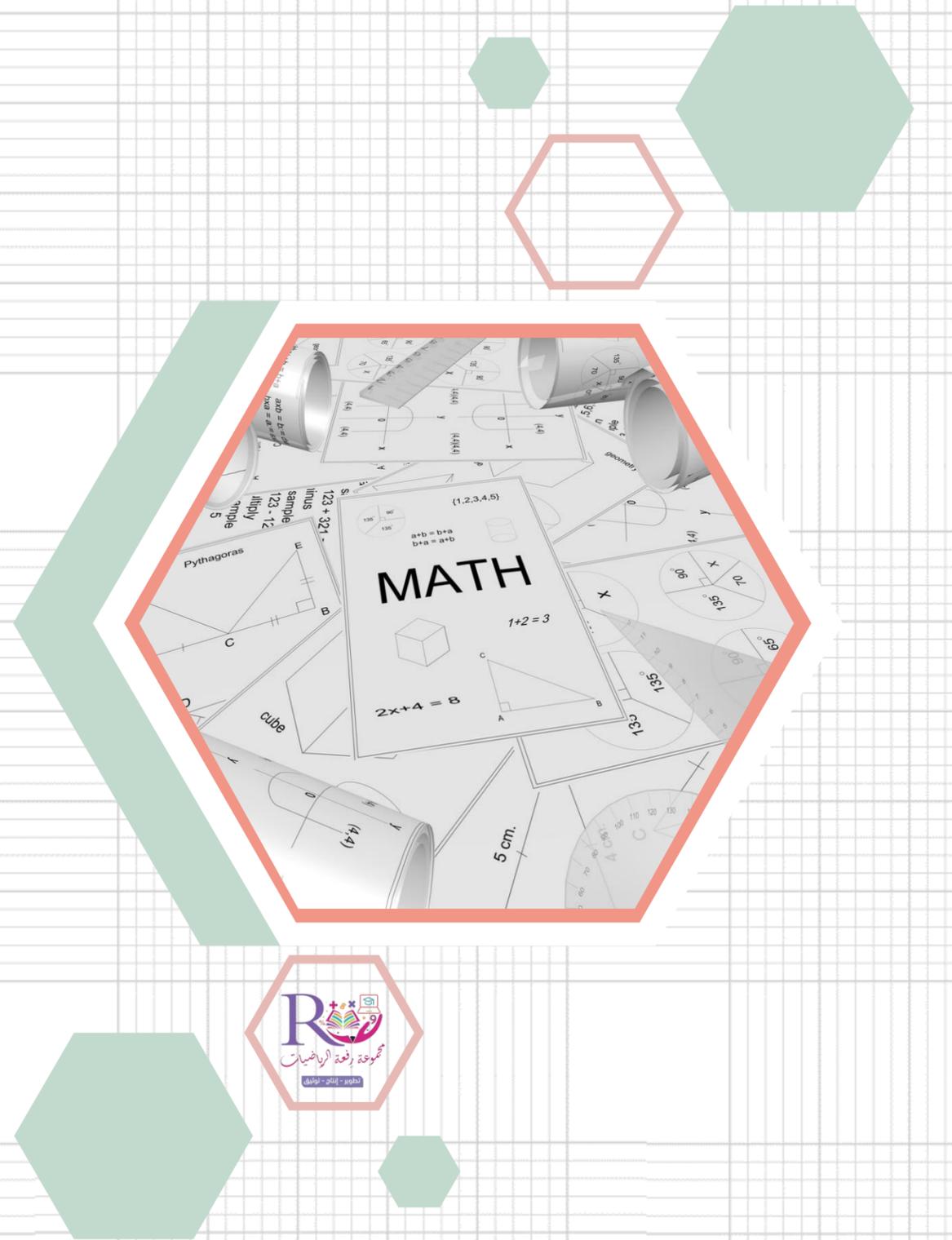


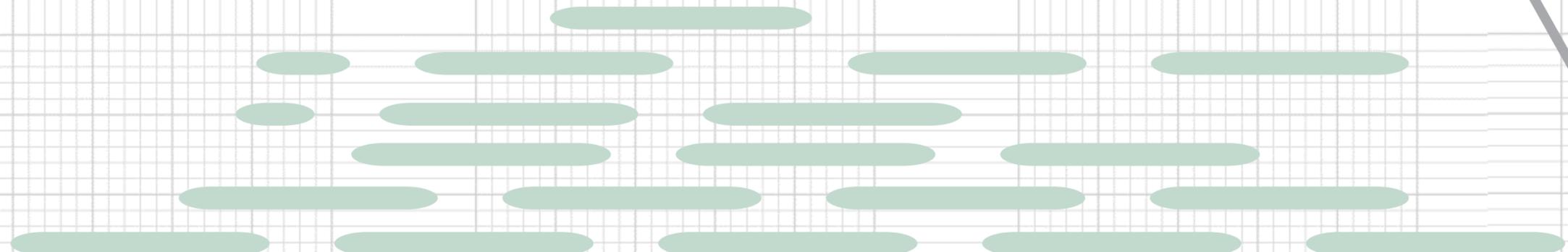
