

مراجعة الفصل الأول كاملاً

تحليل الدوال

الفصل الدراسي الأول

اعداد و كتابت و تنسيق

أ. مريم سليمان المسعودي

الفصل الأول : تحليل الدوال

1-1 الدوال



وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية على مجموعة الأعداد النسبية Q ، وغير النسبية I ، والأعداد الصحيحة Z ، والأعداد الكلية W ، والأعداد الطبيعية N .
الصفة المميزة للمجموعة هي إحدى طرق وصف المجموعة، وفيها نختار متغيراً ونكتب خصائصه، ونبيّن إلى أي مجموعة ينتمي.
والفترة طريقة أخرى للتعبير عن المجموعة، وفيها نستعمل أقواساً مغلقة إذا كانت أطراف الفترة تنتمي إلى المجموعة، وأقواساً مفتوحة إذا كانت أطراف الفترة لا تنتمي إليها. ونستعمل ∞ للتعبير عن المالا نهاية الموجبة، و $-\infty$ للتعبير عن المالا نهاية السالبة.

إرشادات للدراسة

الرمزان N, U :
يُقرأ الرمز "U" (اتحاد)،
ويعني: جميع العناصر
المنتمية إلى كلا
المجموعتين.
يُقرأ الرمز "N" (تقاطع)،
ويعني: جميع العناصر
المشتركة بين المجموعتين.

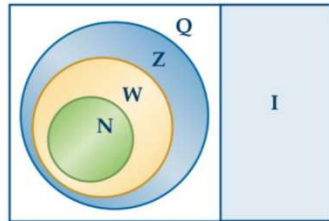
قراءة الرياضيات

غير محدودة:
تسمى الفترة غير محدودة
إذا كانت قيمها تزداد أو
تنقص دون حدود (دون
توقف).

إرشادات للدراسة

المجال والمدى:
في هذا المفهوم الأساسي،
يمكن أن يستعمل الرمز D
للتعبير عن المجال، والرمز
للتعبير عن المدى، أي أن:
 $D = \{1, 2, 3, 4\}$
 $R = \{6, 8, 9\}$

الأعداد الحقيقية R



فترات غير محدودة		فترات محدودة	
رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة	المتباينة
$[a, \infty)$	$x \geq a$	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
$(-\infty, a]$	$x \leq a$	(a, b)	$a < x < b$
(a, ∞)	$x > a$	$[a, b)$	$a \leq x < b$
$(-\infty, a)$	$x < a$	$(a, b]$	$a < x \leq b$
$(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$		

إرشادات للدراسة

جدولياً:
إذا قطع الخط الرأسي التمثيل
البياني في أكثر من نقطة،
فإن إحدى قيم x ترتبط بأكثر
من قيمة من قيم y ، كما
يوضح الجدول أدناه:

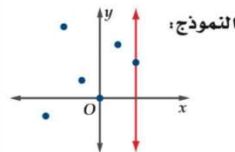
x	y
-2	-4
3	-1
3	4
5	6
7	9

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y :
لا يمكن أن ترتبط أكثر من
قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x .
في الدالة، بينما يمكن أن
ترتبط قيمة واحدة لـ y بأكثر
من قيمة لـ x كما في المثال
3b.

اختبار الخط الرأسي

مفهوم أساسي



التعبير اللفظي: تمثّل مجموعة من النقاط في
المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع
أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر
من نقطة.

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة و باستعمال رمز الفترة

$x \geq 1$ أو $x < -11$	$5 < x < 15$	$x \leq -2$	$\{17, 18, 19, 20, \dots\}$

إذا كانت $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x$ فأوجد $f(-2)$

$g(x) = \begin{cases} x + 45, & x \leq -1 \\ 81 - x, & x > -1 \end{cases}$ أوجد $f(-5)$ أوجد $f(36)$

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا

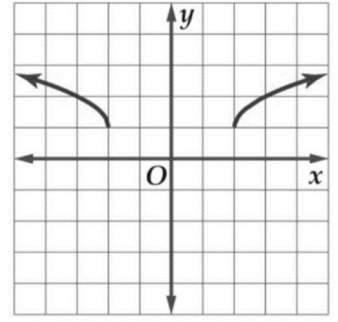
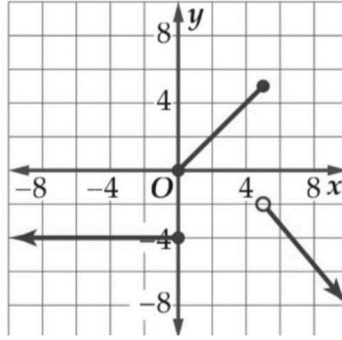
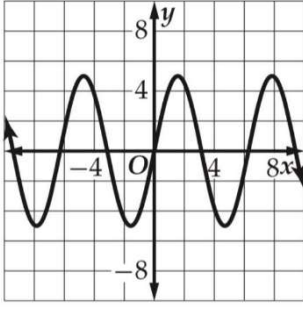
المتغير المستقل x يمثل رقم حساب في البنك و المتغير y يمثل الرصيد في الحساب

$\sqrt{48y} = x$ $x^2 = y + 2$ $\frac{1}{x} = y$

حدد مجال كل دالة مما يأتي :

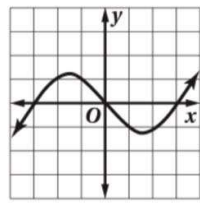
$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{4x-1}}$	$h(x) = \sqrt{6-x^2}$	$f(x) = \frac{8x+12}{x^2+5x+4}$
---------------------------------	-----------------------	---------------------------------

معتمدا على اختبار أخط الرأسى , حدد ما إذا كان كلا من التمثيلات التاليت تمثل دالة أم لا ؟

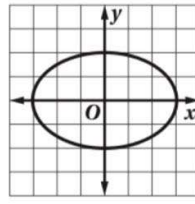


اعتر الإجابات الصحيحة فيما يلي :

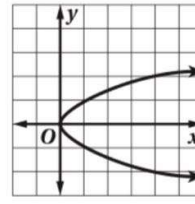
1 (أي العلاقات التالية يكون فيها y تمثل دالة في x)



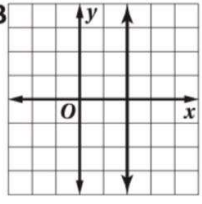
(D)



(C)



(B)



(A)

2 (إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$ فما قيمة $f(4)$)

A -8 B 0 C 8 D 24

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} |4x|, & x < -2 \\ x^3 - 1, & x \geq -2 \end{cases}$ فإن قيمة $f(-2)$

