معدل التغير والميل

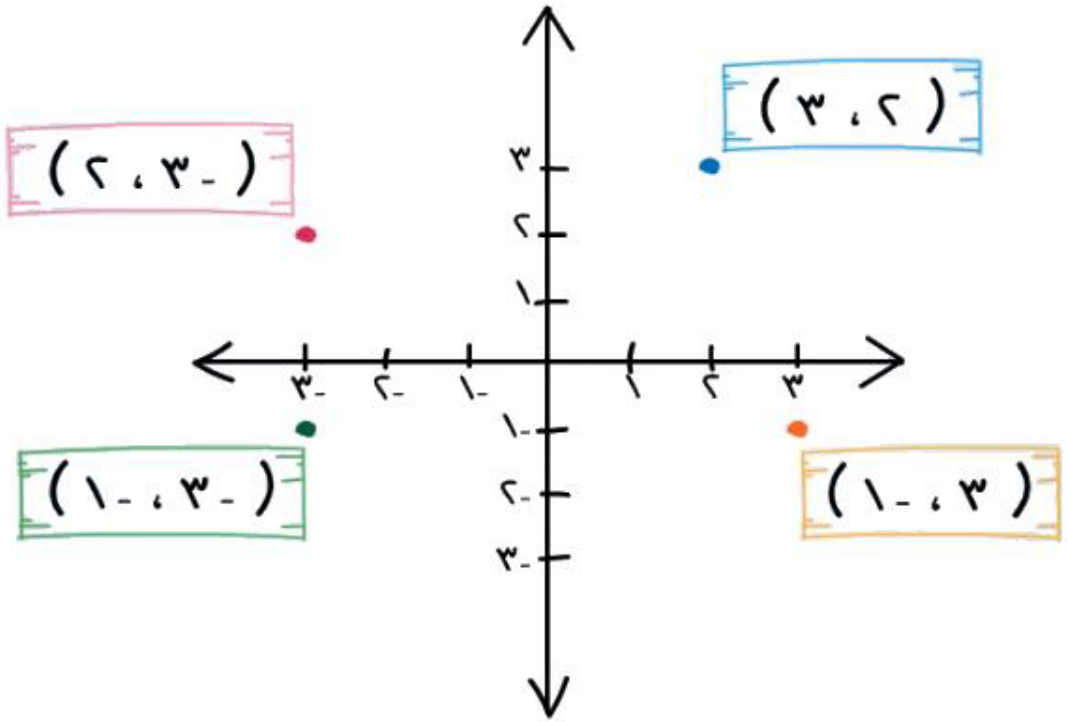
رابط الدرس الرقمي

أهداف الدرس

- استعمال معدل التغير لحل المسائل
- إيجاد ميل المستقيم

المعرفة السابقة

المستوى الإحداثي



سنتعلم اليوم:

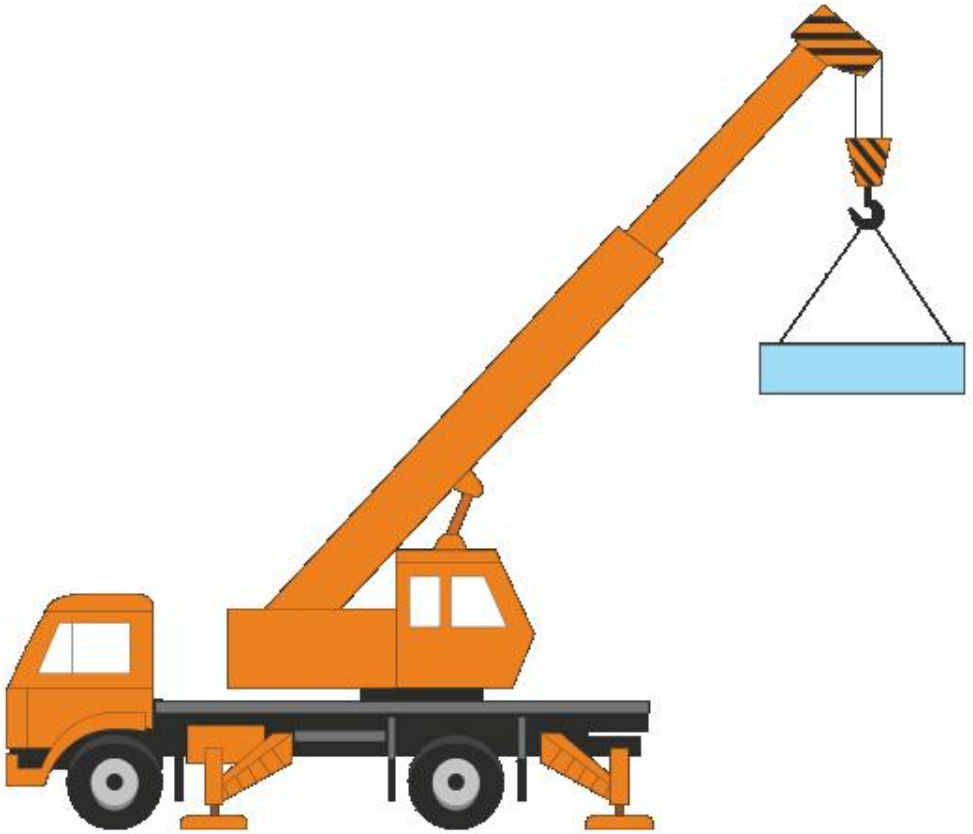
معدل التغير

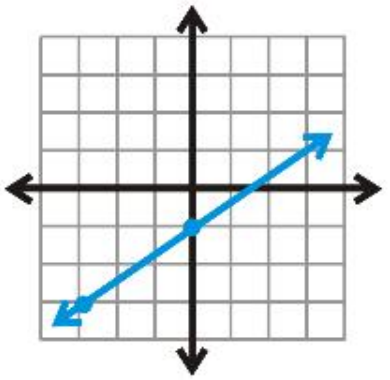
أستعمل معدل التغير لحل المسائل

الميل

أجد ميل مستقيم

ماجد الحربي





10%

تمهيد

تسمح لك إحدى الألعاب المائية بالانحدار لمسافة ٢٠ مترًا، ويصف معدّل التغير في هذه اللعبة نسبة تغير المسافة التي يقطعها الشخص بالنسبة للتغير في الزمن.

معدّل التغير: **معدّل التغير** هو نسبة تصف معدل تغير كمية بالنسبة لتغير كمية أخرى.

مفهوم أساسي — **معدّل التغير**

أضف إلى مطويتك

إذا كانت س هي المتغير المستقل، وص المتغير التابع فإن:

$$\text{معدّل التغير} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$$

إيجاد معدّل التغير

ألعاب مسلية: استعمل الجدول المجاور لإيجاد معدّل التغير، ثم فسِّر معناه.

عدد ألعاب الحاسوب	التكلفة (ريال)
(س)	(ص)
٢	٧٨
٤	١٥٦
٦	٢٣٤

معدّل التغير = التغير في ص (الريالات) / التغير في س (الألعاب)

$$= \frac{\text{التغير في التكلفة}}{\text{التغير في عدد الألعاب}}$$

$$= \frac{١٥٦ - ٧٨}{٤ - ٢}$$ عوّض

$$= \frac{٧٨}{٢} = \frac{٣٩}{١}$$ بسّط

معدّل التغير هو $\frac{٣٩}{١}$ وهذا يعني أن كل لعبة تكلف ٣٩ ريالًا.

تقويم

أوجد معدّل التغير لكل من الدالتين الممثلتين بالجدولين الآتيين:

١٠)

س	٥	١٠	١٥	٢٠
ص	٢	٣	٤	٥

١١)

