الباب الأول ريض٦
الدرس الثاني
المتجهات في المستوى الإحداثي

إعداد/ عواطف الجهني

Math5byAwatef @Awatef_johani

المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

فيما سبق

فيما سبق
درست العمليات على
المتجهات باستعمال مقياس
الرسم . (الدرس 1-
1)

والآن

أجري العمليات على
المتجهات في المستوى
الإحداثي، وأملها بيانا.
: أكتب المتجه باستعمال
متجهي الوحدة.
المفردات

المفردات

الصورة الإحداثية
component form
متجه الوحدة
unit vector
متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors
توافق خطي
linear combination

لماذا؟

تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

اسئلة التعزيز

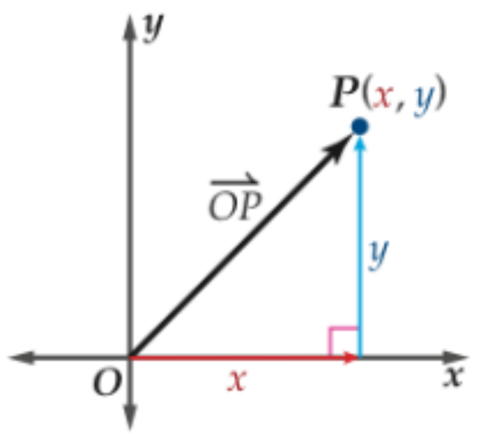
١/كيف تؤثر الرياح العكسية في سرعة الطائرة؟

٢/كيف تؤثر الرياح في إتجاه الطائرة وسرعتها؟

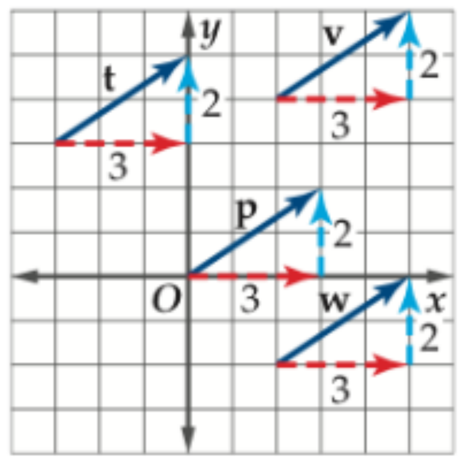
٣/مانوع الرياح التى تؤثر في إتجاه حركة الطائرة؟

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-1 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 1.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَّي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y\rangle$ ، حيث إن x, y هما المركبتان المتعامدتان لـِ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 1.2.1



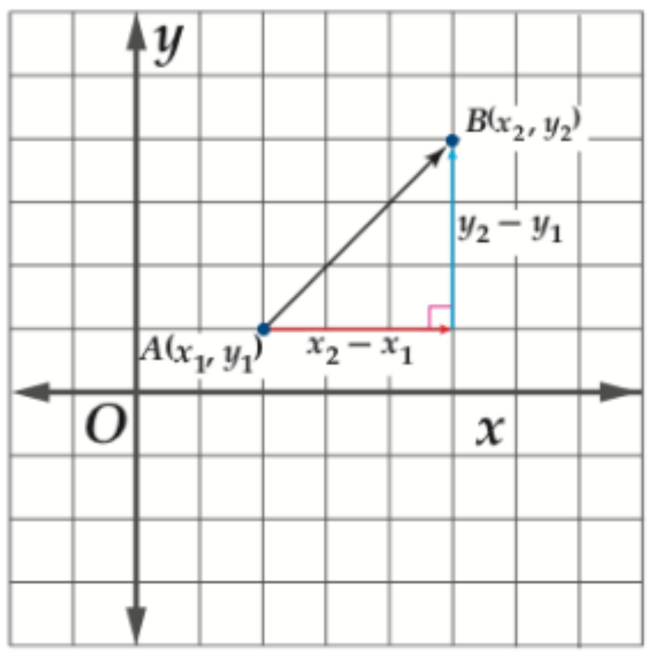
الشكل 1.2.2

موقع تفاعلي

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات **p, t, v, w** في الشكل 1.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2\rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسومٍ في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيي نقطتَي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي

الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ **1B)** $A(0, 8), B(-9, -3)$

