المتتابعات الحسابية كدوال خطية

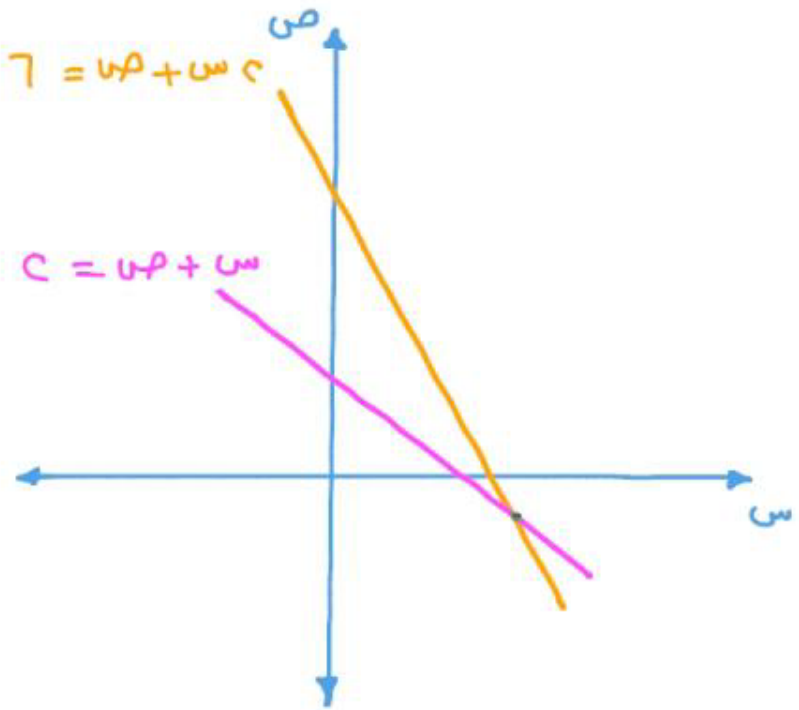
رابط الدرس الرقمي

- تعرف المتتابعات الحسابية
- تمثيل المتتابعات الحسابية بدوال خطية

أهداف الدرس

المعرفة السابقة

تمثيل الدوال الخطية بيانيًّا



سنتعلم اليوم:

المتتابعات الحسابية

تمييز المتتابعة الحسابية

إيجاد الحد التالي

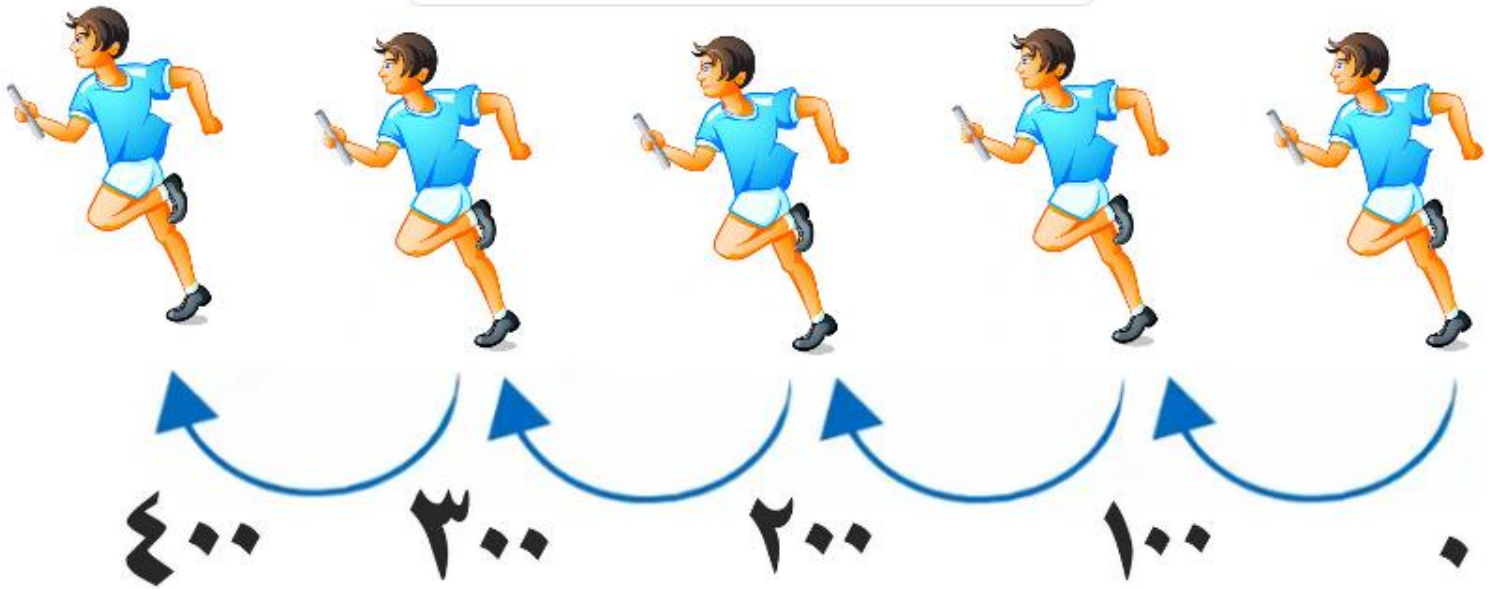
أمثل المتتابعات الحسابية بدوال خطية

ماجد الحربي

100 متر تتابع

100 متر تتابع سباق تشارك فيه فرق يتألف كل منها من أربعة عدائين، يحمل العداء الأول عصا طولها حوالي 30 سم، وبعد أن يجري لمسافة 100 متر، يسلم العصا لعضو الفريق التالي، يجب أن يتم هذا التسليم في منطقة طولها 20 م، وإذا لم يتبادل العداءان العصا ضمن هذه المنطقة فإنه يتم استبعاد فريقهم، يجري أعضاء الفريق الأربعة جميعهم مسافة ...

هل تعلم ؟



تمهيد

في تدريب لسباق ٢٠٠٠ متر، سجل مدرب أوقات فريقه على النحو الآتي:

- **٤٠٠ متر في دقيقة و٣٢ ثانية.**
- **٨٠٠ متر في ٣ دقائق و٤ ثوانٍ.**
- **١٢٠٠ متر في ٤ دقائق و٣٦ ثانية.**
- **١٦٠٠ متر في ٦ دقائق ٨ ثوانٍ.**

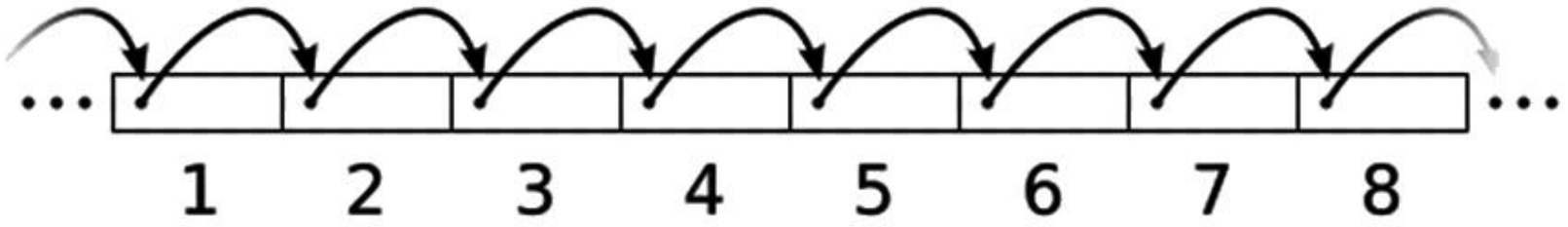
وأنهى الفريق السباق كاملًا في زمن قدره ٧ دقائق و٤٠ ثانية.

تعرّف المتتابعات الحسابية: يمكنك ربط نمط زمن الفريق بدوال خطية. و**المتتابعة** هي مجموعة مرتبة من الأعداد ، ويُسمى كل عدد فيها **حدًّا**. انظر إلى النمط في سباق الجري أعلاه وكوّن جدولًا، ثم حلّل البيانات.

المسافة (متر)	٤٠٠	٨٠٠	١٢٠٠	١٦٠٠	٢٠٠٠
الزمن (ثواني؛دقائق)	١:٣٢	٣:٠٤	٤:٣٦	٦:٠٨	٧:٤٠

+ ١:٣٢ + ١:٣٢ + ١:٣٢ + ١:٣٢

وكلما ازدادت المسافة في فترات منتظمة، زاد الزمن بمقدار دقيقة واحدة و ٣٢ ثانية. وبما أن الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت، فهي **متتابعة حسابية**. ويسمى الفرق بين الحدين المتتاليين **الأساس**، ويرمز إليه بالرمز «د».



مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

المتتابعة الحسابية

التعبير اللفظي: المتتابعة الحسابية نمط عددي يزيد أو ينقص بمقدار ثابت يُسمى **أساس المتتابعة**.