A 8 B -7 C -8 D -9

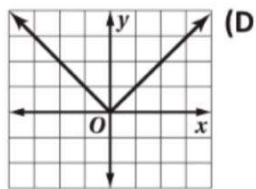
3 (أي العبارات التالية صحيحة دائما)

A الدالة لا تمثل علاقة B كل دالة تمثل علاقة C كل علاقة تمثل دالة D العلاقة لا تكون دالة

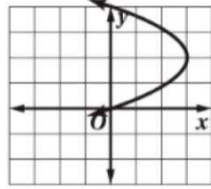
4 (أي مما يلي يمثل مجال الدالة $h(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$)

A $x \neq 5$ B $x \geq \frac{3}{2}$ C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$ D $x \neq \frac{3}{2}$

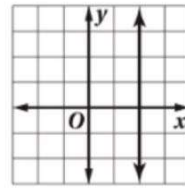
5 (أي العلاقات التالية يكون فيها y تمثل دالة في x)



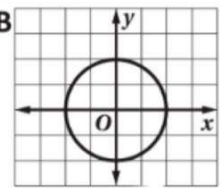
(D)



(C)



(B)



(A)

6 (إذا كانت $f(x) = -2\sqrt{x^2}$ فما قيمة $f(8+x)$)

A $-2\sqrt{x^2 + 8}$ B $\sqrt{-2x^2 - 128}$ C $-2\sqrt{x^2 + 64}$ D $-2\sqrt{x^2 + 16x + 64}$

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحليل التمثيلات البيانية للدوال إذا نظرت إلى منحنى الدالة، فإنه يمكنك تحديد مجالها ومداهما، وتقدير المقطعين x , y . تسمى المقاطع x لمنحنى دالة بأصفار هذه الدالة؛ لأن قيمة الدالة عند كل منها تساوي صفراً.

إرشادات للدراسة

تماثل العلاقات والدوال:

يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

إرشادات للدراسة

التماثل:

من الممكن أن يكون للتمثيل البياني الواحد أكثر من نوع تماثل.

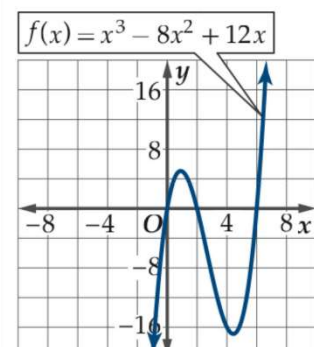
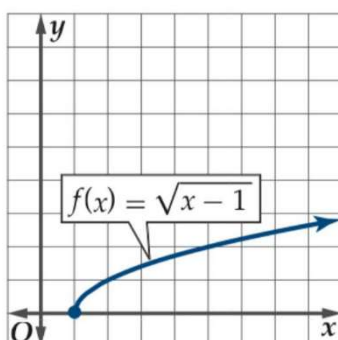
تماثل المنحنيات يوجد للتمثيل البياني للعلاقة المتأصلة حول المحور x أو المحور y محور تماثل. ويوجد للتمثيل البياني للعلاقة المتأصلة حول نقطة الأصل نقطة تماثل.

الوصف	الاختبار الجبري	متماثل بالنسبة إلى...
إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-y$ مكان y نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.	المحور x
إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(-x, y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-x$ مكان x نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.	المحور y
إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(-x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-x$ مكان x ، و $-y$ مكان y نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.	نقطة الأصل

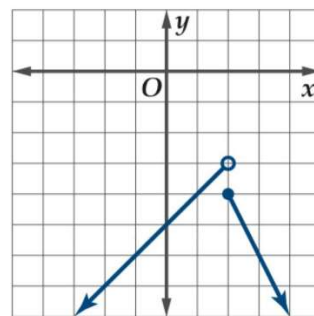
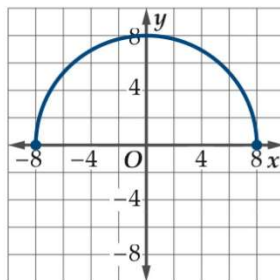
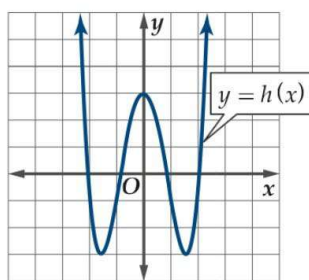
تسمى الدوال المتأصلة حول المحور y دوالاً زوجية، وفيها يكون $f(-x) = f(x)$ لجميع قيم x في مجال الدالة. وتسمى الدوال المتأصلة حول نقطة الأصل دوالاً فردية، وفيها يكون $f(-x) = -f(x)$.

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
أي العلاقات الآتية متماثلة حول المحور x							
A	$xy = 2$	B	$x = y^2$	C	$y = x^2$	D	$y = 3$
أي الدوال الآتية دالة فردية							
A	$f(x) = -x^3 + 4$	B	$f(x) = 2x^3$	C	$f(x) = x^4 - 9$	D	$f(x) = x^4 + 4x$
أي مما يأتي تكون الدالة الفردية متماثلة حوله ؟							
A	محور x	B	محور y	C	المستقيم $x=y$	D	نقطة الاصل
ما هو صفر الدالة $g(x) = 3x - 2$							
A	-2	B	$-\frac{3}{2}$	C	$-\frac{2}{3}$	D	$\frac{2}{3}$
أوجد المقطع y للدالة $f(x) = \frac{x^3+6}{2}$							
A	$\sqrt[3]{-6}$	B	-3	C	2	D	3
ما هو صفر الدالة $g(x) = -\frac{2}{3}x - 12$							
A	-18	B	-12	C	12	D	18

من التمثيلات البياني التالية أوجد مقطع y واصفارها ثم اوجدتها جبرياً



استعمل التمثيل البياني لإيجاد مجال كل دالة و مداها .