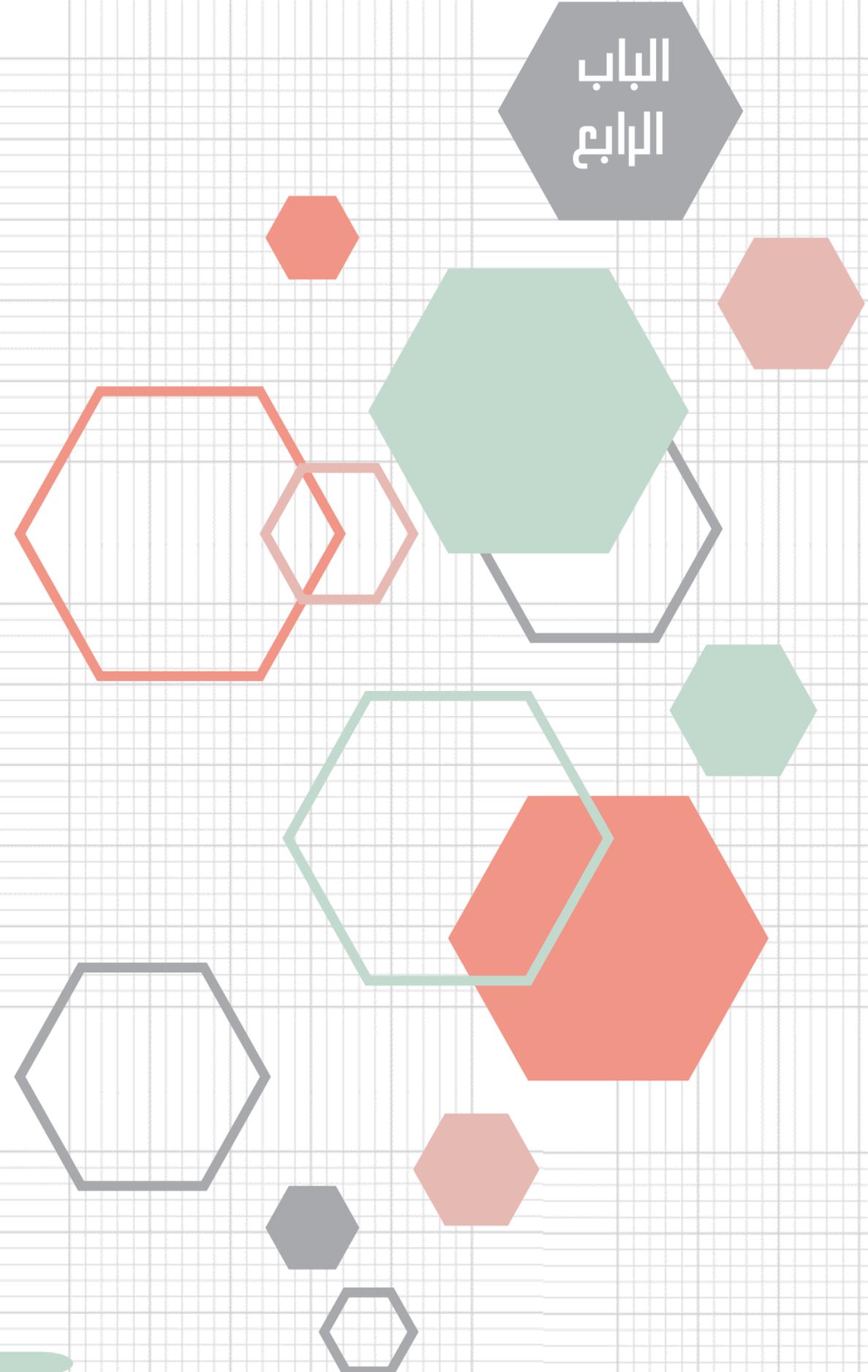
رياضيات ٢-٢