أمثلة

٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ...

+٢ +٢ +٢ +٢

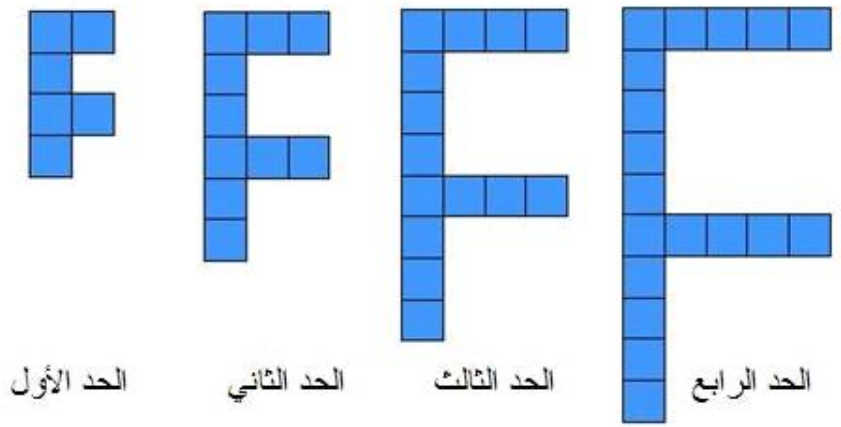
د = ٢

٣٣، ٢٩، ٢٥، ٢١، ١٧، ...

-٤ -٤ -٤ -٤

د = -٤

وتدل النقاط الثلاث المستعملة في المتتابعة على استمرارها على هذا النمط، وتشير إلى وجود المزيد من حدود المتتابعة التي لم تكتب.

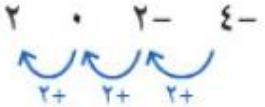


تمييز المتتابعة الحسابية

حدِّد ما إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي حسابية أم لا، وفسِّر إجابتك:

مثال

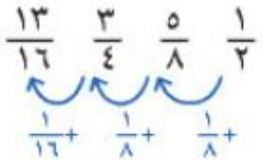
أ) $-٤، -٢، ٠، ٢، \ldots$



الفرق بين كل حد والذي يليه ثابت، فالمتتابعة حسابية.

مثال

ب) $\frac{١}{٢}، \frac{٥}{٨}، \frac{٣}{٤}، \frac{١٣}{١٦}، \ldots$



ليست متتابعة حسابية؛ لأن الفرق بين كل حد والذي يليه ليس ثابتًا.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة

إذا كانت حدود المتتابعة الحسابية متزايدة فالأساس موجب، وإذا كانت متناقصة فالأساس سالب.

تقويم

حدِّد ما إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي حسابية أم لا، وفسِّر إجابتك:

أ) $-٢٦، -٢٢، -١٨، -١٤، \ldots$

ب) $١، ٤، ٩، ٢٥، \ldots$

٨) $-٣، ١، ٥، ٩، \ldots$

٢) $٤، ٩، ١٤، ١٩، \ldots$

إيجاد الحد التالي

يمكن استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد الحد التالي فيها.

مثال

أوجد الحدود الثلاثة التالية فى المتتابعة الحسابية: ١٥، ٩، ٣، -٣،....

الخطوة ١: أوجد الأساس بطرح الحدود المتتالية.

١٥ ٩ ٣ -٣

-٦ -٦ -٦

الأساس -٦ .

الخطوة ٢: أضف -٦ إلى الحد الأخير في المتتابعة لتجد الحد التالي.