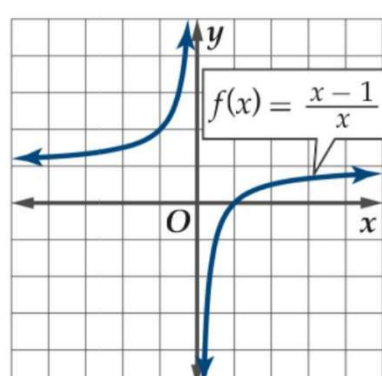
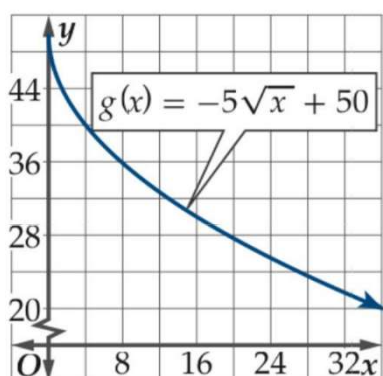


المجال :
المدى :

المجال :
المدى :

المجال :
المدى :

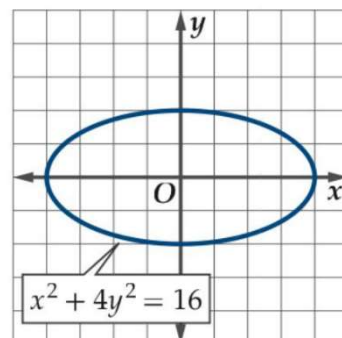
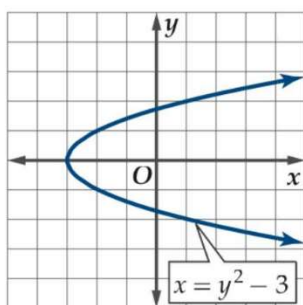
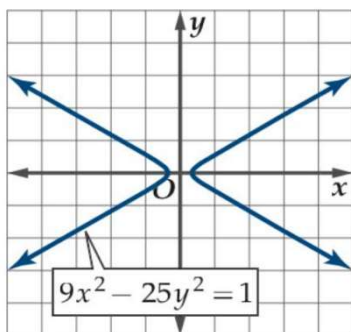
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير قيمتها المطلوبة .



$$g(6) = \dots, g(12) = \dots$$

$$f(1) = \dots, f(-3) = \dots$$

استعمل التمثيل البياني في كلا يلي لاختبار التماثل حول المحور x و y ونقطة الأصل .



أوجد اصفار الدوال التالية

حدد ما اذا كانت الدالة زوجية ام فردية ام غير ذلك

$$f(x) = \frac{4x-1}{x}$$

$$h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$$

$$f(x) = 2\sqrt{x+12} - 8$$

$$h(x) = x^6 + 4$$

أوجد مقطع y في الدوال التالية

$$h(x) = 4x - 9$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

1-3 الاتصال و النهايات

الاتصال تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط الآتية:

- (1) $f(x)$ معرفة عند c ؛ أي أن $f(c)$ موجودة.
 - (2) تقترب $f(x)$ من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين، أي أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة.
 - (3) القيمة التي تقترب منها $f(x)$ من جهتي c هي $f(c)$ ؛ أي أن، $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.
- ويكون للدوال غير المتصلة ثلاثة أنواع من عدم الاتصال، وهي: عدم الاتصال اللانهائي، وعدم الاتصال القفزي، وعدم الاتصال القابل للإزالة.

سلوك طرقي التمثيل البياني للدالة يصف سلوك طرقي التمثيل البياني مسار المنحنى عند طرفيه، أو ماذا يحدث لقيم $f(x)$ عندما تتزايد أو تتناقص قيم x بلا حدود. ويمكنك استعمال مفهوم النهاية لوصف سلوك طرقي التمثيل.

سلوك طرقي التمثيل البياني من جهة اليسار (عندما تتناقص قيم x السالبة بلا حدود): $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 سلوك طرقي التمثيل البياني من جهة اليمين (عندما تتزايد قيم x الموجبة بلا حدود): $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
 قد تتحول قيم $f(x)$ إلى سالب ما لا نهاية أو موجب ما لا نهاية أو إلى قيمة محددة.

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يلي متصلة عند قيمة x المعطاة. و برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال . وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال : لا نهائي , قفزي , قابل للإزالة .

$f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & x \leq -6 \\ -x + 2, & x > -6 \end{cases}$ عند $x = -6$	$f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$ عند $x = 4, x = 1$	$f(x) = \frac{x}{x - 1}$ عند $x = 1$	$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ عند $x = -5$

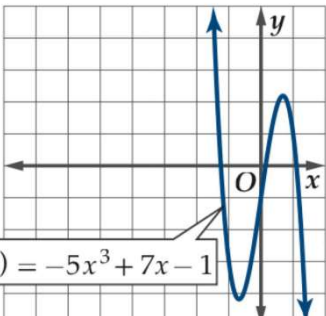
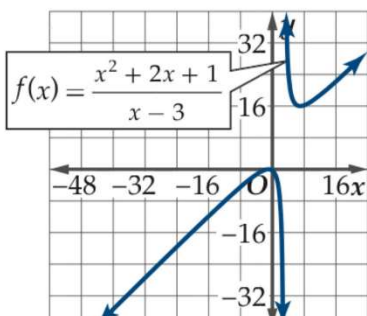
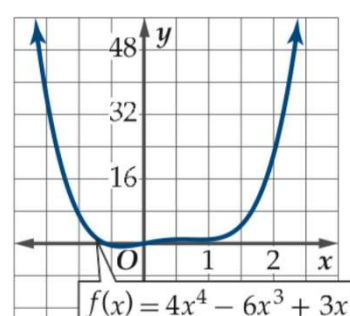
أعد تعريف كل دالة مما يلي عند القيمة المعطاة x , لتصبح الدالة متصلة عندها .

$x = 2, f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$	$x = 5, f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$	$x = -3, f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

حدد الاعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة .

$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}, [-3, 4]$	$f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$
---	---------------------------------

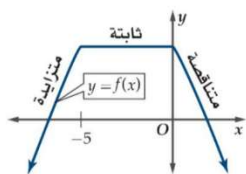
استعمل التمثيلات البيانية التالية لوصف سلوك طرقي التمثيل البياني . ثم عزز إجابتك عدديا .

 $f(x) = -5x^3 + 7x - 1$	 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}$	 $f(x) = 4x^4 - 6x^3 + 3x$
--	--	--