إعداد: أ/عبدالعزیز الشریف



١-٤
العمليات على الدوال

العلاقات والدوال
العكسية والجذرية





فيما سبق

➤ درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود

والآن

➤ أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما

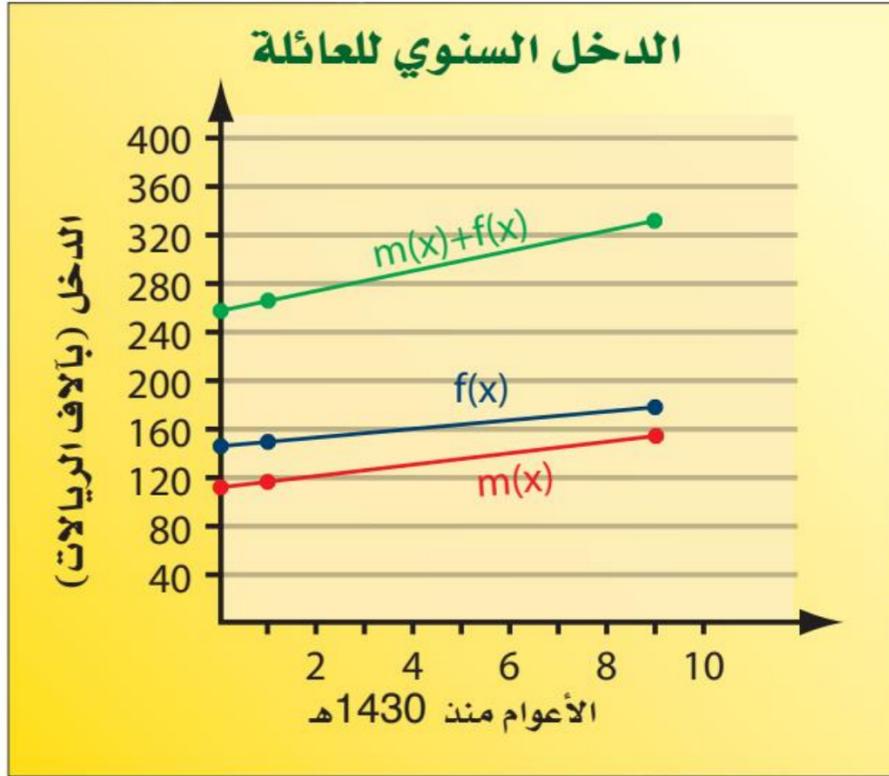
➤ أجد تركيب دالتين

المفردات

➤ تركيب دالتين



لماذا؟



تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1430 هـ؛ حيث تعبّر عن الدخل السنوي للزوج، و $m(x)$ تعبّر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.



العمليات على الدوال



العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا. يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطوبتك	العمليات على الدوال	مفهوم أساسي
مثال تكن $f(x) = 2x, g(x) = -x + 5$	التعريف	العملية
$2x + (-x + 5) = x + 5$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	الجمع
$2x - (-x + 5) = 3x - 5$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	الطرح
$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	الضرب
$\frac{2x}{-x + 5}, x \neq 5$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	القسمة



تصميم: عبدالعزيز الشريف

جمع الدوال وطرحها

مثال (1)

إذا كان $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 2x + 1$ فأوجد كل دالة فيما يأتي:

(a) $(f + g)(x)$

جمع دالتين
عوض
بسّط

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x^2 - 4) + (2x + 1) \\ &= x^2 + 2x - 3\end{aligned}$$

(b) $(f - g)(x)$

طرح دالتين
عوض
بسّط

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (x^2 - 4) - (2x + 1) \\ &= x^2 - 2x - 5\end{aligned}$$



جمع الدوال وطرحها

تحقق من فهمك

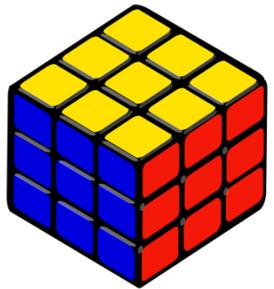
$$f(x) = x^2 + 5x - 2, g(x) = 3x - 2$$

$$(f - g)(x) \quad \text{1B}$$

$$(f + g)(x) \quad \text{1A}$$



الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف



ضرب الدوال وقسمتها



في المثال 1، الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو
مجموعة العناصر
المشتركة بين هاتين
المجموعتين، ويرمز له
بالرمز \cap .

مثال (٢)

إذا كان $f(x) = x^2 + 7x + 12$, $g(x) = 3x - 4$ فأوجد كل دالة مما يأتي:

$$(f \cdot g)(x) \quad (a)$$

ضرب دالتين $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

عوض

$$= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$$

خاصية التوزيع

$$= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$$

بسّط

$$= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$$



تنبيه !