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

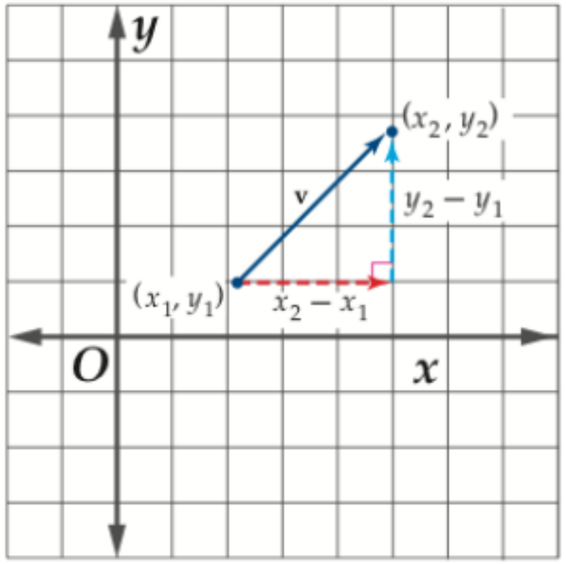
مفهوم أساسي **طول المتجه في المستوى الإحداثي**

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ،
فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

(2A $A(-2, -7), B(6, 1)$

(2B $A(0, 8), B(-9, -3)$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (المثالان 1, 2)

(3 $A(10, -2), B(3, -5)$

(4 $A(-2, 6), B(1, 10)$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي **العمليات على المتجهات**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

3A) $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$

3B) $-3\mathbf{c}$

3C) $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

جمع المتجهات
اضغط

إذا كان: $\mathbf{h} = \langle -6,2 \rangle$, $\mathbf{g} = \langle -3, -5 \rangle$, $\mathbf{f} = \langle 8,0 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4h - g$

8) $f + 2h$

9) $2f + g - 3h$

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = \mathbf{u}\ |\mathbf{v}|$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عددٍ حقيقيٍّ.

إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطى

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

(4A $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

(4B $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه **v** نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي:

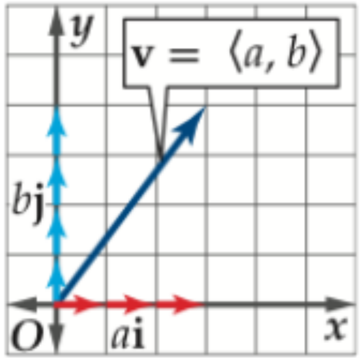
13) $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$

14) $\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle$

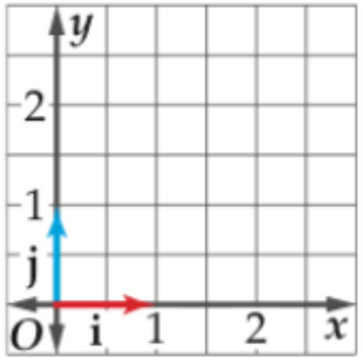
أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه **v** نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $\mathbf{v} = \langle -8, -5 \rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.4



الشكل 1.2.3

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4 ؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$	أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين
$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$	$\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$, $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$

تنبيه!

متجه الوحدة i

لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ ، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍّ داكن غير مائل $\mathbf{i}$ ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍّ غير داكن مائل i .

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

صورتان لنفس المتجه

الصورة الإحداثية

$$\langle 6, 2\rangle$$

صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

$$6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

(5A $D(-6, 0), E(2, 5)$

(5B $D(-3, -8), E(7, 1)$

الصورة الإحداثية

صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

الصورة الإحداثية

صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي على صورة توافقٍ خطِّي لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5)

19) $D(4, -1), E(5, -7)$

الصورة الإحداثية

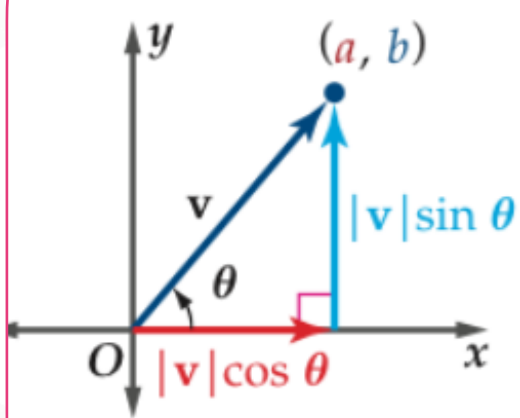
صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