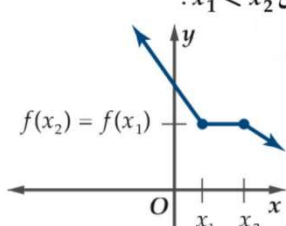
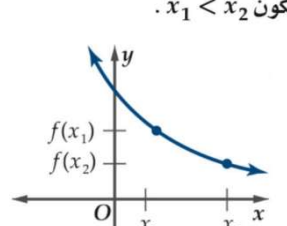
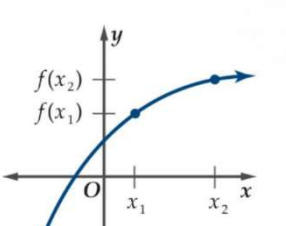
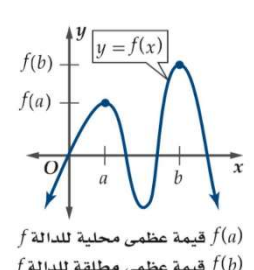
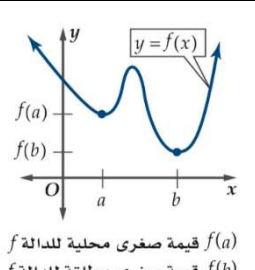
اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1 (ما هي الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينهما الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 6x - 2$ في الفترة $[-3, 0]$.	2 (أي الدوال الآتية لها عدم اتصال قابل للإزالة ؟
(A $f(x) = \frac{x}{x+3}$ (C $f(x) = \frac{1}{x+3}$ (B $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ (D $f(x) = x^3 - 3$	(A $[-3, -2], [-1, 0]$ (B $[-3, -2]$ (C $[-2, -1], [-1, 0]$ (D $[-1, 0]$
3 (أي مما يأتي يصف سلوك طرف التمثيل البياني للدالة $f(x)$ من اليمين. (الرسم المجاور)	(A $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ (B $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (C $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 8$ (D $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
1 (في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$	4 (أي الدوال الآتية لها عدم اتصال لا نهائي ؟
(A $[6, 7]$ (B $[7, 8]$ (C $[8, 9]$ (D $[9, 10]$	(A $f(x) = \frac{1}{2x-9}$ (C $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 3, & x \geq 0 \end{cases}$ (B $f(x) = \frac{x^2-49}{x-7}$ (D $f(x) = x^5 - x^3$
يبين التمثيل البياني المجاور منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$.	(A 1 (B 2 (C 3 (D 4

1-4 القيم القصوى و متوسط معدل التغير



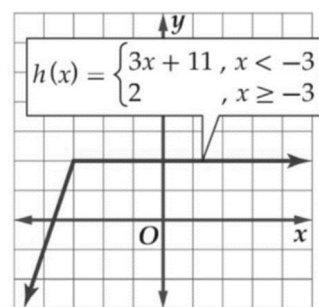
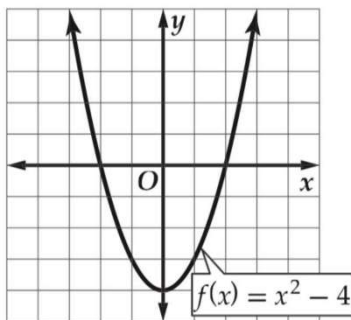
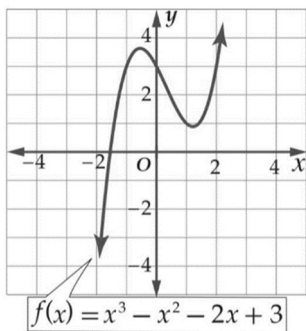
التزايد والتناقص قد تكون الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة على فترة معطاة. وتُسمى النقاط التي تتغير عندها الدالة من متزايدة إلى متناقصة أو العكس نقاطاً حرجية، وقد تكون النقطة الحرجة صغرى محلية، أو صغرى مطلقة، أو عظمى محلية، أو عظمى مطلقة. ويُستعمل المصطلح قيمة قصوى للدلالة على القيمة الصغرى أو العظمى.

الدالة المتزايدة	الدالة المتناقصة	الدالة الثابتة
تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة. لـ x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.	تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة. لـ x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.	تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة. لـ x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.
		
القيمة العظمى المحلية	القيمة العظمى المطلقة	
إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُميت قيمة عظمى محلية. تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.	إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُميت قيمة عظمى مطلقة. تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.	
القيمة العظمى المحلية	القيمة العظمى المطلقة	
إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُميت قيمة صغرى محلية. تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.	إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة، وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها، سُميت قيمة صغرى مطلقة. تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \leq f(x)$.	

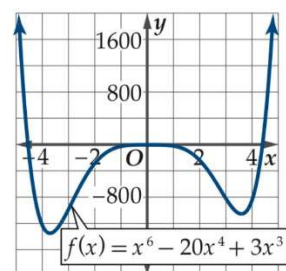
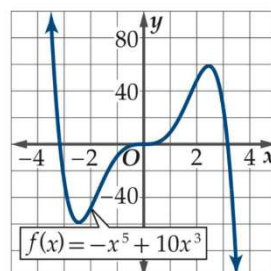
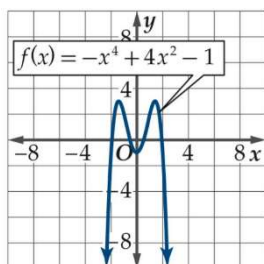
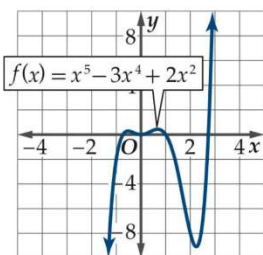
متوسط معدل التغير متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين. نسمي المستقيم الواصل بين نقطتين على منحنى الدالة **قاطعاً**.
متوسط معدل التغير في الفترة $[x_1, x_2]$ هو ميل القاطع، m_{sec} .

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال التالية لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة او متناقصة او ثابتة مقربة لأقرب 0.5 وحدة .



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة الى اقرب 0.5 وحدة . و اوجد قيم الدالة عندها, و بين نوع القيم القصوى .



أوجد متوسط معدل التغير للدوال التالية في الفترات المذكورة

$$f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$$

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$$

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

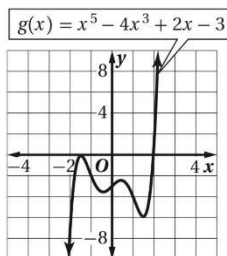
1 (قذف صاروخ من سطح الأرض الى أعلى , اذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 72t$, حيث t تمثل الزمن بالثواني بعد قذفه , $d(t)$ تمثل المسافة التي يقطعها . اذا اهملت مقاومة الهواء , فأوجد السرعة المتوسطة للصاروخ في الفترة من 3 الى 4 ثوان .

$$56 \text{ ft/s (D)}$$

$$40 \text{ ft/s (C)}$$

$$-40 \text{ ft/s (B)}$$

$$-56 \text{ ft/s (A)}$$



2 (من التمثيل البياني التالي القيمة العظمى المحلية مقدارها

$$0.5 (D)$$

$$1.5 (C)$$

$$-2.5 (B)$$

$$0 (A)$$

3 (متوسط معدل التغير للدالة التالية $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4, [-3, -1]$