-٣ -٩ -١٥ -٢١

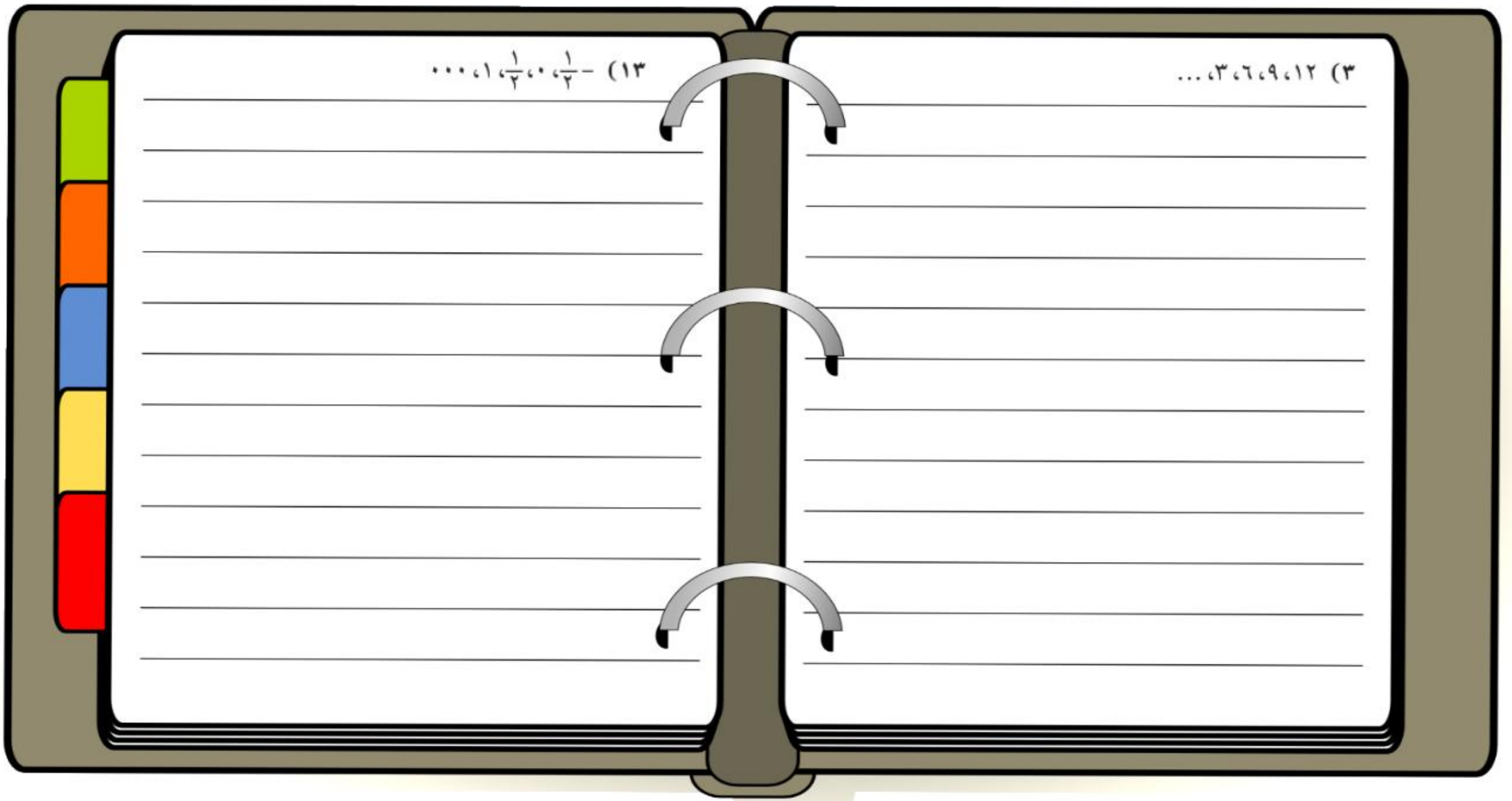
-٦ -٦ -٦

تاريخ الرياضيات

ابن حمزة المغربي:
عالم مسلم عاش في القرن ١٠هـ، درس المتتابعات الحسابية والهندسية، والربط بينها، ليضع أسس علم اللوغاريتمات في كتابهِ **"تحفة الأعداد لذوي الرشد والسداد"**.

تقويم

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتابعة حسابية فيما يأتي:



٣) ١٢، ٩، ٦، ٣، ...

١٣) $-\frac{١}{٢}$، ٠، $\frac{١}{٢}$، ١، ٠٠٠

إيجاد الحد النوني

ن

يمكن التعبير عن أي حد من حدود المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول $أ_1$ والأساس د كما يأتي:

الحد	الرمز	بدلالة $أ_1$، د	العدد (على فرض أن $أ_1 = ٨$ ، د = ٣).
الحد الأول	$أ_1$	$أ_1$	٨
الحد الثاني	$أ_2$	$أ_1 + د$	$٨ + ١(٣) = ١١$
الحد الثالث	$أ_3$	$أ_1 + ٢د$	$٨ + ٢(٣) = ١٤$
الحد الرابع	$أ_4$	$أ_1 + ٣د$	$٨ + ٣(٣) = ١٧$
⋮	⋮	⋮	⋮
الحد النوني	أن	$أ_1 + (ن - ١)د$	$٨ + (ن - ١)(٣)$

مفهوم أساسي — **الحد النوني في متتابعة حسابية**

أضف إلى مطويتك

يُعبّر عن الحد النوني لمتتابعة حسابية حدها الأول $أ_1$، وأساسها د بالصيغة: $أ_ن = أ_1 + (ن-١)$ د ،حيث ن عدد صحيح موجب.

$$ح_ن = أ + (ن - ١) ء$$

إيجاد الحد النوني

اكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الحسابية: −١٢، −٨، −٤، ٠ ،...