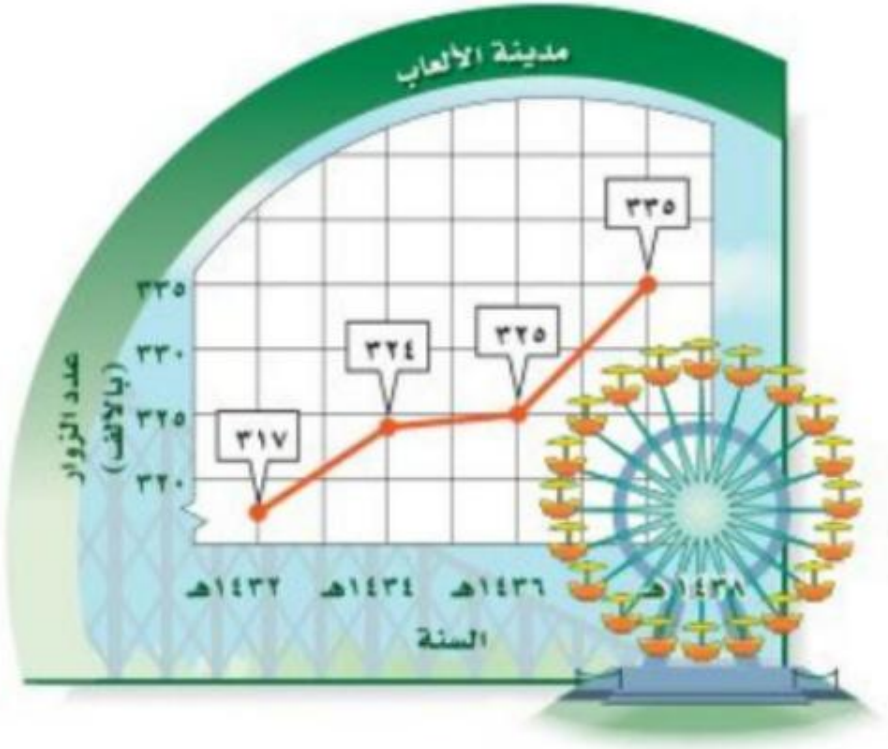
س	١	٢	٣	٤
ص	١٥	٩	٣	-٣

معدل التغير غير الثابت

تعرفت من الأمثلة السابقة على معدلات التغير الثابتة، إلا أن كثيرًا من المواقف من واقع الحياة تتضمن معدّلات تغير ليست ثابتة.

مثال

مدينة ألعاب: يبيِّن التمثيل البياني المجاور عدَّد زوار إحدى مدن الألعاب.



أ) أوجد معدّل التغير في الفترة من ١٤٣٢هـ – ١٤٣٤هـ، وفي الفترة من ١٤٣٤هـ – ١٤٣٦هـ.

معدّل التغير في الفترة ١٤٣٢ هـ – ١٤٣٤هـ:

$$\frac{\text{التغير في عدد الزوار}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{\text{الزوّار} \rightarrow \ ٣١٧ - ٣٢٤}{\text{السنوات} \rightarrow \ ١٤٣٤ - ١٤٣٢}$$ عوّض

$$= \frac{٧}{٢} = ٣,٥$$ بسّط

ازداد عدد الزوار خلال هاتين السنتين ٧ آلاف، وذلك بمعدل تغير مقداره ٣,٥ آلاف في السنة.

معدّل التغير في الفترة ١٤٣٤ هـ – ١٤٣٦هـ:

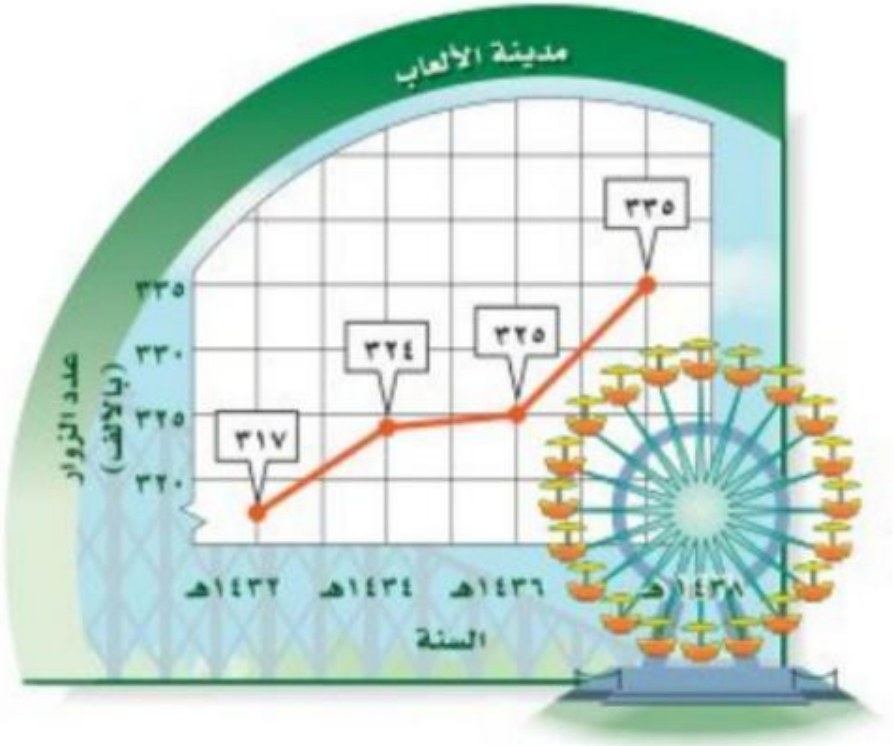
$$\frac{\text{التغير في عدد الزوار}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{٣٢٤ - ٣٢٥}{١٤٣٤ - ١٤٣٦}$$ عوّض

$$= \frac{١}{٢} = ٠,٥$$ بسّط

زاد عدد الزوار خلال هاتين السنتين ألفًا، وذلك بمعدّل تغير مقداره ٥٠٠ زائر في السنة.

إرشادات للدراسة

المعدّل: يشير معدّل التغير الموجب إلى الزيادة مع تغير الزمن. أما معدّل التغير السالب فيشير إلى نقصان الكمية.



مثال

ب) فسِّر معنى معدّل التغير في كل حالة.

في الفترة من ١٤٣٢هـ – ١٤٣٤هـ :
زاد عدد الذين زاروا مدن الألعاب بمعدل ٣٥٠٠ زائر كل سنة .