قسمة دالتين

بما أنه قد تم تعلم قسمة كثيرات الحدود في الفصل 3، فإنه سيكتفي عند إيجاد ناتج قسمة دالتين (في هذا الدرس) بكتابتهما في صورة دالة نسبية، وتحديد مجالها من دون إجراء عملية القسمة.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad (b)$$

$$\text{قسمة دالتين} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

عوّض

$$= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}, x \neq \frac{4}{3}$$

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا، فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.



ضرب الدوال وقسمتها

تحقق من فهمك

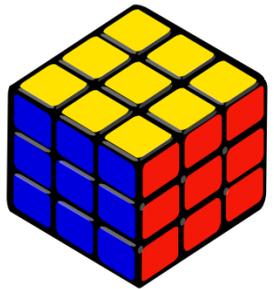
$$f(x) = x^2 - 7x + 2, g(x) = x + 4$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad \text{2B}$$

$$(f \cdot g)(x) \quad \text{2A}$$



الحل



تصميم: عبد العزيز الشريف

تركيب دالتين



تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

مفهوم أساسي

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$ ، وتقرأ f بعد g .

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

تركيب دالتين

التعبير اللفظي

إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f . فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

النموذج

مجال g مدى g / مجال f مدى f

$x \rightarrow g(x) \rightarrow f[g(x)]$

$[f \circ g](x)$





تركيب دالتين



يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفاً فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصراً في مجال الدالة f . وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصراً في مجال الدالة g .

مثال (٣)

إرشادات للدراسة

التركيب

كن حذراً من الخلط
بين عملية تركيب
دالتين $[f(g(x))]$
وعملية ضرب دالتين
 $(f \cdot g)(x)$.

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ ، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

$$f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\} \quad (a)$$

لايجاد $f \circ g$ ، أوجد قيم $g(x)$ أولاً، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لايجاد $f[g(x)]$

$$g(8) = 15$$

$$f[g(8)] = f(15) = 11$$

$$g(10) = 14 \quad f[g(10)] = f(14) = 9$$

$$g(5) = 1$$

$$f[g(5)] = f(1) = 8$$

$$g(9) = 0 \quad f[g(9)] = f(0) = 13$$

$$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$$





لايجاد $g \circ f$ ، أوجد قيم $f(x)$ أولاً ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g ، لايجاد $g[f(x)]$

$$f(1) = 8 \quad g[f(1)] = g(8) = 15$$

$$f(14) = 9 \quad g[f(14)] = g(9) = 0$$

$$f(0) = 13 \quad g[f(0)] = g(13)$$

$$f(15) = 11 \quad g[f(15)] = g(11)$$

$g(13)$ غير معرّفة

$g(11)$ غير معرّفة

وبما أن 13 , 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $g \circ f$ غير معرّفة عند $x = 13$ و $x = 11$ وبما أن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$ ، فإن $g[f(1)] = 15$ ، $g[f(14)] = 0$

$$f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x \quad \text{(b)}$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$

تعريف تركيب دالتين

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= g(2x - 5)$$

عوّض

$$= f(4x)$$

$$= 4(2x - 5)$$

عوّض

$$= 2(4x) - 5$$

$$= 8x - 20$$

بسّط

$$= 8x - 5$$



تصميم: عبدالعزيز الشريف

تركيب دالتين

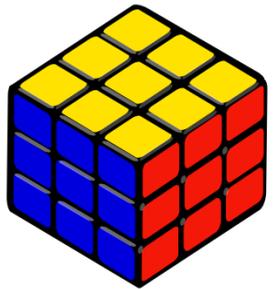
تحقق من فهمك

$$f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}, \quad g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\} \quad \text{(3A)}$$

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = x - 6 \quad \text{(3B)}$$



الحل



تصميم: عبدالعزيز الشريف

استعمال تركيب دالتين

الربط مع الحياة



في أعقاب الأزمة المالية العالمية عام 2009م، هبطت مبيعات كبرى شركات صناعة السيارات الأمريكية بصورة كبيرة بلغت 53% في أكبر انخفاض لها منذ 42 عامًا، مما اضطر هذه الشركات إلى خفض حجم إنتاجها بمقدار 40%.





استعمال تركيب دالتين



لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$ ؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

مثال (٤)

سيارات: استعمل تركيب دالتين لحل المسألة الآتية: قدّم معرض لبيع السيارات عرضاً بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافاً إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

افهم: المعطيات: • نسبة التخفيض من قيمة كل سيارة 12%، وقيمة الخصم 1500 ريال.
• سعر السيارة التي يريد أحمد شراءها 64500 ريال.