مثال

أ) اكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الحسابية: −١٢، −٨، −٤، ٠ ،...

الخطوة ١: أوجد الأساس.

−١٢ −٨ −٤ ٠

+٤ +٤ +٤

الأساس ٤

الخطوة ٢: اكتب المعادلة:

أن = أ١ + (ن − ١) د — معادلة الحد النوني بشكل عام

= −١٢ + (ن − ١)٤ — أ١ = −١٢ ، د = ٤

= −١٢ + ٤ن − ٤ — خاصية التوزيع

= ٤ن − ١٦ — بسّط

إرشادات للدراسة

الحد النوني:

بما أن ن تمثل ترتيب الحد، فإن قيمها هي الأعداد الصحيحة الموجبة .

مثال

ب) أوجد الحد التاسع في المتتابعة السابقة.

عوِّض ٩ بدلًا من ن في معادلة الحد النوني التي توصلت إليها في الفقرة أ.

أن = ٤ن − ١٦ — معادلة الحد النوني

أ٩ = ٤(٩) − ١٦ — ن = ٩

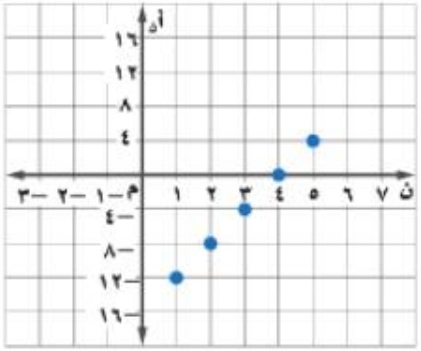
أ٩ = ٣٦ − ١٦ — اضرب

أ٩ = ٢٠ — بسّط

مثال

جـ) مثّل الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة بيانيًّا.

ن	٤ن − ١٦	أ ن	(ن، أ ن)
١	٤(١) − ١٦	−١٢	(١، −١٢)
٢	٤(٢) − ١٦	−٨	(٢، −٨)
٣	٤(٣) − ١٦	−٤	(٣، −٤)
٤	٤(٤) − ١٦	٠	(٤، ٠)
٥	٤(٥) − ١٦	٤	(٥، ٤)



مثال

د) ما الحد الذي قيمته ٣٢؟

عوِّض ٣٢ بدلًا من أ ن في معادلة الحد النوني.

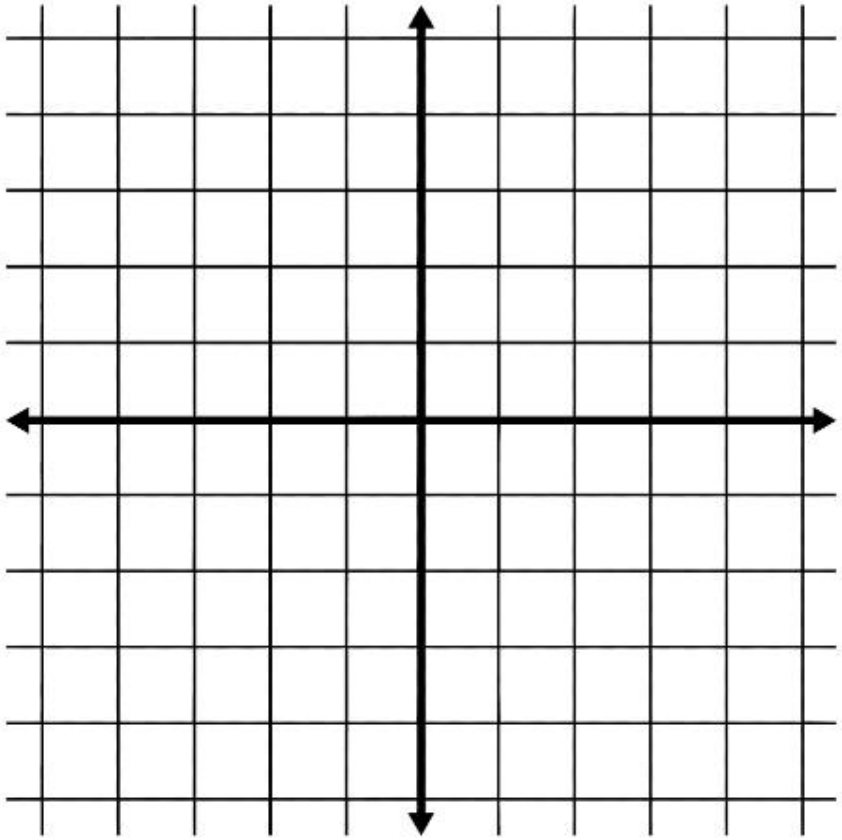
أ ن = ٤ن − ١٦	معادلة الحد النوني
٣٢ = ٤ن − ١٦	أ ن = ٣٢
٣٢ + ١٦ = ٤ن − ١٦ + ١٦	أضف ١٦ إلى الطرفين
٤٨ = ٤ن	بسّط
١٢ = ن	اقسم على ٤