20) $D(9, -6), E(-7, 2)$

صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

الصورة الإحداثية

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 1.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



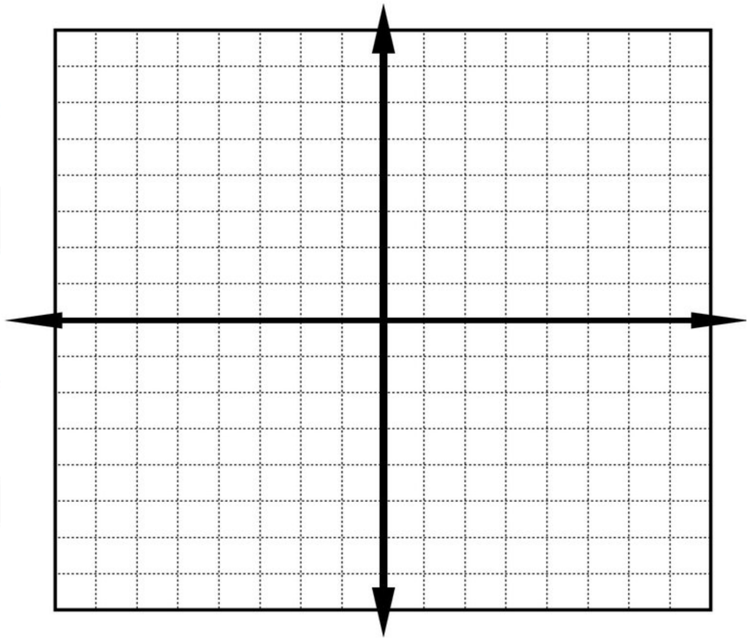
الشكل 1.2.5

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$	عوِّض
$= \lvert\mathbf{v}\rvert (\cos\theta)\,\mathbf{i} + \lvert\mathbf{v}\rvert (\sin\theta)\,\mathbf{j}$	توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممّا يأتي :