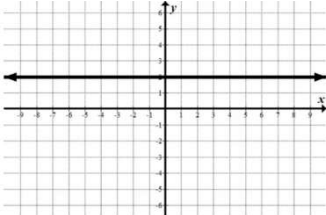
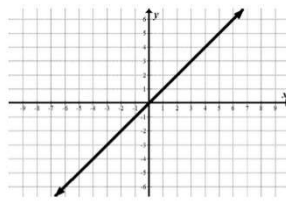
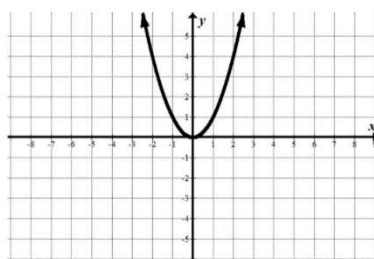
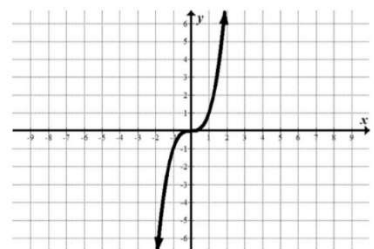
$$25 (D)$$

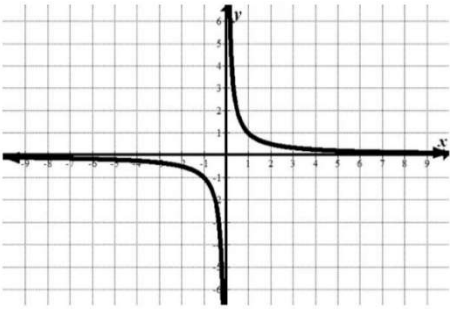
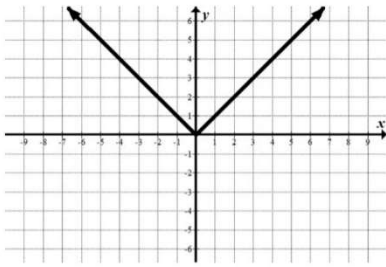
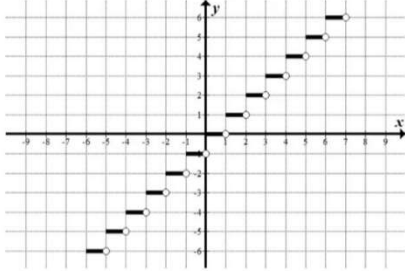
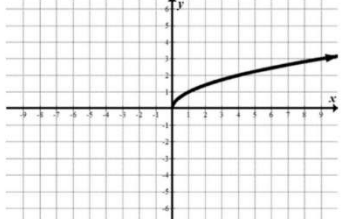
$$-28 (C)$$

$$-25 (B)$$

$$28 (A)$$

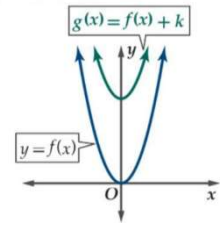
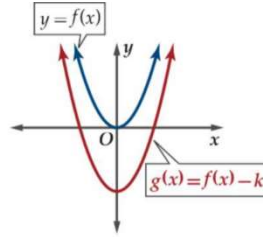
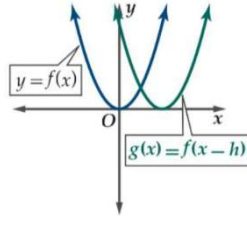
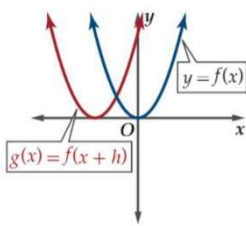
1-5 الدوال الرئيسية (الأم) و التحويلات الهندسية

التمثيل البياني	الدالة الرئيسية (الأم)			
 لتمثيل البياني هو مستقيم افقي	$f(x) = c$	الدالة الثابتة		
	c	مقطع y	زوجية	النوع
	لا يوجد	مقطع x	حول y	التماثل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$	سلوك الدالة	R أو $(-\infty, \infty)$	المجال
	متصلة على مجالها , ثابتة	الاتصال	$\{y: y = c\}$	المدى
 التمثيل البياني للدالة يمر بجميع النقاط التي احداثياتها (a, a)	$f(x) = x$	الدالة المحايدة		
	0	مقطع y	فردية	النوع
	0	مقطع x	حول $(0,0)$	التماثل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك الدالة	R أو $(-\infty, \infty)$	المجال
	متصلة على مجالها , متزايدة في $(-\infty, \infty)$	الاتصال	R أو $(-\infty, \infty)$	المدى
 التمثيل البياني للدالة على صورة حرف U	$f(x) = x^2$	الدالة التربيعية		
	0	مقطع y	زوجية	النوع
	0	مقطع x	حول y	التماثل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك الدالة	R أو $(-\infty, \infty)$	المجال
	متصلة على مجالها , متزايدة في $(0, \infty)$ متناقصة في $(-\infty, 0)$	الاتصال	R^+ أو $[0, \infty)$	المدى
 التمثيل البياني متماثل حول نقطة الاصل	$f(x) = x^3$	الدالة التكعيبية		
	0	مقطع y	فردية	النوع
	0	مقطع x	حول $(0,0)$	التماثل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك الدالة	R أو $(-\infty, \infty)$	المجال
	متصلة على مجالها , متزايدة في $(-\infty, \infty)$	الاتصال	R أو $(-\infty, \infty)$	المدى

التمثيل البياني	الدالة الرئيسية (الأم)			
 التمثيل البياني للدالة مكون من جزئين	$f(x) = \frac{1}{x}$		دالة المقلوب	
	لا يوجد	مقطع y	فردية	النوع
	لا يوجد	مقطع x	حول $(0,0)$	التماثل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$	سلوك الدالة	$R - \{0\}$ أو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	المجال
	عدم اتصال لا نهائي عند $x = 0$, متناقصة في $(0, \infty)$ متناقصة في $(-\infty, 0)$	الاتصال	$R - \{0\}$ أو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	المدى
 التمثيل البياني للدالة على صورة حرف V	$f(x) = x $		دالة القيمة المطلقة	
	0	مقطع y	زوجية	النوع
	0	مقطع x	حول y	التماثل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك الدالة	R أو $(-\infty, \infty)$	المجال
	متصلة على مجالها , متزايدة في $(0, \infty)$ متناقصة في $(-\infty, 0)$	الاتصال	R^+ أو $[0, \infty)$	المدى
 دالة اكبر عدد صحيح أقل من او يساوي x , وهي نوع من أنواع الدوال الدرجية	$f(x) = [x]$		دالة أكبر عدد صحيح	
	0	مقطع y	لا يوجد	النوع
	عند $[0, 1)$	مقطع x	لا يوجد	التماثل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك الدالة	R	المجال
	عدم اتصال قفزي , ثابتة عند $x \notin Z$ متزايدة عند $x \in Z$	الاتصال	Z	المدى
 التمثيل البياني للدالة في الربع الاول	$f(x) = \sqrt{x}$		دالة الجذر التربيعي	
	0	مقطع y	لا يوجد	النوع
	0	مقطع x	لا يوجد	التماثل
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك الدالة	R^+ أو $[0, \infty)$	المجال
	متصلة على مجالها , متزايدة في $[0, \infty)$	الاتصال	R^+ أو $[0, \infty)$	المدى

التحويلات الهندسية للدوال (الأم) : يمكن إجراء تحويل للدالة الرئيسية لإنشاء منحنيات أخرى في عائلته هذه الدالة .