إذن الحد الذي قيمته ٣٢ هو الثاني عشر.

تقويم

اكتب معادلة الحد النوني لكل متتابعة حسابية فيما يأتي، ثم مثِّل حدودها الخمسة الأولى بيانيًّا:

١٥) -٢، ٣، ٨، ١٣، ...

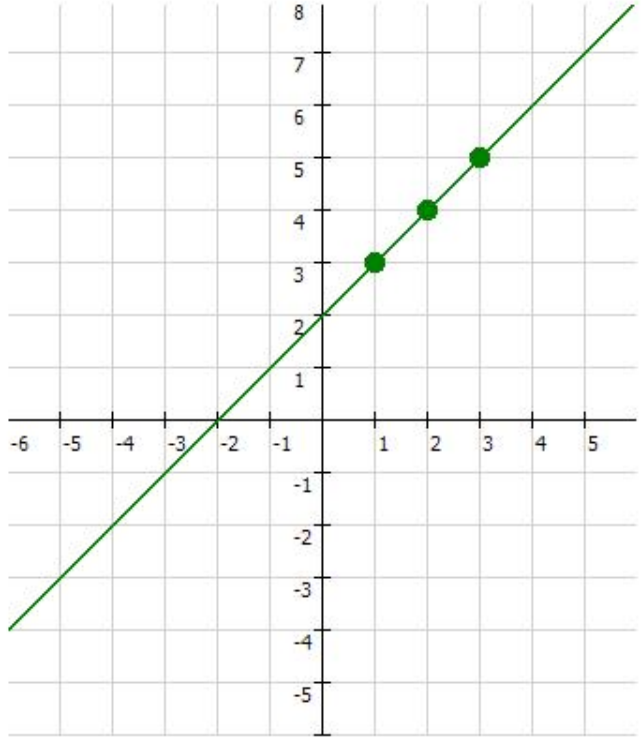


ن		أ ن	(ن، أ ن)
١			
٢			
٣			
٤			
٥			

المتتابعات الحسابية والدوال: كما رأيت في المثال ٣ التمثيل البياني للحدود الأولى للمتتابعة الحسابية يظهر أنها تقع على خط مستقيم. فالمتتابعة الحسابية هي دالة خطية يكون فيها (ن) متغيرًا مستقلًّا، أن متغيرًا تابعًا، (د) هو الميل؛ لذا يمكن إعادة كتابة معادلة الحد النوني على صورة الدالة:

ق(ن) = (ن−١) د+ أ١، حيث ن عدد صحيح موجب.

وعلى الرغم من أن مجال معظم الدوال الخطية هو الأعداد الحقيقية، فإن مجال الدالة في المثال ٣ هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، ومداها هو مجموعة الأعداد الصحيحة.



المتتابعة الحسابية باعتبارها دالة

مثال

دعوة: المتتابعة الحسابية ٠,٢٥ ريال ، ٠,٥٠ ريال، ٠,٧٥ ريال ، ١ ريال، ... تمثل تكلفة الرسائل النصية التي أرسلها منصور لأصدقائه لحضور حفل زفافه مقابل إرساله رسالة واحدة، رسالتين، ٣ رسائل، ٤ رسائل، ...

أ) اكتب دالة تعبر عن هذه المتتابعة.

٠,٢٥ ، ٠,٥٠ ، ٠,٧٥ ، ١

+٠,٢٥ +٠,٢٥ +٠,٢٥

الحد الأول في المتتابعة $أ_1$ هو ٠,٢٥، وأساسها ٠,٢٥ أيضًا.