في الفترة من ١٤٣٤هـ – ١٤٣٦هـ
زاد عدد الذين زاروا مدن الألعاب بمعدل ٥٠٠ زائر كل سنة .

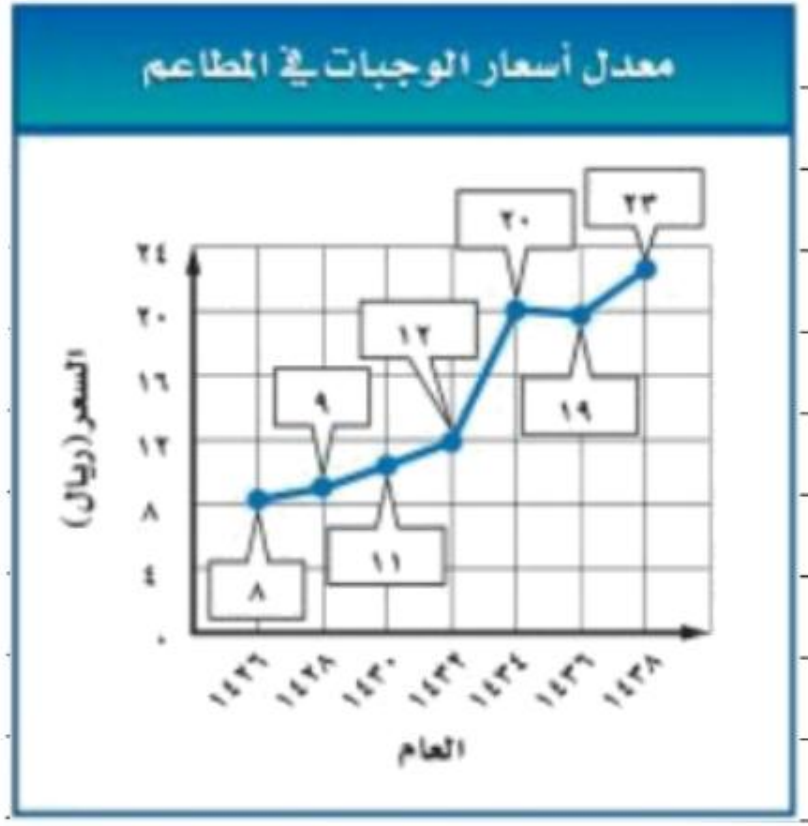
مثال

جـ) كيف تظهر معدلات التغير المختلفة على التمثيل البياني؟

هناك تغير رأسي أكبر في الفترة من ١٤٣٢هـ – ١٤٣٤هـ عن الفترة من ١٤٣٤هـ – ١٤٣٦هـ .
ولذا يكون الجزء الذي يمثل الفترة من ١٤٣٢هـ – ١٤٣٤هـ أكثر ميلًا.

تقويم

٣) **مطاعم:** استعمل الشكل المجاور في الإجابة عما يأتي:



أ) أوجد معدّل التغير في الأسعار من ١٤٣٦هـ – ١٤٣٨هـ، وفسِّر معناه.

معدلات التغير الثابتة

يكون معدل التغير للدالة ثابتًا إذا لم تتغير قيمته بين أي نقطتين على التمثيل البياني لتلك الدالة. والدوال الخطية لها معدّل تغير ثابت.

حدِّد ما إذا كانت كل دالة فيما يأتي خطية أم لا، وفسِّر إجابتك:

أ)

س	ص
١	٦-
٤	٨-
٧	١٠-
١٠	١٢-
١٣	١٤-

س	ص	معدّل التغير
١	٦-	
٤	٨-	$\frac{-٨-(-٦)}{٤-١}=-\frac{٢}{٣}$
٧	١٠-	$\frac{-١٠-(-٨)}{٧-٤}=-\frac{٢}{٣}$
١٠	١٢-	$\frac{-١٢-(-١٠)}{١٠-٧}=-\frac{٢}{٣}$
١٣	١٤-	$\frac{-١٤-(-١٢)}{١٣-١٠}=-\frac{٢}{٣}$

بما أن معدّل التغير ثابت، فالدالة خطية.

ب)

س	ص
٣-	١٠
١-	١٢
١	١٦
٣	١٨
٥	٢٢

س	ص	معدّل التغير
٣-	١٠	
١-	١٢	$\frac{١٢-١٠}{(-١)-(-٣)}=١$
١	١٦	$\frac{١٦-١٢}{١-(-١)}=٢$
٣	١٨	$\frac{١٨-١٦}{٣-١}=١$
٥	٢٢	$\frac{٢٢-١٨}{٥-٣}=٢$

بما أن معدّل التغير ليس ثابتًا، فالدالة ليست خطية.