الانسحاب (الإزاحة) : احد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة للأعلى أو للأسفل أو إلى اليمين أو إلى اليسار.



هو منحنى $f(x)$ مزاخاً

$g(x) = f(x - h)$

هو منحنى $f(x)$ مزاخاً

$g(x) = f(x) + k$

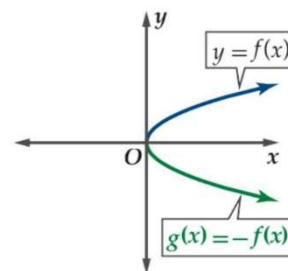
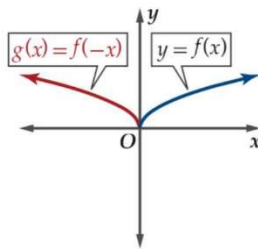
$|h|$ وحدة إلى اليسار عندما $h < 0$

$|h|$ وحدة إلى اليمين عندما $h > 0$

$|k|$ وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$

$|k|$ وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$

الانعكاس : احد التحويلات القياسية الذي يكون لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدد.



هو انعكاس منحنى $f(x)$

$g(x) = f(-x)$

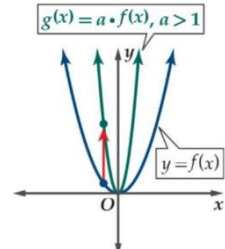
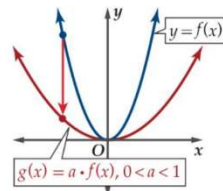
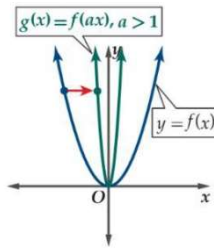
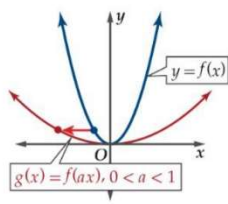
هو انعكاس منحنى $f(x)$

$g(x) = -f(x)$

انعكاس حول محور y

انعكاس حول محور x

التمدد : هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسياً أو أفقياً.



$g(x) = f(a \cdot x)$ (a عدد موجب) هو تمدد لمنحنى $f(x)$

$g(x) = a \cdot f(x)$ (a عدد موجب) هو تمدد لمنحنى $f(x)$

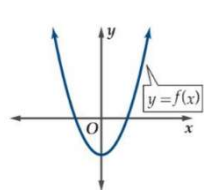
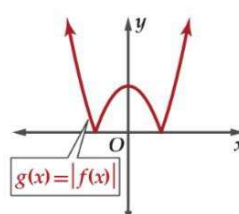
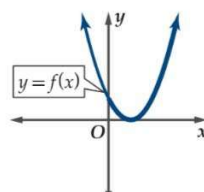
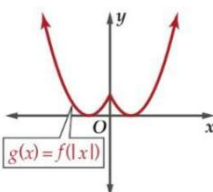
$0 < a < 1$ توسع أفقي

$a > 1$ تضيق أفقي

$0 < a < 1$ تضيق رأسي

$a > 1$ توسع رأسي

التحويلات الهندسية مع دوال القيم المطلقة : تحويل هندسي غير قياسي.



$g(x) = f(|x|)$

$g(x) = |f(x)|$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .

يغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x .

عين الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$, ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$ ((التحويلات الهندسية))

$$g(x) = \frac{4}{x+1}$$

$$g(x) = 3\sqrt{x+8}$$

$$g(x) = 3|x| - 4$$

صف العلاقة بين منحنىي الدالتين : $f(x) = |x|$ و $g(x) = -|x| - 2$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

(1) أي منحنيات الدوال الآتية ناتج عن توسع رأسي , ثم انعكاس حول محور x لمنحنى الدالة $g(x) = x^2$

$f(x) = -\frac{1}{3}x^2$	D	$f(x) = -\frac{1}{x^2+3}$	C	$f(x) = -3x^2$	B	$f(x) = \frac{1}{3}x^2$	A
--------------------------	---	---------------------------	---	----------------	---	-------------------------	---

(2) ما الانسحاب الذي يُجرى على الدالة الرئيسية (الأم) $P(x) = x^3$ للحصول على الدالة $p(x) = (x-7)^3$

7 وحدات إلى أسفل	B	7 وحدات إلى أعلى	C	7 وحدات إلى اليسار	D	7 وحدات إلى اليمين
------------------	---	------------------	---	--------------------	---	--------------------

(3) مالدالة الناتجة عن إجراء التحويلات الهندسية : تضيق أفقي معاملة 2 ' و توسع رأسي , و انعكاس حول المحور y على الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = -2\sqrt{3x}$	A	$f(x) = -3\sqrt{2x}$	B	$f(x) = 2\sqrt{-3x}$	C	$f(x) = 3\sqrt{-2x}$	D
----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---

(4) ما الانسحابات التي أجريت على الدالة $h(x) = [x]$, بحيث نتجت الدالة $h(x) = [x+9] - 5$

9 وحدات إلى اليسار و 5 وحدات إلى الأسفل.	A	5 وحدات إلى اليسار و 9 وحدات إلى الأسفل.	B	5 وحدات إلى اليمين و 9 وحدات إلى الأسفل.	C	9 وحدات إلى اليمين و 5 وحدات إلى الأسفل.	D
--	---	--	---	--	---	--	---

(5) ما التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة (الأم) $f(x) = [x]$ لتمثيل الدالة $f(x) = 2[x-3] + 4$

توسع رأسي انسحاب 3 وحدات إلى اليسار انسحاب 4 وحدات للأعلى	A	تضييق رأسي انسحاب 3 وحدات إلى الأسفل انسحاب 4 وحدات إلى اليسار	B	تضييق رأسي انسحاب 3 وحدات إلى الأسفل انسحاب 4 وحدات إلى اليمين	C	توسع رأسي انسحاب 3 وحدات إلى اليمين انسحاب 4 وحدات للأعلى	D
---	---	--	---	--	---	---	---

(6) هو تحويل غير قياسي يؤدي الى تضيق (ضغط) او توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًا أو أفقيًا.

الدوران	A	الانسحاب	B	الانعكاس	D	التمدد
---------	---	----------	---	----------	---	--------

(7) احد التحويلات القياسية الذي يكون لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدد.