$أ_ن = أ_1 + (ن - 1)\ د$ — معادلة الحد النوني

$= ٠,٢٥ + (ن - 1)\ ٠,٢٥$ — $أ_1 = ٠,٢٥$، $د = ٠,٢٥$

$= ٠,٢٥ + ٠,٢٥ن - ٠,٢٥$ — خاصية التوزيع

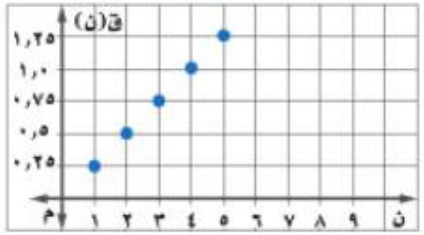
$= ٠,٢٥ن$ — بسّط.

فتكون الدالة: $ق(ن) = ٠,٢٥ن$.

ب) مثِّل الدالة بيانيًّا، وحدِّد مجالها.

معدّل التغير للدالة ٠,٢٥ ، كوّن جدولًا للدالة، ثم عيِّن النقاط بيانيًّا.

ن	ق (ن)
١	٠,٢٥
٢	٠,٥٠
٣	٠,٧٥
٤	١
٥	١,٢٥



بما أن مجال الدالة هو عدد الرسائل التي بعثها منصور؛ لذا فالمجال = {١، ٢، ٣،...}

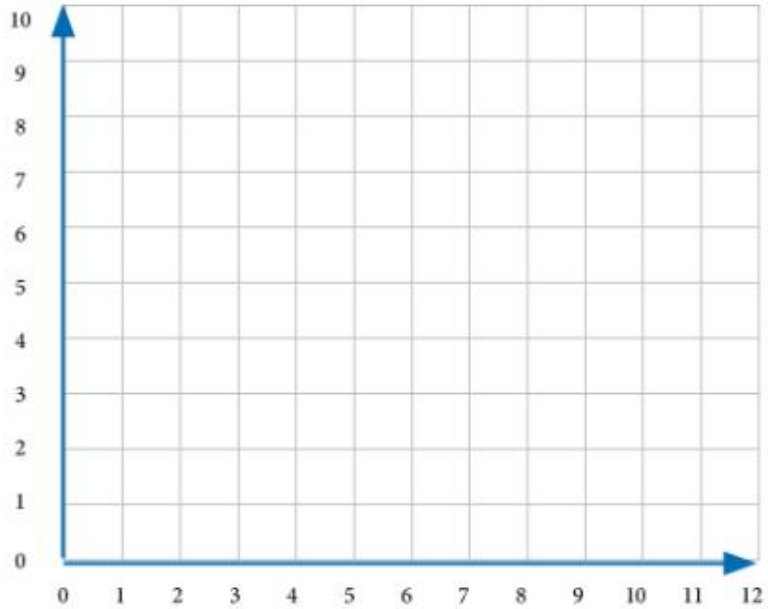
تقويم

١٨) **حدائق ترفيهية:** لعب حمد وأصدقاؤه في مدينة الألعاب لعبتين خلال الساعة الأولى، وبعد ساعتين كانوا قد لعبوا ٤ ألعاب، وبعد ثلاث ساعات ٦ ألعاب.

أ) اكتب دالة للتعبير عن المتتابعة الحسابية.