المطلوب: هل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

خطط: افترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة، و $d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم؛ إذن $[rod](x)$ تمثل السعر إذا طبق التخفيض قبل الخصم، و $[dor](x)$ تمثل السعر إذا طبق الخصم قبل التخفيض.



حل: اكتب معادلتين لدالتين التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخفض المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة. فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x = 0.88x$$

يخصم الوكيل 1500 ريال من سعر كل سيارة جديدة؛ لذا فإن دالة الخصم هي:

$$r(x) = x - 1500$$

إذا طُبِّق التخفيض قبل الخصم، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثَّل بـ $[r \circ d](64500)$.

$$[r \circ d](x) = r[d(x)]$$

$$[r \circ d](64500) = r[d(64500)]$$

$$= r[0.88(64500)]$$

$$= r(56760)$$

$$= 56760 - 1500 = 55260$$

أما إذا طُبِّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثَّل بـ $[d \circ r](64500)$.

$$[d \circ r](x) = d[r(x)]$$

$$[d \circ r](64500) = d[r(64500)]$$

$$= d(64500 - 1500)$$

$$= d(63000)$$

$$= 0.88 (63000)$$

$$= 55440$$

وبما أن $[r \circ d](64500) = 55260$ ، $[d \circ r](64500) = 55440$.

فإن السعر النهائي للسيارة سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق: تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبه 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر؛ لذا ستكون قيمة التخفيض أعلى.

استعمال تركيب دالتين

تحقق من فهمك

(4) **تسوق:** يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معاً على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالاً، وتخفيض نسبه 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيهما يعطي سعراً أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟



تأكد

أوجد $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلِّ مما يأتي:

$$f(x) = x^2 - 5 \quad (2)$$

$$g(x) = -x + 8$$

$$f(x) = x + 2 \quad (1)$$

$$g(x) = 3x - 1$$

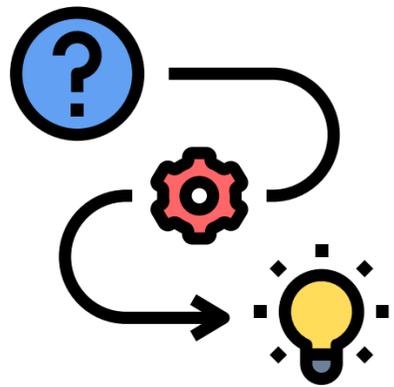
أوجد $f \circ g$, $g \circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

$$f = \{(-5, 4), (14, 8), (12, 1), (0, -3)\} \quad (4)$$

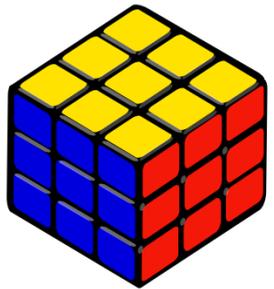
$$g = \{(-2, -4), (-3, 2), (-1, 4), (5, -6)\}$$

$$f = \{(2, 5), (6, 10), (12, 9), (7, 6)\} \quad (3)$$

$$g = \{(9, 11), (6, 15), (10, 13), (5, 8)\}$$



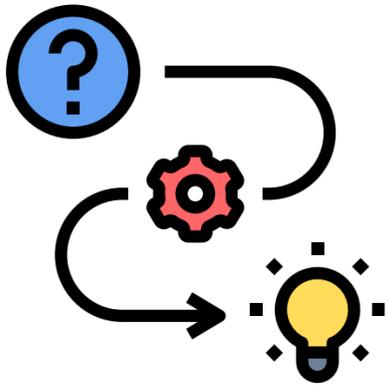
الحل



تصميم: عبد العزيز الشريف

مسائل التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](4) = 0$.



تصليبي

إذا كان $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = x^2 + 5$
فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي:

38 **A**

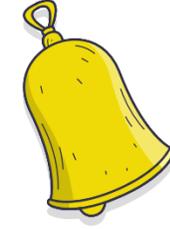
43 **B**

86 **C**

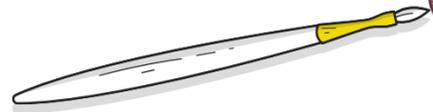
261 **D**



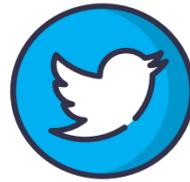
تم بحمد الله



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح



حساباتي على السوشيال ميديا



تصميم: عبدالعزيز الشريف