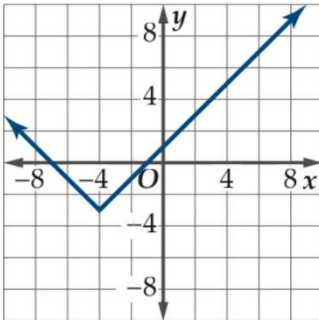
الدوران	A	الانسحاب	B	الانعكاس	D	التمدد
---------	---	----------	---	----------	---	--------

(8) الدالة الأم للدالة $f(x) = -(x+3)^3$

$f(x) = (x+3)^3$	A	$f(x) = x^2$	B	$f(x) = x^3$	C	$f(x) = -x^3$	D
------------------	---	--------------	---	--------------	---	---------------	---

(9) أي الدوال التالية يمثلها التمثيل البياني المجاور ؟

$$f(x) = \dots$$



$ x+4 + 3$	D	$ x+4 - 3$	C	$ x-4 + 3$	B	$ x-4 - 3$	A
-------------	---	-------------	---	-------------	---	-------------	---

1-6 العمليات على الدوال و تركيب الدالتين

العمليات على الدوال يمكن إجراء عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على دالتين لتكوين دالة جديدة. ويكون مجال الدالة الجديدة هو تقاطع مجالي الدالتين عدا القيم التي تجعل المقام صفرًا.

تطبيق : إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = 3x - 4$, $h(x) = -2x^2 + 1$

فأوجد الدوال التالية وحدد مجالها؟ $(f + g)(x)$, $(f - h)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{h}{f})(x)$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين:

من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

تركيب الدوال نستعمل قيمة إحدى الدالتين في تركيب الدوال لإيجاد قيمة الدالة الثانية عند تلك القيمة. إذا أعطيت الدالتان f و g ، فإنه يمكن تعريف تركيب الدالتين $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = f[g(x)]$. ويتضمن مجال $f \circ g$ كل قيم x من مجال الدالة g التي تكون عندها قيم $g(x)$ في مجال f .

إذا كانت $f(x) = 6x^2 - 4$, $g(x) = x + 2$ فأوجد $[fog](x)$, $[gof](x)$, $[fog](3)$

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2 - 1$ حدد مجال الدالة fog متضمنًا القيود الضروريّة، ثم أوجد fog

المحتوى الرياضي

تركيب الدوال عملية تركيب الدوال بشكل عام ليست إبدالية، لكن هناك بعض أزواج من الدوال يكون فيها $f(g(x)) = g(f(x))$. إذا كان $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ ، فإن كلا من f و g دالة عكسية للأخرى.

أعمال: أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما ورّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

(A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

(B) أوجد $[d \circ c](x)$ و $[c \circ d](x)$. وماذا يعني كل منهما؟

(C) أي الترتيبين $d \circ c$ أو $c \circ d$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [fog](x)$ و على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلا مما يلي:

$$h(x) = \frac{1}{x+7} \quad (1)$$

$$h(x) = \sqrt{4x+2} + 7 \quad (2)$$

اعتبر الإجابات الصحيحة فيما يلي :

1) إذا كانت $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 4x^2$ فاوجد $[fog](x)$							
$8x^3 - 12x^2$	D	$16x^2 - 48x + 36$	C	$8x^2 - 3$	B	$4x^2 + 2x - 3$	A
2) إذا كانت $f(x) = x - 3$, $g(x) = 2x - 4$ فاوجد $(f + g)(x)$							
$3x + 1$	D	$-x + 1$	C	$-x - 7$	B	$3x - 7$	A
3) إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x$ فاوجد $[fog](x)$							
$4x^2 + 1$	D	$x^2 + 4x + 4$	C	$2x^2 + 1$	B	$2x^2 + 2$	A
4) إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$ فاوجد $[fog](x)$							
$\frac{1}{x^2} + 1$	D	$\frac{1}{x^2 + 1}$	C	$\frac{1}{x^2}$	B	$x + \frac{1}{x}$	A
5) إذا كانت $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = \sqrt{x}$ فاوجد مجال الدالة $(f + g)(x)$							
$x \geq 0$	D	$x > 0$	C	$x < 0$	B	R	A
6) إذا كانت $f(x) = x^2 + 5x + 6$, $g(x) = x + 2$ فاوجد مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$							
$R - \{2\}$	D	$R - \{-2\}$	C	$x \neq 0$	B	R	A
7) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 - 4$ فاوجد مجال fog							
$x \neq \pm 3$	D	$x \neq \pm \sqrt{3}$	C	$x \neq 1$	B	R	A
8) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = x^2 - 4$ فاوجد مجال fog							
$x > 0$	D	$x \neq 0$	C	$x \neq \pm 4$	B	R	A
9) إذا كانت $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 4x - 8$ فاوجد $[fog](6)$							
35	D	29	C	16	B	19	A
10) إذا كانت $[fog](x) = 4x + 8 - 9$ فإن							
$f(x) = 4x - 9$ $g(x) = x + 8$	D	$f(x) = x - 8$ $g(x) = 4x + 9$	C	$f(x) = x - 9$ $g(x) = 4x + 8$	B	$f(x) = 4x - 9$ $g(x) = x + 8$	A
11) إذا كانت $h(x) = 2(x - 5)^2$, $g(x) = x^2 + 9x + 21$ فإن $h[g(x)]$							
$4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$	D	$3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$	C	$2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$	B	$x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$	A
12) إذا كان $f(2) = 3$, $g(3) = 2$, $f(3) = 4$, $g(2) = 5$ فما قيمة $[fog](3)$							
5	D	4	C	3	B	2	A
13) إذا كانت $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x + 7$ فإن $(f - g)(x)$							
$x^3 - x + 8$	D	$x^3 + x + 6$	C	$x^3 + x + 8$	B	$x^3 - x - 8$	A
14) إذا كانت $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x + 7$ فإن $(f \cdot g)(x)$							
$x^4 - 7x^3 + 2x - 7$	D	$x^4 + 4x^3 - x + 1$	C	$x^4 + 7x^3 - x - 7$	B	$x^4 - 7x^3 - x + 7$	A
15) إذا كانت $f(x) = x - 6$, $g(x) = x^2 - 36$ فإن $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$							
$\frac{1}{x - 6}$	D	$\frac{1}{x + 6}$	C	$\frac{1}{x^2 + 36}$	B	$\frac{1}{x + 5}$	A

