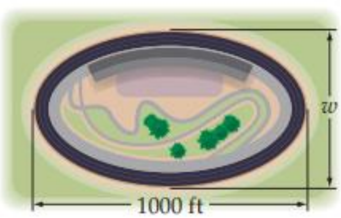
مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

تدرب

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . **(مثال 4)**



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر التاريخ:

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10

تدرب

15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر التاريخ:

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

تدرب

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي:

18) $(2, 1)$, $(2, -4)$

الموضوع: القطوع الناقصة والدوائر التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M ، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5}+\frac{x^2}{7.5}=1$

B $\frac{y^2}{182.25}+\frac{x^2}{56.25}=1$

C $\frac{y^2}{56.25}+\frac{x^2}{182.25}=1$

D $\frac{y^2}{7.5}+\frac{x^2}{13.5}=1$

الموضوع: **القطوع الناقصة والدوائر** التاريخ:

الموضوع: القطوع الزائدة

التاريخ:

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B) $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

تدرب

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

2) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

الموضوع: القطوع الزائدة التاريخ:

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

تحقق من فهمك

2A) $4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$

2B) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$

تدرب

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

الموضوع: القطوع الزائدة التاريخ:

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

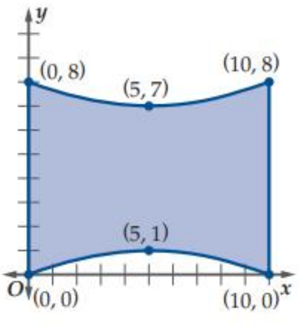
3B) البؤرتان $(12, -2)$, $(2, -2)$ ، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$, $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

تدرب

20) **هندسة معمارية:** يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.

a) اكتب معادلة تمثّل فرعي المنحنى في الشكل.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثّل 15 ft ، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)



الموضوع: القطوع الزائدة التاريخ:

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

تحقق من فهمك حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

(4A $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

(4B $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

تدرب

(21 $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

الموضوع: القطوع الزائدة التاريخ:

مثال 5 من واقع الحياة تطبيقات على القطع الزائد

تحقق من فهمك

5) **ملاحة بحرية:** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًّا .

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(100, 0)$, $(-100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

الموضوع: القطوع الزائدة التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

47) **مراجعة:** يمثّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

48) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

الموضوع: **تحديد أنواع القطوع المخروطية** التاريخ:

تحديد نوع القطع المخروطي

قطع مكافئ

$B^2 - 4AC = 0$

دائرة

$B^2 - 4AC < 0 , B = 0 , A = C$

قطع ناقص

$B^2 - 4AC < 0 , A \neq C$ أو $B \neq 0$

قطع زائد

$B^2 - 4AC > 0$

الصورة القياسية $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

الموضوع: تحديد أنواع القطوع المخروطية التاريخ:

مثال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

تدرب

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله.

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

الموضوع: تحديد أنواع القطوع المخروطية التاريخ:

مثال 2 تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

تحقق من فهمك

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

الموضوع: **تحديد أنواع القطوع المخروطية** التاريخ:

تدرب حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصّورة القِياسية.

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

الموضوع: تحديد أنواع القطوع المخروطية التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريب على اختبار

حُلَّ كلَّ معادلة من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 4-2)

29) $\log_4 8n + \log_4 (n-1) = 2$

31) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدِّد ما إذا كانت المعادلة
$3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثِّل قطعًا مكافئًا أو دائرة
أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

الموضوع: تحديد أنواع القطوع المخروطية   التاريخ:

المراجع

- كتاب رياضيات5 التعليم الثانوي نظام المقررات (مسار العلوم الطبيعية)
- كتاب الشامل في خرائط الرياضيات المفاهمية للمرحلة الثانوية (إصدارات رفعة التعليمية)
- كتاب قوانين الرياضيات للمراحل التعليمية (إصدارات رفعة التعليمية)
- قناة بسمه math عبر اليوتوب