إرشادات للدراسة

دالة خطية أم غير خطية؟

حتى تكون الدالة خطية يجب أن يكون معدل التغير ثابتًا؛ أي يجب أن يكون التغير في كل من قيم س،ص ثابتًا.

تقويم

حدِّد ما إذا كانت كل دالة فيما يأتي خطية أم لا، وفسِّر إجابتك:

٣ب)

س	ص
١٢	٤−
٩	١
٦	٦
٣	١١
٠	١٦

٥)

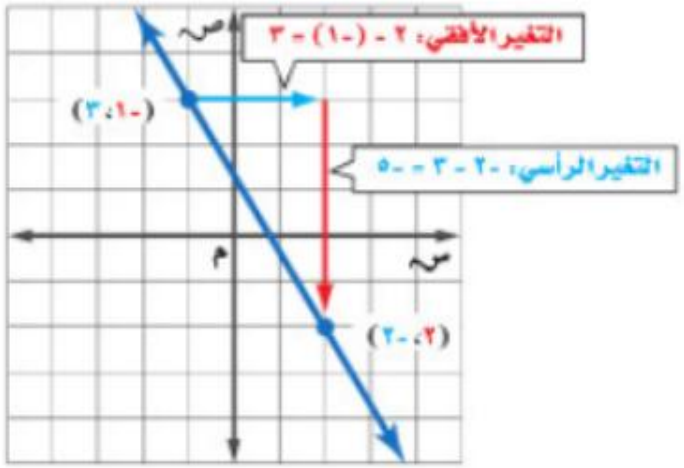
س	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤
ص	٧	٥	٣	٠	٢−

ميل الخط المستقيم

إيجاد الميل: ميل المستقيم غير الرأسي هو نسبة التغير في الإحداثي الصادي إلى التغير في الإحداثي السيني كلما انتقلت من نقطة إلى أخرى. وبالتالي يمكن استعماله لوصف معدل التغير.

إن ميل المستقيم يصف درجة انحداره، وكلما زادت القيمة المطلقة للميل كان المستقيم أشد انحدارًا.

يُظهر الرسم البياني المجاور مستقيمًا مارًّا بالنقطتين (−١ ، ٣) ، (٢ ، −٢).



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{-٢ - ٣}{٢ - (-١)} = -\frac{٥}{٣}$$

لذا، فميل المستقيم هو $-\frac{٥}{٣}$.

وبما أن معدّل تغير الدالة الخطية ثابت، فيمكنك استعمال أي نقطتين على المستقيم غير الرأسي لتحديد ميله.

مفهوم أساسي

الميل

مطويتك

التعبير اللفظي: ميل المستقيم غير الرأسي هو نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

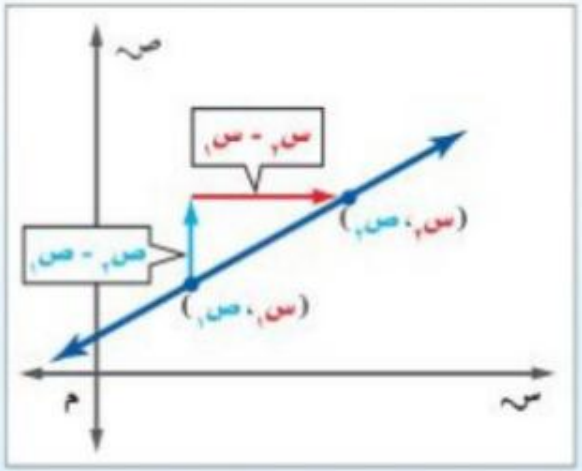
الرموز: يمكن إيجاد الميل (م) للمستقيم غير الرأسي المار بالنقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ على النحو الآتي:

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

التغير في ص ←

التغير في س ←

الرسم



قراءة الرياضيات

تقرأ $ص_١$ على الصورة صاد واحد. وتقرأ $س_٢$ على الصورة سين اثنين. ويشير الرقمان ١، ٢ إلى النقطتين الأولى والثانية اللتين ترتبط بهما قيم س، ص.

يمكن أن يكون ميل مستقيم موجبًا أو سالبًا أو صفرًا أو غير مُعرَّف. فإذا لم يكن المستقيم أفقيًّا ولا رأسيًّا، فميله إما موجب وإما سالب.