7-1 العلاقات و الدوال العكسية

العلاقة العكسية

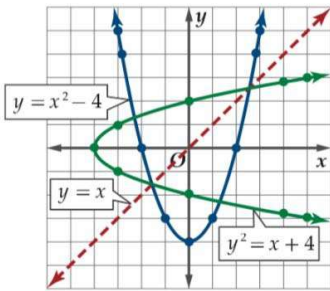
$$y^2 = x + 4 \text{ أو } x = y^2 - 4$$

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3

العلاقة

$$y = x^2 - 4$$

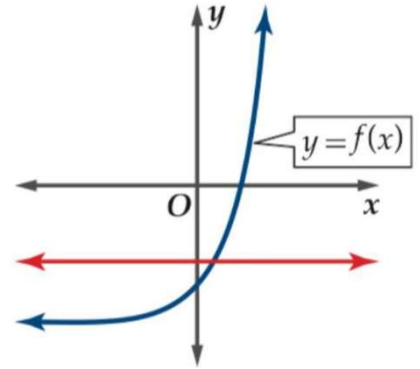
x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



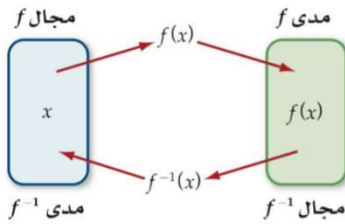
الدوال العكسية والدوال المتبادلة تكون كل من العلاقات A, B علاقة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجوداً في إحداها فإن الزوج المرتب (a, b) يكون موجوداً في الأخرى. ويُرمز للدالة العكسية للدالة f بالرمز $f^{-1}(x)$.

يوجد للدالة دالة عكسية إذا وفقط إذا قطع أي مستقيم أفقي منحنى الدالة في نقطة واحدة على الأكثر، وهذا يُعرف باختبار الخط الأفقي. وإذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي، فتكون دالة متبادلة؛ لأن x ترتبط بقيمة واحدة فقط من y .

اختبار الخط الأفقي



إيجاد الدوال العكسية : لإيجاد الدالة العكسية جبرياً، اتبع ما يلي :



الخطوة 1: استعمل اختبار الخط الأفقي للتأكد من وجود دالة عكسية.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$ ، ثم بدّل بين الرمز x و y .

الخطوة 3: حُلّ بالنسبة إلى y ، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4: ضع قيوداً على المجال إن وجدت.

يمكنك التحقق من صحة حلك بإثبات أن $f[f^{-1}(x)] = x$ و $f^{-1}[f(x)] = x$ ، بمعنى آخر، أن يعطي التركيب الناتج عن الدالة وعكسها الدالة المحايدة دائماً.

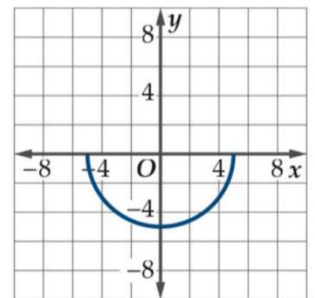
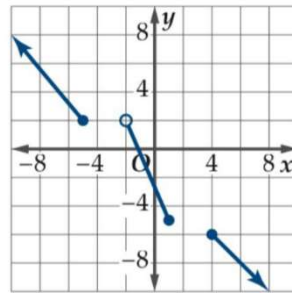
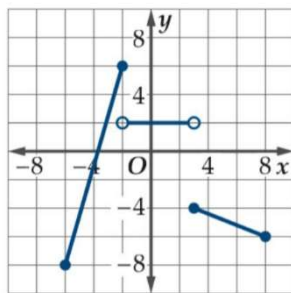
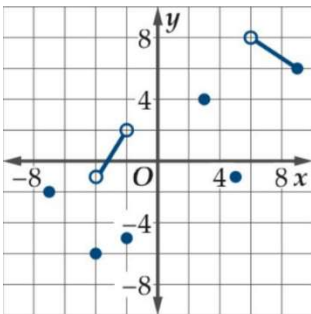
إذا أعطيت منحنى دالة، فإنه يمكنك تمثيل دالتها العكسية بيانياً بتحديد نقاط على منحنى $f(x)$ ، ثم تحديد صورها بالانعكاس حول المحور $y = x$. غير موقعي الإحداثيين x, y ، ثم صل النقاط بمستقيم أو منحنى أملس.

قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس:

يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.

حدد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كل مما يأتي أم لا ؟



اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1 (أي الدوال الآتية تمثل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x-5}{2}$)

A	$g(x) = \frac{2x+5}{3}$	B	$g(x) = \frac{3x+5}{2}$	C	$g(x) = 2x+5$	D	$g(x) = \frac{2x-5}{3}$
---	-------------------------	---	-------------------------	---	---------------	---	-------------------------

2 (أي الدوال الآتية لها دالة عكسية ؟)

A	$f(x) = x^2 - 1$	B	$f(x) = x^3 - 2x$	C	$f(x) = \sqrt{x+4}$	D	$f(x) = -1$
---	------------------	---	-------------------	---	---------------------	---	-------------

3 (منحنى الدالة تحقق اختبار الخط الأفقي دائما .)

A	المتباينة	B	العكسية	C	الثابتة	D	لا شيء مما ذكر
---	-----------	---	---------	---	---------	---	----------------

4 (أي الدوال الآتية تمثل الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x + 9$)

A	$f^{-1}(x) = -2x - 9$	B	$f^{-1}(x) = -9 - 2x$	C	$f^{-1}(x) = \frac{x-9}{2}$	D	$f^{-1}(x) = \frac{9-x}{2}$
---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------

5 (أي الدوال الآتية تمثل الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$)

A	$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2$	B	$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 3$	C	$f^{-1}(x) = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2$	D	$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 3$
---	--	---	---------------------------------------	---	--	---	---------------------------------------

في كل مما يأتي اوجد الدالة العكسية f^{-1} ان أمكن ، و حدد مجاها و القيود عليا ، و اذا لم يكن ذلك ممكنا فاكتب (غير موجودة)

$f(x) = \frac{x-6}{x}$	$f(x) = \sqrt{x+8}$	$f(x) = 4x^5 - 8x^4$	$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
------------------------	---------------------	----------------------	------------------------

اثبت جبريا ان كلا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي :

$f(x) = x^2 + 10, x \geq 0$ $g(x) = \sqrt{x-10}$	$f(x) = 18 - 3x$ $g(x) = 6 - \frac{x}{3}$	$f(x) = 2x + 3$ $g(x) = \frac{x-3}{2}$	$f(x) = 4x + 9$ $g(x) = \frac{x-9}{4}$
---	--	---	---

كهربائي : إذا كان المبلغ الذي يتقاضاه كهربائي يعبر عنه بالدالة $f(x) = 60 + 55x$, حيث x عدد ساعات العمل .

اوجد الدالة العكسية للدالة المعطاة.	ماذا يمثل x في الدالة العكسية؟	إذا تقاضى الكهربائي 255 ريالاً ، فكم ساعة عمل ؟
-------------------------------------	----------------------------------	---