(6A $|\mathbf{v}| = 8,\ \theta = 45^\circ$

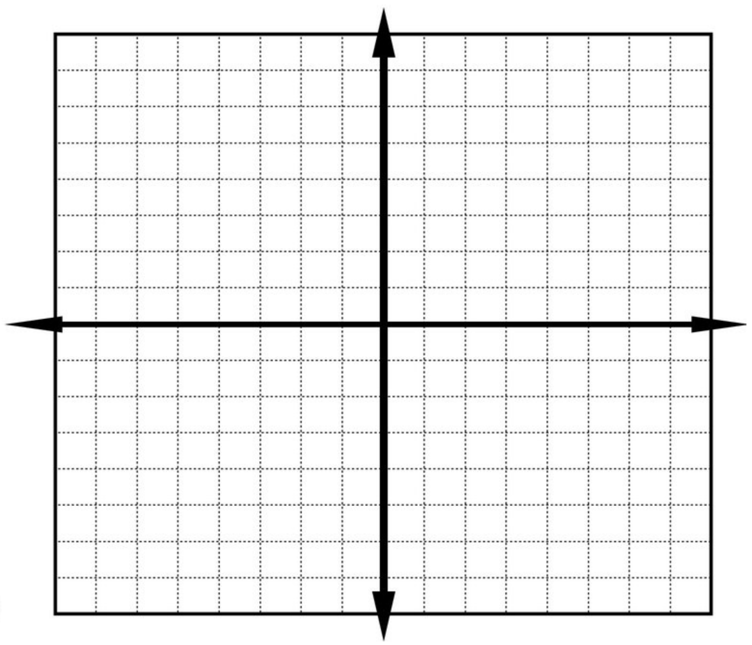


التحقق

إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

6B) $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

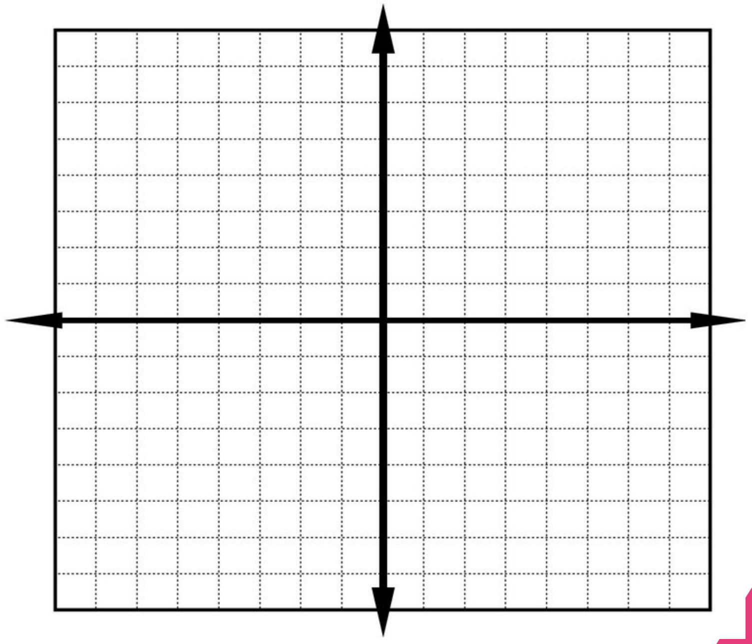


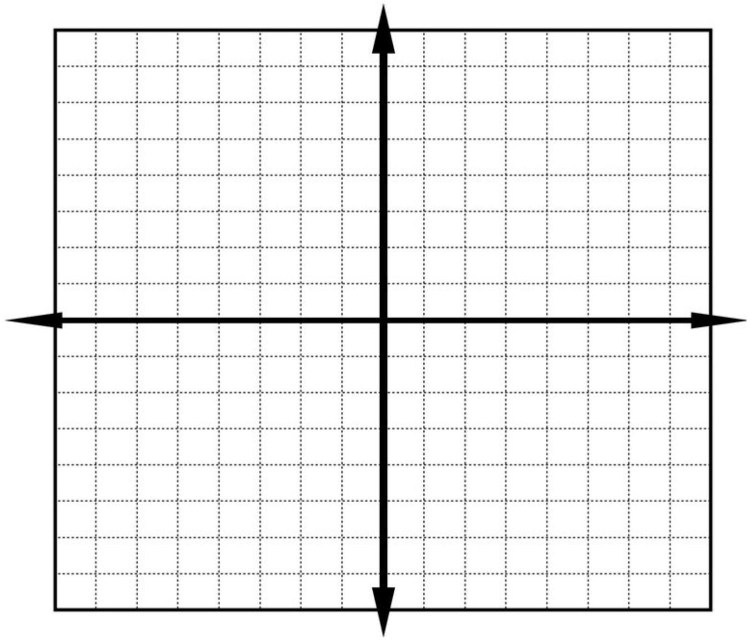
التحقق

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممّا يأتي :

(25 $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

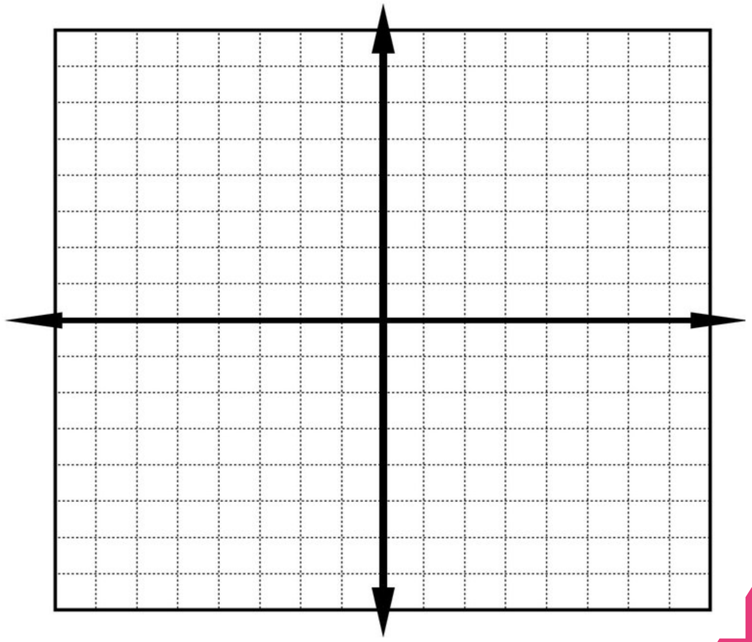
(26 $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$