الميل الموجب أو السالب أو الصفر

أوجد ميل المستقيم المارّ بكل نقطتين من النقاط الآتية:

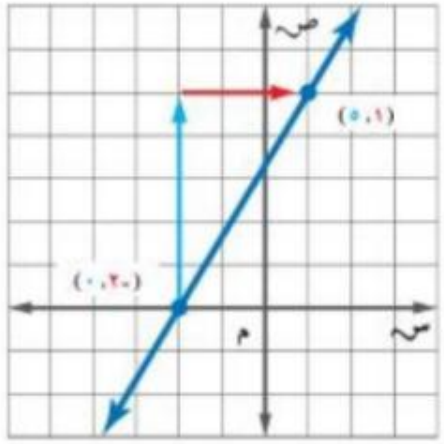
مثال أ) (-٢، ٠) ، (١، ٥)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$ التغير الرأسي / التغير الأفقي

(-٢، ٠) = (س١، ص١) ، (١، ٥) = (س٢، ص٢)

$$= \frac{٥ - ٠}{١ - (-٢)}$$

$$= \frac{٥}{٣}$$ بسّط



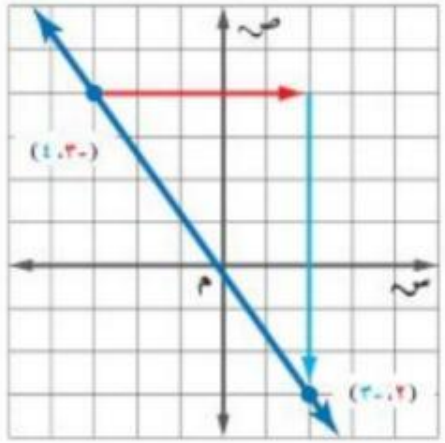
مثال ب) (-٣، ٤) ، (٢، -٣)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$ التغير الرأسي / التغير الأفقي

(-٣، ٤) = (س١، ص١) ، (٢، -٣) = (س٢، ص٢)

$$= \frac{-٣ - ٤}{٢ - (-٣)}$$

$$= \frac{-٧}{٥} = -\frac{٧}{٥}$$ بسّط

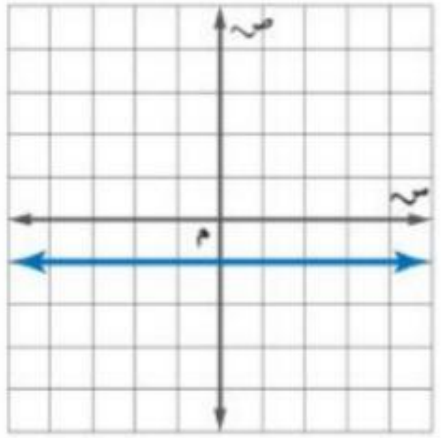


مثال جـ) (-٣، -١) ، (٢، -١)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$ التغير الرأسي / التغير الأفقي

$$= \frac{-١ - (-١)}{٢ - (-٣)}$$ عوّض

$$= \frac{٠}{٥} = ٠$$ بسّط



تنبيه !

ترتيب: كن حريصًا على عدم تبديل قيم س أو قيم ص.

تقويم

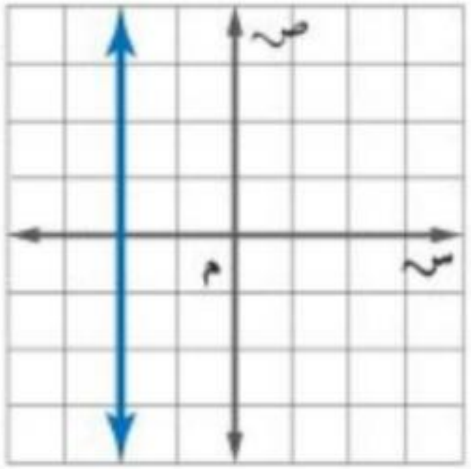
أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين من النقاط الآتية:

١٤أ) (-٤، -٢)، (٠، -٢)

١٥) (٨، -٢)، (١، ١)

الميل غير المعرّف

مثال أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (-٢ ، ٤)، (-٢ ، -٣):



$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

التغير الرأسي / التغير الأفقي

$$= \frac{-٣ - ٤}{-٢ - (-٢)}$$

عوّض

$$= -\frac{٧}{٠}$$ أو غير معرّف

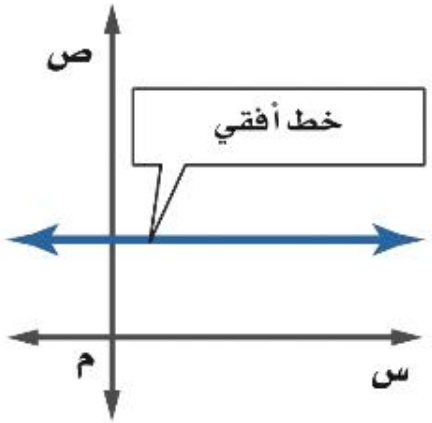
بسّط

إرشادات للدراسة

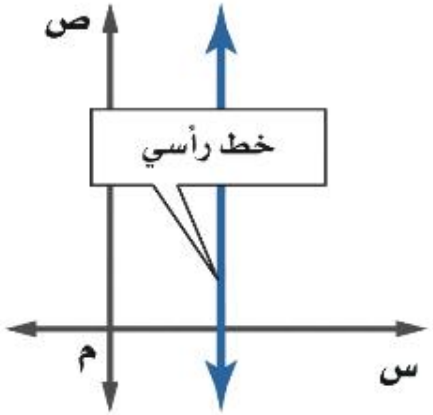
الميل الذي قيمته صفر والميل غير المعرّف:

إذا كان الفرق في قيم ص صفرًا، فسيكون الخط أفقيًّا. وإذا كان الفرق في قيم س صفرًا، فسيكون الميل غير معرّف، وسيكون الخط رأسيًّا.

الميل صفر



الميل غير معرف



تقويم

أوجد ميل المستقيم المار بكل زوجين من النقاط الآتية:

٥أ) (٦، ٣)، (٦، ٧)

٧) (-٣، ٧)، (-٣، ٤)

وفيما يلي ملخص الرسوم البيانية للمستقيمات المختلفة الميل:

مفهوم أساسي

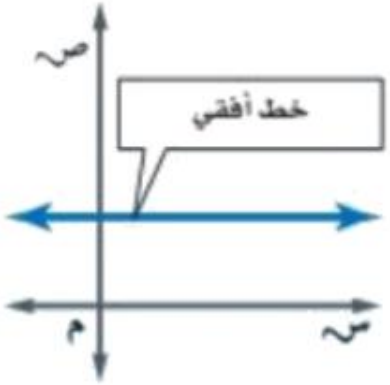
الميل

مطويتك

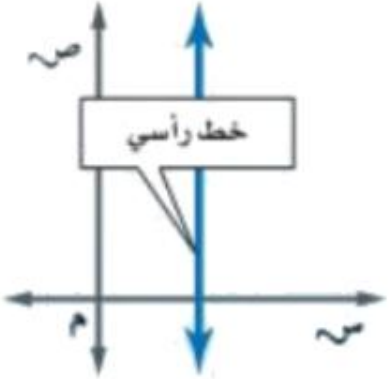
الميل موجب

الميل سالب

الميل صفر



الميل غير معرف



أحيانًا قد تعطى قيمة الميل ويطلب إليك إيجاد الإحداثي المجهول.

إيجاد الإحداثي إذا عُلم الميل

مثال

أوجد قيمة (ر) التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٤) ، (−٥ ، ر) يساوي $\frac{١}{٣}$.

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$	صيغة الميل
$\frac{١}{٣} = \frac{ر - ٤}{-٥ - ١}$	ضع $(س_١ ، ص_١) = (١ ، ٤) ، (س_٢ ، ص_٢) = (-٥ ، ر)$
$\frac{١}{٣} = \frac{ر - ٤}{-٦}$	اطرح
$٣(ر - ٤) = ١(-٦)$	اضرب تبادليًا
$٣ر - ١٢ = -٦$	خاصية التوزيع
$٣ر = ٦$	أضف ١٢ إلى كلا الطرفين، وبسّط
$ر = ٢$	اقسم على ٣ ، وبسّط

لذلك فإن المستقيم يمر بالنقطة (−٥، ٢).

تقويم

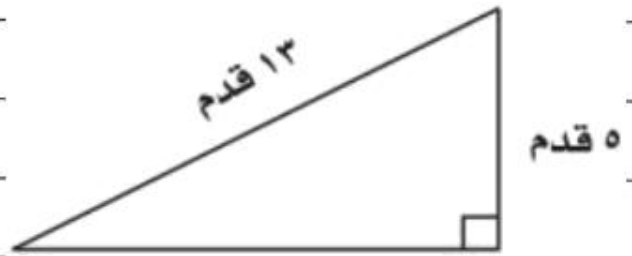
أوجد قيمة (ر) التي تجعل ميل المستقيم المار بكل نقطتين من النقاط الآتية كما هو مُعطى:

٨) (-٤، ر)، (-٨، ٣)، م = -٥

٩) (٥، ٢)، (-٧، ر)، م = $\frac{٥}{٦}$

تقويم

٢٢) **تحدَّ:** إذا كنت ترتفع ٥ أقدام لكل ١٣ قدمًا تتحركها إلى الأمام عند قيادة سيارتك في طريق جبلي، فما ميل الطريق؟



ملخص مفهوم

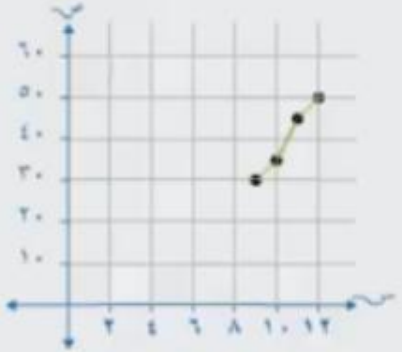
مُعدَّلُ التغيُّرِ هوَ نسبةٌ تصفُ مُعدَّلَ التغيُّرِ في كميةٍ بالنسبةِ لتغيُّرِ كميةٍ أُخرى.