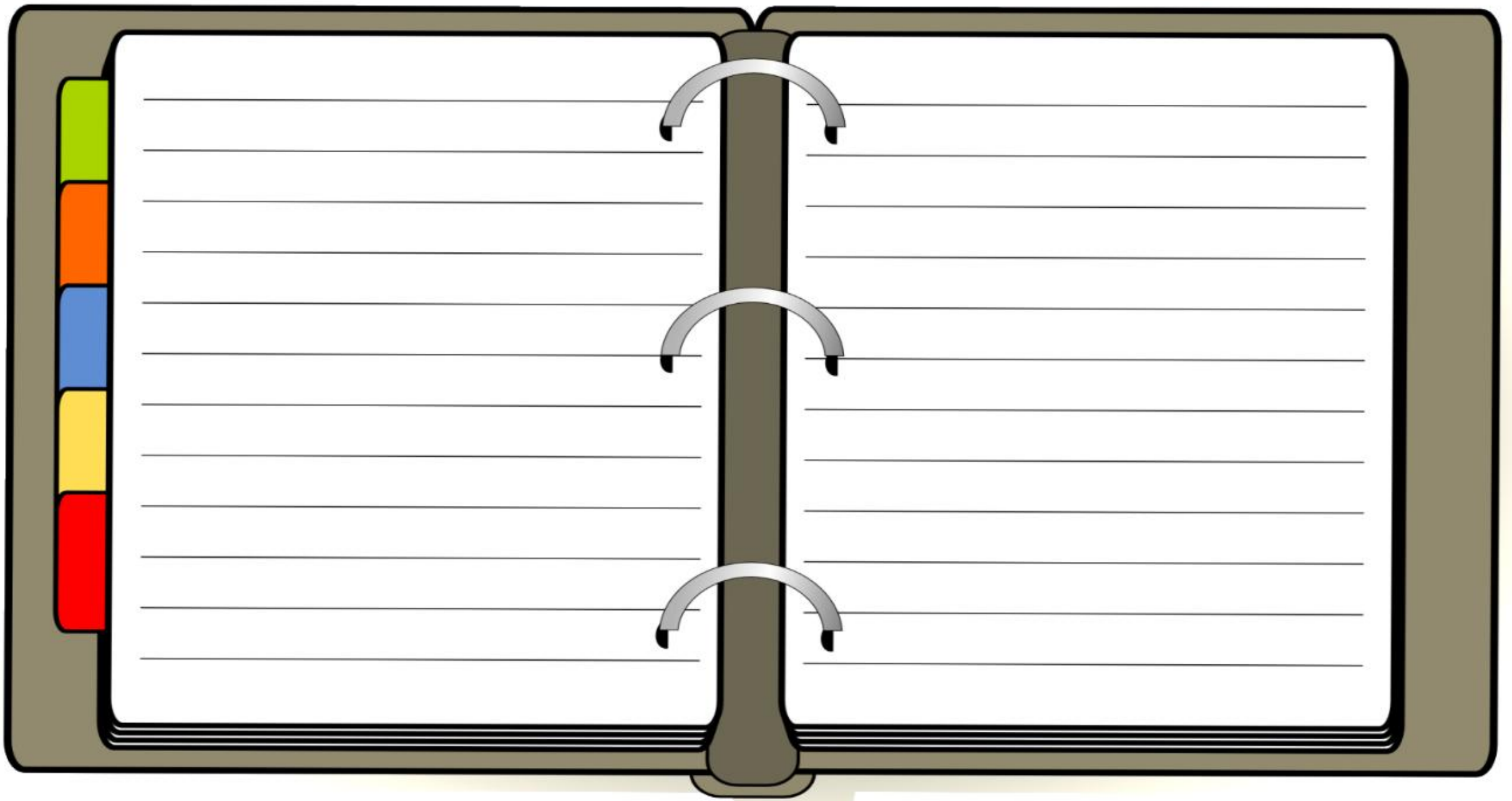
ب) مثِّل الدالة بيانيًّا، وحدد المجال.

ن	ق (ن)
١	
٢	
٣	
٤	
٥	



تقويم

٢٧) بيِّن إذا كانت المتتابعة: س−١ ، ٣س+٢ ، ٥س+٥ ، ... حسابية أم لا، وفسِّر إجابتك.



ملخص مفهوم

المُتتابعةُ الحسابيةُ

هيَ نمطٌ عدديٌّ يزيدُ أو ينقصُ بمقدارٍ ثابتٍ، يُسمَّى هذا المقدارُ أساسَ المُتتابعةِ، ونرمزُ لهُ بالرمزِ د

مُتتابعةٌ حسابيةٌ مُتزايدةٌ

٤، ٦، ٨، ١٠، ...

+٢ +٢ +٢

أساسُ المُتتابعةِ د = ٢

مُتتابعةٌ حسابيةٌ مُتناقصةٌ

٢٥، ٢٢، ١٩، ١٦، ...

−٣ −٣ −٣

أساسُ المُتتابعةِ د = −٣

يُعبِّرُ عنِ الحدِّ النُّونيِّ لمُتتابعةٍ حسابيةٍ حدُّها الأولُ ألف واحد، وأساسُها دال بالصيغةِ:

$$أ_ن = أ_1 + (ن-١)\,د$$

أ، أ + د، أ + ٢د ... أ + (ن + ١) د

قيم نفسك

أكمل مكان الفراغ

الحد التالي في المتتابعة الحسابية -10، -15، -20، -25،... هو ...

الإجابة

اختر الإجابة الصحيحة

المتتابعة ٩٤،١٤،١٩،.....حسابية أساسها

٥

٣

٤