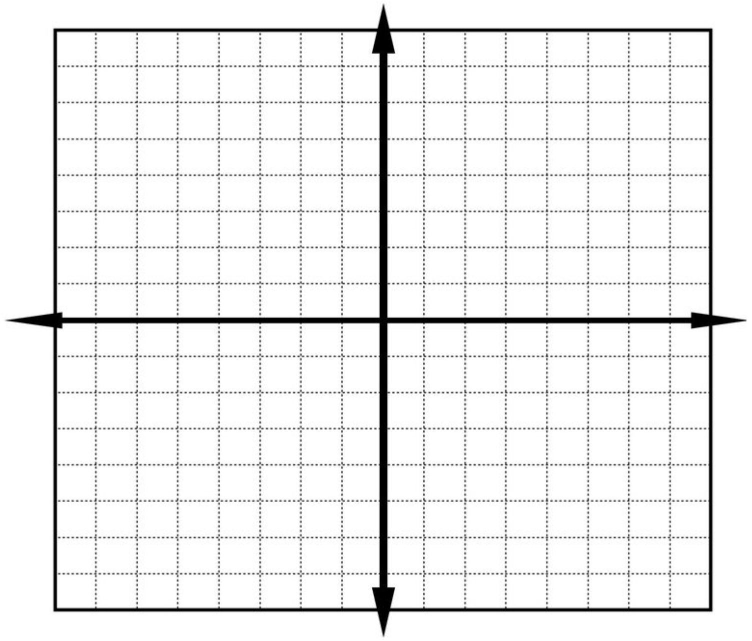


أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممّا يأتي :

27) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135^\circ$

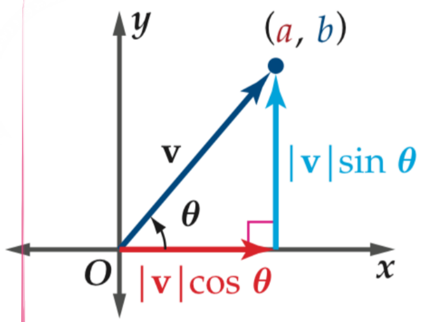


28) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125^\circ$



زوايا الاتجاه للمتجهات

من الشكل (1.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.



الشكل 1.2.5

تنبيه!

لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:

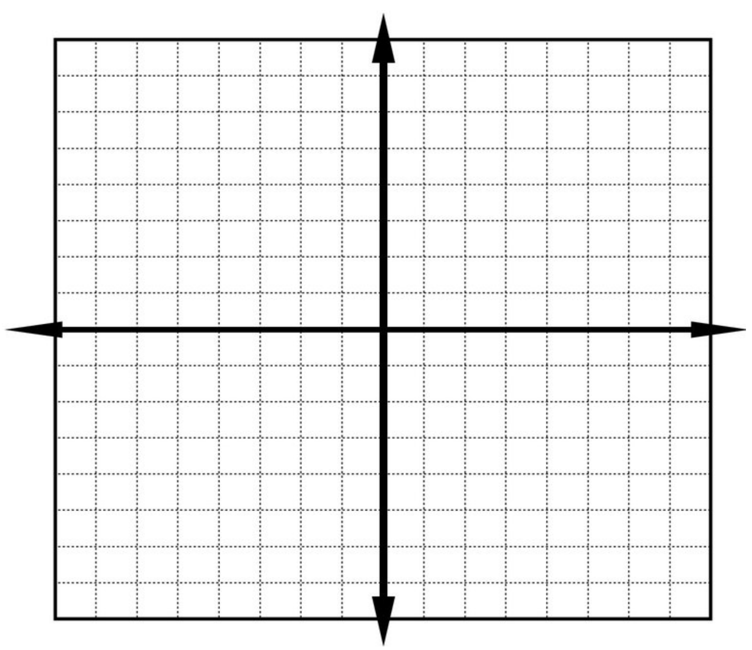
$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$

فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبة فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبةً، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

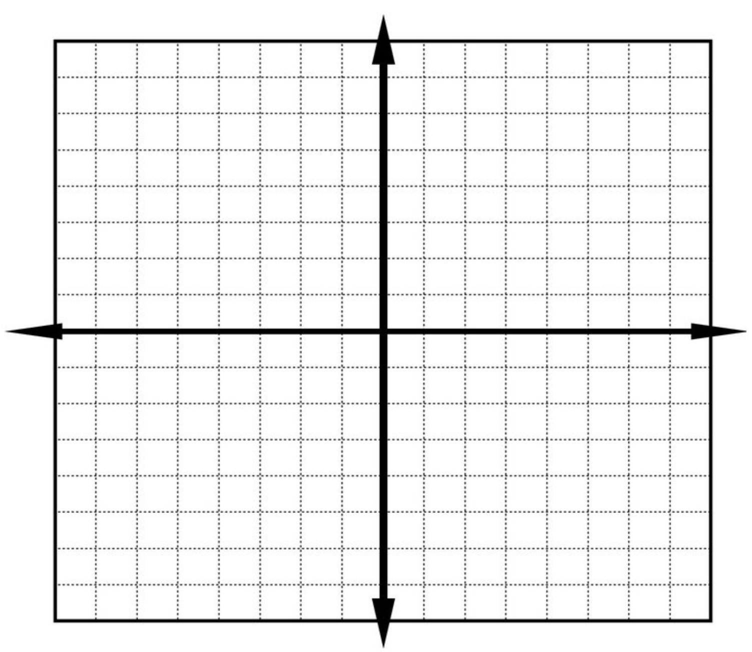
زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

(7A $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



(7B $\langle -3, -8 \rangle$

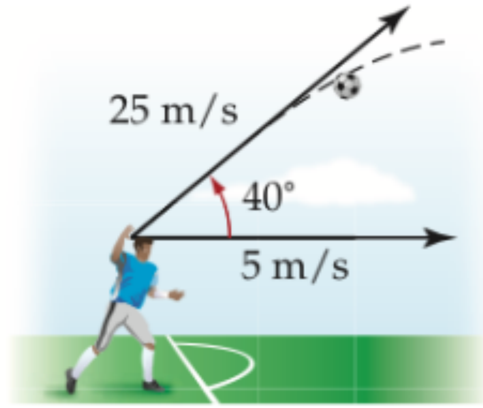


أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x : (مثال 7)

29) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

32) $\langle -5, 9 \rangle$

تطبيق العمليات على المتجهات



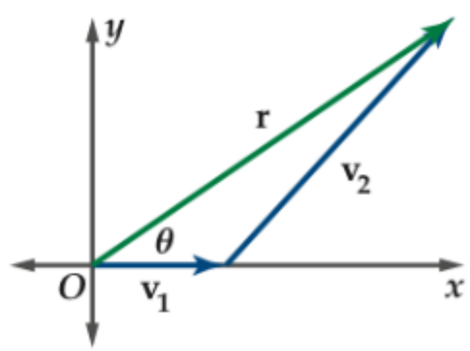
كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية °40 مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v_1}$ هي $\langle 5, 0\rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v_2}$ هي:

$$\mathbf{v_2} = \langle |\mathbf{v_2}| \cos\theta, |\mathbf{v_2}| \sin\theta \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية للمتجه } \mathbf{v_2}$$

$$= \langle 25\cos 40°, 25 \sin 40° \rangle \quad |\mathbf{v_2}| = 25 ,\ \theta = 40°$$

$$\approx \langle 19.2, 16.1 \rangle \quad \text{بسّط}$$



اجمع المتجهين $\mathbf{v_1}$ ، $\mathbf{v_2}$ جبريًا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \quad \text{متجه المحصلة}$$