إذا كانَتْ س هيَ المتغيِّرَ المُستقلَّ، وص المُتغيِّرَ التَّابعَ فإنَّ:

$$\text{مُعدَّلُ التغيُّرِ} = \frac{\text{التغيُّرُ في ص}}{\text{التغيُّرُ في س}}$$

إذا كانَ مُعدَّلُ التغيُّرِ ثابتًا فالدالةُ خطيةٌ.

إذا كانَ مُعدَّلُ التغيُّرِ غيرَ ثابتٍ فالدالةُ غيرُ خطيَّةٍ.

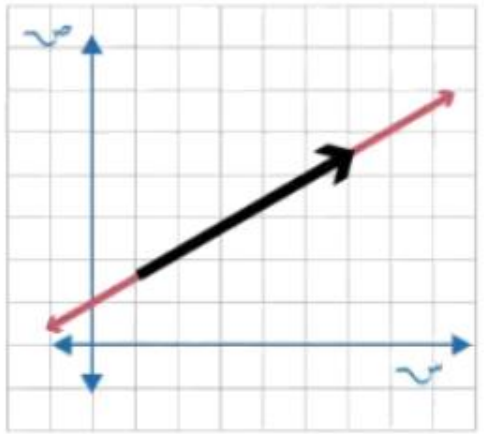


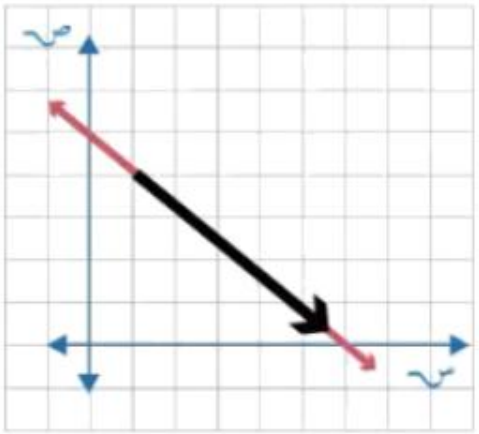
$$\frac{\text{التغيُّرُ في ص}}{\text{التغيُّرُ في س}}$$

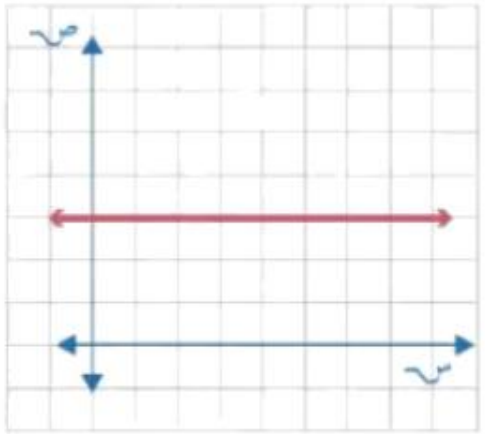
ملخص مفهوم

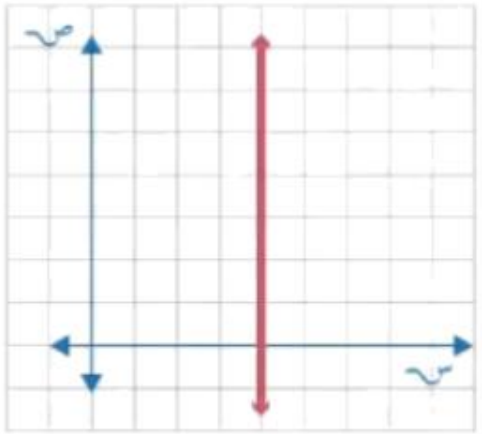
المَيلُ

- المَيلُ موجَبٌ
- المَيلُ سالبٌ
- المَيلُ صفرٌ
- المَيلُ غيرُ مُعرَّفٍ









فرق الصادات

فرق السينات

قيم نفسك

اختر الإجابة الصحيحة

صواب وخطأ

$\frac{٣}{٨}$ هو ميل المستقيم المار بالنقطتين (-٣, ٢) و (٥,٥)

- صواب
- خطأ

اختر الإجابة الصحيحة

ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣،٥) ، (٥، -٢):

- غير معرف
- ١
- صفر
- -٢