$$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle \quad \text{عوّض}$$

$$= \langle 24.2, 16.1\rangle \quad \text{اجمع}$$

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

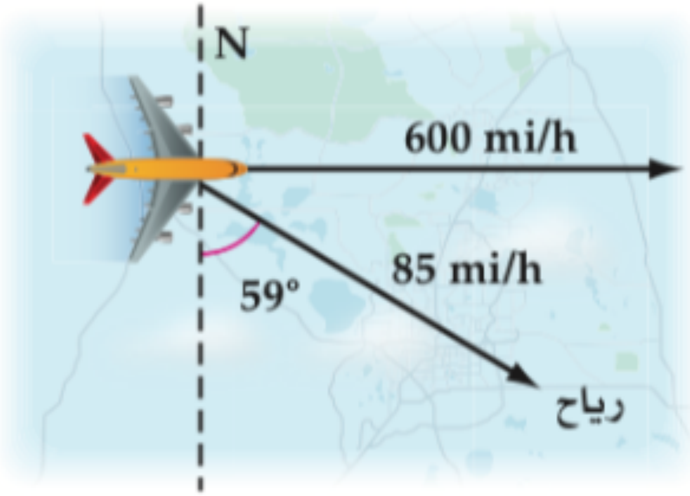
$$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2} \quad \tan\theta = \frac{b}{a} \text{ ، حيث } \langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6° \quad \text{حُل بالنسبة إلى } \theta$$

أي أن محصلة سرعة الكرة هي 29.1 m/s تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها °33.6 مع الأفقي تقريبًا.

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7 m/s$

33) **ملاحة جوية :** تطير طائرة جهة الشرق بسرعةٍ مقدارها 600 mi/h ، وتهب الرياح بسرعةٍ مقدارها 85 mi/h باتجاه S 59° E . (مثال 8)



a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة.

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

43) **تبرير:** إذا كان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متجهين متوازيين، فعبِّر عن كلٍّ من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيِّنًا العلاقة بين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

44) **تبرير:** إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثِّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيَّنًا).

45) **تحدّ:** إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y\rangle$ هي $(4y)^\circ$ ، فأوجد قيمة x بدلالة y .

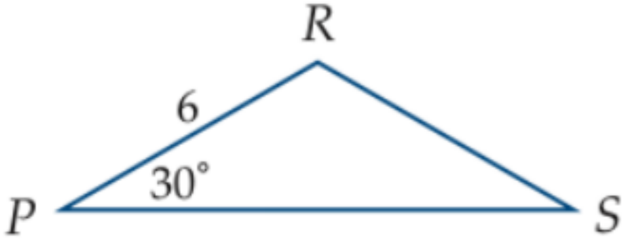
تدريب على اختبار

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-4, -3)$ ؟

A $\sqrt{2}$ **C** $\sqrt{82}$

B $\sqrt{26}$ **D** $\sqrt{106}$

56) ما مساحة المثلث المجاور،
إذا علمت أن $PR = RS$ ؟



A $9\sqrt{2}$ **B** $9\sqrt{3}$ **C** $18\sqrt{2}$ **D** $18\sqrt{3}$

الواجب

1-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

1) $A(2, 4), B(-1, 3)$
2) $A(4, -2), B(5, -5)$
3) $A(-3, -6), B(8, -1)$

إذا كان $\mathbf{w} = \langle -3, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

4) $3\mathbf{v}$
5) $\mathbf{w} - 2\mathbf{v}$
6) $4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$
7) $5\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$

أوجد متجه وحدة **u** له اتجاه **v** نفسه في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{v} = \langle -3, 6\rangle$
9) $\mathbf{v} = \langle -8, -2\rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة **i** , **j** في كلٍّ مما يأتي:

10) $D(4, -5), E(6, -7)$
11) $D(-4, 3), E(5, -2)$
12) $D(4, 6), E(-5, -2)$
13) $D(2, 1), E(3, 7)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور الأفقي في كلٍّ مما يأتي:

14) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 42°$
15) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 132°$

16) **بستنة:** يقوم علي ومحمد بدفع حجر من حديقتهم. إذا كان علي يدفع الحجر بقوة مقدارها 120 N بزاوية تميل 60° عن المحور الأفقي، في حين يدفع محمد الحجر بقوة مقدارها 180 N بزاوية تميل 40° عن المحور الأفقي، فأوجد مقدار محصلة القوى الناتجة عن تأثير قوتي الدفع معًا.

إثراءات

استعمال المتجهات في توجيه طائرة

جمع المتجهات